К. Б. Сабитов, В. В. Тихомиров, О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля, *Матем. моделирование*, 1990, том 2, номер 10, 100–109

Математическое моделирование

том **2** номер **10/1990**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 517.95

О ПОСТРОЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ

© *К.Б. Сабитов, В.В. Тихомиров*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром найдены собственные значения и соответствующие собственные функции математической модели на обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.

ABOUT CONSTRUCTION OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF THE GASEDYNAMIC PROBLEM OF FRANKL

K.B. Sabitov, V.V. Tichomirov

In this paper is considered the equation of Lavrentiev – Bitsadse with a spectral parameter. There are founded eigenvalues and eigenfunctions of mathematical model of streamline profiles with flow of undersound velocity with oversound zone ended with direct bound condensation.

Введение. Известно, что на основании экспериментальных данных было обнаружено, что коэффициент сопротивления артиллерийских снарядов оживальной формы резко возрастает при приближении скорости полета к скорости звука. Причина этого факта выяснилась в свете опытов Буземана А., который делал снимки обтекания профилей крыльев при больших дозвуковых скоростях набегающего потока. Выяснилось, что около поверхности обтекаемого тела образуются зоны местных сверхзвуковых скоростей, которые оканчиваются скачками уплотнения, близкими к прямым скачкам. Наличие сверхзвуковых зон без скачков уплотнения никогда не наблюдалось. В связи с этим возник вопрос о том, являются ли скачки уплотнения неизбежными при появлении местных сверхзвуковых зон. Исследуя этот вопрос, Франкль Ф. построил пример течения в канале, в котором имеется сверхзвуковая зона, оканчивающаяся вниз по течению прямым скачком уплотнения. При этом сверхзвуковая зона граничит только с одной стенкой канала, а скачок уплотнения тем самым оканчивается внутри течения.

На основании этого результата Франкль Ф. [1] на плоскости годографа сформулировал краевую задачу (именуемую в настоящее время задачей Франкля) для уравнения

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Чаплыгина, где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, u – функция тока, $K(y)$ и y – функции скорости течения, которые обе положительны при дозвуковой и отрицательны при сверхзвуковой скорости; x – угол наклона вектора скорости. Решение этой задачи дает обтекание профиля потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.

Доказательство существования и единственности решения этой задачи, а также эффективное ее решение представляет практический, а также теоретический интерес.

Первые результаты по задаче Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе и Чаплыгина получены в работах [2, 3]. В [4, 5] доказаны теоремы единственности решения задачи Франкля для уравнения (1) со спектральным параметром. Обзоры работ, посвященные этой задаче, приведены в работах [5, 6].

В этой работе для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром найдены собственные значения и отвечающие им собственные функции задачи Франкля и изучены их свойства на полноту. Эти результаты позволяют глубже понять природу задачи Франкля и построить решение этой задачи для специальных областей.

1. Сведение спектральной задачи Франкля к эллиптической задаче. Рассмотрим уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{2}$$

где λ – комплексный параметр в области D, ограниченной: отрезком AA' оси $x = 0$, $-a < y < a$ $(a > 0)$, характеристикой $A'C$ уравнения (2), соединяющей точки $A' = (0, -a)$, $C = (a, 0)$, отрезком CB оси $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, и простой жордановой кривой σ с концами в точках $B = (b, 0)$ и $A = (0, a)$, лежащей в первой четверти.

Пусть $D_1 = D \cap \{y > 0\}$, OP – часть характеристики уравнения (2), исходящей из точки $O = (0, 0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P; D_2 – область, ограниченная отрезками OP, PC и OC, D_3 – область, ограниченная отрезками OA', $A'P$ и PO.

В области D для уравнения (2) поставим следующую спектральную задачу Франкля (Задача Φ_λ).

Задача Φ_λ. Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \wedge C^1(D \cup AO \cup OA' \setminus OP) \wedge C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$;

2) $Lu \equiv 0$, $(x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$;

3) $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{CB \cup \sigma}$;

4) $u(0,-y) - u(0,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant a$;

5) $u_x(0,y) = 0$, $0 < |y| < a$.

Предварительно для уравнения (2) в областях D_2 и D_3 построим в явном виде решения задачи Дарбу.

