LXXXI Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXI ММО
член-корреспондент РАН *В. Ю. Протасов*

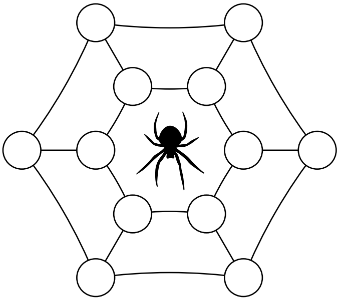
Сборник подготовили:

Е. В. Бакаев, А. В. Бегунц, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, Е. Ю. Бунькова, М. Ю. Васильев, А. С. Волостнов, М. А. Волчкевич, П. Г. Гавриленко, В. М. Гичев, Т. И. Голенищева-Кутузова, Д. В. Горяшин, М. А. Григорьев, А. С. Гусев, А. В. Доледенок, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, Т. А. Зайцев, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Л. Н. Исхаков, Т. В. Казицына, А. Я. Канель-Белов, А. Л. Канунников, Ю. С. Котельникова, О. Н. Косухин, Е. А. Кукса, А. Ю. Кушнир, Ю. С. Маркелов, А. Д. Матушкин, Н. Ю. Медведь, А. Б. Меньщиков, Г. А. Мерзон, И. В. Нетай, В. В. Новиков, А. Е. Панкратьев, А. А. Полянский, А. А. Пономарев, Л. А. Попов, А. М. Райгородский, И. В. Раскина, П. П. Рябов, Р. С. Садыков, Е. Ю. Смирнов, А. А. Соколов, Л. Э. Шабанов, Ю. В. Тихонов, А. С. Трепалин, Б. Р. Френкин, Ю. В. Чеканов, Г. Р. Челноков, А. В. Шаповалов, И. А. Шейпак, Д. Э. Шноль, А. С. Штерн, М. А. Хачатурян, А. В. Хачатурян, И. В. Ященко

Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. Паук сплёл паутину, и во все её 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паутины ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К). (*А. В. Шаповалов*)



2. Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что:

ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ

Докажите, что Незнайка что-то перепутал. (*Е. В. Бакаев*)

3. Автобусная остановка B расположена на прямолинейном шоссе между остановками A и C. Через некоторое время после выезда из A автобус оказался в такой точке шоссе, что расстояние от неё до одной из трёх остановок равно сумме расстояний до двух других. Ещё через такое же время автобус снова оказался в точке с таким свойством, а ещё через 25 минут доехал до B. Сколько времени требуется автобусу на весь путь от A до C, если его скорость постоянна, а на остановке B он стоит 5 минут? (*А. В. Хачатурян*)

4. Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа?

б) А хотя бы на два вопроса? (*М. А. Евдокимов*)

5. Шесть математиков пошли на рыбалку. Вместе они наловили 100 рыб, причём все поймали разное количество. После рыбалки они заметили, что любой из них мог бы раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у остальных пятерых стало поровну рыб. Докажите, что один рыбак может уйти домой со своим уловом и при этом снова каждый оставшийся сможет раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у них получилось поровну.

(*А. В. Шаповалов*)

6. Разрежьте квадрат 9×9 клеток по линиям сетки на три фигуры равной площади так, чтобы периметр одной из частей оказался равным сумме периметров двух других.

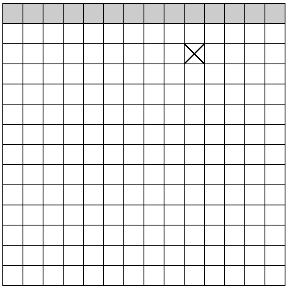
(*М. А. Евдокимов*)

7 класс

1. В разноцветной семейке было поровну белых, синих и полосатых детей-осьминожков. Когда несколько синих осьминожков стали полосатыми, папа решил посчитать детей. Синих и белых вместе взятых оказалось 10, зато белых и полосатых вместе взятых — 18. Сколько детей в разноцветной семейке? (*И. В. Раскина*)

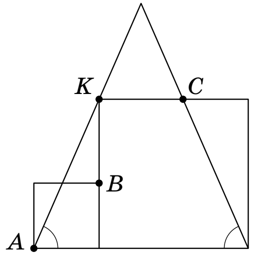
2. Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее. (*А. В. Шаповалов*)

3. Все клетки верхнего ряда квадрата 14×14 заполнены водой, а в одной клетке лежит мешок с песком (см. рис.). За один ход Вася может положить мешки с песком в любые 3 не занятые водой клетки, после чего вода заполняет



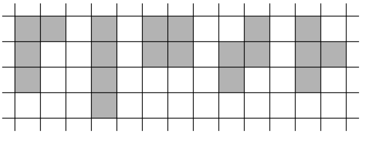
каждую из тех клеток, которые граничат с водой (по стороне), если в этой клетке нет мешка с песком. Ходы продолжаются, пока вода может заполнять новые клетки. Как действовать Васе, чтобы в итоге вода заполнила как можно меньше клеток? (*И. В. Ященко*)

4. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. (*М. А. Евдокимов*)



5. Фигурки из четырёх клеток называются тетрамино. Они бывают пяти видов (см. рис.). Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

(*Ю. С. Маркелов, ученик 8 класса*)



6. Робин Гуд взял в плен семерых богачей и потребовал выкуп. Слуга каждого богача принёс кошелёк с золотом, и все они выстроились в очередь перед шатром, чтобы отдать выкуп. Каждый заходящий в шатер слуга кладёт принесённый им кошелёк на стол в центре шатра и, если такого или большего по тяжести кошелька ранее никто не приносил, богача отпускают вместе со слугой. Иначе слуге велят принести ещё один кошелёк, который был бы тяжелее всех, лежащих в этот момент на столе. Сходив за очередным кошельком, слуга становится в конец очереди. Походы за кошельками занимают у всех одинаковое время, поэтому очерёдность захода в шатёр не сбивается. Когда Робин Гуд отпустил всех пленников, у него на столе оказалось: а) 28; б) 27 кошельков. Каким по счёту стоял в исходной очереди слуга богача, которого отпустили последним?

(*М. А. Хачатурян*)

8 класс

1. Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a, b и c, что числа $a+b+c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел? (*Л. А. Попов*)

2. В строку выписано 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.) (*Б. Р. Френкин*)

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K. Точка M — середина BC, точка P — середина KM. Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, то $AK = DK$. (*Е.В.Бакаев*)

4. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки. (*Е. В. Бакаев*)

5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a\,?\,b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$. (*Н. Белухов*)

6. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний. (*О. Н. Косухин*)

9 класс

1. В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (*Б. Р. Френкин*)

2. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырех треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины? (*А. В. Шаповалов*)

3. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1$, у уравнения

$$\left[\frac{n}{a_1}\right] + \left[\frac{n}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a_k}\right] = n$$

не больше чем $a_1a_2\ldots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.) (*М. А. Григорьев*)

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P, отличная от A и D. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P. (*А. В. Доледенок*)

5. Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

(*М. А. Берштейн, П. Г. Гавриленко*)

6. На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из них знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют «кружок», если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не будут сидеть все представители какого-либо «кружка». (*А. М. Райгородский*)

10 класс

1. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»? (*А. Я. Канель-Белов*)

2. В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные — в чёрный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10, все клетки которого белые, и квадрат 10×10, все клетки которого чёрные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10, в котором количество чёрных и белых клеток отличается не больше чем на d? (*Е. В. Бакаев*)

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB. (*Е. В. Бакаев*)

4. Назовём расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных m и n существует хорошая расстановка? (*М. А. Берштейн, П. Г. Гавриленко*)

5. Карлсон ест треугольный торт. Он режет торт по биссектрисе одного из углов, съедает одну из частей, а с другой повторяет ту же операцию. Если Карлсон съест больше половины торта, он станет не в меру упитанным мужчиной в самом расцвете сил. Докажите, что рано или поздно это произойдёт. (*П. П. Рябов*)

6. Докажите, что количество способов разрезать квадрат 999×999 на уголки из трёх клеток делится на 2^7.

(*Ю. В. Чеканов*)

11 класс (1-й день)

1. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

(*П. А. Бородин*)

2. Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

(*М. А. Евдокимов*)

3. Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство

а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;

б) $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

(*П. А. Бородин, Д. В. Горяшин*)

4. Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

(*В. М. Гичев*)

5. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

(*О. Н. Косухин*)

6. В доме из 2^n комнат сделали евроремонт. При этом выключатели света оказались перепутанными, так что при включении выключателя в одной комнате загорается лампочка, вообще говоря, в какой-то другой комнате. Чтобы узнать, какой выключатель к какой комнате подсоединён, прораб посылает несколько людей в какие-то комнаты, чтобы те, одновременно включив там выключатели, вернулись и сообщили ему, горела лампочка в их комнате или нет.

а) Докажите, что за $2n$ таких посылок прораб может установить соответствие между выключателями и комнатами.

б) А может ли он обойтись $2n-1$ такими посылками?

(*П. А. Бородин, А. Л. Канунников*)

11 класс (2-й день)

1. Решите уравнение

$$x^3+(\log_2 5+\log_3 2+\log_5 3)x=(\log_2 3+\log_3 5+\log_5 2)x^2+1.$$

(*П. А. Бородин*)

2. На доску 2018×2018 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т. е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 4×1. Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски? (*М. А. Евдокимов*)

3. Пусть x и y — пятизначные числа, в десятичной записи которых использованы все десять цифр ровно по одному разу. Найдите наибольшее возможное значение x, если $\operatorname{tg} x^\circ - \operatorname{tg} y^\circ = 1 + \operatorname{tg} x^\circ \operatorname{tg} y^\circ$ (x° обозначает угол в x градусов). (*И. А. Шейпак*)

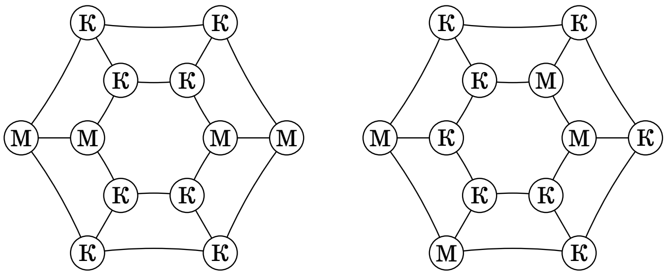
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность, описанная вокруг треугольника A_1BC_1, проходит через точку M пересечения медиан. Найдите все возможные значения величины угла B.

(*М. А. Евдокимов*)

5. Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью. (*П. А. Бородин*)

6 класс

1. *Ответ.* На рисунке показаны два варианта расположения мух и комаров.



Комментарий. Перебором можно убедиться, что возможны только приведённые примеры (с точностью до поворотов паутины). Интересно, что можно, не опираясь на рисунок, показать, что комаров всегда 8. В самом деле, насекомых 12, у каждого по два соседа-комара, то есть комаров 24. Но каждого комара мы посчитали трижды, так как он для трёх насекомых является соседом. Значит, комаров на самом деле $24:3=8$. А мух тогда 4.

2. *Решение.* Если посмотреть на пятое и шестое числа, видно, что М $<$ Й, а если на второе и третье — что Й $<$ Х. Значит, М $<$ Х. Но самое маленькое число начинается с Х, самое большое — с М, так что М $>$ Х. Значит, у Незнайки какая-то ошибка.

3. *Ответ.* 3 часа.

Решение. В оба момента времени, о которых идёт речь в задаче, суммой будет, очевидно, расстояние от автобуса до самой дальней от него остановки. Это не может быть B, так как она ближе, чем C. Значит, это были C (до того момента, как автобус проехал полпути от A до C) и A (после этого момента).

