Департамент образования г. Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской области
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский центр непрерывного математического образования
Московский институт открытого образования
Московское математическое общество

LXIX
МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(МОСКОВСКАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

Москва — 2006

Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии
по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада
или по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону (495) 241–12–37.

Председатель оргкомитета

чл.-корр. РАН Д. В. Трещёв

Сборник подготовили:

*А. В. Акопян, В.Б.Алексеев, В. Д. Арнольд, М. А. Берштейн,
А. Д. Блинков, И. И. Богданов, Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев,
А. А. Гаврилюк, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская,
А. А. Заславский, М. Э. Казарян, А. Я. Канель-Белов, А. Л. Канунников,
А. К. Ковальджи, О. Н. Косухин, Ю. Г. Кудряшов, А. К. Кулыгин,
С. В. Маркелов, П. И. Митричев, Н. М. Нетрусова, В. С. Панфёров,
Д. А. Пермяков, И. В. Раскина, И. Н. Сергеев,
А. Б. Скопенков, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян,
Е. А. Чернышёва, И. А. Шейпак, И. В. Ященко.*

Рисунки выполнили:

Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев, Е. С. Горская, М. Ю. Панов.

Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке
Департамента образования г. Москвы, Московского института
открытого образования, фирмы «НИКС».

LXIX Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения.

Техн. редактор *Д. Н. Вельтищев.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 6/III 2006 года.
Формат бумаги $60 \times 90\, {}^{1}\!/_{16}$. Объём 2,00 печ. л. Печать офсетная.
Гарнитура Computer Modern. Тираж 3000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–05–00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Доктор Айболит раздал четырём заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон — на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону? [3 балла] (*А. Хачатурян*)

2. Разрежьте фигуру, изображённую на рис. 1, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. [4 балла] (*С. Маркелов*)

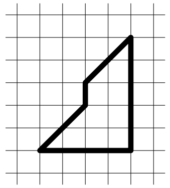

Рис. 1

3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.) [5 баллов] (*А. Ковальджи*)

4. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.) [5 баллов] (*Т. Гейдер, А. Хачатурян*)

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растёт четыре груши, а ещё есть яблони, причём они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если Вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так. [9 баллов] (*А. Ковальджи, А. Хачатурян*)

6. Пять футбольных команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда? [8 баллов] (*А. Заславский*)

7 КЛАСС

1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка? [4 балла] (*А. Ковальджи, И. Раскина*)

2. Разрежьте пятиугольник, изображённый на рис. 2, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части. [5 баллов] (*С. Маркелов*)

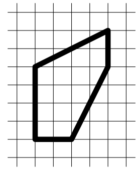

Рис. 2

...Вчера мой кот взглянул на календарь...
А. Чёрный

3. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рис. 3) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа? [5 баллов] (*Н. Нетрусова*)

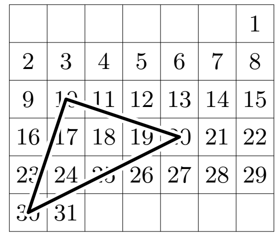

Рис. 3

4. Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: 2006 : 17 = 118. Назовите:

а) первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено [2 балла]; б) последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено. [5 баллов] (*Фольклор*)

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. [7 баллов] (*А. Ковальджи, А. Хачатурян*)

6. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а) 8×9 клеток? [4 балла]; б) 8×10 клеток? [7 баллов] (*И. Раскина*)

8 КЛАСС

1. В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а также что участников, решивших

- хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;
- хотя бы 2 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3;
- хотя бы 3 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4;
- хотя бы 4 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5;
- хотя бы 5 задач, в 4 раза больше, чем решивших все 6.

Сколько школьников не решили ни одной задачи? (*А. Заславский*)

2. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечётно? (*И. Богданов*)

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные прямоугольные (стороны AB и A_1B_1 — гипотенузы). Известно, что точка C_1 лежит на стороне BC, точка B_1 лежит на стороне AB, а точка A_1 лежит на стороне AC. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$. (*А. Хачатурян*)

4. Девять одинаковых по виду монет расположены по кругу. Пять из них настоящие, а четыре — фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые — одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты? (*Р. Женодаров*)

5. Серёжа придумал фигуру, которую легко разрезать на две части и сложить из них квадрат (см. рис. 4). Он утверждает, что это можно сделать ещё одним способом. Найдите этот способ. (*С. Маркелов*)

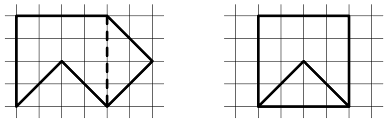

Рис. 4

6. Каждую неделю Ваня получает ровно одну оценку («3», «4» или «5») по каждому из семи предметов. Он считает неделю удачной, если количество предметов, по которым оценка улучшилась, превышает количество предметов, по которым оценка ухудшилась, хотя бы на два. Оказалось, что n недель подряд были удачными, и в последнюю из них оценка по каждому предмету в точности совпала с оценкой первой недели. Чему могло равняться число n? (Найдите все варианты.) (*Т. Караваева*)

9 КЛАСС

1. Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за n дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно? (*Фольклор*)

2. На олимпиаде $m > 1$ школьников решали $n > 1$ задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу. (*Б. Френкин*)

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$. Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке. (*А. Гаврилюк*)

4. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент. (*М. Малкин*)

5. Назовем *тропинкой* замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Приведите пример тропинки и такой точки M на ней, что любая прямая, проходящая через M, *делит тропинку пополам*, то есть сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости. (*С. Маркелов*)

6. Учитель заполнил клетчатую таблицу 5×5 различными целыми числами и выдал по одной ее копии Боре и Мише. Боря выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее число из оставшихся, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т. д. Миша производит аналогичные операции, каждый раз выбирая наименьшие числа. Может ли учитель так заполнить таблицу, что сумма пяти чисел, выбранных Мишей, окажется больше суммы пяти чисел, выбранных Борей? (*С. Токарев, А. Эвнин*)

10 КЛАСС

1. Один из двух приведённых квадратных трехчленов имеет два корня, меньших тысячи, другой — два корня, больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень, меньший тысячи, а другой — больший тысячи? (*Б. Френкин*)

2. Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный? (*Б. Френкин*)

3. Можно ли замостить всё пространство равными тетраэдрами, все грани которых — прямоугольные треугольники? (*С. Маркелов*)

4. В коробке лежат карточки, занумерованные натуральными числами от 1 до 2006. На карточке с номером 2006 лежит карточка с номером 2005, и т. д. до 1. За ход разрешается взять одну верхнюю карточку (из любой коробки) и переложить ее либо на дно пустой коробки, либо на карточку с номером на единицу больше. Сколько пустых коробок нужно для того, чтобы переложить все карточки в другую коробку? (*А. Канель-Белов*)

5. Натуральное число n таково, что числа $3n+1$ и $10n+1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n+11$ составное. (*Р. Женодаров*)

6. Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A'. Точки B' и C' строятся аналогично. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой. (*А. Акопян*)

11 КЛАСС

1. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, все члены которой принадлежат отрезку $[0; 3\pi/2]$, если числа $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ и $\cos\alpha_3$, а также числа $\sin\alpha_3$, $\sin\alpha_4$ и $\sin\alpha_5$, в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии? (*По мотивам А. Канунникова*)

2. Найти все несократимые дроби a/b, представимые в виде $\overline{b{,}a}$ (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a). (*И. Сергеев*)

3. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что она бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал. (*И. Сергеев*)

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял

другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого? (*О. Косухин*)

5. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найти геометрическое место середин оснований таких треугольников. (*В. Алексеев*)

6. Все имеющиеся на складе конфеты разных сортов разложены по n коробкам, на которые установлены цены в $1, 2, \ldots, n$ у. е. соответственно. Требуется купить такие k из этих коробок наименьшей суммарной стоимости, которые содержат заведомо не менее k/n массы всех конфет при одном лишь условии, что масса конфет в любой коробке не превосходит массы конфет в любой более дорогой коробке.

а) Какие коробки следует купить при $n = 10$ и $k = 3$?

б) Тот же вопрос для произвольных натуральных $n \geqslant k$. (*И. Сергеев*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Ответ: 503 таблетки.

