

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

**МЕЖДУНАРОДНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ,
ПОСВЯЩЕННАЯ 100-ЛЕТИЮ
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
СЕЛИМА ГРИГОРЬЕВИЧА
КРЕЙНА**

13 – 19 ноября 2017 г.

Сборник материалов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

М43

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 17-01-20506-г

П Р О Г Р А М М Н Ы Й К О М И Т Е Т :

Е. И. Моисеев (председатель), А. Д. Баев (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), В. А. Костин (зам. председателя), Е. М. Семенов (зам. председателя), А. Г. Баскаков, А. В. Глушко, П. П. Забрейко, В. Г. Задорожный, В. Г. Звягин, М. И. Илолов, М. И. Каменский, П. А. Кучмент, Р. Мустафокулов, Э. М. Мухамадиев, В. Д. Репников, В. И. Овчинников, В. И. Ряжских, Ю. И. Сапронов, А. П. Солдатов, Ф. А. Сукочев.

О Р Г К О М И Т Е Т :

Е. И. Моисеев (председатель), Д. А. Ендовицкий (сопредседатель), В. А. Садовничий (сопредседатель), А. Д. Баев (зам. председателя), И. С. Ломов (зам. председателя), В. Н. Попов (зам. председателя), А. В. Арутюнов, С. В. Асташкин, А. В. Боровских, Ю. Е. Гликлик, И. С. Гудович, Я. М. Ерусалимский, С. П. Зубова, Г. А. Курина, Л. Н. Ляхов, В. П. Орлов, И. Я. Новиков, С. А. Шабров, А. П. Хромов, М. Ш. Бурлуцкая (ученый секретарь).

Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна (13–19 ноября 2017 г.) : сборник материалов / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — 232 с.

ISBN 978-5-9273-2535-1

В сборнике представлены материалы лекций и докладов, включенных в программу Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна. Тематика охватывает широкий спектр проблем функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, задач математической физики, моделирования, оптимального управления, смежных проблем прикладной и инженерной математики, преподавания математики.

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

- © Воронежский государственный университет, 2017
- © Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2017
- © Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2017
- © Оформление. Издательский дом ВГУ, 2017

ISBN 978-5-9273-2535-1



Селим Григорьевич Крейн, 15.07.1917 — 16.08.1999

Оглавление

<i>Яцкин Н.И.</i> Молодой человек — седой, с лучезарными глазами	13
<i>Курина Г.А.</i> О семинарах С. Г. Крейна	19
<i>Перов А.И.</i> К 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна	23
<i>Скляднев С.А.</i> Наш Крейн	26
Вспоминая С.Г. Крейна (Ученики из зарубежья)	28
<i>Фурменко А.И.</i> Крейн С.Г. и вопросы педагогического мастерства	30
<i>Алероева Х.Т.</i> Дробное исчисление и малые колебания механических систем	32
<i>Асташкин С.В.</i> Симметричные пространства, удовлетворяющие критерию Данфорда-Петтиса	33
<i>Баев А.Д., Давыдова М.Б.</i> О связи одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с интегральным оператором специального вида	33
<i>Баев А.Д., Панков В.В.</i> Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения	37
<i>Баев А.Д., Работинская Н.И.</i> Об ограниченности псевдодифференциальных операторов с вырождением	41
<i>Барановский Е.С.</i> Задача о движении вязкоупругой жидкости с пристенным скольжением порогового типа	44
<i>Белопольская Я.И., Степанова А.О.</i> Вероятностные подходы к построению классических и неклассических решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений	46
<i>Белоусов Ф.А., Истратов В.А., Шевгунов Т.Я., Бекларян А.Л.</i> Модель распространения доверия в обществе: влияние начального расположения агентов на динамику распространения доверия в обществе	49
<i>Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г.</i> Комбинированные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта	50
<i>Бильченко Г.Г., Бильченко Н.Г.</i> Смешанные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта	52