В первом случае автобус находился в точке X и расстояние от него до C равнялось сумме расстояний до A и до B. Но оно же равно сумме расстояния до B и расстояния BC. Значит, автобус проехал в точности расстояние BC. На рисунке мы отметили дугами равные расстояния.

Ко второму моменту автобус проехал ещё одно расстояние BC и оказался в точке Y. Сумма расстояний от него до B и до C равна BC и ещё YB, посчитанному дважды. По условию это и есть расстояние до A, то есть YB вдвое короче BC.

А раз YB автобус проехал за 25 минут, то BC он проедет за 50 минут, а весь путь за $3 \cdot 50 + 25 + 5 = 180$ минут, то есть за три часа.

4. *Ответ.* а) Да, на первый. б) Нет, не зная числа, этого гарантированно сделать нельзя.

Решение. а) Покажем, что написанное число чётно. Если бы оно было нечётным, то на вопросы о делимости на 2, 4, 6 и 8 Дима ответил «нет», а тогда, стало быть, на вопросы о делимости на 3, 5, 7 и 9 он ответил «да». Но если число делится на 5, 7 и 9, то оно делится на $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ и не может быть двузначным. Значит, на первый вопрос учительницы можно с уверенностью ответить утвердительно.

б) Рассмотрим три числа — 18, 40 и 56 — и запишем в табличку ответы Димы (плюс означает «да», а минус — «нет»).

	На 2	На 3	На 4	На 5	На 6	На 7	На 8	На 9
18	+	+	−	−	+	−	−	+
40	+	−	+	+	−	−	+	−
56	+	−	+	−	−	+	+	−

Мы видим, что на все вопросы, кроме первого, ответы бывают разными, так что более ни на один вопрос гарантированно дать верный ответ мы, не зная числа, не сможем.

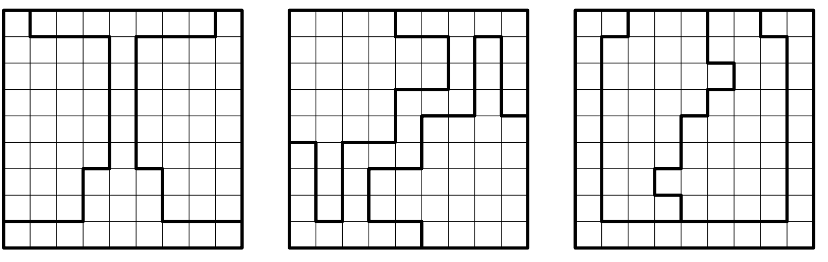
Комментарий. Покажем, как можно подобрать числа, приведённые в таблице. Пусть число делится на 8. Это значит, что оно делится также на 2 и на 4. Делиться на 3 оно не может, потому что тогда оно бы делилось ещё и на 6, а ответов «да» Дима дал ровно четыре. Значит, оно не делится на 3, не делится, стало быть, и на 9, а делится на 5 или на 7 (ровно на одно из них). То есть это 40 (или 80) либо 56.

Все три найденных числа делятся на 8 (и на 4) и не делятся на 9. Может быть, так будет всегда? Попробуем построить число, не делящееся на 8 и делящееся на 9. Оно тогда будет делиться на 3, кроме того, оно чётно, а поэтому разделится ещё и на 6. Вот уже четыре ответа «да», и мы получаем 18 (или 54).

Можно показать, что учительница могла написать одно из следующих восьми чисел: 12, 18, 30, 40, 42, 54, 56, 80.

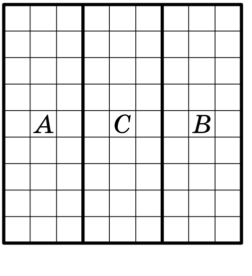
5. *Решение.* После того как один рыбак раздаст своих рыб, у остальных должно стать по $100 : 5 = 20$ рыб. Значит, каждый поймал не более 20 рыб. Пусть у рыбака Ивана ровно 20 рыб. Когда другой математик раздаёт своих рыб, Иван не получает ничего, но у всех становится поровну. Поэтому если Иван уйдёт, остальные могут раздавать по-прежнему, и у всех снова будет по 20. Осталось показать, что среди рыбаков действительно найдётся такой, который поймал ровно 20 рыб. В самом деле, если такого нет, то у рыбаков в сумме не более чем $19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 = 99 < 100$ рыб — противоречие.

6. *Ответ.* Примеры приведены на рисунках. Возможны и другие решения.



Комментарий. Покажем, как можно придумать нужное разрезание. Понятно, что в каждой фигуре должно быть $9 \cdot 9 : 3 = 27$ клеток.

Рассмотрим такое разрезание на три части A, B и C (см. рис.), когда часть C как бы разделяет части A и B.



Мы бы хотели, чтобы периметр средней части равнялся периметру двух крайних. Как этого добиться? У каждой части есть «внешний периметр» — та часть периметра, которая является границей квадрата, — и «внутренний». Заметим, что сумма внутренних периметров частей A и B всегда равна внутреннему периметру C. Значит, нам достаточно добиться того же и для внешних периметров. Общий периметр квадрата 36, значит, на часть C должно приходиться 18. Так и сделано в первых двух решениях — мы выделили два «уголка» периметром 9 в противоположных частях квадрата и нарисовали части A и B нужной площади, для красоты сделав их симметричными относительно вертикальной оси (в первом примере) и относительно центра квадрата (во втором). При этом условие на сумму периметров можно даже не проверять — оно выполнилось «автоматически».

Последний пример придуман из других соображений. Площадь и периметр фигуры связаны друг с другом, и в обычной ситуации можно сказать, что у маленькой по площади фигуры периметр мал, а у большой — велик. Но связь эта далеко не прямая, и при одной и той же площади периметр фигуры может быть разным — всё зависит от её формы. Можно доказать, что из всех фигур данной площади наименьший периметр имеет круг (и наоборот, при данном периметре круг даёт самую большую площадь). Поэтому части A и B должны быть компактными, «похожими на круг», а часть C, напротив, должна быть максимально непохожа на круг, и её логично сделать в виде длинной «колбаски» шириной в клетку. В нашем втором примере мы сначала нарисовали фигуру C (для красоты сделав её симметричной относительно вертикальной оси), а потом оставшееся поле поделили пополам. При этом сумма периметров слегка не сошлась, и пришлось от одной фигуры отделить клетку и приставить её в другом месте.

Задача о том, что максимальная площадь при данном периметре достигается на круге, имеет любопытную историю. В конце IV века до нашей эры Элисса, или Дидона, сестра Пигмалиона, царя финикийского города Тира, после смерти своего мужа была вынуждена бежать сначала на Кипр, а потом на побережье современной Ливии. Согласно легенде, она попросила у местных вождей немного земли для основания поселения для себя и своих людей. Те отказали чужестранке. Тогда Дидона пошла на хитрость — она попросила дать ей столько земли, сколько поместится в шкуру быка. Получив согласие, она велела разрезать шкуру на тончайшие ремешки и связать их в ленту длиной 22 стадия. Этой лентой она окружила целую гору на побережье. Так был основан город Карфаген, и Дидона стала его первой правительницей. А задача окружения максимальной площади линией данной длины получила название «задача Дидоны» и стала первой задачей в большом разделе современной математики, который называется вариационным исчислением. О задаче Дидоны и других задачах такого рода можно прочесть в интересной книге В. М. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (М.: МЦНМО, 2017).

7 класс

1. *Ответ.* 21.

Первое решение. Заметим, что белых осьминожков было треть от общего количества, и они не перекрашивались. Если сложить 10 и 18, то получится количество всех детей вместе, к которому прибавлено количество белых, то есть 4/3 от количества всех детей. Значит, 4/3 от количества детей в семейке равно 28, то есть всего детей 21.

Второе решение. После перекрашивания полосатых осьминожков стало на $18 - 10 = 8$ больше, чем синих. Значит, полосатыми стали $8 : 2 = 4$ синих осьминожка. Белых и «старых полосатых» было $18 - 4 = 14$, то есть по $14 : 2 = 7$ каждого цвета. А всего в разноцветной семейке $3 \cdot 7 = 21$ ребёнок.

2. *Ответ.* Например, 1, 2, 4, 8, 975 360.

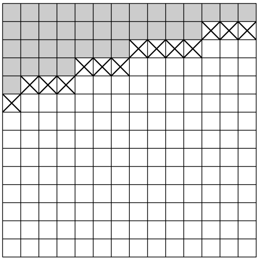
Комментарий. Легче проверять делимость, когда большинство чисел записываются 1-2 цифрами, а для этого большинство частных должны быть совсем маленькими (2, 3, ...). Начнем с самой маленькой последовательности: 1, 2, 4, 8. Делится ли оставшееся число на 8, зависит только от его трех последних цифр. Поэтому получить из оставшихся цифр число, делящееся на 8, легко — особенно если поставить на последнее место 0.

Есть много других решений: например, 9, 18, 36, 72, 504.

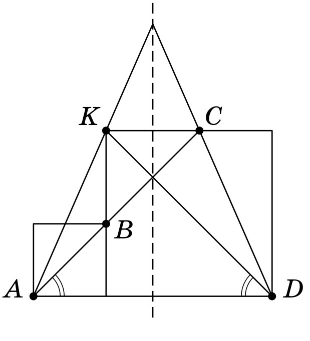
3. *Решение.* Докажем, что, как бы Вася ни действовал, вода заполнит как минимум 37 клеток.

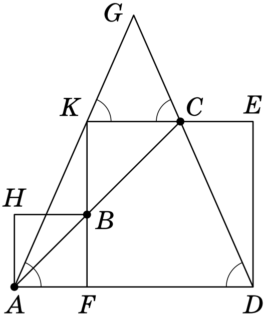
Как бы Вася ни действовал на первом ходу, после него во втором ряду окажется не больше 3 мешков, а значит, вода заполнит не менее 11 клеток во втором ряду. Как бы Вася ни действовал на втором ходу, после него в первых двух рядах окажется не больше 7 мешков, то есть останется не менее $14 - 7 = 7$ вертикалей без мешков, по которым вода стечёт на третий ряд. Аналогичным образом после третьего хода заполнятся еще хотя бы 4 клетки, после четвёртого — хотя бы 1. Всего вода заполнит не менее $14 + 11 + 7 + 4 + 1 = 37$ клеток.

Добиться того, чтобы вода заполнила ровно 37 клеток, Вася может, положив мешки, например, как на рисунке (на первом ходу Вася кладет мешки во второй ряд, на втором — в третий и т. д.).



4. *Первое решение.* У равнобедренного треугольника есть ось симметрии. При симметрии относительно этой оси K переходит в C, а D переходит в A (см. рисунок слева). Значит, AC образует тот же угол с основанием, что и диагональ квадрата KD, т. е. 45°. Но AB тоже образует с основанием угол 45°, как диагональ меньшего квадрата. Значит, точки A, B и C действительно лежат на одной прямой.

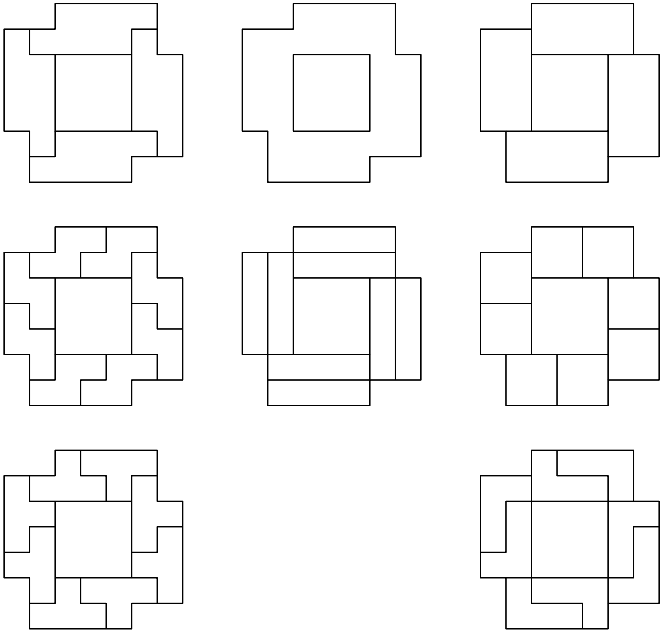




Второе решение (без использования симметрии). Введём обозначения так, как показано на рисунке справа и проведём отрезки AB и BC. Так как $\angle ABH = 45^\circ$, достаточно доказать, что $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$ (тогда $\angle ABH + \angle HBK + \angle KBC = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, что равносильно утверждению задачи).