Решение. Пока звери не съели лекарство, заберём одну таблетку у носорога, две у бегемота и три у слона. Теперь у всех четверых поровну. Забрали мы 6 таблеток, то есть осталось их 2000 — по 500 у каждого. У слона забрали 3 таблетки, то есть Айболит прописал слону 503 таблетки.

2. Ответ: Искомый разрез показан на рис. 5.

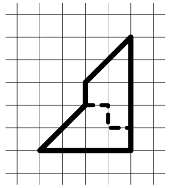

Рис. 5

3. Ответ: На 3-й этаж.

Решение. Если на этаже не более трёх квартир, то в десяти подъездах их не более, чем $10 \cdot 9 \cdot 3 = 270$, то есть в 10-м подъезде квартиры № 333 не будет. Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее, чем $9 \cdot 9 \cdot 5 = 405$ квартир, то есть искомая квартира будет не в десятом подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$ квартиры. Тогда в десятом подъезде квартиры начинаются с 325-й. На втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем — с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.

4. П е р в ы й с п о с о б. Пусть Таня нальёт из полного малого кувшина речную воду в большой, а затем наполнит малый и из него дольёт большой доверху. Далее Тане надо опорожнить большой сосуд и вылить в него остаток из малого. Если малый был на 3 литра, то сейчас в большом 1 литр, иначе — 3 литра. Теперь пусть Таня снова попытается перелить воду из полного малого кувшина в большой. Если это ей удастся, то малый был трёхлитровым, если вода польётся через край, — четырёхлитровым.

В т о р о й с п о с о б. Если бы у Тани большой кувшин вмещал 10 литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды. Если вода польётся через край, то малый на 4 литра, если нет, то на 3. С пятилитровым кувшином такая проверка возможна, если Таня опорожнит пятилитровый кувшин, когда тот заполнится.

5. Возможны различные расстановки яблонь и груш, например, такая, как показана на рис. 6а. Наибольшее число яблонь можно поместить, если груши растут достаточно густо. Например, если посадить груши в ряд через 5 метров, то найдётся место для 12 яблонь (см. рис. 6б).

Докажем, что больше двенадцати яблонь быть не может. В самом деле, рассмотрим две какие-то груши. На расстоянии 10 метров от них

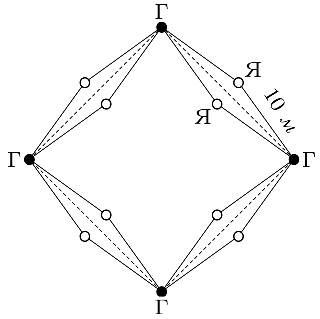

Рис. 6а

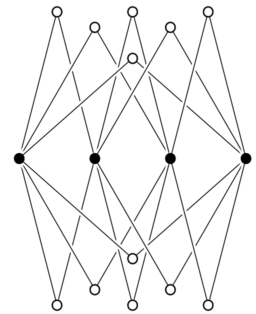

Рис. 6б

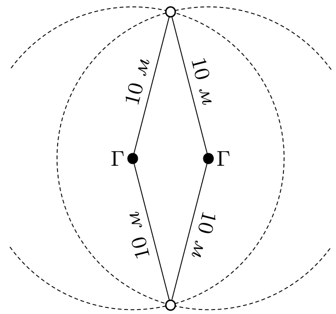

Рис. 6в

может быть только две яблони — одна по одну сторону от линии груш, другая — по противоположную (см. рис. 6в). Поэтому каждая пара груш «обслуживает» не более чем две яблони. Так как пар груш ровно шесть (пересчитайте!), то максимальное число яблонь равно 12.

6. Каждая команда провела 4 игры. Ясно, что первая команда один раз сыграла вничью, а остальные игры проиграла. Вторая имеет две ничьи и два поражения. Третья команда пять очков на одних ничьих набрать не могла, стало быть, она один раз выиграла, кроме того, у неё две ничьи и поражение. Четвёртая команда победила два раза (если бы один, то ей пришлось бы набрать в трёх играх на одних ничьих 4 очка, что невозможно). Также у этой команды есть ничья и поражение. В итоге первые четыре команды выиграли 3 раза, а проиграли 7 раз. Однако число побед должно равняться числу поражений. Значит, 4 раза они проиграли пятой команде, и у той 12 очков. Нетрудно привести пример турнира, где такое распределение очков возможно. Пусть пятая команда выиграла у всех, четвёртая — у первой и второй, третья — у первой, а все остальные игры закончились вничью. Тогда у каждой команды будет названное число очков.

7 КЛАСС

1. Ответ: $\frac{6}{7}$ и $\frac{1}{7}$.

Решение. Треть доли Пуха увеличила втрое порцию Пятачка, то есть сама была вдвое больше неё. Значит, вся доля Пуха была в 6 раз больше доли Пятачка, то есть у Пуха было вначале $\frac{6}{7}$ торта, а у Пятачка — $\frac{1}{7}$.

2. Ответ: Искомый разрез показан на рис. 7.

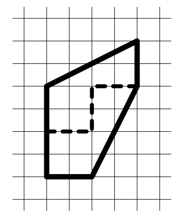

Рис. 7

3. Ответ: Наташа права.

Решение. Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. При этом существует всего два существенно различных варианта расположения треугольника 10-20-30 (см. рис. 8 и рис. 3), все остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника. Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30-9-10 угол 9 прямой (см. рис. 8), и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10-13-20. Ясно, что стороны 9-30 и 10-13 равны; аналогично, равны стороны 9-10 и 13-20. Поэтому треугольники 9-30-10 и 13-10-20 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезки 10-30 и 10-20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9-10-30 равна 180° − − 90° = 90°. Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развёрнутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9-10-30. Значит, угол 10 тоже равен 90°. Итак, треугольник 10-20-30 является равнобедренным прямоугольным.

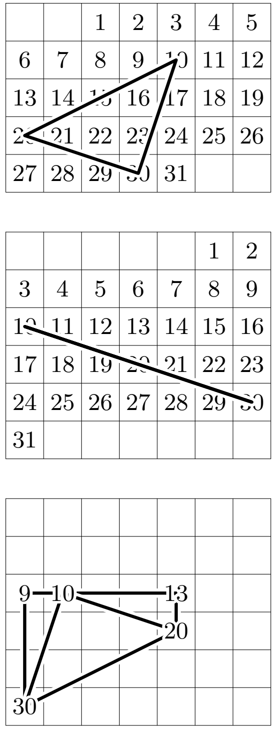

Рис. 8

4. Ответ: а) 1; б) 1989.

Решение. а) Первый матпраздник был в 1990 году. Ясно, что год его проведения делится на его номер, потому что номер равен единице.

б) Пусть N — номер матпраздника. Тогда год его проведения равен $(2006 - 17) + N = 1989 + N$. Пусть год проведения делится на номер, то есть $1989 + N$ делится на N. Значит, 1989 делится на N. Поскольку мы ищем наибольшее N, то нужно взять $N = 1989$.

5. Ответ: Например, сад может выглядеть так, как показано на рис. 9.

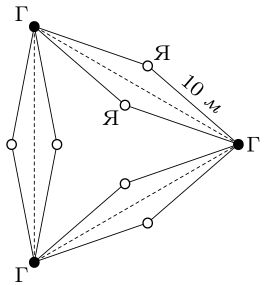

Рис. 9

Комментарий. На самом деле, можно так расположить груши и яблони, что яблонь будет во много раз больше, чем груш. Расставим груши на одной прямой через равные расстояния так, чтобы расстояние между первой и последней не превосходило 20 метров. После этого берём любые две груши (назовём их A и B) и ставим яблоню в вершине равнобедренного треугольника с основанием AB и боковыми сторонами длиной 10 метров. Ещё одну яблоню ставим

симметрично этой яблоне относительно линии груш (см. рис. 10). Значит, яблонь можно поставить вдвое больше числа пар груш, а оно равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Мы сможем поставить $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$ яблонь. Заметим, что в этом случае отношение числа яблонь и числа груш равно $\frac{n(n-1)}{n} = n - 1$, значит, выбирая достаточно большие n, это отношение можно сделать сколь угодно большим.