Задача Дарбу. Найти в области D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < a, \tag{3}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a/2, \tag{4}$$

где ν и ψ будем считать известными функциями.

Т е о р е м а 1. *Если* $\nu(x) \in C^1(0,a) \wedge L_1[0,a]$, $\psi_1(x) \in C[0,a] \wedge C^2(0,a)$, $\psi_1'(x) \in L_1[0,a]$, *то существует единственное решение задачи* (2)–(4) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \int_0^{x+y} \nu(t) J_0[\sqrt{\lambda(t-x-y)(t-x+y)}]\, dt +$$

$$+ \int_0^{x-y} \psi_1'(t) B(0,t;\, x+y, x-y)\, dt, \tag{5}$$

где $\psi_1(x) = \psi(x/2)$, $\sqrt{\lambda} > 0$ *при* $\lambda > 0$, $J_0(\cdot)$ – *функция Бесселя*; $B(\xi,\eta;\, \xi_0,\eta_0)$ –

функция Римана – Адамара,

$$B(\xi,\eta;\ \xi_0,\eta_0) = \begin{cases} J_0[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}], & \eta > \xi_0, \\ J_0[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}] + J_0[\sqrt{\lambda(\eta-\xi_0)(\xi-\eta_0)}], & \eta < \xi_0. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [7].

Задача Дарбу. Найти в области D_3 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (4) и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad -a < y < a. \tag{6}$$

Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то, исходя из формулы (5), нетрудно получить решение задачи (2), (4) и (6) в явном виде

$$u(x,y) = \int_0^{x-y} \psi_1'(t)\cdot B(0,t;\ -x-y, x-y)\,dt. \tag{7}$$

Теперь на основании формул (5) и (7) нетрудно свести задачу Φ_λ к эллиптической задаче. Полагая в формуле (5) $y = 0$, получим

$$u(x,0) = \tau(x) = \int_0^x \nu(t) J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt +$$

$$+2\int_0^x \psi_1'(t) J_0[\sqrt{\lambda x(x-t)}]\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{8}$$

Из формулы (7) при $x = 0$ имеем

$$u(0,y) = 2\int_0^{-y} \psi_1'(t) J_0[\sqrt{\lambda y(y+t)}]\,dt, \quad -a \leqslant y \leqslant 0,$$

или

$$u(0,-x) = 2\int_0^x \psi_1'(t) J_0[\sqrt{\lambda x(x-t)}]\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{9}$$

Тогда на основании (8), (9) и условия 4) из постановки задачи Φ_λ получим

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(t) J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt + u(0,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Таким образом, на основании последнего равенства задача Φ_λ сведена к эллиптической задаче на собственные значения: найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \wedge C^1(D_1 \cup OA \cup OC) \wedge C^2(D_1), \tag{10}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,y) \in D_1, \tag{11}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{CB \cup \sigma}, \tag{12}$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < y < a, \tag{13}$$

$$u(x,0) - u(0,x) = \int_0^x u_y(t,0) J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{14}$$

Исследование задачи (10)–(14) в общем случае, т.е. когда σ – произвольная кривая из класса Ляпунова, представляет значительные трудности. В этой работе рассмотрим случай, когда точки C и B совпадают, $a = 1$, кривая σ совпадает с частью окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$.

2. **Построение собственных значений и функций задачи** Φ_λ. Пусть D_1 — четверть круга $(x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0)$. В этой области введем полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$, $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi/2$. В полярных координатах (r, φ), разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, из (10)–(14) получим:

$$R''(r) + 1/rR'(r) + (\lambda - \mu^2/r^2)R(r) = 0, \tag{15}$$

$$|R(0)| < +\infty, \quad R(1) = 0, \tag{16}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{17}$$

$$\Phi'(\pi/2) = 0, \tag{18}$$

$$R(x)\,[\Phi(0) - \Phi(\pi/2)] = \Phi'(0)\int_0^x t^{-1}R(t)\,J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt. \tag{19}$$

Известно, что решением уравнения (15), удовлетворяющим условиям (16), является функция Бесселя

$$R(r) = J_\mu(\sqrt{\lambda}\,r), \quad \operatorname{Re}\mu \geqslant 0. \tag{20}$$