Используя равенство соответственных углов при параллельных прямых и равнобедренность треугольника AGD, получим: $\angle GKC = \angle GAD = \angle GDA = \angle GCK$. Следовательно, $GK = GC$, поэтому $AK = CD$. Значит, равны прямоугольные треугольники AKF и CDE (по гипотенузе и катету). Следовательно, $CE = AF = BF$, тогда $BK = CK$, откуда $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$, что и требовалось.

5. *Ответ.* Да, существует (см. рисунок).



Комментарии. 1. Следить за тем, разрезается ли фигура на фигурки 5 разных видов, тяжело. Но можно заметить, что из двух квадратов можно сложить прямоугольник 2×4, который разрезается и на квадраты, и на полоски, и на L-тетраминошки. А из двух Z-тетраминошек легко сложить «параллелограмм», который разрезается также и на T-тетраминошки. Чтобы решить задачу, остаётся придумать фигуру, которую можно составить как из прямоугольников 2×4, так и из таких параллелограммов.

2. В примере выше фигура не является многоугольником, в ней есть дырка. Существуют ли фигуры с требуемым свойством без дырок, жюри неизвестно.

6. *Ответ.* а) Седьмым; б) шестым или седьмым.

Решение. Если слуга принёс новый кошелёк, а с тех пор как он был в прошлый раз в шатре, никого не отпускали, то его точно ждёт удача (его кошелёк самый тяжёлый и на этот раз его хозяина отпустят). То есть если в плену было N богачей и одного только что отпустили, то дальше может произойти не более $N-1$ неудачи подряд.

а) Если в начале было семь богачей, то первого отпустят сразу, дальше будет не более 6 неудач, потом удача и не более 5 неудач и т. д. — и всего Робин Гуд получит не более $(1+6)+(1+5)+(1+4)+(1+3)+(1+2)+(1+1)+1=$ $=28$ кошельков. И ровно 28 кошельков он получит, только если на первом круге неудача постигла всех, кроме первого, потом всех, кроме второго и т. д. А последним положит кошелёк седьмой слуга.

б) Если Робин Гуд получил в итоге не 28, а 27 кошельков, то ровно один промежуток неудач должен оказаться на 1 короче максимального. Тогда он закончится не после перехода на следующий круг, а на один шаг раньше, и на этом круге кроме слуги с наименьшим номером повезёт ещё и седьмому слуге.

Если это произошло на последнем круге, когда все остальные слуги уже ушли, то седьмой слуга и положит последний кошелёк. А если какие-то слуги ещё остались, когда седьмому слуге выпала удача вне очереди, то оставшиеся продолжат уходить по очереди, как в предыдущем пункте. И последний кошелёк положит последний из оставшихся — шестой слуга.

8 класс

1. *Ответ.* Да.

Например, $a=1$, $b=3$, $c=12$: $1+3+12=4^2$, $1\cdot 3\cdot 12=6^2$.

Комментарий. Существует и множество других таких троек. Например, если взять произвольную пифагорову тройку $u^2+v^2=$ $=w^2$, то подходят числа $a=u^4$, $b=v^2u^2$, $c=w^2v^2$.

2. *Ответ.* Знак положительный.

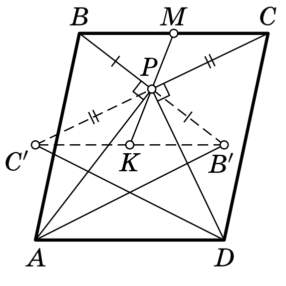
Решение. Докажем, что на нечетных местах стоят отрицательные числа, а на четных — положительные. Тогда произведение всех чисел будет отрицательным, поскольку перемножаем 20 отрицательное число и 19 положительных чисел.

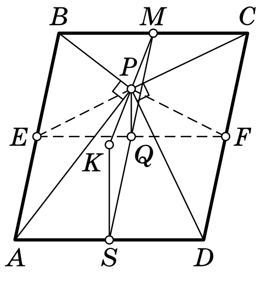
Пусть выписаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{39}$. Заметим, что если выкинуть произвольное число a_{2k+1} с нечетным номером, то остальные разбиваются на пары соседних:

$$\{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_{2k-1}, a_{2k}\}, \{a_{2k+2}, a_{2k+3}\}, \ldots, \{a_{38}, a_{39}\}.$$

Значит, сумма всех остальных чисел положительная, но с добавлением a_{2k+1} она становится отрицательной, т. е. $a_{2k+1} < 0$. Поскольку $a_{2k} + a_{2k+1} > 0$, то $a_{2k} > 0$. Наше утверждение доказано.

3. *Первое решение*. Удвоим отрезки BP и CP за точку P, то есть отметим точки B' и C' такие, что P является серединой отрезков BB' и CC' (см. рис. слева). Ясно, что K — середина $B'C'$. Кроме того, $B'C' = BC$, а потому $AC'B'D$ — параллелограмм. Достаточно доказать, что $AC'B'D$ — прямоугольник, тогда утверждение задачи будет следовать из равенства прямоугольных треугольников $AC'K$ и $DB'K$.





Заметим, что в треугольнике ABB' отрезок AP является медианой и высотой. Это означает, что треугольник равнобедренный и $AB' = AB$. Аналогично, рассматривая треугольник DCC', получаем $DC' = DC$.

Но $AB = DC$, так как это противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $AB' = DC'$. Получается, что в параллелограмме $AC'B'D$ диагонали равны между собой. Тогда это прямоугольник, откуда следует искомое утверждение.

Второе решение. Отметим середины E и F отрезков AB и CD и середины Q и S отрезков EF и AD (см. рис. справа). Заметим, что $PE = AB/2$ и $PF = DC/2$ из свойства медиан, проведенных к гипотенузам в прямоугольных треугольниках APB и CPD. Но так как $AB = DC$, получаем, что $PE = PF$. Отсюда следует, что треугольник EPF равнобедренный, и его медиана PQ перпендикулярна EF, а значит, и AD.

С другой стороны, Q является серединой MS, так как средние линии параллелограмма делят его на четыре равные части. Получаем, что отрезок PQ — средняя линия треугольника MKS, параллельная стороне KS. Тогда KS тоже перпендикулярен AD. Это означает, что в треугольнике AKD совпала медиана и высота, то есть он равнобедренный, откуда и следует требуемое.

Установить, что $PQ \perp EF$, можно и другим образом: из данных в условии прямых углов следует, что точка P лежит на окружностях с диаметрами AB и CD. Центрами этих окружностей являются точки E и F, а их радиусы равны. Поэтому отрезок, соединяющий их точки пересечения (одна из которых и есть P), перпендикулярен отрезку EF и делит его пополам.

4. *Первое решение.* Обозначим через a_1, a_2, ..., a_{15} числа месяца, в которые были солнечные дни. Тогда Андрей Степанович за дни с 1-го числа по a_1-е не выпьет ни одной капли, за дни с a_1-го числа до a_2-го (a_1-е включительно, a_2-е не включительно) будет пить по одной капле и т. д. Итого он выпьет

$$1 \cdot (a_2 - a_1) + 2 \cdot (a_3 - a_2) + \ldots \\ \ldots + 14 \cdot (a_{15} - a_{14}) + 15 \cdot (30 - a_{15} + 1) = \\ = 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}).$$

Иван Петрович же выпьет количество капель, равное сумме номеров всех дней, кроме a_i:

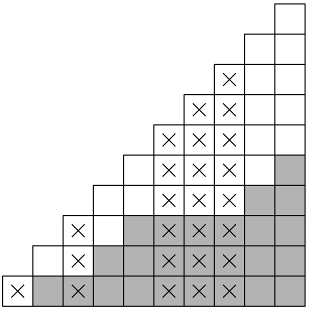
$$(1 + 2 + \ldots + 30) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}) = \\ = 15 \cdot 31 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}).$$

Второе решение. Для начала рассмотрим ситуацию, когда первые пятнадцать дней апреля были пасмурными, а последние пятнадцать — солнечными. Легко проверить, что оба персонажа задачи выпьют по $1 + 2 + 3 + \ldots + 15 = 120$ капель валерьянки — действительно поровну.

Поменяем некоторый солнечный день s с некоторым пасмурным днем p местами и посмотрим, как изменятся месячные дозы валерьянки у обоих. Предположим, что $s > p$. Заметим, что Андрей Степанович в дни, начиная с p не включительно по s включительно будет пить на одну каплю валерьянки больше, чем до перемены дней местами, а во все остальные дни он будет пить столько же. Получается, что всего он выпьет на $s - p$ капель больше, чем до операции перемены дней. Что касается Ивана Петровича, то он после перемены дней также будет пить на $s - p$ капель больше, чем до перемены, так как он перестал пить валерьянку в день p и начал в день s. Аналогично можно доказать, что если $s < p$, то количество выпитой каждым из героев задачи валерьянки уменьшится на $p - s$.

Итак, операция перемены пасмурного и солнечного дня местами у обоих меняет дозу принятой валерьянки на одно и то же число капель. Остается заметить, что операциями перемены дней можно из исходного месяца (с 15 пасмурными днями в начале) получить любой другой.

Третье решение. Рассмотрим клетчатую «лестницу»: фигуру, состоящую из 30 столбцов, соответствующих дням в апреле, в каждом столбце которой клеток столько, каков номер этого дня в месяце (см. рисунок). В каждом столбце закрасим серым цветом клеток столько, сколько капель валерьянки выпил Андрей Степанович в соответствующий день, а каждый столбец, соответствующий пасмурному дню, заполним крестиками.



Таким образом, Андрей Степанович выпил валерьянки столько, сколько клеток закрашено, а Иван Петрович —

столько, сколько в таблице крестиков. Достаточно доказать, что крестиков в незакрашенных клетках столько же, сколько закрашенных клеток без крестиков.

Закрашенные клетки без крестиков стоят в «солнечных» столбцах. Каждый солнечный день Андрей Степанович выпивал на одну каплю валерьянки больше, чем в предыдущий солнечный день (в первый солнечный день он выпил 1 каплю). Получается, количество закрашенных клеток без крестиков равно $1+2+3+\ldots+15$.

Теперь посчитаем количество крестиков в незакрашенных клетках. Пусть n-й день был пасмурным и до этого было k солнечных дней. Тогда в соответствующем столбце будет стоять $n-k$ «незакрашенных» крестиков (и k «закрашенных»). Заметим, что это ровно $(n-k)$-й пасмурный день, то есть в первый пасмурный день незакрашенный крестик будет один, во второй — два и т. д. Таким образом, количество незакрашенных крестиков равно $1+2+3+\ldots+15$.

5. *Решение.* Во-первых, заметим, что выражение

$$(a\ ?\ a)\ !\ (a\ ?\ a)$$

всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение.

Выражение

$$(x\ ?\ 0)\ ?\ (0\ ?\ y)$$

всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию $+$ с двумя аргументами.