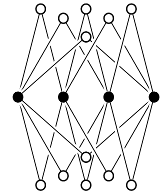

Рис. 10

6. Ответ: а) Да; б) Нет.

Решение. а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (см. рис. 11). Далее будем красить столбцы через один, начиная закраску от покрашенного ряда (см. рис. 12). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

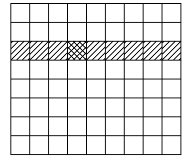

Рис. 11

Комментарий. Данный способ покраски обобщается на тот случай, когда хотя бы одна из сторон прямоугольника имеет нечётную длину. Повернём прямоугольник так, чтобы его ширина была нечётной, а после этого повторим только что описанную процедуру: красим ряд нечётной длины, и так далее.

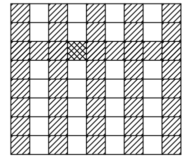

Рис. 12

б) Первый способ. Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на 1 (если таких соседей было 3), то есть полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено чётное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечётен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника 8×10 равен 18, то есть чётный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Второй способ. Докажем, что для чётных m и n прямоугольник $m \times n$ нельзя закрасить ни при какой начальной закрашенной клетке. Посмотрим, сколько всего сторон имеют клеточки (включая внешние). Сторон клеточек $m(n+1) + n(m+1) = 2mn + m + n$, то есть чётное число. Предположим, что мы смогли закрасить весь прямоугольник. Будем называть сторону *закрашенной*, если закрашена хотя бы одна из прилегающих к ней клеток. Вначале закрашено 4 стороны. На каждом шаге закрашивается 1 или 3 стороны. Всего таких шагов нужно сделать $nm - 1$. Поскольку m и n чётны, то число $nm - 1$ нечётно. Итак, если бы мы смогли закрасить весь прямоугольник, то было бы закрашено 4+(нечётное число раз по нечётному числу) сторон, то есть нечётное число, но, как мы уже сосчитали, таких сторон чётное число, значит, весь прямоугольник закрасить нельзя.

8 КЛАСС

1. Ответ: 982 школьника.

Решение. Пусть все задачи решило n школьников. Тогда хотя бы 5 задач решило $4n$ человек, хотя бы 4 задачи — $16n$ человек, ..., хотя бы одну задачу — $1024n$ человек. Следовательно, $1024n \leqslant 2006$, откуда получаем $n \leqslant 2006 : 1024 < 2$. Поскольку Вася решил ровно одну задачу, $1024n > 0$, откуда $n > 0$. Поэтому $n = 1$; хотя бы одну задачу решило 1024 школьника, а значит ни одной задачи не решило $2006 - 1024 = 982$ школьника.

2. Ответ: 7 чисел.

Решение. Приведём сначала пример таблицы, в которой ровно семь ненулевых чисел:

0	1	−1
−1	2	1
1	−1	0

Докажем, что меньшим количеством ненулевых чисел обойтись нельзя.

Если в таблице ровно одно ненулевое число, то сумма чисел в строке, содержащей это число, отлична от нуля.

Допустим, в таблице ровно три ненулевых числа. Если все они стоят в одной строке, то сумма чисел в любом столбце отлична от нуля. Если не все они стоят в одной строке, то в какой-нибудь строке стоит ровно одно ненулевое число, и сумма чисел в этой строке не равна нулю.

Допустим, в таблице ровно пять ненулевых чисел. Тогда в таблице стоит 4 нуля, значит какие-то два нуля стоят в одной строке. Поскольку сумма чисел в этой строке равна нулю, все числа в этой строке — нули. Осталось заметить, что в столбце, в котором стоит оставшийся ноль, ровно два нуля, что невозможно.

3. П е р в ы й с п о с о б. Обозначим CC_1 за x, CA_1 — за y. Треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный, поэтому $B_1C_1 = A_1C_1$.

Далее, $\angle CA_1C_1 + \angle CC_1A_1 = 90°$, так как $\angle C = 90°$, и $\angle BC_1B_1 + \angle CC_1A_1 = 90°$, так как $\angle C_1 = 90°$. Следовательно, $\angle CA_1C_1 = \angle BC_1B_1$. Опустим перпендикуляр B_1N на сторону BC. Треугольники B_1NC_1 и C_1CA_1 равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $B_1N = x$ и $NC_1 = y$. Треугольник BNB_1 — прямоугольный равнобедренный. Отсюда $NB = x$. По условию задачи $CB = CA$, $CB = y + 2x$ и $CA = y + AA_1$.

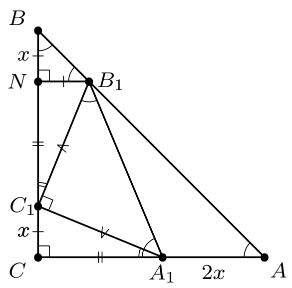

Рис. 13

Следовательно, $AA_1 = 2x = 2CC_1$.

В т о р о й с п о с о б. Пусть D — середина стороны A_1B_1. Тогда $\angle C_1DA_1 = 90°$. Следовательно, четырёхугольник CC_1DA_1 — вписанный, откуда $\angle DA_1C_1 = \angle DCC_1 = 45°$ и $\angle DC_1C = \angle DA_1A$. Таким образом, треугольники DC_1C и B_1A_1A подобны по двум углам. Коэффициент подобия равен $\frac{B_1A_1}{DC_1} = 2$, поэтому $AA_1 = 2 \cdot CC_1$.

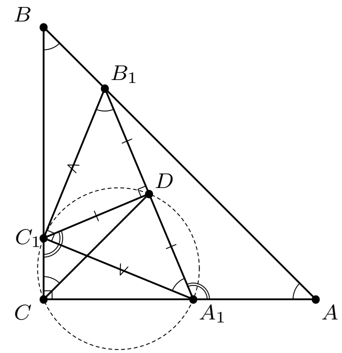

Рис. 14

4. Так как монет 9 и никакие две фальшивые не лежат рядом, то какие-то две настоящие монеты лежат рядом, а остальные монеты чередуются (см. рис. 15). Заметим, что достаточно найти две настоящие монеты, лежащие рядом (этим расположение остальных монет определяется однозначно). Начав с произвольной монеты, пронумеруем монеты подряд числами от 1 до 9. Взвешивать можно разными способами.

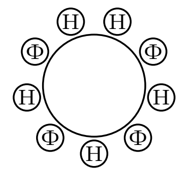

Рис. 15

П е р в ы й с п о с о б. Взвесим монеты 1 и 4. Возможны два случая:

- Монеты 1 и 4 весят одинаково. Взвесим монеты 2 и 3. Если 2 и 3 весят одинаково, то они настоящие, поскольку лежат рядом. Пусть одна монета тяжелее (фальшивая), будем считать, что это монета 2, тогда монеты 3, 1 и 4 настоящие. Монеты 3 и 4 — две настоящие рядом.

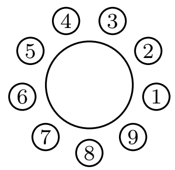

Рис. 16

- Монеты 1 и 4 весят по-разному. Пусть монета 4 тяжелее (фальшивая). Тогда монеты 5, 3 и 1 — настоящие, а монета 2 — фальшивая. Взвесим монеты 9 и 6. Если они одинаково весят, то 7 и 8 — настоящие. Если же какая-то из них настоящая, то мы находим две настоящих рядом.

В т о р о й с п о с о б. Разобьём монеты на три группы 147, 258, 369. В двух из них по одной фальшивой монете, а в ещё одной две фальшивые. Взвесим группы 147 и 258. Если одна из них перевесит, то в ней две фальшивые. Если равенство, то две фальшивые в оставшейся группе 369.

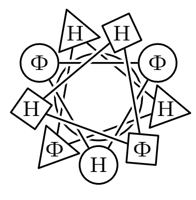

Рис. 17

После того как мы нашли группу, где две фальшивые, взвесим две монеты из этой группы. Если одна из них легче, то это и есть настоящая, а две другие — фальшивые. Если они равны, то они обе фальшивые. Две монеты, лежащие между найденными фальшивыми, — соседние настоящие.