<i>Бирюков А.М.</i> Задача Коши для систем комплексных дифференциальных уравнений в классах функций экспоненциального типа	55
<i>Бондаренко Е.С., Мирошниченко С.И., Родин В.А.</i> Визуализация процессов “переворужения” в задаче садовника	56
<i>Бугакова Н.И.</i> Об адаптации метода конечных элементов для разнорядковой математической модели, описывающей малые вынужденные колебания струнно-стержневой системы	57
<i>Бунеев С.С., Баев А.Д., Давыдова М.Б.</i> О коэрцитивной разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения	60
<i>Бурлуцкая М.Ш.</i> О смешанных задачах для волнового уравнения и уравнений с инволюцией в классе разрывных решений	62
<i>Буслаев А.П., Таташев А.Г.</i> Точный анализ динамических систем на двухконтурной сети	64
<i>Бутов В.В., Копылов А.Н.</i> О дополнительных признаках в задаче обучения нейросетевого декодера Хемминга	65
<i>Васильев В.Б.</i> Об эллиптических операторах, уравнениях и краевых задачах	66
<i>Владимирова О.В., Костин В.А., Костин Д.В., Сапронов Ю.И., Царев С.Л.</i> Гидродинамическая модель инвестиционного потока	67
<i>Ву Нгуен Шон Тунг</i> Специальная нелокальная задача для общего уравнения переноса нейтронов	72
<i>Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б.</i> О расщеплении одного разностного оператора	74
<i>Гладышев Ю.А.</i> Приложение метода обобщенных степеней Берса для построения решений уравнений теории упругости	76
<i>Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.</i> Неклассические релаксационные колебания и бифуркация голубого неба в системах с одной быстрой и несколькими медленными переменными	80
<i>Гнеушев И.А., Ковалева М.И., Сапронов Ю.И.</i> Редуцированная модель динамики жидкости в 3D-диффузоре	81

<i>Гнеушев И.А., Колесникова И.В., Костин Д.В., Сапронов Ю.И.</i> Трехмодовые прогибы продольно сжатой балки на двойном упругом основании	84
<i>Горюнов В.Е.</i> Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биологической модели реакции Белоусова	87
<i>Денисов И.В.</i> Сингулярно возмущенные краевые задачи с нелинейностями	88
<i>Диденко Д.Б.</i> Спектральный анализ операторных полиномов и дифференциальных операторов второго порядка	90
<i>Жук Т.А., Головкин Н.И.</i> Численный анализ СМО с конечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока с ненулевым коэффициентом сноса	91
<i>Зверева М.Б., Каменский М.И.</i> Задачи о колебаниях струны с нелинейными условиями	93
<i>Зубова С.П., Раецкая Е.В.</i> Тематика Крейна в решении многоточечных задач управления	94
<i>Зюкин П.Н.</i> О гладких решениях вырождающегося дифференциального уравнения	96
<i>Илолов М.</i> Абстрактные параболические уравнения и их приложения	98
<i>Иохвидов Е.И.</i> Исследование структуры операторного класса Γ	101
<i>Исаева С.Э.</i> Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающим оператором	103
<i>Калашникова М.А.</i> Многотемповые сингулярно возмущенные задачи (обзор)	105
<i>Калинин А.И., Лавринович Л.И.</i> Метод малого параметра в задачах минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных систем	106
<i>Калитвин А.С.</i> Об одном классе линейных операторов с частными интегралами	107
<i>Калитвин А.С., Трусова Н.И.</i> О дифференцируемости операторов Гаммерштейна с частными интегралами в $C^{(1),n}(D)$	109
<i>Калитвин В.А.</i> О линейном интегро-дифференциальном уравнении Барбашина с частной производной второго порядка	111