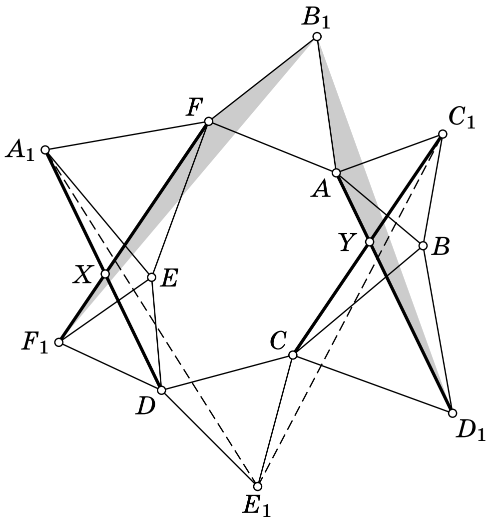
Наконец, выражение

$$0\ ?\ ((0\ !\ (x\ !\ 0))\ ?\ 0)$$

всегда равно $-x$. Теперь легко выписать искомое выражение:

$$((\ldots(a \underbrace{+\,a)+\ldots+a)+}_{19\text{ знаков «+»}} a)+(-((\ldots(b \underbrace{+\,b)+\ldots+b)+}_{17\text{ знаков «+»}} b)).$$

6. *Первое решение.* Обозначим точку пересечения FF_1 и A_1D через X, а точку пересечения CC_1 и AD_1 — через Y (см. рисунок).



Лемма 1. Отрезки FF_1 и A_1D равны и $\angle A_1XF = 60^\circ$.

Доказательство. Рассмотрим треугольники F_1EF и DEA_1. Они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = A_1D$. Далее

$$\begin{aligned}\angle A_1XF &= 180^\circ - \angle XA_1F - \angle XFA_1 = \\ &= 180^\circ - \angle XA_1E - \angle EA_1F - \angle XFA_1 = \\ &= 180^\circ - \angle EA_1F - \angle EFA_1 = 60^\circ.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдём к решению задачи. Рассмотрим треугольники B_1FA и $B_1F_1D_1$. Это два правильных треугольника с общей вершиной, поэтому углы FB_1A и $F_1B_1D_1$ равны 60°. Вычтя у этих углов общую часть, получим равенство углов FB_1F_1 и AB_1D_1. Треугольники FB_1F_1 и AB_1D_1 равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $FF_1 = AD_1$ и $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1$.

Лемма 2. Углы A_1DE_1 и C_1CE_1 равны.

Доказательство. Обозначим $\angle B_1FF_1 = \angle B_1AD_1 = \alpha$. Тогда $\angle XFA = \alpha - 60^\circ$ и

$$\angle FAY = 360^\circ - \angle B_1AF - \angle B_1AD_1 = 300^\circ - \alpha,$$

откуда $\angle XFA + \angle FAY = 240^\circ$. По лемме 1 $\angle FXD = \angle AYC = 120^\circ$, поэтому, записав сумму углов шестиугольника

$AYCDXF$, получим, что сумма углов XDC и DCY равна 240°. Тогда

$$\angle E_1CC_1 = 360^\circ - \angle DCE_1 - \angle DCY = 300^\circ - (240^\circ - \angle XDC) = \\ = 60^\circ + \angle XDC = \angle CDE_1 + \angle XDC = \angle XDE_1 = \angle A_1DE_1.$$

Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Воспользовавшись леммой 1, получим

$$A_1D = FF_1 = AD_1 = CC_1.$$

Рассмотрим треугольники A_1DE_1 и C_1CE_1. Воспользовавшись предыдущим равенством и леммой 2, получим, что они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $A_1E_1 = E_1C_1$. Аналогично доказывается, что $A_1E_1 = A_1C_1$, откуда треугольник $A_1C_1E_1$ — равносторонний.

Замечание. Приведённое решение, вообще говоря, зависит от взаимного расположения точек. При другом расположении точек решение аналогично. Ниже написано решение, не зависящее от расположения точек. (См. также решение задачи 5 для 11 класса, 1-й день.)

Второе решение. Обозначим символом $\angle(X_1Y_1, X_2Y_2)$ угол, на который нужно повернуть отрезок X_1Y_1 против часовой стрелки так, чтобы он стал одного направления с отрезком X_2Y_2. Если поворот осуществлялся по часовой стрелке, то значение надо брать со знаком минус. В частности, $\angle(X_1Y_1, X_2Y_2) = -\angle(X_2Y_2, X_1Y_1)$.

Рассмотрим треугольники B_1FA и $B_1F_1D_1$. По условию задачи они оба равносторонние, и поэтому при повороте вокруг точки B_1 на 60° против часовой стрелки вершина F переходит в вершину A, точка F_1 — в точку D_1. Получается, что треугольник B_1FF_1 поворотом переводится в треугольник B_1AD_1 (см. рисунок на предыдущей странице). Значит, отрезок FF_1 переходит в отрезок AD_1, откуда следует, что $FF_1 = AD_1$ и что $\angle(FF_1, AD_1) = 60^\circ$.

Теперь рассмотрим равносторонние треугольники EFA_1 и EF_1D. При повороте вокруг точки E на угол 60° против часовой стрелки вершина F переходит в точку A_1, а точка F_1 — в вершину D. Получается, что треугольник EFF_1 переходит в EA_1D, следовательно, отрезок FF_1 совмещается с отрезком A_1D, тогда $FF_1 = A_1D$, $\angle(FF_1, A_1D) = 60^\circ$.

Аналогично, рассматривая равносторонние треугольники BC_1A и BCD_1, получаем, что $C_1C=AD_1$ и $\angle(C_1C,\ AD_1) = 60^\circ$.

Сопоставляя выводы трех предыдущих абзацев, записываем связь между отрезками C_1C и AD_1:

$$C_1C = AD_1 = FF_1 = A_1D,$$

$$\begin{aligned}\angle(C_1C,\ A_1D) &= \angle(C_1C,\ AD_1) + \angle(AD_1,\ FF_1) + \angle(FF_1,\ A_1D) = \\ &= \angle(C_1C,\ AD_1) - \angle(FF_1,\ AD_1) + \angle(FF_1,\ A_1D) = \\ &= 60^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 60^\circ\ .\end{aligned}$$

Рассмотрим поворот вокруг точки E_1 на угол 60° против часовой стрелки. Треугольник E_1CD правильный, и поэтому точка C перейдет в точку D. Заметим, что треугольник E_1CC_1 при таком повороте совместится с треугольником EDA_1, так как отрезки CC_1 и DA_1, как уже установлено, равны по длине и находятся под углом 60° друг к другу.

Получили, что точка C_1 переходит в точку A_1 при повороте вокруг E_1 на угол 60°. Следовательно, треугольник $E_1C_1A_1$ — равносторонний, что и требовалось доказать.

9 класс

1. *Ответ*. Знак отрицательный.

Решение. Докажем, что на нечетных местах стоят отрицательные числа, а на четных — положительные. Тогда произведение всех чисел будет отрицательным, поскольку перемножаем 41 отрицательное число и 40 положительных чисел.

Пусть выписаны числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{81}$. Заметим, что если выкинуть произвольное число a_{2k+1} с нечетным номером, то остальные разбиваются на пары соседних:

$$\{a_1,\ a_2\},\ \ldots,\ \{a_{2k-1},\ a_{2k}\},\ \{a_{2k+2},\ a_{2k+3}\},\ \ldots,\ \{a_{80},\ a_{81}\}.$$

Значит, сумма всех остальных чисел положительная, но с добавлением a_{2k+1} она становится отрицательной, т. е. $a_{2k+1} < 0$. Поскольку $a_{2k} + a_{2k+1} > 0$, то $a_{2k} > 0$. Наше утверждение доказано.

2. *Ответ.* Нет, не обязательно.

Решение. Рассмотрим 3 палочки длины 1 и палочку длины a. Тогда из палочек можно сложить либо правильный треугольник со стороной 1, либо треугольник со сторонами 1, 1, a. Подберем a, чтобы эти треугольники имели равную площадь. Для этого достаточно, чтобы высоты к сторонам длины 1 в этих треугольниках совпали, а это равносильно тому, что углы между единичными сторонами либо равны, либо в сумме дают 180°. То есть нужно подобрать a таким, чтобы искомый угол был равен 120°; очевидно, такой существует ($a = \sqrt{3}$).

Комментарий. На самом деле несложно доказать, что единственный пример, когда не все палочки одинаковой длины, это $(x, x, x, \sqrt{3}x)$.

3. *Решение.* Обозначим $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}$. Предположим, что натуральное число n является решением уравнения из условия задачи. Пусть r_i — это остаток от деления n на a_i, иными словами, $n = a_i \left[\frac{n}{a_i}\right] + r_i$. Тогда

$$n = \left[\frac{n}{a_1}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a_k}\right] = \frac{n - r_1}{a_1} + \ldots + \frac{n - r_k}{a_k} =$$
$$= n\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) - \left(\frac{r_1}{a_1} + \ldots + \frac{r_k}{a_k}\right) = nS - \left(\frac{r_1}{a_1} + \ldots + \frac{r_k}{a_k}\right),$$

откуда

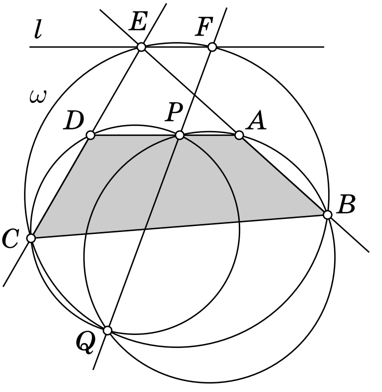
$$n = \frac{1}{S - 1}\left(\frac{r_1}{a_1} + \ldots + \frac{r_k}{a_k}\right).$$

Таким образом, при заданном наборе чисел $(r_1, \ldots, r_k)$, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant r_i < a_i$, может быть не более одного натурального решения n с таким набором остатков. Всего таких наборов ровно $a_1 a_2 \ldots a_k$, поэтому и количество решений уравнения

$$n = \left[\frac{n}{a_1}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a_k}\right]$$

не больше $a_1 a_2 \ldots a_k$.

4. *Решение.* Обозначим через E пересечение прямых AB и CD. Рассмотрим случай, в котором точка E лежит на луче CD за точкой D. Четырехугольники $CQPD$ и $BQPA$ —



вписанные, значит, $\angle CQP = \angle EDP$, а $\angle PQB = \angle PAE$. Сумма углов треугольника EDA равна

$$180^\circ = \angle DEA + \angle EDP + \angle PAE = \\ = \angle DEA + \angle CQP + \angle PQB = \angle CEB + \angle CQB.$$

Следовательно, четырехугольник $CQBE$ вписан в окружность ω — описанную окружность треугольника CBE. Обозначим через F вторую точку пересечения прямой PQ с ω. Четырехугольник $QCEF$ — вписанный. Значит,

$$180^\circ = \angle FED + \angle CQP = \angle FED + \angle EDP.$$

Отсюда следует, что прямые PD и FE параллельны.

Пусть l — прямая, проходящая через точку E параллельно AD. Тогда прямая PQ независимо от выбора точки P проходит через вторую точку пересечения окружности ω и прямой l. Случай, когда точка E лежит с другой стороны, разбирается аналогично.

Комментарий. То же решение можно изложить с использованием направленных углов, тогда оно без изменений будет проходить при любом расположении точек.

5. *Ответ.* При взаимно простых m, n.

Решение. Пронумеруем позиции по кругу числами от 0 до $m + n - 1$ по часовой стрелке.

Построение расстановки для взаимно простых m и n. Поскольку n и m взаимно просты, взаимно просты и n и

$m+n$. Тогда при $k=0, 1, \ldots, m+n-1$ числа nk дают попарно разные остатки при делении на $m+n$. Возьмем k_0 такое, что nk_0 дает остаток 1 при делении на $m+n$.