Третий способ. Разобьём монеты на три группы 123, 456, 789. В двух из них по одной фальшивой, в ещё одной — две фальшивые. Взвесим группы 123 и 456. Если одна из чашек перевесила, то в ней две фальшивые. Если равенство, то две фальшивые в оставшейся группе 789. То есть мы нашли группу, в которой две фальшивые. В силу симметрии далее достаточно разобрать с случай, когда две фальшивые монеты среди монет 123. Так как по условию никакие две фальшивые монеты не стоят рядом, то монеты 1 и 3 фальшивые. Значит, монеты 9, 2 и 4 настоящие (см. рис. 19). Взвесим монеты 8 и 5. Если 8 тяжелее, то 5 настоящая, 4 и 5 две рядом стоящие настоящие, значит, 6 фальшивая, 7 настоящая, 8 фальшивая. Если 5 тяжелее, то аналогично 8 настоящая, 8 и 9 две рядом стоящие настоящие, значит, 7 фальшивая, 6 настоящая, 5 фальшивая. Наконец, если 5 и 8 одной массы, то они не могут обе быть настоящими, значит, они обе фальшивые, а 6 и 7 — обе настоящие.

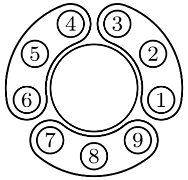

Рис. 18

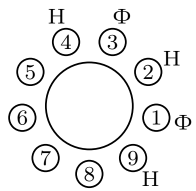

Рис. 19

5. Пример изображён на рис. 20 (важно, что режем не по клеточкам).

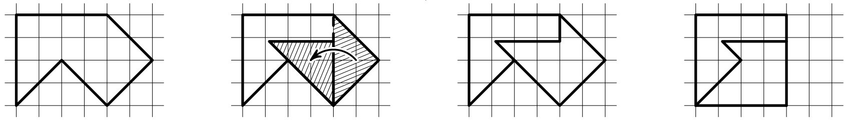
Рис. 20

6. Ответ: $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$.

Решение. Вычислим для каждой недели сумму Ваниных оценок за эту неделю. Посмотрим, как могла измениться сумма оценок на удачной неделе. Пусть оценки Вани ухудшились по x предметам. Тогда они улучшились хотя бы по $x + 2$ предметам. Следовательно, $x + (x + 2) \leqslant 7$, то есть $x \leqslant 2$. Сумма оценок за те предметы, за которые оценки улучшились, возросла хотя бы на $x + 2$, а сумма оценок за те предметы, за которые оценки ухудшились, уменьшилась не более, чем на $2x$. Поскольку $x \leqslant 2$, то $2x \leqslant x + 2$, то есть уменьшилась она не больше, чем увеличилась. Таким образом, сумма Ваниных оценок не уменьшается, причём сохраниться она может только если по двум предметам оценки ухудшились на 2, а по четырём улучшились на 1.

Так как в итоге сумма оценок не увеличилась, а каждую неделю не уменьшалась, то она не изменялась всё время наблюдения за успеваемостью. Следовательно, понижение оценки происходит всякий раз на 2 балла, а повышение — на 1 балл, то есть для каждого предмета повышений оценки произошло в два раза больше, чем понижений. Таким образом, количество изменений каждой оценки кратно трём.

Пусть Ваня наблюдал за своей успеваемостью n недель, не считая первой. Посмотрим, чему может быть равно n. Рассмотрим следующие случаи:

• Пусть n кратно трём. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при $n = 3$. Повторяя последние три недели k раз, получим пример для $n = 3k$.

первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	3	3	5
3-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

• Пусть $n = 3k + 1$. Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трём, а $n = 3k + 1$, то была хотя бы одна неделя, на которой эта оценка не изменилась. В эту неделю все остальные оценки изменялись. Поэтому по всем предметам оценки когда-либо менялись, и значит, есть неделя (для каждого предмета — своя), когда оценка по этому предмету осталась без изменений. Поскольку предметов 7, число недель не может быть меньше семи. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при $n = 7$. Добавляя по три недели из предыдущего случая, получим любое n вида $3k + 1$, большее семи.

первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	5	3	3
3-я неделя наблюдений	5	5	5	3	3	4	4
4-я неделя наблюдений	5	3	3	4	4	5	5
5-я неделя наблюдений	3	4	4	5	5	5	3
6-я неделя наблюдений	4	5	5	5	3	3	4
7-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

• Пусть $n = 3k + 2$. Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трём, а $n = 3k+2$, то было хотя бы две недели, на которых оценка по этому предмету не изменилась, а по остальным предметам оценка менялась. Аналогично предыдущему случаю, для каждого предмета есть хотя бы две недели, на которых оценка по этим предметам не менялась, а по всем остальным менялась, поэтому число недель не может быть меньше, чем 14.

Пример для $n = 14$ строится двукратным повторением примера для $n = 7$. Далее, очевидно, можно добавлять по три недели из примера первого случая.

Итак, n может быть любым натуральным числом, кроме 1, 2, 4, 5, 8 и 11.

9 КЛАСС

1. Ответ: $n = 37$.

Решение. Если в первый день Вася съест a конфет, то за n дней он съест

$$a + (a + 1) + \dots + (a + n - 1) = \frac{n(2a - 1 + n)}{2} \text{ конфет.}$$

Значит, $\frac{n(2a-1+n)}{2} = 777$. Следовательно, n делит $2 \cdot 777 = 1554$. Так как $1554 = n(2a - 1 + n) > n^2$, то $n < 40$. Но максимальное число n, меньшее 40 и делящее $1554 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$, равняется 37. Случай $n = 37$ действительно возможен при $a = 3$.

2. Если нашёлся школьник, не решивший ни одной задачи, то не будем его рассматривать. Затем, если есть задача, не решённая ни одним из школьников, то не будем её рассматривать. По-прежнему все школьники решили разное количество задач, все задачи решены разным количеством школьников. Пусть осталось m' школьников и n' задач. Тогда $m' \geqslant 1, n' \geqslant 1$. Если каждый из m' школьников решил от 2 до n' задач и все решили разное количество задач, то $m' \leqslant n' - 1$. Так как каждая из n' задач решена от 1 до m' школьниками, и все задачи решены разным количеством школьников, то $n' \leqslant m'$. Противоречие, значит требуемый школьник найдётся.

3. Рассмотрим окружности, описанные около данных прямоугольников. Обозначим вторую точку их пересечения через X. Тогда $\angle BXN = \angle BXK = 90°$. Значит точки N, X, K лежат на одной прямой, перпендикулярной BX. Кроме того, треугольники NAB и KLB равны. Тогда $\angle NXA = \angle NBA = \angle LBK = \angle LXK$, а значит, точки A, X, L также лежат на одной прямой. Аналогично, точки M, C, X лежат на одной прямой. Поэтому X — точка пересечения этих трех прямых.

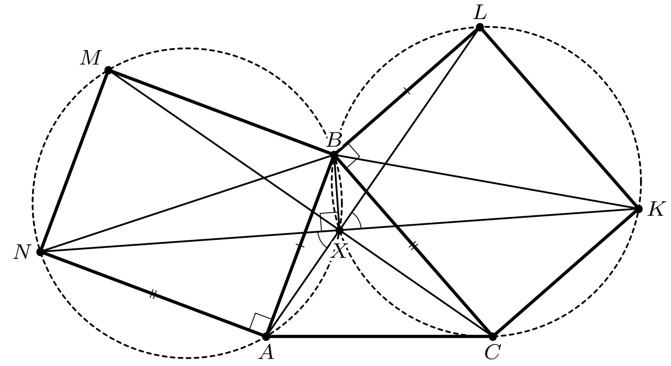

Рис. 21

4. Коэффициент при $x^{4 \cdot 2006}$ в полученном выражении равен 1. Коэффициент при нулевой степени равен значению выражения при $x = 0$, т.е. 2^{2006}. Сумма всех коэффициентов равна значению нашего выражения при $x = 1$, т.е. 2^{2006}. Значит, сумма первого и последнего коэффициентов больше суммы всех коэффициентов. Поэтому найдется отрицательный коэффициент.