<i>Калманович В.В.</i> Об одном методе построения аналитического решения уравнения диффузии неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводнике широким электронным пучком	113
<i>Клодина Т.В., Задорожная Н.С.</i> Теорема об изменении расхода жидкости при решении одной задачи стационарной фильтрации	116
<i>Ковалевский Р.А.</i> О свойствах оператора, сопряженного к одному классу весовых псевдодифференциальных операторов	117
<i>Кожеевникова Л.М.</i> Энтропийные и ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей	120
<i>Кокурин М.М.</i> Оценки скорости сходимости разностных схем для некорректных задач Коши в банаховом пространстве	121
<i>Кокурин М.Ю.</i> Условно-корректные задачи и оценки погрешности методов регуляризации	123
<i>Конёнков А.Н.</i> Оценки производной фундаментального решения параболического уравнения дивергентного вида с одной пространственной переменной	124
<i>Кононенко Л.И.</i> Обратная задача для сингулярно возмущенной системы в химической кинетике	125
<i>Костин В.А.</i> Сильно непрерывная косинус-функция и корректность краевой задачи Дирихле	126
<i>Костин А.Б., Шерстюков В.Б.</i> Вычисление сумм типа Рэлея для корней уравнения, возникающего в задаче с наклонной производной	128
<i>Крейн М.Н.</i> Отображения в некоммутативных алгебрах .	129
<i>Лобода А.В.</i> Коэффициентный анализ в задаче описания голоморфно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$. . .	130
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Метод корректировки решений общего одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части	131
<i>Лыков К.В.</i> Новое экстраполяционное описание пространств Орлича	134
<i>Лысенко В.В., Ломовцев Ф.Е.</i> Решение краевой задачи для уравнения колебаний в четверти плоскости с не характеристическими вторыми производными в граничном условии	136

<i>Миронов А.Н., Миронова Л.Б.</i> Об инвариантах Лапласа для одного уравнения с тремя независимыми переменными	138
<i>Мурзабекова Г.Е.</i> Об обратных задачах для волновых уравнений с памятью на графах	139
<i>Мустафокулов Р.</i> Об одном линейном уравнении типа Эйлера с кратной характеристикой	140
<i>Нестеров А.В.</i> Сингулярно возмущенные системы уравнений переноса	143
<i>Нестеров А.В., Кожеев Д.С.</i> Асимптотика решения одной задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса	147
<i>Нуртазина К.Б.</i> Об обратных задачах для тепловых уравнений с памятью на графах	149
<i>Осипенко Г.С.</i> Символический образ динамической системы	150
<i>Охлутина О.В.</i> О представляющих мерах экспоненциальных классов субгармонических функций в комплексной плоскости	153
<i>Плотникова Ю.А.</i> Создание тестовых вопросов с параметрами для математических дисциплин в среде MOODLE	154
<i>Подорога А.В.</i> О некоторых вопросах, возникающих при моделировании транспортных потоков	156
<i>Политов К.О.</i> Сплетение обыкновенного оператора Дункла с оператором дифференцирования в псевдоалгебре Чередника	158
<i>Прилепко А.И.</i> Задачи оптимального управления для операторных уравнений первого рода в (B) – пространствах	160
<i>Прокопьева Д.Б., Жук Т.А., Головкин Н.И.</i> Уравнения для распределения числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока и ненулевым коэффициентом сноса	161
<i>Ратинер Н.М.</i> К теории степени фредгольмовых отображений неотрицательного индекса и их возмущений	163
<i>Роде Д.А.</i> О некоторых свойствах обобщенной модели вязкоупругости Фойгта	164
<i>Родикова Е.Г.</i> О мультипликаторах классов И.И. Привалова	165