Поставим 1 на позиции, соответствующие остаткам при делении на $m+n$ чисел $k_0, 2k_0, \ldots, (n-1)k_0, nk_0 \equiv 1$, а на остальные позиции нули. Тогда при повороте на k_0 позиций против часовой стрелки наша расстановка перейдет в расстановку с единицами на позициях, соответствующих остаткам чисел $0, k_0, 2k_0, \ldots, (n-1)k_0$. То есть при данном повороте единица на позиции 1 поменяется местами с нулем на позиции 0, а значит, расстановка является хорошей.

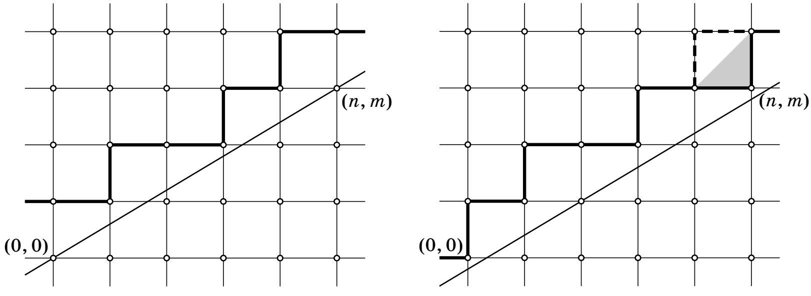
Доказательство взаимной простоты m и n. Пусть числа m и n имеют общий делитель $d>1$. Рассмотрим остаток, который даёт сумма номеров позиций единиц при делении на d. При повороте на k к каждому номеру добавляется k (и, возможно, вычитается $m+n$), значит, к сумме всех номеров добавляется kn и вычитается некоторое кратное $m+n$, то есть остаток при делении на d этой суммы не меняется. С другой стороны, если поменять местами соседние 0 и 1, этот остаток изменяется ровно на 1. Значит, при этом не может получиться расстановка, отличающаяся от исходной поворотом.

Комментарии. 1. Приведём другое доказательство того, что при взаимно простых m и n требуемая расстановка возможна. Доказательство будем вести индукцией по $m+n$; база при $m=n=1$ очевидна. Пусть $m+n>2$; тогда можно считать, что $m>n$. Поскольку числа $m-n$ и n взаимно просты, по предположению индукции существует расстановка $m-n$ нулей и n *двоек*, в которой можно поменять местами соседние ноль и двойку, получив расстановку, отличающуюся от исходной поворотом. Заменим теперь каждую двойку на подряд идущие 1 и 0. Тогда замена $02 \to 20$ в старой расстановке соответствует замене $010 \to 100$, то есть тоже замене соседних единицы и нуля. Значит, полученная расстановка — требуемая.

2. Решение можно также описывать геометрически. Для этого по расстановке единиц и нулей построим ломаную на плоскости: будем идти по кругу и откладывать отрезок $(1, 0)$, если по кругу стоит единица, и отрезок $(0, 1)$, если по кругу стоит нуль. Так как числа стоят по кругу, то получившаяся ломаная будет переходить в себя при сдвиге на вектор (n, m). Перестановка соседних нуля и единицы в терминах ломаной означает

«загибание уголка». Две расстановки чисел по кругу отличаются поворотом, если соответствующие ломаные переводятся друг в друга параллельным переносом.

Пусть теперь m и n взаимно просты. Возьмем прямую, проходящую через начало координат и точку (n, m), и построим ломаную с вертикальными и горизонтальными звеньями, огибающую эту прямую сверху (см. рисунок слева). Эта ломаная и соответствует искомой хорошей расстановке.



Действительно, начнем двигать нашу прямую вниз, пока она снова не начнет проходить через какую-то целую точку. Получим прямую, которая отличается от исходной сдвигом на целочисленный вектор (переводящим начало координат в эту целую точку). Значит, если провести огибающую ломаную, ей будет соответствовать расстановка 0 и 1, отличающаяся от предыдущей поворотом. А с другой стороны, от того, что мы сдвинули прямую, над ней добавились только целые точки на прямой $mx = ny$. С точностью до сдвига на (n, m) такая точка ровно одна, поэтому две построенные ломаные отличаются загибанием уголка (см. рисунок справа), а полученная расстановка 0 и 1 действительно хорошая.

Пусть теперь m, n не взаимно просты. Обозначим через d их наибольший общий делитель. Тогда площадь, которую период этой ломаной ограничивает над наклонной прямой $mx - ny = cd$, при загибании уголка изменяется на 1. Чтобы расстановка получилась та же, надо, чтобы ломаная была такой же с точностью до какого-то целочисленного сдвига, поэтому у новой ломаной площадь должна быть такой же относительно сдвинутой прямой. Но если мы сдвинем прямую на 1 (т. е. рассмотрим прямую вида $mx - ny = (c - 1)d$), то площадь увеличится на d, поэтому не может совпасть с той, что была.

3. Отметим, что такие расстановки 0 и 1 появляются и в других задачах: см., например, статью М. Концевича «Равномерные

расположения» (Квант, 1985, №7). Комбинаторная структура хорошей расстановки связана со структурой цепной дроби m/n, это видно как из индуктивного построения в прошлом комментарии, так и из геометрической конструкции, ее надо сравнивать с геометрическим подходом к цепным дробям, изложенным в брошюре «Цепные дроби» В. И. Арнольда (М: МЦНМО, 2015).

6. *Решение.* Докажем индукцией по k более общее утверждение: $2k$ аудиторий хватит для того, чтобы рассадить $n \leqslant k^2$ участников. Тогда для получения утверждения задачи достаточно будет подставить $k = 45$, поскольку $2018 \leqslant \leqslant 2025 = 45^2$.

База $k = 1, 2$. Поскольку $2k \geqslant k^2$, мы можем посадить каждого участника в отдельную аудиторию.

Пусть утверждение доказано, когда количество участников не больше $(k-1)^2$. Докажем утверждение, когда количество участников не больше k^2. Рассмотрим участника v с наибольшим числом d знакомых. Если $d \geqslant 2k-2$, то посадим v в одну аудиторию, всех его знакомых во вторую, а оставшихся $n-1-d \leqslant k^2-1-(2k-2) = (k-1)^2$ по предположению индукции мы можем рассадить в $2(k-1)$ аудиторий так, что в этих аудиториях не будет «кружков». В первой аудитории только один человек, поэтому «кружков» там быть не может, во второй аудитории нет «кружков», так как там нет v, но он знаком со всеми из этой аудитории.

Если же $d < 2(k-1)$, то заметим, что нам заведомо хватит $d+1 \leqslant 2k$ аудиторий. Выделим $d+1$ аудиторий и будем рассаживать участников по очереди так, чтобы никакие два знакомых не сидели в одной аудитории, тогда в одной аудитории не будут образовываться «кружки» (люди, сидящие в одной аудитории, не знакомы друг с другом). У каждого участника не больше чем d знакомых, так как аудиторий $d+1$, то всегда есть аудитория, где нет его друзей, куда мы его и посадим.

Комментарий. В задаче речь идет о так называемом *кликовом хроматическом числе* графа. Если обычное хроматическое число — это минимальное число цветов, в которые можно так покрасить все вершины, чтобы концы любого ребра имели разные цвета, то кликовое хроматическое число — это тоже минимальное число цветов для покраски вершин, только теперь требуется, чтобы все полные подграфы (*клики*), которые *максимальны по включению* (то есть не содержатся внутри еще больших полных подграфов) были неодноцветными (имели хотя бы две вершины разного цвета). Естественно, исключаются изолированные вершины, то есть вершины, которые ни с кем не соединены ребрами. Ясно, что если в графе нет треугольников (клик, имеющих три и более вершин), то в нем все максимальные по включению клики, не являющиеся изолированными вершинами, суть его ребра, а значит, для такого графа кликовое хроматическое число совпадает с обычным. Любопытно то, что если обычное хроматическое число подграфа всегда меньше хроматического числа графа, то с кликовым хроматическим числом все, конечно, не так, ведь у полного графа оно равно двум, а, например, у нечетного простого цикла оно равно трем.

Задача отыскания точных оценок кликового хроматического числа как в общем случае, так и для многих важных классов графов весьма далека от своего решения. В нашем случае речь шла как раз о произвольном графе: фактически в задаче требовалось доказать, что кликовое хроматическое число произвольного графа на n вершинах не превосходит $2\sqrt{n}$. Сейчас наилучшая известная верхняя оценка $\sqrt{2n}$, и это лишь в константу раз лучше, чем требует наша задача. Известно также, что для каждого n существует граф на n вершинах, кликовое хроматическое число которого не меньше $c\sqrt{n/\ln n}$ для некоторой константы c. Таким образом, между верхними и нижними оценками сохраняется зазор в корень из логарифма раз, и этот зазор кому-то предстоит устранить — возможно, кому-то из читающих эту брошюру!

Отметим и один из интереснейших классов графов. Это так называемые *геометрические графы*. У них вершины — точки в пространстве (или даже просто на плоскости), а ребра соединяют пары точек, находящихся на расстоянии не больше 1. Эти графы важны для таких классических задач комбинаторики, как проблема Нелсона—Хадвигера раскраски пространства, проблема Борсука и др. (см. брошюры А. М. Райгородского «Хроматические числа», «Проблема Борсука» (М.: МЦНМО, 2015); про разные вариации на тему этих графов уже бывали задачи на ММО — например, задача 6 для 10 класса в варианте 2010 года). Так вот для этих графов даже в случае плоскости зазор между верхними и нижними оценками аж от 3 до 9!

10 класс

1. *Ответ.* Да, например, 5 002 018.

Решение. Действительно,

$$(5 \cdot 10^6 + 2018)^2 = 25 \cdot 10^{12} + 2018 \cdot 10^7 + 4\,072\,324,$$

поэтому квадрат этого числа содержит последовательность цифр «2018».

2. *Ответ.* 10.

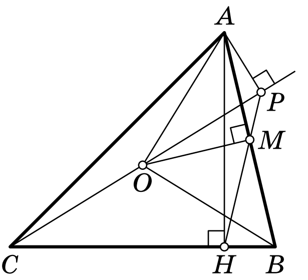
Решение. Рассмотрим рамку, ограничивающую квадрат 10×10, полностью состоящий из чёрных клеток. При последовательном перемещении этой рамки направо, налево, вверх и вниз можно добраться до квадрата 10×10, полностью состоящего из белых клеток. При этом на каждом шаге перемещения из рамки убираются 10 клеток и в неё добавляются 10 клеток. Таким образом, за один шаг количество чёрных клеток, содержащихся внутри квадрата, изменяется не более чем на 10.

В частности, по пути от полностью чёрного до полностью белого квадрата встретится квадрат, в котором от 45 до 55 чёрных клеток. Для такого квадрата количество чёрных и белых клеток отличается не более чем на 10.

Построим квадрат 2018×2018, в котором во всех квадратах 10×10 количество чёрных и белых клеток отличается не меньше чем на 10. Для этого в квадрате 2018×2018 проведём диагональ из нижнего левого угла в верхний правый. Все клетки над диагональю покрасим белым, а диагональ и клетки под диагональю — чёрным. В любом квадрате 10×10 все клетки диагонали из нижнего левого угла в верхний правый покрашены одним цветом, причём если этот цвет чёрный, то и все клетки над диагональю чёрные, значит, их хотя бы 55, и количество чёрных и белых клеток отличается хотя бы на 10. Аналогично, если диагональ белая, то все клетки под диагональю белые, и их не менее 55.

3. *Решение.* Пусть M — середина отрезка AB. Рассмотрим точки A, O, M и P. Поскольку $\angle AMO = \angle APO = 90^\circ$, точки A, O, M и P лежат на одной окружности. Значит, $\angle CPM = \angle OPM = \angle OAM$.