Подставляя функцию (20) в равенство (19) и вычисляя интеграл по формуле [8, (2.12.33.6)], находим второе нелокальное граничное условие

$$\Phi'(0) + \mu\,[\Phi(\pi/2) - \Phi(0)] = 0 \tag{21}$$

для определения функции $\Phi(\varphi)$. Решая краевую задачу (17), (18) и (21), находим собственные функции

$$\Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos\mu_n^{(1)}\varphi = \cos 4n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$\Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin\mu_n^{(2)}\varphi = \sin(4n-1)\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

Теперь, учитывая найденные значения μ и накладывая на функцию (20) второе условие из (16), получим

$$J_{4n}(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{24}$$

Из теории бесселевых функций [9] известно, что функция Бесселя $J_\nu(z)$ при $\nu > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ — m-й корень первого уравнения, а через $\beta_{n,m}$ — m-й корень второго уравнения из (24), находим две системы положительных собственных значений задачи Φ_λ:

$$\lambda_{n,m}^{(1)} = \alpha_{n,m}^2, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

$$\lambda_{n,m}^{(2)} = \beta_{n,m}^2, \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

На основании (20), (22) и (23) получим отвечающие значениям (25), (26) собственные функции задачи Φ_λ в области D_1

$$u_{n,m}^{(1)}(x, y) = v_{n,m}^{(1)}(r, \varphi) = \cos(4n\varphi)\,J_{4n}(\alpha_{n,m}r); \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

$$u_{n,m}^{(2)}(x, y) = v_{n,m}^{(2)}(r, \varphi) = \sin[(4n-1)\varphi]\,J_{4n-1}(\beta_{n,m}r), \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Для построения собственных функций задачи Φ_λ в областях D_2 и D_3 можно воспользоваться формулами (5) и (7) или формулой решения задачи Коши для уравнения (2) при $y < 0$ [10]. Из-за громоздкости этих подходов предложим здесь несколько иной метод построения собственных функций задачи Φ_λ в областях D_2 и D_3. Для этого в D_2 введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}.$$

Тогда уравнение (2) при $y < 0$ принимает вид

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4(1/2-\theta)u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + \sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0. \tag{29}$$

В уравнении (29) разделяя переменные $u(x,y) = P(\sigma)Q(\theta)$ получим

$$P''(\sigma) + 1/\sigma P'(\sigma) + (\lambda - \rho^2/\sigma^2)P(\sigma) = 0, \tag{30}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + (1/2-\theta)Q'(\theta) + \rho^2/4Q(\theta) = 0, \tag{31}$$

где ρ — произвольная постоянная. Поскольку решение $u(x, y)$ ограничено в D, то в качестве решения уравнения (30) возьмем функцию Бесселя

$$P(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\,\sigma), \quad \operatorname{Re}\rho \geqslant 0. \tag{32}$$

Уравнение (31) представляет собой известное гипергеометрическое уравнение [11], общее решение которого определяется формулой

$$\begin{aligned} Q(\theta) = {} & k_1'(1-\theta)^{\rho/2} F((1-\rho)/2, -\rho/2, 1/2;\ \theta/(\theta-1)) + \\ & + k_2'(1-\theta)^{-\rho/2} F(\rho/2, (1+\rho)/2, 1+\rho;\ 1/(1-\theta)), \end{aligned} \tag{33}$$

где k_1' и k_2' — произвольные постоянные. Теперь, на основании следующих формул [11, с. 110]:

$$F(a, a+1/2, 1/2;\ z) = \frac{1}{2}\,[(1+\sqrt{z})^{-2a} + (1-\sqrt{z})^{-2a}],$$

$$F(a-1/2, a, 2a;\ z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{1-2a},$$

формула (33) представляется в виде

$$Q(\theta) = k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}, \tag{34}$$

где k_1 и k_2 — постоянные. Тогда в силу (32) и (34) решение уравнения (2) в области D_2 определяется формулой

$$u(x,y) = \left[k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]. \tag{35}$$

Из формул (27) и (28) вычислим

$$\tau^{(1)}_{n,m}(x) = u^{(1)}_{n,m}(x,0) = J_{4n}(\alpha_{n,m}x), \tag{36}$$

$$\nu^{(1)}_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}\,u^{(1)}_{n,m}(x,0) = 0, \tag{37}$$

$$\tau^{(2)}_{n,m}(x) = u^{(2)}_{n,m}(x,0) = 0, \tag{38}$$

$$\nu^{(2)}_{n,m}(x) = \frac{\partial u^{(2)}_{n,m}}{\partial y}(x,0) = (4n-1)\,x^{-1}J_{4n-1}(\beta_{n,m}x). \tag{39}$$

