

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
НИУ МЭИ, г. Москва

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С УВЕЛИЧЕННЫМ ПОДФЕРМЕННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Рассмотрен вариант балочной фермы с треугольной решеткой, в которой установлены дополнительные шпренгельные элементы, обеспечивающие подъем нижнего пояса. Расчеты усилий в стержнях выполнены методом вырезания узлов в пакете символьной математики Maple. Методом индукции по числу панелей выводятся аналитические выражения для прогиба фермы и горизонтального смещения подвижной опоры от действия нагрузки, равномерно распределенной по узлам верхнего пояса. Найдены последовательности коэффициентов в формуле для прогиба, для которых выведены рекуррентные уравнения. Для фиксированного веса конструкции из условия увеличения жесткости разыскивается оптимальное сочетание сечений стержней верхнего пояса, решетки и нижнего пояса. Найдены асимптотические особенности решения. В области оптимального решения выявлена слабая зависимость прогиба от коэффициента перераспределения сечений, что позволяет делать вывод о возможности конструирования фермы из стержней одинакового сечения.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика, подъем нижнего пояса.

Постановка задачи. Статически определимая ферма (рис. 1) отличается от обычной фермы с треугольной решеткой [1] дополнительными вертикальными стержнями, обеспечивающими подъем нижнего пояса. Такая конструкция фермы возникает при необходимости организации дополнительного подферменного пространства, например, в промышленных зданиях для установки специального негабаритного оборудования. В мостостроении, если движение планируется по верхнему поясу, такая конструкция позволяет увеличить допустимые габариты проходящего снизу транспорта (автомобилей, судов или поездов). При $b = 0$ ферма приобретает вид стандартной фермы с треугольной решеткой, усилия в дополнительных вертикальных стержнях (при указанной нагрузке на верхний пояс) обращаются в ноль.

Расчет. Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму с четным числом панелей (рис. 1). Стержни фермы предполагаем упругими (модуль упругости E). Поставим задачу получить аналитическое выражение для прогиба фермы при произвольном числе панелей n в половине пролета. Ферма нагружена по верхнему поясу вертикальными силами P . Ферма содержит $6n+1$ шарниров и $m=12n-1$ стержней.

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Алгоритм составления уравнений разработан в [2] применительно к системе аналитических вычислений Maple. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой шарнирной опоре, получим:

$$x_i = 2(i-1)a, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$x_{i+2n+1} = x_{i+4n+1} = 2ia - a, \quad y_{i+2n+1} = b, \quad y_{i+4n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Для составления конфигурации решетки фермы стержни фермы представим условными векторами $\vec{N}_i, i = 1, \dots, m$, координаты которых являются номерами шарниров по концам стержня. Направления этих векторов произвольны и не связаны со знаком усилий в них. Для стержней нижнего пояса и решетки имеем следующие векторы:

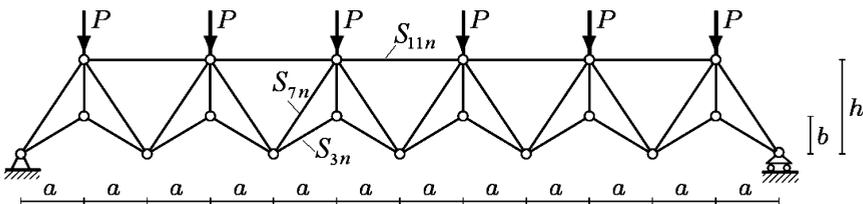


Рис. 1. Ферма, $n = 3$

$$\bar{N}_j = [i, i + 2n + 1], \bar{N}_{i+2n} = [i + 1, i + 2n + 1],$$

$$\bar{N}_{i+4n} = [i + 4n + 1, i + 2n + 1], \bar{N}_{i+6n} = [i, i + 4n + 1], \bar{N}_{i+8n} = [i + 1, i + 4n + 1], \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Для векторов верхнего пояса:

$$\bar{N}_{i+10n} = [i + 4n + 1, i + 4n + 2], \quad i = 1, \dots, 2n - 1.$$

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения равновесия узлов фермы, необходимо знать длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где $m_0 = m + 3$ – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют шарнирные опоры (два стержня неподвижную опору и один подвижную). Первый индекс в номере $N_{j,i}$ означает номер компоненты вектора \bar{N}_j , т.е. начало ($j = 1$) или конец ($j = 2$) стержня вектора. Второй индекс – номер стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{2,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{1,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