Рассмотрим точки A, C, H и P. Они также лежат на одной окружности, так как $\angle AHC = \angle APC = 90^\circ$. Следовательно, $\angle CPH = \angle CAH$.



Помимо того,

$$\angle CAH = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle AOM = \angle OAM.$$

Получаем:

$$\angle CPM = \angle OAM = \angle CAH = \angle CPH.$$

Значит, точки M, P и H лежат на одной прямой.

Комментарий. Расположение точек может отличаться от представленного на рисунке. Для других случаев расположения точек доказательство аналогично.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. *Решение.* Обозначим через D наибольшую из длин сторон торта. Тогда длины всех сторон всех треугольников, которые будут получаться у Карлсона в процессе поедания торта, не будут превосходить D.

Предположим, что Карлсон может сделать сколько угодно описанных операций так, чтобы площадь съеденного торта не превосходила $1/2$ от площади всего торта.

Возьмем треугольник, который получается на $(k-1)$-м шаге, и обозначим его площадь через S_k, а стороны, между которыми проходит k-й разрез, через a_k и b_k. Будем считать, что Карлсон съедает кусок, примыкающий к стороне a_k. Тогда по теореме о биссектрисе площадь съеденного на k-м шаге куска равна $S_k - S_{k+1} = \dfrac{S_k a_k}{a_k + b_k}$.

Рассмотрим длины всех сторон a_k. Возможны два случая: либо они все больше некоторого положительного числа $\ell > 0$, либо такого числа ℓ не существует.

В первом случае получается, что на k-м шаге Карлсон съедает кусок торта площадью не меньше чем

$$\frac{a_k S_k}{a_k + b_k} > \frac{a_k S_k}{2D} > \frac{\ell S_k}{2D}.$$

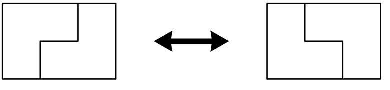
Можно оценить площадь оставшегося куска:

$$S_{k+1} < S_k \left(1 - \frac{\ell}{2D}\right).$$

Поэтому $S_{k+1} < S_1 (1 - \ell/2D)^k$. Но выражение в скобках строго меньше 1, то есть при достаточно больших k его k-я степень будет меньше $1/2$.

Допустим теперь, что a_k могут быть сколь угодно близки к нулю. Возьмем такое a_k, для которого $a_k < S_1/D$. Оценим площадь треугольника S_k сверху как половину произведения сторон: $S_k \leqslant a_k D/2$. Но, поскольку $a_k < S_1/D$, отсюда следует, что $S_k < S_1/2$, то есть к k-му шагу больше половины торта уже окажется съедено.

6. *Решение.* Для каждого разрезания квадрата на уголки определим соответствующее ему разрезание квадрата на уголки и прямоугольники 2×3 следующим образом. Посмотрим на разрезание R. Если в нем найдется уголок, примыкающий к сторонам квадрата и образующий вместе с еще каким-то уголком прямоугольник 2×3, заменим эти два уголка на прямоугольник. Проведем все возможные такие замены. Будем говорить, что мы получили *предразрезание $\mathfrak{R}$, соответствующее разрезанию R*. Заметим, что по каждому разрезанию мы строим единственное предразрезание: в самом деле, один уголок может входить только в один прямоугольник 2×3. В частности, отсюда следует, что если взять разрезание R и заменить в нем два уголка, образующих прямоугольник 2×3, на два других уголка, дающих тот же прямоугольник (как на рисунке), мы полу-



чим разрезание R', имеющее то же самое предразрезание, что и R. Это означает, что предразрезанию $\mathfrak{R}$ соответствуют ровно 2^k разрезаний, где k — число прямоугольников в предразрезании.

Докажем, что в каждом предразрезании хотя бы 4 прямоугольника. В самом деле, длина стороны нечетна, значит, к каждой стороне хотя бы один из уголков примыкает одной клеткой, причем один уголок не может одной клеткой примыкать к двум сторонам. Каждый из четырех таких уголков образует вместе с еще одним уголком прямоугольник 2×3.

Теперь докажем, что количество предразрезаний с фиксированным k делится на 8. У квадрата есть 8 движений: четыре поворота на 0°, 90°, 180° и 270° и четыре осевых симметрии: две относительно диагоналей, две относительно средних линий. Для каждого предразрезания $\mathfrak{R}$ рассмотрим его образы при этих движениях; если все 8 образов разные, то мы разбили множество предразрезаний с фиксированным k на группы по 8. Предположим, что какие-то два образа совпали. Посмотрим на центральную клетку. Она покрыта уголком (здесь нам важно, что прямоугольники примыкали к границам, значит, до центра не дотягиваются). При движении центральная клетка переходит в себя, значит, и покрывающий ее уголок тоже. Это возможно в единственном случае: если движение является симметрией относительно диагонали, а уголок лежит центром на центральной клетке симметрично относительно этой диагонали. Но тогда посмотрим на клетку, дополняющую этот уголок до квадрата 2×2, эта клетка снова на диагонали, значит, переходит в себя, значит, покрывающая ее фигура — тоже. Тогда это снова уголок (прямоугольники 2×3 не переходят в себя при симметрии относительно диагонали квадрата), он снова лежит симметрично относительно диагонали, у него снова есть такая клетка, и так далее. Строя такую последовательность уголков, мы упремся в угол квадрата и получим непокрытую клетку: противоречие.

Итак, мы доказали, что число предразрезаний с фиксированным $k \geqslant 4$ кратно 8, значит, и число соответствующих им разрезаний делится на 2^{3+k}, то есть хотя бы на 2^7. Складывая по всем возможным k, получаем утверждение задачи.

1. *Ответ*. Ни одного.

Первое решение. Прямая, являющаяся графиком производной $y = 2ax + b$ квадратного трёхчлена, касается параболы $y = ax^2 + bx + c$: если они не пересекаются, то разбивают координатную плоскость на три части, а если пересекаются в двух точках, то разбивают плоскость на пять частей.

Из условия касания графиков получаем, что дискриминант уравнения

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

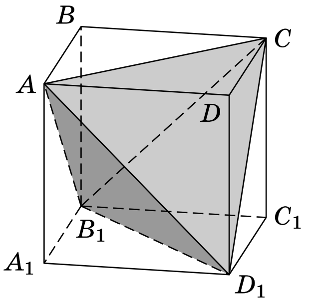
равен нулю, т. е. $(b - 2a)^2 - 4a(c - b) = b^2 + 4a^2 - 4ac = 0$, откуда дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен

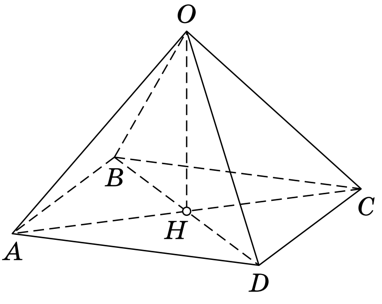
$$D = b^2 - 4ac = -4a^2 < 0,$$

поэтому трёхчлен не имеет корней.

Второе решение. Так же, как и в предыдущем способе, устанавливаем факт касания графиков трёхчлена и его производной. Заметим, что производная пересекает ось абсцисс (меняет знак) в точке, абсцисса которой равна абсциссе вершины параболы. Следовательно, если ветви параболы направлены вверх, то вершина параболы лежит выше оси абсцисс, а если вниз, то ниже оси абсцисс. В обоих случаях квадратный трёхчлен корней не имеет.

2. *Решение.* Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды (см. рисунок слева). Достаточно заметить, что тетраэдр ACB_1D_1 — правильный с ребром $\sqrt{2}a$,





а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = 1/\sqrt{2}$.

Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной O провести высоту OH и разрезать пирамиду плоскостями OHA и OHB на 4 одинаковые части (см. рисунок справа). Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $1/\sqrt{2}$.

3. *Ответ.* а) Да; б) нет.

Решение. а) Для многочлена $P(x) = x^2 - x$ имеем

$$P(x)P(x+1) = (x^2 - x)((x+1)^2 - x - 1) = \\ = x^2(x+1)(x-1) = x^4 - x^2 = P(x^2).$$

б) *Первое решение.* Из условия следует, что многочлен $P(x)$ раскладывается на линейные множители. Пусть

$$P(x) = a(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Тогда корнями многочлена $P(x)P(x+1)$ являются числа $x_1, \ldots, x_n, x_1 - 1, \ldots, x_n - 1$. При этом многочлен

$$P(x^2+1) = a(x^2 + 1 - x_1)\ldots(x^2 + 1 - x_n)$$

также должен раскладываться на линейные множители, поэтому $x_k \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$. Множество его корней $\pm\sqrt{x_k - 1}$, $k = 1, \ldots, n$, должно совпадать с множеством корней многочлена $P(x)P(x+1)$. Пусть x_m — наибольшее из чисел x_k, $k = 1, \ldots, n$, т. е. наибольший из корней многочлена $P(x)P(x+1)$. Тогда число $\sqrt{x_m - 1}$ является наибольшим из корней многочлена $P(x^2)$. Но $\sqrt{x_m - 1} < x_m$, так как $x_m^2 - x_m + 1 > 0$. Следовательно, совпадение множеств корней многочленов $P(x)P(x+1)$ и $P(x^2)$ невозможно.

Второе решение. Если такой многочлен $P(x)$ существует, то он имеет хотя бы один действительный корень. Пусть x_0 — наибольший из его корней. Тогда из условия получаем, что $P(x_0^2 + 1) = P(x_0)P(x_0 + 1) = 0$, т. е. число $x_0^2 + 1$ также является корнем многочлена $P(x)$. Но $x_0^2 + 1 > x_0$, что противоречит максимальности корня x_0. Следовательно, такого многочлена не существует.

Комментарий. Пользуясь методами решения п. б), можно показать, что множеством корней многочлена $P(x)$, удовлетворяющего при всех действительных x равенству из п. а), может быть только множество $\{0, 1\}$. Таким образом, приведённый в решении п. а) пример — единственный возможный.

4. *Ответ.* Нельзя.

Первое решение. Предположим противное: $11^{2018} = m_1^3 + n_1^3$, $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Если оба числа m_1 и n_1 делятся на 11, то разделим это равенство на куб максимальной степени 11, которая делит одновременно и m_1, и n_1, пусть это 11^s. Тогда получим $11^{2018-3s} = m^3 + n^3$, где $3s < 2018$ и хотя бы одно из чисел $m = m_1/11^s$ и $n = n_1/11^s$ не делится на 11. Значит, оба этих числа не делятся на 11, так как иначе сумма $m^3 + n^3$ не делилась бы на 11.

Поскольку $m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2)$ и число 11 простое, получаем $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где $k, l \geqslant 0$ и $k + l = 2018 - 3s$. Поэтому

$$3mn = (m+n)^2 - (m^2 - mn + n^2) = 11^{2k} - 11^l.$$

Из равенства $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn$ следует, что $11^l > 1$, откуда $l > 0$. Значит, mn делится на 11, а поэтому одно из чисел m или n делится на 11. Противоречие.

Это решение можно окончить иначе. Если $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где $k, l > 0$, то числа m и $-n$ дают одинаковые ненулевые остатки при делении на 11: $m \equiv -n \not\equiv 0 \pmod{11}$, но тогда $m^2 - mn + n^2 \equiv 3m^2 \not\equiv 0 \pmod{11}$, и снова получаем противоречие.

Второе решение. Пусть, от противного,

$$11^{2018} = m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2).$$

Тогда $m + n = 11^k$ и $m^2 - mn + n^2 = 11^l$, где k, l — целые неотрицательные. Поскольку

$$\frac{(m+n)^2}{4} < m^2 - mn + n^2 < (m+n)^2$$

для всех натуральных m и n, то

$$11^{2k-1} < \frac{11^{2k}}{4} < 11^l < 11^{2k},$$

откуда $2k - 1 < l < 2k$, что невозможно для целых чисел.