<i>Родин В.А., Синегубов С.В.</i> К вопросу о динамике изменения прироста капитала	166
<i>Родионова О.М., Голованева Ф.В.</i> О математической модели сжатого стержня на упругом основании с локализованными особенностями	167
<i>Рыхлов В.С.</i> Об однократной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов четвертого порядка	169
<i>Савин А.Ю.</i> Эллиптические операторы, ассоциированные с группами квантованных канонических преобразований	170
<i>Семёнов В.В.</i> Сходимость схем расщепления для операторных включений	171
<i>Семенов Е.М.</i> Строго сингулярные операторы в пространствах L_p	172
<i>Семёнов М.Е., Попов М.А.</i> Стабилизация связанных обратных маятников	173
<i>Ситник С.М.</i> Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи	174
<i>Терехин П.А.</i> Аффинные базисы Рисса	175
<i>Тимергалиев С.Н., Якушев Р.С.</i> О разрешимости пространственных нелинейных краевых задач для упругих неоднородных анизотропных тел	176
<i>Тихонов И.В., Цветкович Д.Г., Шерстюков В.Б.</i> Законы распределения нулей для классических полиномов Бернштейна	179
<i>Усков В.И.</i> Решение уравнения в частных производных четвертого порядка	181
<i>Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Ускова Н.Б.</i> Ключ к тайнам компьютеров...	183
<i>Федоров В.Е., Нагуманова А.В.</i> Обратная задача для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка	184
<i>Фоменко Т.Н.</i> Совпадения и общие неподвижные точки семейств отображений упорядоченных множеств . . .	185
<i>Фомин В.И.</i> Об интерполяции решений линейных дифференциальных уравнений	188
<i>Фомина Т.П.</i> Организация исследовательской деятельности студентов	190

<i>Фролова Е.С., Жук Т.А., Головкин Н.И.</i> Уравнения для незавершенной работы в СМО с бесконечным накопи- телем, диффузионной интенсивностью входного по- тока с ненулевым коэффициентом сноса	191
<i>Хоанг Х.Н., Фам К.Т.</i> Взаимодействие видов симметрий ОДУ	193
<i>Царьков И.Г.</i> Геометрия гиперповерхности с одномерным особым множеством	195
<i>Цветкович Д.Г., Шерстюков В.Б.</i> Об асимптотическом поведении некоторых нулей для полиномов Берн- штейна	196
<i>Цехан О.Б.</i> Анализ свойств линейных сингулярно возму- щенных систем управления с запаздыванием в состо- янии на основе асимптотических методов	198
<i>Чистяков В.Ф.</i> Свойства колец дифференциальных, интегро-дифференциальных операторов и соответ- ствующих уравнений	199
<i>Шамолин М.В.</i> Первые интегралы динамических систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия	202
<i>Шелковой А.Н.</i> Метод подобных операторов в исследова- нии интегро-дифференциального оператора с инте- грируемым с квадратом ядром	204
<i>Шмырин А.М., Ярцев А.Г., Трофимов Е.П.</i> Идентифика- ция окрестностных систем с набором кортежей данных	205
<i>Kornev S., Obukhovskii V., Loi N.V.</i> On random generalized integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions	206
<i>Melnikova I.V.</i> Abstract stochastic problems: generalized and regularized solutions	207
<i>Orleu N., Akishev G.</i> Condition for the existence of the derivative of function in grand lebesgue space	208
<i>Piskarev S.</i> The order of convergence of difference schemes for fractional equations of order $0 < \alpha < 1$	210
<i>Reinov O.</i> On $\mathbb{Z}_d$ -symmetry of spectra of linear operators in banach spaces	211
<i>Анохина А.В., Голованева Ф.В.</i> О непрерывной спек- тральной ветви нелинейной математической модели с негладкими решениями	212

<i>Бахтина Ж.И.</i> О математическом моделировании химических процессов в биотканях	215
<i>Буйвалова М.А., Голованева Ф.В.</i> О достаточных условиях разрешимости нелинейной граничной задачи шестого порядка с негладкими решениями	217
<i>Sitnik S.M., Polovinkin I.P., Polovinkina M.V., Shishkina E.L.</i> On properties of mean values of solutions to linear hyperbolic equations	220
<i>Ларионов Е.А.</i> Асимптотика собственных и сингулярных чисел	221
<i>Ризниченко Г.Ю.</i> Математика и математическое моделирование для биологов	222
<i>Задорожний В.Г., Купцова Е.В.</i> О моментных функциях решения стохастической линейной системы дифференциальных уравнений	223
<i>Павлов Е.А., Фурменко А.И.</i> О некоторых свойствах операторов Харди-Литтльвуда	224
<i>Соколова А.Н., Журавлев Н.Б.</i> Об интегральном операторе и мультипликаторах Флоке для дифференциально-разностных уравнений	226
<i>Сипайло П.А.</i> О естественности операции взятия следа в классе интегральных операторов Фурье	227