Здесь \bar{S} – вектор неизвестных усилий, \bar{B} – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные – в четные B_{2i} . Прогиб центрального узла верхнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4n} \frac{S_i s_i l_i}{EF_1} + \sum_{i=4n+1}^{10n} \frac{S_i s_i l_i}{EF_2} + \sum_{i=10n+1}^{12n-1} \frac{S_i s_i l_i}{EF_3}, \quad (1)$$

где S_i, s_i – усилия в i -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу верхнего пояса; E – модуль упругости материала, одинаковый для всех стержней. Суммирование ведется по всем стержням фермы, опорные стержни приняты жесткими и в эту сумму не входят. Сумма разбита на три части. Первая сумма относится к группе стержней нижнего пояса, вторая – к решетке, третья – к верхнему поясу; F_1, F_2, F_3 – площади сечений стержней соответствующих групп. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с одной, двумя, тремя и т. д. панелями в половине пролета ($n = 1, 2, 3, \dots$) позволило методом индукции (по аналогии с [3–5]) получить следующее выражение

$$\Delta EF_0 = Pn^2 \left(\frac{\Phi c^3}{k_1(b-h)^2} + \frac{2\Phi b^2}{k_2(h-b)} + \frac{d^3(2h(h-b) + \Phi b^2)}{2k_2(b-h)^2 h^2} + \frac{a^3 \Phi}{k_3 h^2} \right), \quad (2)$$

где $\Phi = (1 + 5n^2)/3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d = \sqrt{a^2 + h^2}$, $k_i = F_i / F_0$, $i = 1, 2, 3$. Зависимости коэффициентов от числа панелей оказались несложными. Так для нахождения коэффициента Φ потребовалось проанализировать всего шесть членов последовательности 2, 7, 46/3, 27, 42, 181/3... с помощью оператора **rgf_findrecur** системы Maple [6,7]. Для сравнения заметим, что в решетчатых фермах [3] число членов анализируемой последовательности коэффициентов может достигать 20, что вызывает некоторые технические трудности – время счета в символьной форме становится весьма значительным. На выходе оператор **rgf_findrecur** дает рекуррентное уравнение третьего порядка

$$\Phi_k = 3\Phi_{k-1} - 3\Phi_{k-2} + 3\Phi_{k-3}.$$

Решение этого уравнения с помощью оператора **rsolve** дает общий член последовательности. Проверку правильности получения общего члена легко осуществить в численной форме. В режиме численных преобразований Maple работает значительно быстрее, что легко позволяет проверять решение при большом числе панелей.

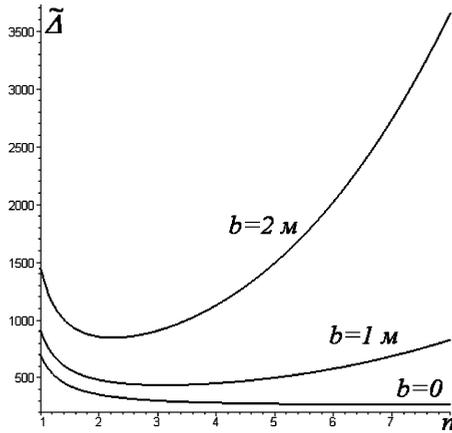


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей, $L = 30\text{ м}$, $h = 5\text{ м}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$

Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P_0$. Обозначим фиксированную длину пролета фермы $L = 2an$ и фиксированную нагрузку $P = P_0 / (2n - 1)$. График зависимости (2) от числа панелей при одинаковой жесткости всех стержней ($k_i = 1, i = 1, 2, 3$) представлен на рис. 2. Кривые обнаруживают очевидный минимум. Рост прогиба с увеличением числа панелей (при постоянной длине пролета и суммарной нагрузке) имеет кубический характер.