Если теперь в формуле (35) положить $\rho = 4n$, $\lambda = \lambda^{(1)}_{n,m}$, $k_1 = k_2 = 1/2$, то она определит решение задачи Коши для уравнения (2) в области D_2 с краевыми условиями (36) и (37). Тогда первая система собственных функций задачи Φ_λ в области D_2 имеет вид

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = 1/2\left[\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{2n} + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2n}\right] J_{4n}[\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}]. \tag{40}$$

Для получения второй системы собственных функций задачи Φ_λ в области D_2 достаточно в (35) положить $\rho = 4n - 1$, $\lambda = \lambda^{(2)}_{n,m}$, $k_2 = -k_1 = 1/2$. Тогда она будет определять решение задачи Коши для уравнения (2) в области D_2 с краевыми условиями (38) и (39). Тем самым получаем 2-ю систему собственных функций задачи Φ_λ в D_2:

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = 1/2\,[\,(\frac{x+y}{x-y})^{2n-1/2} - (\frac{x-y}{x+y})^{2n-1/2}\,]\,J_{4n-1}[\beta_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}], \quad (41)$$

где $n, m = 1, 2, \ldots$

Далее построим собственные функции задачи Φ_λ в области D_3. Пусть $(x, y) \in D_3$. Тогда, заменяя в формулах (40) и (41) x на $-y$, а y на $-x$, получим собственные функции задачи Φ_λ в области D_3

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = 1/2\,[\,(\frac{y-x}{y+x})^{2n} + (\frac{y+x}{y-x})^{2n}\,]\,J_{4n}[\alpha_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}], \quad (42)$$

где $n, m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = 1/2\,[\,(\frac{y-x}{y+x})^{2n-1/2} + (\frac{y+x}{y-x})^{2n-1/2}\,]\,J_{4n-1}[\beta_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}], \quad (43)$$

где $n, m = 1, 2, \ldots$

Таким образом, объединяя формулы (27), (40) и (42) получим первую систему собственных функций задачи Φ_λ в области D

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = \begin{cases} \cos(4n\varphi)\,J_{4n}(\alpha_{n,m}r), & (x,y)\in D_1; \\ 1/2\,[\,(\frac{x+y}{x-y})^{2n} + (\frac{x-y}{x+y})^{2n}\,]\,J_{4n}[\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}], & (x,y)\in D_2; \\ 1/2\,[\,(\frac{y+x}{y-x})^{2n} + (\frac{y-x}{y+x})^{2n}\,]\,J_{4n}[\alpha_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}], & (x,y)\in D_3, \end{cases} \quad (44)$$

где $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, а на основании формул (28), (41) и (43) находим вторую систему собственных функций задачи Φ_λ в области D:

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = \begin{cases} \sin[(4n-1)\,\varphi]\,J_{4n-1}(\beta_{n,m}r), & (x,y)\in D_1; \\ 1/2\,[\,(\frac{x+y}{x-y})^{2n-1/2} - (\frac{x-y}{x+y})^{2n-1/2}\,]\,J_{4n-1}[\beta_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}] & \text{в } D_2; \\ 1/2\,[\,(\frac{y-x}{y+x})^{2n-1/2} + (\frac{y+x}{y-x})^{2n-1/2}\,]\,J_{4n-1}[\beta_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}] & \text{в } D_3, \end{cases} \quad (45)$$

где $n, m = 1, 2, \ldots$

3. Изучение свойств систем собственных функций задачи Φ_λ.