5. На горизонтальном отрезке вниз построим полуокружность радиуса R, а вверх — две полуокружности радиуса $R/2$ до середины отрезка. Точка касания двух маленьких окружностей есть точка M. Проведём через точку M прямые AC и BD (см. рис. 22). Пусть K — центр окружности, на которой лежат точки C и D. Тогда длина дуги CD равна $R/2 \cdot \angle CKD = R/2 \cdot 2\angle CMD = R \cdot \angle AMB$ и равна длине дуги AB.

Рис. 22

6. Обозначим выбранные Борей числа по порядку a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, а выбранные Мишей — b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Достаточно доказать, что $a_k \geqslant b_{6-k}$ для любого k. Рассмотрим ситуацию, когда Боря выбрал $k-1$ число, а Миша выбрал $5 - k$ чисел. В Бориной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении $6 - k$ строк и $6 - k$ столбцов. В Мишиной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении k строк и k столбцов. Значит, найдутся строка и столбец, которые не вычеркнуты ни у Бори, ни у Миши, и пусть x — число на их пересечении. Тогда $a_k \geqslant x \geqslant b_{6-k}$.

10 КЛАСС

1. Ответ: Нет.

Решение. Первый способ. Схематически изобразим графики данных трёхчленов. Из условия следует, что каждый из этих трёхчленов при $x = 1000$ принимает положительное значение (см. рис. 23). Следовательно, и их сумма в этой точке положительна.

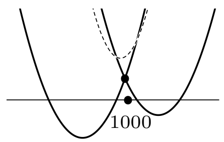

Рис. 23

График трёхчлена, являющегося суммой данных, также располагается ветвями вверх (он показан на рис. 23 пунктиром). Пусть один из его корней больше тысячи, а другой — меньше тысячи. Тогда число 1000 располагается между корнями, то есть значение суммы при $x = 1000$ отрицательно. Противоречие.

Второй способ. Параллельно перенесём графики данных трёхчленов на 1000 единиц влево. Эта операция эквивалентна замене в условии задачи 1000 на 0. Получим приведенные трёхчлены: $x^2 + p_1x + q_1$ с отрицательными корнями и $x^2 + p_2x + q_2$ с положительными корнями. Тогда по теореме Виета $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$. Сумма данных трехчленов имеет вид $2x^2 + (p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2)$, где $q_1 + q_2 > 0$, поэтому ее корни одного знака. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна.

2. Ответ: Нет, не может.

Решение. Первый способ. Пусть α, β и γ — углы одного из данных треугольников. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = \\ &= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \\ &= -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.\end{aligned}$$

Таким образом доказано, что равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ верно для углов любого треугольника. Но в остроугольном треугольнике тангенс каждого угла положителен, поэтому их произведение — положительно. В тупоугольном треугольнике тангенс тупого угла отрицателен, а два других тангенса положительны, поэтому произведение трех тангенсов отрицательно.

Второй способ. Так как наибольший угол в тупоугольном треугольнике больше, чем в остроугольном, а сумма углов одинакова, то один из углов остроугольного треугольника больше одного из углов тупоугольного. Пусть в остроугольном треугольнике это угол α. Другие два угла обозначим β и γ. В тупоугольном треугольнике обозначим выбранный угол α', другой острый угол — β', а тупой угол — γ'. Поскольку углы β', и $\pi - \gamma' > \beta'$ — острые, то в силу возрастания тангенса $\operatorname{tg}(\pi - \gamma') > \operatorname{tg}\beta'$, а это, учитывая тождество $\operatorname{tg}(\pi - \gamma') = -\operatorname{tg}\gamma'$, равносильно неравенству $\operatorname{tg}\gamma' + \operatorname{tg}\beta' < 0$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha' > \operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\gamma'.$$

Таким образом, сумма тангенсов углов в остроугольном треугольнике всегда больше, чем в тупоугольном. Следовательно, двух треугольников, указанных в условии задачи, не существует.

3. Ответ: Да.

Решение. Для этого надо взять тетраэдр $ABCD$, развёртка которого показана на рис. 24. В нём $CA = AB = BD$ и $\angle CAB = \angle CAD = \angle ABD = \angle CBD = 90°$. Возможны несколько способов замощения пространства такими тетраэдрами.

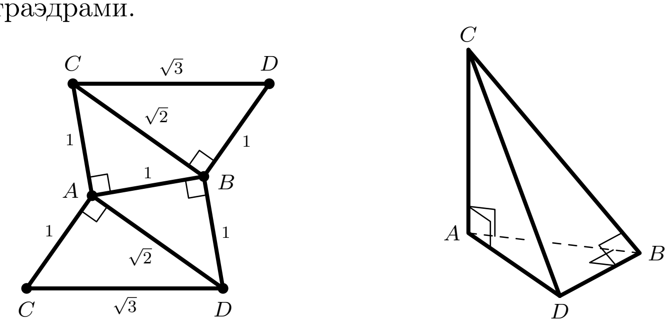

Рис. 24

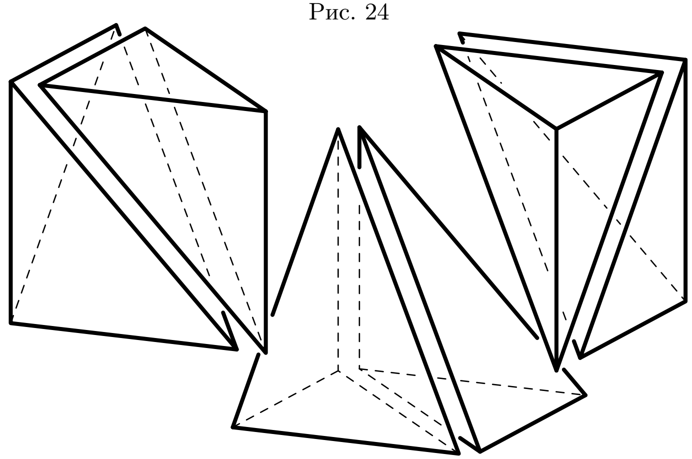

Рис. 25

Первый способ. Тетраэдр $ABCD$ и симметричный ему относительно плоскости ADC образуют четырехугольную пирамиду с квадратным основанием, одно из боковых ребер которой перпендикулярно основанию и равно его стороне (рис. 24). Из трех таких пирамид можно составить куб, как показано на рис. 25. Очевидно, что кубами пространство замостить можно.

Этот способ можно описать и по-другому. Введем в пространстве систему координат и рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$. Это будет подобный $ABCD$ тетраэдр с вершинами в точках $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$. Другие упорядочения значений координат дают еще пять таких же тетраэдров. Эти шесть тетраэдров заполняют единичный куб.

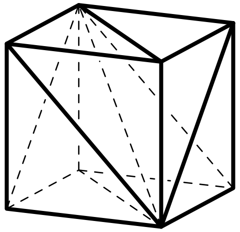

Рис. 26

Второй способ. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, образованную центром куба и его гранью. У нее есть четыре плоскости симметрии, разрезающие ее на 8 тетраэдров, подобных $ABCD$. Следовательно, куб можно разрезать на 48 таких тетраэдров.

Третий способ. Объединив тетраэдр $ABCD$ и симметричный ему относительно плоскости ABC, получим тетраэдр, основанием которого является равнобедренный прямоугольный треугольник, а высотой — боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла. Из двух таких тетраэдров, симметричных относительно общей боковой грани, составим тетраэдр с равнобедренным прямоугольным треугольником в основании и высотой, падающей в середину гипотенузы. Наконец, из двух таких тетраэдров можно составить тетраэдр, подобный $ABCD$. (Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать $ABCD$ по плоскости, проходящей через A, B и середину CD.) Таким образом, из 8 тетраэдров, равных $ABCD$, можно составить подобный им тетраэдр вдвое большего размера. Повторяя этот процесс, получим искомое замощение пространства.

4. Ответ: 11 коробок.

Решение. Ответ следует из общего факта: пусть количество карточек равно n, где $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ (n, k — натуральные числа); тогда требуется k пустых коробок. Сначала покажем следующее: k коробок достаточно, причем если $n = 2^{k-1}$, то не требуется использовать исходную коробку после того, как она освободится. При $k = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для некоторого натурального k.