**Молодой человек — седой,
с лучезарными глазами...
Н.И. Яцкин (Иваново)**

Академик НАН Украины Юрий Макарович Березанский в своих воспоминаниях¹ писал: «Осенью 1945 г. на мехмате появился молодой человек — хромающий и седой, с лучезарными глазами — Селим Григорьевич Крейн».

На протяжении двух десятилетий мне посчастливилось учиться и работать² под руководством Селима Григорьевича. «Роскошь общения» с молодым седым человеком (неотразимого обаяния и феноменальной работоспособности) останется навсегда самым ярким впечатлением моей юности.

Сколько нас было таких у уважаемого и обожаемого С. Г. — совершенно разных по способностям, темпераменту, вкусам и интересам?! Селим Григорьевич легко и непринужденно находил для каждого индивидуальный маршрут в науке (и фактически, как следствие, — в жизни).

Ведомая мудрым и веселым предводителем, зеленая математическая поросль приобщалась к (этическим, эстетическим, юмористическим, спортивным, застольным) обычаям и традициям отечественного студенческого, аспирантского и научного сообщества.

© Яцкин Н.И., 2017

¹ Березанский Ю. М. Киев, осень 1943 — 1946. Возрождение математики // С. Г. Крейн (В воспоминаниях учеников и коллег). — Воронеж : ВГУ, 2002. — С. 5–12.

² В качестве студента математического факультета Воронежского университета (ВГУ), затем — аспиранта и преподавателя лесотехнического института (ВЛТИ).



В моем архиве сохранилась фотография, где мы поем. Что поем, сейчас, увы, уже не вспомнить. Не исключено, что одну из любимых — классических, хулиганских, студенческих: «Коперник целый век трудился».



В сети можно найти десятки вариантов текста этой песни. Я следую принятому в воронежской математической общине 70-х годов минувшего века.

*Коперник целый век трудился,
чтоб доказать Земли вращенье.
Дурак, зачем он не напился, —
тогда бы не было сомнения?!*

Припев (основной вариант)

*Так наливай, так наливай!
И все до капли выпивай!
Вино, вино, вино, вино!
Оно на радость нам дано!*

*И Ньютон целый век трудился,
чтоб доказать тел притяженье.
Дурак, зачем он не влюбился, —
тогда бы не было сомненья?!*

Припев (основной вариант)

*И Дарвин целый век трудился,
чтоб доказать происхождение.
Дурак, зачем он не женился, —
тогда бы не было сомненья?!*

Припев (специальный вариант)

*Так наливай сосед соседке!
Соседка любит пить вино!
Непьющие соседки редки:
они повьмерли давно!*

*Колумб Америку открыл,
потом хотел открыть другую.
Дурак, зачем он не открыл
при ВГУ свою пивную?!*

Припев (основной вариант)

Когда кто-либо из «поросли» защищался, то на так называемой «главной части» мероприятия, как правило, сочиняли дополнительный «неклассический» куплет. Помню спетый по моему адресу:

*И Яцкин целый век трудился,
решая связности на торе.
Дурак, зачем он не напился, —
хотя бы просто в коридоре?!*

Однако возможному молодому читателю этих мемориальных заметок не следует представлять себе «вождя и лидера» воронежских математиков только как блистательного тамаду математических посиделок. Селим Григорьевич был человеком волевым и принципиальным.

Об этом пишет, например, известный американский математик Петр Абрамович Кучмент³, с которым мы были когда-то «одногоруппниками», в группе, руководимой С. Г.: «(...) в ситуациях, когда компромисс противоречил бы его моральным принципам, он (С. Г.) умел принимать твердое решение (...)». (И далее рассказывается об «уходе» Селима Григорьевича из ВГУ в ВЛТИ, что привело, в частности, к заметному «смещению центра притяжения» городского математического сообщества.)