Т е о р е м а 2. *Система собственных функций* $\{u^{(1)}_{n,m}(x, y)\}$, *задачи* Φ_λ, *заданная формулой* (44), *не полна в пространстве* $L_2(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В области D рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y), & (x,y)\in D_1, \\ F_2(x,y), & (x,y)\in D_2, \\ F_3(x,y), & (x,y)\in D_3, \end{cases}$$

где $F_k(x,y) \in L_2(D_k)$, $k = 1, 2, 3$, и интегралы

$$J = \iint_D F(x,y) u^{(1)}_{n,m}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \iint_{D_k} F_k(x,y) u^{(1)}_{n,m}(x,y)\,dx\,dy = i_1 + i_2 + i_3. \tag{46}$$

В интеграле i_1, переходя к полярным координатам (r, φ), получим

$$i_1 = \int_0^1 J_{4n}(\alpha_{n,m} r)\, r\,dr \int_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)\cos(4n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= C_1 \int_0^1 \bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m} r) r^{4n+1} dr \int_0^{\pi} f_1(r, \theta/2)\cos 2n\theta\, d\theta, \tag{47}$$

где $f_1(r,\varphi) = F_1(x,y)$, $C_1 = 1/2\,(\alpha_{n,m}/2)^{4n}$,

$\bar{J}_\mu(z) = (z/2)^{-\mu} J_\mu(z)$.

В интеграле i_2 произведем замену переменных $\xi = x + y$ и $\eta = x - y$. Тогда имеем

$$i_2 = 1/4 \int_0^1 d\eta \int_0^{\eta} f_2(\xi,\eta)\left[\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2n} + \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{2n}\right] J_{4n}(\alpha_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi =$$

$$= G_1/2 \int_0^1 d\eta \int_0^{\eta} f_2(\xi,\eta)\,[\eta^{4n} + \xi^{4n}]\,\bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi.$$

Во внутреннем интеграле, полагая $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$i_2 = C_1/2 \int_0^1 (1 + t^{4n})\,dt \int_0^1 f_2(\eta t, \eta)\,\bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m}\eta\sqrt{t})\,\eta^{4n+1} d\eta.$$

В последнем повторном интеграле заменим $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$. После этого интеграл i_2 примет вид

$$i_2 = C_1 \int_0^1 (1 + s^{8n}) \int_0^s f_2(rs, r/s)\,\bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m} r)\,(r/s)^{4n+1} dr\,ds =$$

$$= C_1 \int_0^1 \bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m} r)\, r^{4n+1} dr \int_r^1 f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right)\frac{(1 + s^{8n})}{s^{4n+1}}\,ds. \tag{48}$$

Аналогично интегралу i_2 в i_3 положим $\xi = -x - y$, $\eta = x - y$. Тогда

$$i_3 = 1/4 \iint f_3(\xi,\eta)\left[\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2n} + \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{2n}\right] J_{4n}(\alpha_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi\,d\eta =$$

$$= C_1/2 \int_0^1 d\eta \int_0^{\eta} f_3(\xi,\eta)\,(\eta^{4n} + \xi^{4n})\,\bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi =$$

$$= C_1 \int_0^1 \bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m} r) r^{4n+1} \int_r^1 f_3\left(rs, \frac{r}{s}\right)\frac{(1 + s^{8n})}{s^{4n+1}}\,ds\,dr. \tag{49}$$

Подставляя (47) – (49) в (46) получим

$$J = C_1 \int_0^1 \bar{J}_{4n}(\alpha_{n,m} r) r^{4n+1} dr \left\{ \int_0^{\pi} f_1(r, \theta/2)\cos 2n\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_r^1 [\,f_2(rs, r/s) + f_3(rs, r/s)]\,\frac{(1 + s^{8n})}{s^{4n+1}} \right\} ds. \tag{50}$$

В (50) положим $f_1(r,\theta/2) = r^p \sin 2p\theta$, p – натуральное число, $f_2(rs,r/s) = -f_3(rs,r/s)$. Тогда из (50) следует, что $J = 0$ при $F(x,y) \in L_2(D)$ и $F(x,y) \neq 0$ в D.

Теорема 3. *Система собственных функций* $\{u^{(2)}_{n,m}(x,y)\}$ *задачи* Φ_λ, *заданная формулой* (45), *не полна в* $L_2(D)$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 2 в области D рассмотрим функцию $F(x,y)$ и следующие интегралы

$$M = \iint_D F(x,y) u^{(2)}_{n,m}(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{3} \iint_{D_k} F_k(x,y) u^{(2)}_{n,m}(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{3} M_k. \quad (51)$$

Аналогично интегралам i_k преобразуем M_k:

$$M_1 = C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} dr \int_0^\pi f_1\left(r, \frac{\theta}{2}\right) \sin[(2n-1/2)\theta]\,d\theta, \quad (52)$$