Вначале пусть $n = 2^k$. Возьмем пустые коробки с номерами от 1 до $k+1$. По предположению индукции можно перенести верхние 2^{k-1} карточек в коробку номер k, используя коробки $1, \ldots, k$ и не используя

исходную коробку, которая еще не пуста. Аналогично переносим нижние 2^{k-1} карточек в коробку номер $k+1$, используя коробки $1, \ldots, k-1, k+1$. После этого подвергаем верхние карточки обратному перекладыванию, заменив исходную коробку на $(k+1)$-ю. В итоге все карточки будут переложены в коробку $k+1$, причем мы не использовали исходную коробку после того, как она освободилась.

Пусть теперь $2^k < n < 2^{k+1}$. Вначале переложим, как описано выше, 2^k карточек в коробку $k+1$, использовав коробки $1, \ldots, k+1$. Оставшиеся $n - 2^k < 2^k$ карточек по предположению индукции можно переложить в коробку k, использовав коробки $1, \ldots, k$. Теперь подвергнем «верхние» карточки обратному перекладыванию, заменив исходную коробку на k-ю.

Для дальнейшего заметим, что если используется минимально возможное количество коробок, то все они окажутся одновременно занятыми не позже, чем мы освободим исходную коробку. Действительно, пусть это неверно. Отметим в начальный момент какую-то пустую коробку i. Пусть на некотором шаге мы кладем в нее карточку. Так как по предположению какая-то коробка будет после этого пуста, то можно заменить i на эту коробку начиная с данного шага. Будем поступать так каждый раз, когда нужно класть карточку в коробку i. В итоге мы переложим нижнюю карточку в некоторую коробку j. После этого повторим все действия в обратном порядке, заменив исходную коробку на j. Карточки будут переложены в коробку j, а коробка i использована не будет, т. е. количество коробок можно уменьшить.

Теперь покажем, что при $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ потребуется не менее k коробок. При $k = 1, 2$ это тривиально. Пусть это верно для некоторого $k \geqslant 2$, и пусть $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Предположим, что можно обойтись k коробками. Разобьем исходную стопку карточек на верхнюю и нижнюю части, содержащие не менее чем по 2^{k-1} карточек. В силу доказанного выше, в некоторый момент потребуется занять «нижними» карточками k коробок уже для того, чтобы освободить исходную. «Верхние» карточки не могут при этом находиться в исходной коробке (до этого шага она еще не пуста, а верхняя из «нижних» карточек уже снята). Значит, они находятся в некоторой другой коробке i на самой верхней из «нижних» карточек (обозначим ее a). Так как «нижние» карточки занимают $k > 1$ коробок, то карточка a еще должна быть переложена, чтобы все они оказались в одной коробке. Для этого потребуется в некоторый момент занять «верхними» карточками k других коробок. В них не могут находиться «нижние» карточки (т. к. непосредственно под «верхней» карточкой может находиться лишь карточка a, а она еще находится в коробке i). Значит, все «нижние» карточки уже находятся в одной коробке — противоречие. Таким образом, потребуется не менее $k+1$ коробок.

5. Пусть $3n+1=a^2$, $10n+1=b^2$, где $a, b \in \mathbb{N}$, и пусть $29n+11$ равно простому числу p. Далее можно рассуждать разными способами.

Первый способ. Перемножим указанные равенства, в результате получим $30n^2+13n+1=(ab)^2$. Вычитая из этого равенства верное равенство $n^2+2n+1=(n+1)^2$, получим: $29n^2+11n=(ab)^2-(n+1)^2$. Отсюда $np=(ab-n-1)(ab+n+1)$. Хотя бы один из множителей в правой части делится на p и потому не меньше p. Во всяком случае $ab+n+1 \geqslant p$, откуда $ab \geqslant 28n+10$. Возведем это неравенство в квадрат: $(ab)^2 \geqslant 784n^2+560n+100$. С другой стороны, $(ab)^2=30n^2+13n+1$, что противоречит предыдущему. Утверждение доказано.

Второй способ. Найдём такие вещественные числа x и y, что выполнено равенство $x(3n+1)+y(10n+1)=29n+11$ для любого n. Из системы линейных уравнений $3x+10y=29$, $x+y=11$ получаем: $x=\frac{81}{7}$, $y=-\frac{4}{7}$. Таким образом, $\frac{81a^2-4b^2}{7}=29n+11$, или $(9a+2b)(9a-2b)=7p$. Заведомо $9a+2b>7$, откуда $9a+2b \geqslant p > 29n$. Так как $9a-2b>0$, то $18a>9a+2b>29n$, откуда $a>n$, $3n+1=a^2>n^2$, $n<3$. Непосредственно проверяется, что значения $n=1,2$ не подходят.

Комментарий. Условие задачи выполнено, например, при $n=8$, $n=96$.

6. Пусть P'_a, P'_b и P'_c — проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника. Докажем, что эти точки лежат на одной прямой. Действительно, $\angle PP'_cP'_a=\angle PBP'_a=\angle PAC=180^\circ-\angle PP'_cP'_b$. Первое и последнее равенства верны в силу того, что четырехугольники $PP'_aBP'_c$

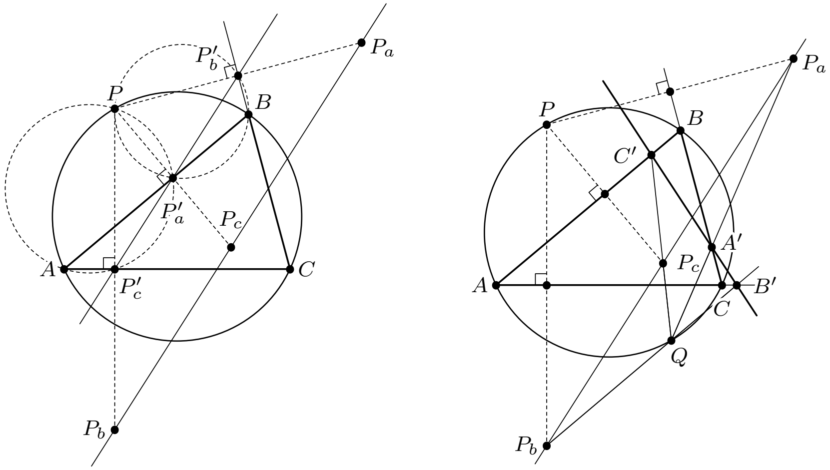

Рис. 27

и PP'_cP_bA вписанные. Полученная прямая называется *прямой Симсона* точки P относительно треугольника ABC (см. рис. 27). Следовательно, точки P_a, P_b и P_c также лежат на одной прямой, проходящей в два раза дальше от точки P, чем прямая Симсона. Аналогичное утверждение верно и для Q_a, Q_b и Q_c — точек, симметричных точке Q относительно сторон треугольника. Обозначим прямую, содержащую точки P_a, P_b и P_c, через l_p, а прямую, содержащую точки Q_a, Q_b и Q_c, — через l_q. Рассматриваемые в задаче точки A', B' и C' можно определить как точки пересечения пар прямых PQ_a и QP_a, PQ_b и QP_b, PQ_c и QP_b.

Пусть прямая, параллельная l_q и проходящая через P, пересекает l_p в точке X (см. рис. 28). Пересечение прямой, параллельной l_p и проходящей через Q, с прямой l_q обозначим через Y. Стороны треугольника PXP_a соответственно параллельны сторонам треугольника Q_aYQ, а значит, эти треугольники гомотетичны. Прямые PQ_a, P_aQ и XY должны проходить через центр этой гомотетии, то есть точку A'. Таким образом, точка A' лежит на прямой XY. Аналогично можно показать, что на этой прямой лежат точки B' и C'.

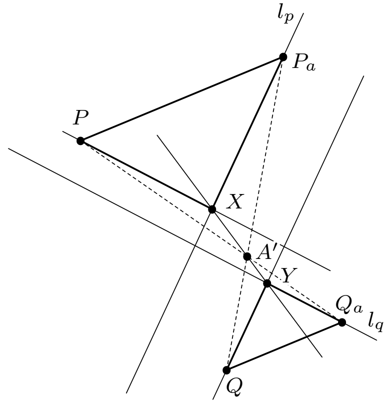

Рис. 28

11 КЛАСС

1. Ответ: $\pi/4$.