В воронежском «лестехе» сформировалась уникальная для провинциального технического вуза кафедра, на которой, помимо Петра Абрамовича и автора этих строк, трудились и многие другие птенцы гнезда Крейна. Я уже дважды ссылался выше на статьи из сборника воспоминаний учеников и коллег С. Г. Крейна, но придется сделать это еще раз: цитируемый сборник содержит удивительное, единственное в своем роде сравнительно-биографическое исследование–размышление⁴ нашего коллеги по кафедре в ВЛТИ,

³ Кучмент П. А. Мой дорогой учитель // С. Г. Крейн (В воспоминаниях учеников и коллег). — С. 57–61.

⁴ Чернышов К. И. Воспоминание о неупорядоченной паре М. А. — С. Г. // Там же. — С. 73–87.

Карнелия Исидоровича Чернышова, в котором прослеживается дружба–конкуренция двух «титанов функционального анализа», Селима Григорьевича Крейна и Марка Александровича Красносельского (1920 — 1997)⁵. Некоторые цитаты: «При жизни М. А. — С. Г., как и все вокруг, я относился к ним обоим, как к двум ближайшим заоблачным вершинам в горном массиве “Математика”. Знать точную высоту вершин было неважно и неинтересно (...). М. А. был беспартийным, С. Г. вступил в партию в 1945 году. Будучи все 60-е годы, вплоть до 1971 года, заведующим кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей, С. Г. недолгое время был также деканом, секретарем партбюро математикомеханического факультета ВГУ. Думаю, что именно этот его статус в значительной степени облегчил создание НИИ математики при ВГУ и организацию знаменитых Воронежских зимних математических школ. (...) М. А. — С. Г. были непривередливы в быту и старались не сильно в него погружаться. Для своего положения оба были бесребрениками, не имели коттеджа, машины, дачи, других стандартных атрибутов преуспевающего человека. А что имели, кроме Богом данных и скрупулезным трудом обогащенных талантов? Из материальных ценностей — уникальные библиотеки».



⁵ См. о нем мемориальный том «Марк Александрович Красносельский (К 80-летию со дня рождения)». М.: Институт проблем передачи информации РАН, 2000. 215 с.

Приближается 15 июля 2017 года — столетний юбилей выдающегося деятеля отечественной математической школы и замечательного человека, Селима Гершковича (Григорьевича) Крейна. Не сомневаюсь, что в Воронеже (и не только) будут проведены разнообразие юбилейные мероприятия, будут изданы новые книги воспоминаний.

Мои скромные заметки обращены, по большей части, к подрастающему поколению математиков. Чтобы знали и не забывали: в России советской и в России демократической, во все времена жили и работали ученые мирового уровня, патриоты своей Родины и граждане всемирной математической республики.

2017, март

О СЕМИНАРАХ С. Г. КРЕЙНА

Г.А. Курина (Воронеж)

kurina@math.vsu.ru

Как известно, деятельность Селима Григорьевича Крейна была чрезвычайно многогранной. Я хочу рассказать о некоторых семинарах, которыми он руководил и в работе которых я принимала участие. Научные семинары появлялись, если несколько учеников начинали работать в одном направлении. Когда необходимость в таких встречах пропадала, семинары исчезали.

К сожалению, никто не записывал темы семинаров и докладчиков. Я напишу несколько слов о том, что осталось в моей памяти и заранее прошу прощения за неточности и за не упомянутых лиц.

Когда на пятом курсе я стала дипломницей С.Г. (простите за фамильярность, но так мы часто называли Селима Григорьевича между собой), то начала посещать семинар по алгебрам и группам Ли, поскольку тема моей работы была "Банаховы группы Ли и дифференциальные уравнения". Заседания проходили в лесотехническом институте (в настоящее время — Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова), куда С.Г. перешел работать в 1971 г. из Воронежского государственного университета. Участниками семинара были: М.Я. Грабовская, В.И. Кононенко, П.А. Кучмент, А.И. Фурменко, Н.И. Яцкин. Я была поражена эрудицией всех участников этого семинара.