где $C_2 = 1/2\,(\beta_{n,m}/2)^{4n-1}$,

$$M_2 = 1/4 \int_0^1 d\eta \int_0^\eta f_2(\xi,\eta)\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{2n-1/2} - \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2n-1/2}\right] J_{4n-1}(\beta_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi =$$

$$= C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} \int_r^1 f_2(rs, r/s)(s^{4n-2} - s^{-4n})\,dr\,ds, \quad (53)$$

$$M_3 = 1/4 \int_0^1 d\eta \int_0^\eta f_3(\xi,\eta)\left[\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{2n-1/2} + \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{2n-1/2}\right] J_{4n-1}(\beta_{n,m}\sqrt{\xi\eta})\,d\xi =$$

$$= C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} \int_r^1 f_3(rs, r/s)(s^{-4n} + s^{4n-2})\,ds\,dr. \quad (54)$$

Теперь подставляя (52) – (54) в (51), получим

$$M = C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} \left[\int_0^\pi f_1(r,\theta/2)\sin(2n-1/2)\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_r^1 f_2(rs,r/s)(s^{4n-2} - s^{-4n})\,ds + \int_r^1 f_3(rs,r/s)(s^{-4n} + s^{4n-2})\,ds\right] dr. \quad (55)$$

В правой части (55) положим $f_3(rs,r/s) = f_2(rs,r/s)$. Тогда соотношение (55) принимает вид

$$M = C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} \left[\int_0^\pi f_1(r,\theta/2)\sin(2n-1/2)\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + 2\int_r^1 f_2(rs,r/s) s^{4n-2}\,ds\right] dr = C_2 \int_0^1 \bar{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} M_4(r)\,dr. \quad (56)$$

Следуя [12], рассмотрим функции

$$f_1(r,\theta/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4k(k+1)} - \left(\frac{r^{4k}}{4k} - \frac{r^{4k+1}}{4k+1}\right)\right] \sin\left(2k - \frac{1}{2}\right)\theta, \quad (57)$$

$$f_2(\xi,\eta) = -\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\right] = \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2} - \frac{\xi}{\eta},$$

$$f_2(rs, r/s) = -s(1-s), \quad (58)$$

которые принадлежат L_2. Подставляя функции (57) и (58) в (56), имеем

$$M = C_2 \int_0^1 \overline{J}_{4n-1}(\beta_{n,m} r) r^{4n} M_4(r) dr = 0,$$

так как $M_4(r) \equiv 0$. Тем самым теорема 3 доказана.

Отметим, что задача Φ_λ и соответствующая ей эллиптическая задача (10) – (14) являются несамосопряженными. Тогда может оказаться полной система собственных и присоединенных функций. Поэтому естественно возникает вопрос о наличии присоединенных функций у данных систем собственных функций (44) и (45) задачи Φ_λ или (10) – (14). Для этого вернемся к задачам (15), (16) и (17), (18), (21).

Известно, что система собственных функций краевой задачи (15) и (16): $\{J_{\mu_n^{(i)}}(\sqrt{\lambda_{n,m}^{(i)}}\, r)\}$, $i = 1, 2$, при фиксированном n ортогональна и образует базис как система собственных функций первой краевой задачи для уравнения Бесселя [10, с. 645]. По этой причине у этой системы не может быть присоединенных функций.

Краевая задача (17), (18) и (21) является несамосопряженной. Из определения присоединенной функции [13] следует, что присоединенная функция $F_n(\varphi)$ к собственной функции $\Phi_n(\varphi)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$F_n''(\varphi) + \mu_n^2 F_n(\varphi) = -2\mu_n \Phi_n(\varphi), \tag{58}$$

$$F_n'(\pi/2) = 0, \tag{59}$$

$$F_n'(0) + \mu_n [F_n(\pi/2) - F_n(0)] + \Phi_n(\pi/2) - \Phi_n(0) = 0. \tag{60}$$

Полагая в (58) – (60) $\mu_n = \mu_n^{(1)} = 4n$, $\Phi_n(\varphi) = \Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos 4n\varphi$, затем $\mu_n = \mu_n^{(2)} = 4n - 1$, $\Phi_n(\varphi) = \Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin(4n-1)\varphi$, убеждаемая, что краевая задача (58) – (60) не имеет решения. Следовательно, и у задачи (17), (18) и (21) нет присоединенных функций. Отсюда следует, что задача (10) – (14) или задача Φ_λ не имеет присоединенных функций.