Решение. Для искомой разности δ возрастающей прогрессии

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in [0; 3\pi/2]$$

получаем $\delta \in (0; \pi/2)$ и $\cos\delta \neq 1$. Рассмотрим следующие два случая, один из которых непременно имеет место.

• $\alpha_3 \leqslant \pi$, тогда $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leqslant \pi$ и $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cos\alpha_3$, откуда $2\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1+\cos\alpha_3 = 2\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} = 2\cos\alpha_2\cos\delta$, поэтому $\cos\alpha_2=0$ и $\alpha_2=\pi/2$ (а значит, $\alpha_3 \geqslant \pi/2$, т.е. имеет место также и 2-й случай).

• $\alpha_3 \geqslant \pi/2$, тогда $\pi/2 \leqslant \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 \leqslant 3\pi/2$ и $\sin\alpha_3 > \sin\alpha_4 > \sin\alpha_5$, откуда $2\sin\alpha_4 = \sin\alpha_3+\sin\alpha_5 = 2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_5}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_5}{2} = 2\sin\alpha_4\cos\delta$, поэтому $\sin\alpha_4=0$ и $\alpha_4=\pi$ (а значит, $\alpha_3 \leqslant \pi$, т.е. имеет место также и 1-й случай).

Таким образом, оба случая имеют место, поэтому $\alpha_2 = \pi/2$ и $\alpha_4 = \pi$, откуда $\delta = \pi/4$.

2. Ответ: $a = 5$, $b = 2$.

Решение. Пусть натуральные числа a и b взаимно просты, а десятичная запись числа a имеет n знаков. Тогда условие задачи для них записывается в виде уравнения

$$a : b = \overline{b{,}a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = b + a \cdot 10^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad 10^n(a - b^2) = a \cdot b,$$

из которого следует, в частности, что $a > b$. В силу взаимной простоты чисел a и b, число $a - b^2$ не имеет общих делителей ни с a, ни с b, следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$a - b^2 = 1, \qquad 10^n = a \cdot b.$$

В силу все той же взаимной простоты чисел a и b (с учетом неравенства $a > b$), последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел $a = 10^n$, $b = 1$, а также $a = 5^n$ и $b = 2^n$. Первая пара при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение $10^n = 2$, которое, очевидно, не имеет решений. Вторая пара чисел a и b при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение

$$5^n - 4^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как его левая часть представляет собой возрастающую функцию от n, а правая — убывающую, то оно имеет не более одного корня, который угадывается: $n = 1$, откуда и находим единственную пару $a = 5$ и $b = 2$.

3. Ответ: Нет.

Решение. Разрежем конус по какой-либо образующей и изобразим на плоскости его развёртку, представляющую собой плоский угол A_0OA_1 величины α (рис. 29). След ленты на ней, изображающий первый виток, будет выглядеть, как полоса с параллельными краями, проходящая от стороны OA_0 к стороне OA_1. Приложим к этому углу еще одну развёртку конуса — угол A_1OA_2 той же величины α. Перейдя через сторону OA_1 нового угла, след ленты продолжит ту же полосу на второй развёртке, пока не дойдет до стороны OA_2, изобразив второй виток, и т. д.

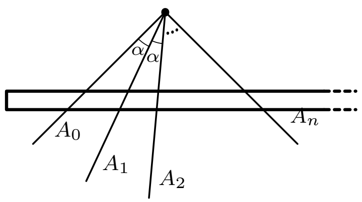

Рис. 29

Если лента делает n витков, причем $n > \pi/\alpha$, то полоса (по условию, не проходящая через точку O) пересекает лучи $OA_0, OA_1, \ldots, OA_n$, что невозможно, так как тогда $\pi > \angle A_0OA_n = n\alpha > \pi$. Поэтому число n витков ленты не превышает π/α, а значит, заведомо конечно.

Комментарий. Зная из опыта об описанном в задаче эффекте, медицинская сестра, когда бинтует больному, скажем, руку, расширяющуюся от кисти к локтю, регулярно перекручивает бинт, чтобы он не сползал все время в сторону локтя.

4. Ответ: Выигрывает Алиса.

Решение. Пусть Алиса независимо от действий Базилио берет первым ходом 1 монету, вторым — 2, третьим — 3 и т. д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Алисы Базилио сможет первым ходом взять 1 или 2 монеты, вторым — 2 или 3 и т. д. Тогда после k-го хода Алисы игроки возьмут монет не менее

$$(1 + 2 + \cdots + k) + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) = k^2$$

и не более

$$(1 + 2 + \cdots + k) + (2 + 3 + \cdots + k) = k(k+1) - 1.$$

Так как $36 \cdot 37 - 1 = 1331$, то монет в любом случае хватит на 36-й ход Алисы. А так как $36^2 = 1296$ и $1331 - 1296 = 35$, то монет в любом случае не хватит на 36-й ход Базилио. Таким образом, Алиса выиграет.

5. Ответ: Биссектриса угла без его вершины и фиксированной точки, а также отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки на стороны угла (без концов). На рис. 30 это луч AO без точек A и O и отрезок KL без точек K и L.

Решение. Пусть A — вершина данного угла, O — фиксированная точка на биссектрисе, OBC — рассматриваемый равнобедренный треугольник ($OB = OC$) и M — середина стороны BC. Треугольник OBC может располагаться так, что $AB = AC$. При этом точка M лежит на биссектрисе AO, причем для любой точки M на биссектрисе AO, кроме точек A и O, можно построить равнобедренный треугольник OBC так, что M будет серединой отрезка BC. Таким образом, весь луч AO, кроме точек A и O, входит в искомое ГМТ.

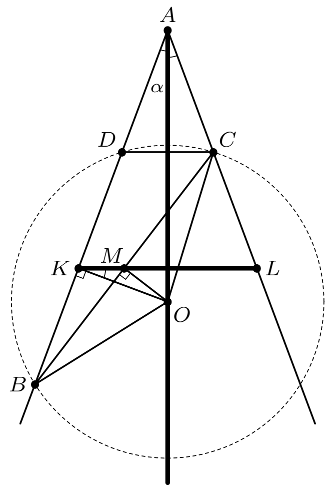

Рис. 30

Пусть теперь $AB \neq AC$ (см. рис. 30). Пусть D — точка, симметричная точке C относительно биссектрисы AO. Тогда D лежит на луче AB и $OD = OC = OB$. Опустим перпендикуляр OK на BD. Так как $OB = OD$, то $BK = KD$ и, следовательно, KM — средняя линия в треугольнике BDC. Поэтому $KM \parallel DC$ и $KM \perp AO$. Таким образом, в этом случае точка M обязана лежать на отрезке KL таком, что L и C лежат по одной стороне угла, $OK \perp AB$ и $KL \perp AO$.

Обратно, пусть M — любая точка указанного отрезка KL, не лежащая на биссектрисе и отличная от точек K и L. Проведем через M прямую, перпендикулярную OM. Пусть она пересекает стороны угла в точках B и C. Пусть $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$. Так как $OK \perp AB$ и $KM \perp AO$, то $\angle OKM = \angle BAO = \alpha$. Так как $\angle BKO = \angle BMO = 90°$, то точки B, K, M, O лежат на одной окружности. Отсюда $\angle OBM = \angle OKM = \alpha$ (как вписанные). Тогда $\angle OBC = \alpha = \angle OAC$ и, следовательно, точки A, C, O, B лежат на одной окружности. Так как $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$, то равны хорды $BO = OC$. Таким образом, треугольник OBC — равнобедренный и $BM = MC$, то есть M входит в искомое ГМТ.

6. Ответ:

а) за 4, 7 и 10 у. е.;

б) за $\lceil \frac{n}{k} \rceil$, $\lceil \frac{2n}{k} \rceil, \ldots, \lceil \frac{(k-1)n}{k} \rceil$ и $\lceil \frac{kn}{k} \rceil = n$ у. е., где через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, не меньшее x.

Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ — массы конфет в коробках стоимостью в $1, 2, \ldots, n$ у. е. соответственно, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ — номера тех коробок, которые нужно купить.