Это обнаруживается из вычисления следующего предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta / n^3 = EF_0 P_0 \frac{5b^2(bk_2 + 3hk_1 - 2bk_1)}{6k_1 k_2 (h - b)^2}.$$

Предел также удобно брать в системе Maple (команда **limit(deln^3, n=infinity)** [7]).

Перераспределение жесткостей. Уменьшить прогиб фермы можно перераспределяя материал по стержням конструкции. Предположим, что суммарный объем материала стержней фермы постоянен $V = F_0(L_1 + L_2 + L_3) = \text{const}$, где $L_1 = 4nc$ – длина всех стержней нижнего пояса, $L_2 = 2n(h - b) + 4nd$ – суммарная длина стержней решетки (раскосы и вертикальные шпренгельные стержни), $L_3 = 2(2n - 1)a$ – длина верхнего пояса. Если параметры k_1 и k_3 , характеризующие площади сечений нижнего и верхнего пояса, взять за варьируемые, то параметр, отвечающий за площадь сечений стержней решетки, определяется из выражения

$$k_2 = (L_{\text{sum}} - k_1 L_1 - k_3 L_3) / L_2, \tag{3}$$

где $L_{\text{sum}} = L_1 + L_2 + L_3 = 2((2a + 2c + 2d + h - b)n - a)$. Рассмотрим случай $k_1 = k_3$. Построим зависимость прогиба фермы от параметра перераспределения k_1 . Изменение этого параметра ограничено условием $k_2 > 0$. На рис. 3 кривые зависимости прогиба от параметра k_1 достаточно пологие, значение прогиба в окрестности минимума меняется слабо. Резкие всплески есть на концах области определения k_1 . Прямая (3), для наглядности растянутая в 1000 раз, отображена на этом же графике. Характерно, что случай одинаковых сечений всех стержней фермы $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ приходится на минимум прогиба. Зависимость прогиба при $k_1 = k_3$, построенного при том же условии постоянства объема от высоты, показана на рис. 4. Характерной особенностью этого графика является точка пересечения кривых с $k_1 = 2$ и $k_1 = 0,4$. Это указывает на неоднозначность решения задачи о минимизации прогиба при постоянстве объема (массы) конструкции. С увеличением высоты фермы прогиб предсказуемым образом уменьшается при любом распределении площадей сечений.

Усилия в наиболее сжатых и наиболее растянутых стержнях. Для оценки устойчивости стержней фермы и для проверки их прочности на разрыв будут полезны точные формулы для усилий в наиболее растянутых и сжатых стержнях. Выполняя сначала тестовые численные расчеты проверим достаточно очевидный факт, что наибольшее усилие растяжения будет в стержне нижнего пояса с номером $3n$ и в симметричном ему стержне. Наибольшее усилие сжатия возможно (также с учетом симметрии) в стержне верхнего пояса $11n$ и в раскосе $7n$. Методом индукции выводим формулы