Теперь из 2-х систем собственных функций $\{\Phi_n^{(1)}(\varphi)\}$ и $\{\Phi_n^{(2)}(\varphi)\}$ задачи (17), (18) и (21) образуем новую систему

$$1, \sin 3\varphi, \cos 4\varphi, \ldots, \sin(4n-1)\varphi, \cos 4n\varphi, \ldots, \tag{61}$$

которую обозначим через $\{\Phi_k(\varphi)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ В силу результатов работы [14] система $\{\Phi_k(\varphi)\}$ является полной в пространстве $L_2[0, \pi/2]$. Аналогично (61) составим из 2-х систем $\{u_{n,m}^{(1)}(x, y)\}$ и $\{u_{n,m}^{(2)}(x, y)\}$ задачи (10) – (14) систему $\{u_{k,m}(x, y)\}$, которая в области D_1 задается формулой

$$u_{k,m}(x, y) = J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\, r)\, \Phi_k(\varphi), \tag{62}$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} \mu_{2k-1} = \mu_n^{(1)}, \\ \mu_{2k} = \mu_n^{(2)}, \end{cases} \qquad \lambda_{k,m} = \begin{cases} \lambda_{2k-1,m} = \alpha_{n,m}^2, \\ \lambda_{2k,m} = \beta_{n,m}^2. \end{cases}$$

Т е о р е м а 4. *Система корневых функций, заданная формулой* (62), *задачи* Φ_λ, *полна в* $L_2(D_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что в пространстве $L_2(D_1)$ существует функция $F_1(x, y) \not\equiv 0$ такая, что

$$\iint_{D_1} F_1(x, y)\, u_{k,m}(x, y)\, dx\, dy = 0 \tag{63}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots$ Переходя в (63) к полярным координатам, получим

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi) J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\, r)\Phi_k(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^1 g_k(r) J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\, r) r dr = 0, \tag{64}$$

где

$$g_k(r) = \int_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)\Phi_k(\varphi)d\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку $F_1(x,y) \in L_2(D_1)$, то нетрудно показать, что

$$\int_0^1 \sqrt{r}\,|g_k(r)|\,dr < +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда на основании теории рядов Фурье – Бесселя [9, гл. XVIII] из равенства (64) следует, что все коэффициенты ряда Фурье – Бесселя функции $g_k(r)$ равны нулю и, поэтому,

$$g_k(r) = \int_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)\Phi_k(\varphi)d\varphi = 0 \tag{65}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$ при каждом $r \in [0, 1]$. Теперь в силу системы $\{\Phi_k(\varphi)\}$ в $L_2[0, \pi/2]$ из равенства (65) следует, что при каждом r множество точек φ, в которых $f_1(r, \varphi) \neq 0$, имеет меру нуль. Следовательно, в силу теоремы Фубини функция $F(x, y) = 0$ почти всюду в области D_1.

Пользуясь случаем авторы выражают признательность А.В. Бицадзе, В.А. Ильину, Е.И. Моисееву и С.М. Пономареву за обсуждение результатов этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Франкль Ф.И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения //ПММ. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 196–202.
2. *Бицадзе А.В.* Об одной задаче Франкля // ДАН СССР. – 1956. – Т. 109, № 6. – С. 1091–1094.
3. *Бицадзе А.В.* О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112, № 3. – С. 375–376.
4. *Капустин Н.Ю.* О методе Моравец для доказательства теорем единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа // Прикладная математика и математическое обеспечение ЭВМ. – М.: МГУ, 1981. – С. 45–46.
5. *Сабитов К.Б.* О единственности решения задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 904–906.
6. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
7. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. 1 // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 6. – С. 1023–1032.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
9. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. 1. – М.: ИЛ, 1949. – 798 с.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 736 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
12. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе: Автореферат диссертации . . . д-ра физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1981.
13. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. – 1971. – Т. 26. Вып. 4. – С. 15–41.
14. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – М.: МГУ. – 1983. – Вып. 8. – С. 191–229.

Поступила в редакцию
11.07.1990