1° Докажем, что для искомого набора номеров должны быть выполнены неравенства

$$n_j \geqslant \frac{jn}{k} \equiv m_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

которые при $n = 10$ и $k = 3$ превращаются в оценки

$$n_1 \geqslant \frac{10}{3} = 3{,}3\ldots, \quad n_2 \geqslant \frac{20}{3} = 6{,}6\ldots, \quad n_3 \geqslant \frac{30}{3} = 10.$$

Действительно, предположим, что для некоторого j выполнено противоположное неравенство $n_j < m_j$. Тогда, например, в случае

$$a_1 = \ldots = a_{n_j} = \frac{n_j}{n} < a_{n_j+1} = \ldots = a_n = 1 + \frac{n_j}{n}$$

получаем

$$a_1 + \ldots + a_n = n_j \cdot \frac{n_j}{n} + (n - n_j) \cdot \left(1 + \frac{n_j}{n}\right) = n,$$

$$a_{n_1} + \ldots + a_{n_k} = (k - j) \cdot \left(1 + \frac{n_j}{n}\right) + j \cdot \frac{n_j}{n} =$$

$$= k - j + \frac{k}{n} \cdot n_j < k - j + \frac{k}{n} \cdot \frac{jn}{k} = k,$$

т. е. нарушено требование задачи, а именно:

$$a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} < \frac{k}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

2° Пусть теперь все неравенства (1) верны. Докажем, что тогда требование задачи выполнено. Действительно, при $n = 10$ и $k = 3$ имеем

$$\begin{aligned} &a_4 + a_7 + a_{10} \geqslant \\ &\geqslant \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} + \frac{a_5 + a_6 + a_7}{3} + \frac{a_8 + a_9 + a_{10}}{3} = \\ &= \frac{(9+1)a_2 + \ldots + (9+1)a_{10}}{30} \geqslant \frac{9a_1 + 9a_2 + \ldots + 9a_{10}}{30} = \\ &= \frac{3}{10}(a_1 + \ldots + a_{10}), \end{aligned}$$

а в общем случае, обозначив $n_j - m_j = \varepsilon_j \in [0; 1)$ и $n_0 = m_0 = a_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} &a_{n_1} + \ldots + a_{n_k} \geqslant \\ &\geqslant \frac{a_1 + \ldots + a_{n_1}}{n_1 - n_0} + \frac{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}{n_2 - n_1} + \ldots + \frac{a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}}{n_k - n_{k-1}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\varepsilon_0 a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_1-1} + (1 - \varepsilon_1)a_{n_1}}{m_1 - m_0} + \frac{\varepsilon_1 a_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + (1 - \varepsilon_2)a_{n_2}}{m_2 - m_1} + \\ &+ \ldots + \frac{\varepsilon_{k-1} a_{n_{k-1}} + a_{n_{k-1}+1} + \ldots + (1 - \varepsilon_k)a_{n_k}}{m_k - m_{k-1}} = \frac{k}{n}(a_1 + \ldots + a_n), \end{aligned}$$

т. к. при каждом j справедливо равенство $m_j - m_{j-1} = \frac{n}{k}$ и неравенство

$$\frac{a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}}{n_j - n_{j-1}} \geqslant \frac{\varepsilon_{j-1} a_{n_{j-1}} + a_{n_{j-1}+1} + \ldots + (1 - \varepsilon_j)a_{n_j}}{m_j - m_{j-1}},$$

означающее, что *среднее значение функции* на промежутке уменьшается, когда этот промежуток меняют так, что к функции добавляются значения, меньшие ее среднего, и убавляются — бóльшие: речь идет о ступенчатой функции f, задаваемой равенствами $f(x) = a_j$ при $j - 1 < x \leqslant j$, а под средним значением понимается ее интеграл по заданному промежутку, деленный на его длину, причем промежуток усреднения $(n_{j-1}; n_j]$ заменяется промежутком $(m_{j-1}; m_j]$. Формально же последнее неравенство выводится, например, из цепочки

$$\begin{aligned}(n_{j-1} - m_{j-1})(a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}) - \varepsilon_{j-1}(n_j - n_{j-1})a_{n_{j-1}} &= \\ = \varepsilon_{j-1}\left((a_{n_{j-1}+1} - a_{n_{j-1}}) + \ldots + (a_{n_j} - a_{n_{j-1}})\right) \geqslant 0 &\geqslant \\ \geqslant \varepsilon_j\left((a_{n_{j-1}+1} - a_{n_j}) + \ldots + (a_{n_j} - a_{n_j})\right) &= \\ = (n_j - m_j)(a_{n_{j-1}+1} + \ldots + a_{n_j}) - \varepsilon_j(n_j - n_{j-1})a_{n_j}&.\end{aligned}$$

Итак, стоимость набора из k коробок, удовлетворяющего требованию задачи, будет наименьшей для наименьших целых чисел n_j, удовлетворяющих неравенствам (1).

Комментарий. Задача восходит, как это ни странно, к телевизионной игре «Сто к одному», где на заключительном этапе двум игрокам задают по пять вопросов. На каждый из них заготовлено по пять наиболее популярных (по результатам опроса) ответов, суммарная стоимость которых составляет 100 очков. Ни сами эти ответы, ни тем более их стоимости, соответствующие их популярности, игрокам не известны.

Если игроки на все вопросы дадут по паре самых популярных из пяти ответов, то, конечно, заработают за каждый вопрос не менее $100 \cdot 2/5 = 40$ очков, а за все пять вопросов — не менее $40 \cdot 5 = 200$ очков, которые как раз и требуется набрать для выигрыша, т. е. игра, в общем-то, честная.

Так вот, исходя из решения настоящей задачи, можно утверждать, что при любом распределении очков по ответам игрокам позволено немного ошибаться, а именно: они заведомо не проиграют, если на каждый вопрос в паре с самым популярным ответом угадают не следующий, а лишь средний по популярности ответ.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: 6 и 7 КЛАССЫ

6 класс (1104 работы)

Баллы	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	160	32	606	831	532	527
1	104	8	297	33	142	90
2	117	0	84	28	240	53
3	723	4	56	16	44	288
4	—	1060	20	32	81	16
5	—	—	41	164	19	84
6	—	—	—	—	23	9
7	—	—	—	—	2	10
8	—	—	—	—	8	27
9	—	—	—	—	13	—

7 класс (599 работ)

Баллы	Задачи							
	1	2	3	4а	4б	5	6а	6б
0	237	200	238	87	494	367	476	598
1	20	1	92	194	10	86	13	0
2	63	1	44	318	14	0	56	1
3	28	2	207	—	31	6	11	0
4	251	0	11	—	18	1	43	0
5	—	395	7	—	32	0	—	0
6	—	—	—	—	—	18	—	0
7	—	—	—	—	—	121	—	0

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: 8 и 9 КЛАССЫ

8 класс (510 работ)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	77	34	186	115	215	350
$-$	67	187	293	302	249	123
$-.$	86	1	2	15	6	14
$\mp$	138	171	9	40	11	21
$+/2$	0	0	0	0	0	2
$\pm$	21	48	1	7	21	0
$+.$	62	23	5	2	1	0
$+$	59	46	14	29	7	0

9 класс (575 работ)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	85	270	350	298	264	229
$-$	268	252	161	254	231	338
$-.$	16	15	1	0	11	1
$\mp$	30	6	20	0	30	4
$\pm$	66	10	2	2	5	1
$+.$	9	3	1	3	4	0
$+$	101	19	40	18	30	2

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: 10 и 11 КЛАССЫ

10 класс (733 работы)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	189	211	293	160	254	538
$-$	482	378	378	544	429	195
$-.$	4	19	8	8	3	0
$\mp$	4	16	10	10	28	0
$+/2$	2	1	2	11	0	0
$\pm$	0	13	7	0	9	0
$+.$	3	1	1	0	2	0
$+$	49	94	34	0	8	0

11 класс (984 работы)

Оценки	Задачи						
	1	2	3	4	5	6а	6б
0	455	489	779	800	432	746	879
$-$	166	8	109	62	7	126	83
$\mp$	113	390	38	48	377	45	19
$\pm$	140	49	10	19	108	34	1
$+.$	27	4	7	9	21	5	0
$+$	83	44	41	46	39	28	2