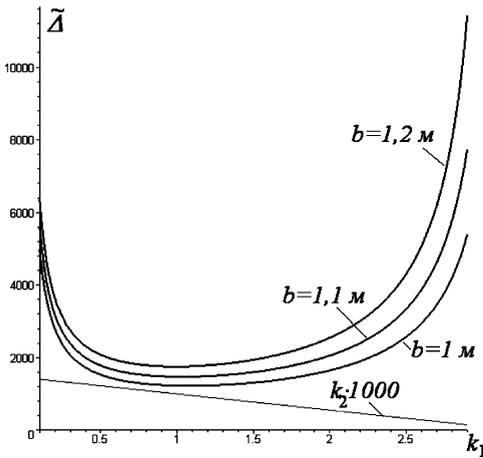


Рис. 3. Зависимость прогиба от соотношения

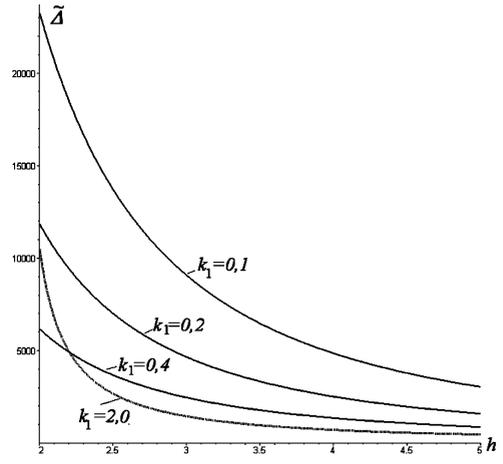


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты, жесткостей, $L = 30 \text{ м}$, $h = 5 \text{ м}$, $n = 10$, $L = 30 \text{ м}$, $b = 0,5 \text{ м}$, $n = 10$

$$S_{11n} = -P \frac{n^2 a}{h}, \quad S_{7n} = -P \frac{d(h + (n^2 - 1)b)}{(h - b)h}, \quad S_{3n} = P \frac{n^2 c}{h - b}. \quad (5)$$

На рис. 5 при $L = 2an$ и $P = P_0 / (2n - 1)$ представлены соответствующие кривые. Пересечение кривых S_{11n} и S_{7n} показывает, что наиболее сжатый стержень может быть либо в верхнем поясе ($11n$), либо в раскосе с номером $7n$. Все три кривые имеют асимптоты: горизонтальная для S_{11n} и наклонные для S_{11n} и S_{3n}

$$S_{11n} \rightarrow -L / (4h), \quad S_{7n} \rightarrow -\frac{b}{4(h - b)}(2n + 1), \quad S_{3n} \rightarrow \frac{b}{4(h - b)}(2n + 1).$$

Из решения уравнения $S_{11n} = S_{7n}$ можно найти условие пересечения кривых

$$b = \frac{h(n^2 a - d)}{n^2(a + d) - d}.$$

Смещение опоры. В балочных фермах под действием вертикальной нагрузки подвижная опора получает некоторое горизонтальное смещение. Для оценки этого смещения повторим описанную индуктивную процедуру, используя формулу Максвелла – Мора (1), где в этот раз s_i – усилие в i -м стержне фермы от единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре. Опуская выкладки запишем результат

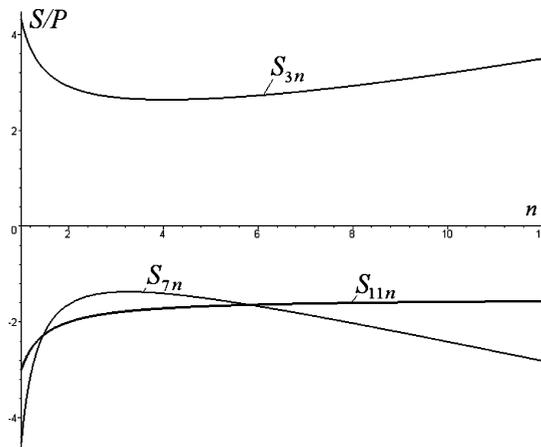


Рис. 5. Усилия в стержнях при $L = 30 \text{ м}$, $h = 5 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$

$$\Delta EF_0 = \frac{2nP}{3a(b-h)} \left(\frac{2c^3(2n^2+1)h}{k_1(h-b)} + \frac{4b^2h(2n^2+1)}{k_2} + \frac{d^3b(3h+(4n^2-1)b)}{k_2(h-b)h} \right)$$

Коэффициент k_3 , отвечающий за сечение верхнего пояса, в эту формулу не входит, так как усилия в стержнях верхнего пояса от единичной горизонтальной силы в опоре равны нулю. Кривые зависимости смещения от соотношения жесткостей и высоты аналогичны по характеру рис. 3 и 4 соответственно.