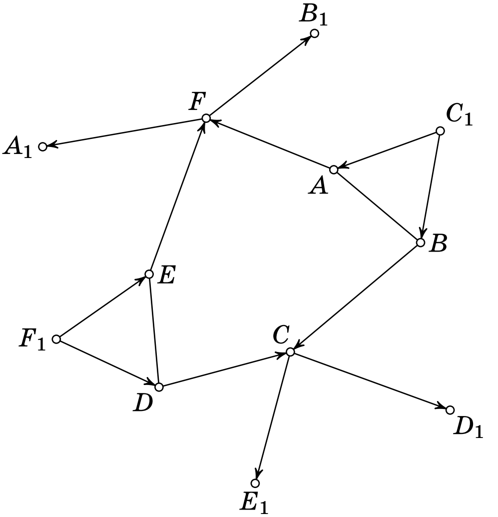
Третье решение. С одной стороны, поскольку $2^6=64\equiv 1 \pmod 9$ и $2018\equiv 2 \pmod 6$, имеем

$$11^{2018}\equiv 2^{2018}\equiv 2^2\equiv 4 \pmod 9,$$

то есть число 11^{2018} даёт остаток 4 при делении на 9. С другой стороны, кубы натуральных чисел дают только остатки 0, 1 и 8 при делении на 9, так как $(9k+3l+a)^3\equiv a^3 \pmod 9$ при $a=0$, 1, 2 и k, $l\in\mathbb{N}$. Значит, сумма кубов двух натуральных чисел может дать лишь остатки 0, 1, 2, 7 или 8 при делении на 9, но не может дать 4.

Комментарий. Справедлив более общий факт: для любого простого числа $p\geqslant 5$ и любого натурального n число p^n нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел. Это можно доказать теми же методами, что использованы в первом и втором способах решения. Отметим, что при $p=2$ и $p=3$ соответствующее утверждение неверно, так как $2^1=1^3+1^3$ и $3^2=1^3+2^3$.

5. *Решение.* По условию треугольники $B_1D_1F_1$ и DEF_1 являются правильными. Значит, при повороте на 60° против часовой стрелки векторы $\overrightarrow{F_1D_1}$ и $\overrightarrow{F_1D}$ перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{F_1B_1}$ и $\overrightarrow{F_1E}$ соответственно (см. рисунок). Имеем $\overrightarrow{F_1D_1}=\overrightarrow{F_1D}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{F_1B_1}=\overrightarrow{F_1E}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB_1}$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{F_1D_1}-\overrightarrow{F_1D}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD_1}$ при таком повороте перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{F_1B_1}-\overrightarrow{F_1E}=\overrightarrow{EF}+$ $+\overrightarrow{FB_1}$.



Также по условию треугольники BCD_1, CDE_1, EFA_1 и FAB_1 являются правильными. Значит, при повороте на 120° против часовой стрелки векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE_1}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FB_1}$ перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FA_1}$ и $\overrightarrow{AF}$ соответственно. Отсюда получаем, что векторы $\overrightarrow{BE_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE_1}$ и $\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB_1}$ при таком повороте перейдут в векторы, равные $\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA_1}$ соответственно. Следовательно, при повороте на 300° против часовой стрелки или, что то же, при повороте на 60° по часовой стрелке, вектор $\overrightarrow{BE_1}$ перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{AA_1}$.

Наконец, по условию треугольник ABC_1 является правильным. Значит, при повороте на 60° по часовой стрелке вектор $\overrightarrow{C_1B}$ перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{C_1A}$. Отсюда получаем, что вектор $\overrightarrow{C_1E_1}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BE_1}$ при таком повороте перейдёт в вектор, равный $\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AA_1}$. Следовательно, треугольник $A_1C_1E_1$ также является правильным.

Комментарий. См. также решение задачи 6 для 8 класса.

6. *Ответ.* б) Да, может.

Решение. а) Занумеруем все комнаты наборами длины n из нулей и единиц (числами от 0 до 2^n-1 в двоичной системе). Обозначим через A_k и B_k множества наборов, у которых на k-м месте стоит соответственно 1 или 0. Для каждого $k=1, \ldots, n$ множества A_k и B_k не пересекаются и вместе составляют всё множество наборов.

Рассмотрим следующий алгоритм посылок: в $(2k-1)$-й раз прораб посылает людей в комнаты с номерами из множества A_k, в $(2k)$-й раз он посылает людей в комнаты с номерами из множества B_k, k меняется от 1 до n. Всего получается $2n$ посылок.

Пусть лампочка в комнате с номером i включается выключателем в комнате с номером $f(i)$. Если $i\in A_k$ и во время $(2k-1)$-й посылки лампочка в i-й комнате включилась, то $f(i)\in A_k$, а если не включилась, то $f(i)\in B_k$. Аналогично, если $i\in B_k$ и во время $(2k)$-й посылки лампочка в i-й комнате включилась, то $f(i)\in B_k$, а если не включилась, то $f(i)\in A_k$. Таким образом, за $(2k-1)$-ю и $(2k)$-ю посылки прораб точно устанавливает k-й разряд номера $f(i)$ для каждого i. Следовательно, после $2n$ указанных посылок он полностью установит соответствие f.

б) Покажем, что за $2n-1$ посылок прораб также может установить соответствие f.

Пусть первые $2n-2$ посылки те же, что в предыдущем пункте. После них прораб для каждого i знает номер $f(i)$ с точностью до последнего знака. Построим специальный граф, соответствующий этому знанию. Вершины графа располагаются в два горизонтальных ряда, каждый из которых соответствует парам $P_1, P_2, \ldots, P_{2^{n-1}}$ наборов (номеров комнат), различающихся только в последнем знаке (например, $P_1=\{0\ldots0, 0\ldots01\}$). Рёбра графа проходят только от вершин верхнего ряда к вершинам нижнего ряда по следующему правилу: вершина в верхнем ряду, соответствующая паре P_s, соединена с вершиной в нижнем ряду, соответствующей паре P_t, в точности тогда, когда для некоторого $i \in P_s$ прорабу известно, что $f(i) \in P_t$.

В таком графе все вершины имеют степень 2. Следовательно, он разбивается на непересекающиеся циклы, в которых все вершины и рёбра проходятся ровно по одному разу. Зафиксируем для каждого из этих циклов обход, начинающийся в вершине верхнего ряда, и рассмотрим все нечётные ребра во всех этих обходах. Каждое из этих рёбер порождено соответствием $i \to f(i)$ в указанном выше смысле. Прораб отбирает множество A всех номеров i, соответствующих выбранным нечетным рёбрам, и в $(2n-1)$-й раз посылает людей в комнаты с этими номерами (их 2^{n-1} штук).

Покажем, что в результате он полностью установит соответствие f.

Пусть $i \in A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть ровно один номер m из пары P_j. Если во время $(2n-1)$-й посылки лампочка в i-й комнате загорелась (выключатель в m-й комнате включается), то $f(i)=m$, в противном случае $f(i)$ есть номер, дополнительный к m в паре P_j.

Пусть $i \notin A$ и известно, что $f(i) \in P_j$. В множестве A есть такой номер q, что $f(q)$ тоже лежит в P_j. Во время $(2n-1)$-й посылки, как уже было сказано, номер $f(q)$ устанавливается, и тогда $f(i)$ есть номер, дополнительный к $f(q)$ в паре P_j.

Комментарий. Авторам неизвестно минимальное количество посылок, необходимое для установления соответствия между комнатами и выключателями.

1. *Ответ*. $\log_2 3$, $\log_3 5$, $\log_5 2$.

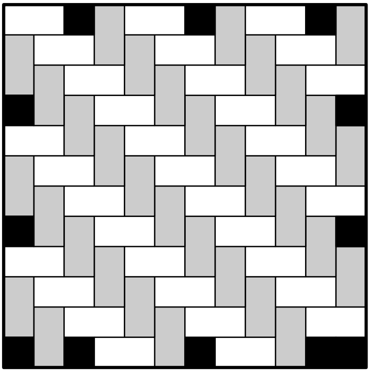
Решение. В обозначениях $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_5 2$ исходное уравнение принимает вид

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0,$$

что равносильно уравнению $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$.

2. *Ответ*. Да, может.

Решение. Построим «паркет», в котором чередуются ряды вертикальных 2×1 и горизонтальных 1×2 доминошек. На рисунке эти ряды показаны серым и белым цветом для доски 12×12 (непокрытые клетки доски закрашены чёрным).



Похожий пример можно построить и для доски размером 2018×2018. Непокрытыми могут остаться лишь некоторые клетки первой строки и столбца, а также последней строки и столбца. Поэтому доля непокрытых клеток от их общего числа будет не более, чем $\frac{4 \cdot 2017}{2018 \cdot 2018} < \frac{4}{2018} < 1\%$. Значит, будет покрыто более 99% всех клеток доски.

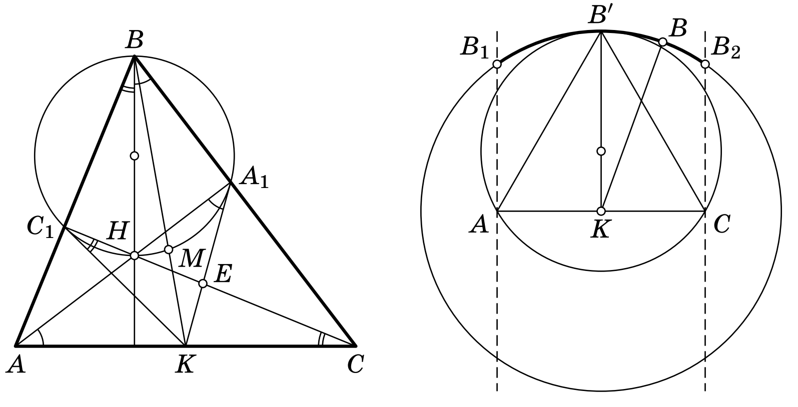
3. *Ответ*. 98721.

Решение. Данное равенство при условии, что $\operatorname{tg} x^\circ$ и $\operatorname{tg} y^\circ$ определены, эквивалентно равенству $\operatorname{tg}(x-y)^\circ = 1$, откуда $x - y = 45 + 180n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, разность $x - y$ делится нацело на 45, а значит, на 5 и на 9. Поскольку сумма всех цифр делится на 9, то каждое из чисел x и y делится на 9.

Наибольшее пятизначное число, все цифры которого различны, равно 98765. Ближайшее к нему меньшее число, делящееся на 9, равно 98757 и содержит повторяющиеся цифры. Последовательно уменьшая это число на 9, получаем числа 98748, 98739, 98730, 98721. Первые два из них также содержат повторяющиеся цифры. Третье состоит из различных цифр, но поскольку $98730 = 90 + 180 \cdot 548$, то его тангенс не определён. Число $x = 98721$ также состоит из различных цифр. Если взять, например, $y = 54036$, то получим $x - y = 44685 = 45 + 180 \cdot 248$, поэтому число 98721 искомое.

4. *Ответ.* $(\operatorname{arctg} \sqrt{2}; 60°]$.

Решение. Пусть K — середина стороны AC, $AC = b$ и $BK = m$. Тогда прямые KC_1 и KA_1 касаются окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1, так как углы, отмеченные на рисунке слева одинаковым образом, равны. По усло-



вию точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1. Поэтому $(b/2)^2 = KC_1^2 = KM \cdot KB = m/3 \cdot m$, так как точка M делит медиану BK в отношении $2:1$. Отсюда $m = \sqrt{3}b/2$, и при фиксированном b точка B лежит на окружности с центром K и радиусом $\sqrt{3}b/2$. В одном из положений получается точка B' — вершина правильного треугольника $AB'C$. Получаем картинку, изображённую на рисунке справа.