Заключение

Рассмотренная схема статически определимой фермы является обобщением широко распространенной схемы фермы с треугольной решеткой. Аналитические выражения для прогиба, усилий в стержнях и горизонтального смещения опоры, полученные индуктивным методом, могут быть использованы как тестовые для численных методов, применимых к подобным системам с более общими свойствами. Найденные асимптотические свойства конструкции подскажут конструктору пути совершенствования сооружения. Несмотря на то, что точные значения экстремумов кривых на рис. 2, 3 и 4 найти не удастся, сам факт их существования является поводом для решения отдельной задачи оптимизации конструкции. Численное же нахождение экстремальных точек труда не составляет. К численным методам оптимизации ферм относятся и генетические алгоритмы [8–10].

Литература

1. *Жакетов Д.Д., Яцков В.Б.* Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 ч. Ч. 7. — Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 34–36.
2. *Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А. И. Кириллова. — М.: Физматлит, 2008. — 384 с.
3. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений, 2014. № 6. С. 2–6.
4. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал, 2015. № 1 (53). С. 32–38.
5. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений, 2015. № 2 (259). С. 2–6.
6. *Кирсанов М.Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 208 с.
7. *Матросов А.В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ – Петербург, 2001. — 526 с.
8. *Кирсанов М.Н.* Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений, 2010. № 2. С. 60–63.
9. *Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Лелетко А.А.* Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций. — Брянск: Изд-во БГИТА, 2010. — 187 с.
10. *Алексеев А.В., Серпик И.Н.* Оптимизация плоских ферм на основе генетического поиска и интерактивной процедуры триангуляции // Строительство и реконструкция, 2010. № 2. С. 3–7.

Literatura

1. *Zhaketov D.D., Yatskov V.B.* Prohib ploskoy balochnoy fermi s treugolnoy reshetkoy // Nauka i obrazovanie v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 ch. Ch. 7. — Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», 2014. S. 34–36.
2. *Kirsanov M.N.* Reshebnik. Teoreticheskaya mehanika / Pod red. A. I. Kirillova. — M.: Fizmatlit, 2008. — 384 s.
3. *Kirsanov M.N.* Analiticheskiy raschet mnogoreshetchatoy fermi // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2014. No 6. S. 2–6.
4. *Kirsanov M.N.* Analiz progiba fermi pryamougolnogo prostranstvennogo pokryitiya // Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal, 2015. No 1 (53). S. 32–38.
5. *Kirsanov M.N.* Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy regul'arnoy strukturyi s ploskoy gran'yu // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2015. No 2 (259). S. 2–6.
6. *Kirsanov M.N.* Praktika programmirovaniya v sisteme Maple. — M.: Izdatelskiy dom MEI, 2011. — 208 s.
7. *Matrosov A.V.* Maple 6. Reshenie zadach vysshey matematiki i mehaniki. — SPb.: BHV – Peterburg, 2001. — 526 s.
8. *Kirsanov M.N.* Geneticheskii algoritm optimizatsii sterzhnevyykh sistem // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2010. No 2. S. 60–63.
9. *Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Leletko A.A.* Geneticheskie algoritmy optimizatsii metallicheskih stroitelnykh konstruksiy. — Bryansk: Izd-vo BGITA, 2010. — 187 s.
10. *Alekseytsev A.V., Serpik I.N.* Optimizatsiya ploskikh ferm na osnove geneticheskogo poiska i interativnoy protsedury triangulyatsii // Stroitelstvo i rekonstruktsiya, 2010. No 2. S. 3–7.