Точка B лежит на дуге B_1B_2 большей окружности, так как треугольник ABC остроугольный. При этом угол B меняется в достаточно малом диапазоне: от $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, не включая (это наименьшее значение соответствует точкам B_1 и B_2 и прямоугольному треугольнику ABC с катетами b и $b/\sqrt{2}$), до 60° (это наибольшее значение угла B, поскольку две окружности на рисунке справа касаются внутренним образом, и поэтому $\angle ABC < \angle AB'C$ при $B \neq B'$). В силу непрерывности угла ABC при движении точки B по дуге $B'B_2$ любое промежуточное значение из интервала $(\operatorname{arctg}\sqrt{2};\, 60^\circ)$ соответствует некоторому положению B'' точки B. Для построенного треугольника $AB''C$ точка M будет лежать на окружности, описанной около треугольника A_1BC_1, так как будет выполнено соотношение $KC_1^2 = KM \cdot KB$.

Комментарий. Соотношение $(b/2)^2 = m^2/3$ можно получить и другим способом. Если D — точка, симметричная B относительно точки K, то $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $\angle DAH = \angle DCH = 90^\circ$, и, кроме того, $\angle DMH = 180^\circ - \angle BMH = 90^\circ$. Поэтому точки A, C и M лежат на окружности, построенной на DH как на диаметре. Следовательно, $AK \cdot KC = MK \cdot KD$, откуда и следует требуемое соотношение.

5. *Решение.* Пусть окрашенная сфера S имеет центр O, и пусть S_i — полусферы, окрашенные в i-й цвет, $i = 1, \ldots, 5$. Пусть A_i — срединная точка полусферы S_i: $A_i \in S_i$ и плоскость, проходящая через граничную окружность полусферы S_i, перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OA_i}$.

Выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_5$ есть выпуклый многогранник M с вершинами $A_1, \ldots, A_5$. Покажем, что этот многогранник содержит точку O. Действительно, если $O \notin M$, то найдется такая плоскость α, проходящая через O, что M лежит строго внутри одного из полупространств, на которые α делит все пространство. Тогда для точки $P \in S$, лежащей в другом полупространстве и такой, что $\overrightarrow{OP} \perp \alpha$, все скалярные произведения $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA_i}$ отрицательны, откуда точка P не принадлежит никакой полусфере S_i, а значит, не покрашена.

Принадлежность $O \in M$ в свою очередь означает, что O принадлежит одному из тетраэдров, образованных какими-то четырьмя точками из $A_1, \ldots, A_5$ (M есть объединение таких тетраэдров). Пусть, без ограничения общности, точка O принадлежит тетраэдру с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4. Это означает, что сфера S покрашена первыми четырьмя красками: если $A \in S$ и $A \notin S_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA_i} < 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, то есть весь тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ лежит строго в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через O перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OA}$, и не может содержать точку O.

Комментарий редактора. Доказывать, что точка O внутри многогранника M действительно лежит в одном из указанных тетраэдров, можно следующим образом. Пусть луч, выходящий из точки A_1 и проходящий через точку O, пересекает дальше границу многогранника в точке Q. Поскольку точка Q лежит на одной из граней многогранника, она принадлежит треугольнику с вершинами в каких-то трех из исходных точек, A_i, A_j, A_k. А значит, O принадлежит тетраэдру $A_1A_iA_jA_k$. (Само это утверждение является частным случаем *теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке*: любая точка n-мерного пространства, принадлежащая выпуклой оболочке нескольких точек, принадлежит и выпуклой оболочке не более чем $n+1$ из этих точек.)

6 класс (4875 работ)

	1	2	3	4	5	6
8				44		460
7				7	19	0
6			53	24	17	0
5			13	25	9	0
4		868	14	9	20	3
3	2959	437	29	265	63	0
2	2	82	86	81	34	0
1	1	327	83	397	74	0
0	1913	3161	4597	4023	4639	4412

7 класс (3133 работы)

	1	2	3	4	5	6
10					22	2
9					0	0
8			47	80	0	1
7			10	2	0	1
6		492	4	15	0	0
5		16	15	0	1	2
4	1444	0	733	0	0	2
3	105	0	6	48	0	0
2	36	0	0	10	0	7
1	237	0	507	208	0	241
0	1311	2625	1811	2760	3110	2877

8 класс (1299 работ)

	1	2	3	4	5	6
$+$	736	163	72	252	34	11
$\pm$	3	16	2	33	2	1
$\mp$	0	182	4	29	7	15
$-$	338	747	591	699	535	521
0	222	191	630	286	721	751

9 класс (*943 работы*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	273	188	54	36	9	2
$\pm$	119	12	9	4	4	0
$\mp$	143	31	11	9	39	1
$-$	408	712	869	894	892	940

10 класс (*811 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	246	68	157	8	8	4
$\pm$	9	1	9	3	2	2
$\mp$	2	30	0	22	6	10
$-$	255	305	287	466	507	237
0	299	407	358	312	288	588

11 класс, первый день (*662 работы*)

	1	2	3а	3б	4	5	6а	6б
$+$	404	304	248	148	174	37	49	9
$\pm$	49	16	7	27	65	5	5	2
$+/2$	0	0	0	0	0	0	9	0
$\mp$	30	16	9	20	56	11	7	3
$-$	179	326	398	467	367	609	592	648

11 класс, второй день (*262 работы*)

	1	2	3	4	5
$+$	131	189	31	8	8
$\pm$	4	7	7	5	1
$\mp$	0	5	97	15	7
$-$	127	61	127	234	246

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета. Согласно второму (2017) отчету Международного экспертного совета факультета, включающего филдсовских лауреатов П. Деліня, С. Смирнова и других выдающихся математиков: «Совет повторно оценивает общий уровень научных исследований на факультете как выдающийся, как в отношении объема, так и в отношении качества. Факультет удерживает лидирующую позицию среди математических факультетов страны».

На старших курсах студенты выбирают индивидуальные учебные планы, позволяющие глубоко изучить заинтересовавшую область чистой математики или ее приложений. Благодаря этому выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финансах и любых других наукоемких приложениях.

В 2017 г. на факультете открылась новая образовательная программа, совместная с Центром педагогического мастерства, ориентированная на подготовку высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Образовательная миссия факультета состоит в подготовке специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук, инженеров по программному обеспечению для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. Летом 2018 состоится первый набор на англоязычную программу двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики. Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из научных институтов, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители международных чемпионатов по программированию ACM. Магистерские программы факультета реализуются совместно со Сбербанком, Сколтехом, Школой анализа данных Яндекса, Институтом проблем передачи информации и Институтом системного программирования РАН.

На факультете шесть научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — алгоритмическая теория игр, применение методов машинного обучения и обработка данных на эксперименте Большого адронного коллайдера, проект по искусственному интеллекту в совместной лаборатории с Samsung, разработки в области медицинской информатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих мировых научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Уникальная научно-образовательная Школа, созданная в 2016 году в Московском физико-техническом институте. В ее состав входят факультет инноваций и высоких технологий (ФИВТ), факультет управления и прикладной математики (ФУПМ), ряд современных лабораторий.

ФИВТ — признанный лидер в области образования и науки на стыке математики, программирования и computer science. На ФИВТ представлены уникальные учебные планы по математике, в которых традиционное фундаментальное математическое образование подкреплено не имеющим аналогов набором курсов по дискретной математике: комбинаторике, теории графов, логике и теории алгоритмов, теории чисел, дискретным функциям, дискретному анализу, дискретной оптимизации.

ФУПМ — сильнейший факультет в области образования и науки на стыке математики, физики, механики и информационных технологий. На ФУПМ за счет правильного сочетания лучшей в стране программы по физике и современных математических курсов закладываются основы для исследований в области математического моделирования, вычислительной математики, механики, оптимизации, статистики и стохастики.

На факультетах Школы ведется большая научная и исследовательская работа, к которой студенты активно привлекаются уже на ранних курсах. По окончании факультета студент имеет широкий спектр перспектив — занятия чистой наукой, прикладные исследования, аналитика и разработка в крупнейших компаниях России и мира, а также в лабораториях Школы и в сильнейших институтах Российской академии наук.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА В СПбГУ

В 2015 году Санкт-Петербургский государственный университет открыл новое направление бакалавриата «Математика», которое сразу завоевало популярность: в 2015, 2016, 2017 году его выбрало наибольшее число победителей и призеров Всероссийской олимпиады школьников по математике среди всех образовательных программ России.

В работу со студентами вовлечён выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, который обеспечивает подготовку во всех направлениях современной математики — программа курируется Советом, в который входят ведущие российские и зарубежные ученые (председатель Совета — филдсовский лауреат С. К. Смирнов). Программу отличает включение современных научных достижений, большое количество курсов по выбору студента и возможность индивидуальных образовательных траекторий. Теоретическая информатика в рамках программы рассматривается как часть математики. Студентам предоставляется возможность выбора обучения по двум блокам «Математика и теоретическая информатика» и «Математика, алгоритмы и анализ данных». Представители компании Яндекс участвуют в разработке курсов, предлагают курсовые работы и проекты, связанные с актуальными вопросами обработки больших данных.

Обучение происходит в историческом центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, где расположена и часть общежитий. Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораторией им. П. Л. Чебышева. В рамках реализации совместного проекта «Математическая прогрессия» СПбГУ и ПАО «Газпромнефть» выделяются средства для поездок лучших студентов на школы и конференции, а также стипендии для победителей и призеров Всероссийской олимпиады школьников, а при дальнейшем обучении — для наиболее успевающих студентов.

Веб-сайт бакалавриата: `http://math-cs.spbu.ru/`

E-mail: `math-cs@spbu.ru`

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru

www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ИНТЕРНЕТ-БИБЛИОТЕКА ВИТАЛИЯ АРНОЛЬДА

ilib.mccme.ru

Замечательные книги, бывшие в течение десятков лет настольными для многих школьных учителей математики, руководителей кружков, школьников, интересующихся точными науками, стали в последние годы физически недоступны читателям (несмотря на большие тиражи, издания давно стали библиографической редкостью, недоступной, к сожалению, в большинстве библиотек; переиздать все эти книги — непростая техническая и финансовая задача).

Понимая (и не понаслышке зная) эту ситуацию, мы решили собрать электронные версии любимых книг и журналов, чтобы те, кому это нужно и интересно, могли уже сейчас читать, решать задачи, обсуждать идеи...

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»

zadachi.mccme.ru

Более 7500 задач по планиметрии и 2500 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

ШЕСТНАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 15 апреля 2018 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступающих в городских математических олимпиадах, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Всероссийской олимпиады по геометрии памяти Игоря Федоровича Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится в конце июля 2018 года в г. Дубне под Москвой.

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте

olympiads.mccme.ru/ustn

Восемнадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»,
имени Виталия Арнольда

пройдет с 19 по 30 июля 2018 года в Дубне (на базе дома отдыха «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 10 мая анкету участника.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали члены-корреспонденты РАН Л. Д. Беклемишев, А. А. Гайфуллин, А. Г. Кузнецов, Д. О. Орлов, И. А. Панин, В. Ю. Протасов, а также И. В. Аржанцев, А. П. Веселов, В. А. Клепцын, Г. Ю. Панина, М. А. Раскин, Е. Ю. Смирнов, А. Б. Сосинский, В. А. Тиморин, И. А. Чельцов и другие.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2018 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета `dubna@mccme.ru`

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условия задач • 3

Решения задач

6 класс • 11
7 класс • 15
8 класс • 18
9 класс • 25
10 класс • 31
11 класс, первый день • 36
11 класс, второй день • 42

Статистика решения задач • 46

LXXXI Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 25.03.2018 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объем 3,5 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04