Селим Григорьевич постоянно общался с огромным количеством коллег со всего мира и щедро делился с учениками информацией. Однажды он дал мне прочесть письмо от А.Г. Руткаса из Харькова. После этого меня заинтересовали уравнения, не разрешенные относительно производной, и я стала посещать семинар по этой теме, который назывался семинаром по малому параметру. Участниками семинара тогда были С.П. Зубова и К.И. Чернышов, постепенно присоединялись другие ученики С.Г. Семинар просуществовал более 20 лет. Большое внимание на нем уделялось различным задачам с малым параметром, изучались работы А.Б. Васильевой, С.А. Ломова, В. Вазова и др. С.Г. очень умело поддерживал интерес участников семинара к обсуждаемым проблемам.

Селим Григорьевич часто приглашал иногородних математиков в качестве докладчиков на семинарах и школах. Он активно участ-

вовал сам и очень способствовал участию своих учеников в различных школах и конференциях.

Следует заметить, что в настоящее время уравнения, не разрешенные относительно производной, которые называются еще сингулярными, вырожденными, дифференциально-алгебраическими, дескрипторными, алгебро-дифференциальными, активно изучаются во всем мире. Отмечу, например, помимо Воронежской, Иркутскую (Ю.Е. Бояринцев, М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков), Челябинскую (Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров), Харьковскую (А.Г. Руткас, Л.А. Власенко) школы, а также математиков из Германии (R. März, C. Tischendorf and P. Kunkel, V. Mehrmann), Италии (A. Favini), США (S. Campbell), с которыми участниками семинара поддерживались тесные контакты.

Перечислю названия диссертаций с указанием года и места защиты некоторых активных участников семинара.

Зубова С.П. Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной (канд. дисс., Воронеж, 1973), Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений (докт. дисс., Белгород, 2013).

Зюкин П.Н. Поведение решений сингулярных дифференциальных уравнений с малым параметром (канд. дисс., Воронеж, 1982).

Сапронов И.В. Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (канд. дисс., Воронеж, 1984).

Ливчак А.Я. Нерегулярные линейные операторы, зависящие от параметра (канд. дисс., Воронеж, 1984).

Денисов И.В. Сингулярные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве (канд. дисс., Москва, 1982), Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях с частными производными (докт. дисс., Москва, 2010).

Курина Г.А. Некоторые сингулярно возмущенные задачи оптимального управления (канд. дисс., Москва, 1978), Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной (докт. дисс., Москва, 1992).

Товбис А.И. Решение сингулярных линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (канд. дисс., Воронеж, 1984).

Фам Ки Ань. О сходимости итерационных методов в условиях неединственности решений операторных уравнений (канд. дисс., Воронеж, 1979), Операторные методы исследования нелинейных вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений (докт. дисс., Киев, 1988).

Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (канд. дисс., Воронеж, 1989).

Чернышов К.И. Об операторных дифференциальных уравнениях, неразрешенных относительно производной (канд. дисс., Киев, 1980), Асимптотический анализ уравнения с фредгольмовым оператором при производной (докт. дисс., Киев, 1992).

Никогда не забыть вечерние семинары в зимней математической школе на турбазе "Березка" в Рамони. Особенно популярным был семинар по уравнениям в частных производных, которым руководил С.Г. Заседания этого семинара продолжались допоздна. А потом еще долго обсуждались доклады в комнатах.

Запомнились лекции, посвященные современным разделам математики, собиравшие математиков со всего города.

Семинары возникали, как грибы после дождя, при наличии соответствующих условий. Например, был в лесотехническом институте семинар по томографии во время выполнения хоздоговора с Всесоюзным НИИ медицинского приборостроения (П.А. Кучмент, С.Я. Львин, Л.Е. Соломатина, К.И. Чернышов, И.Я. Шнейберг).

Постоянно действовал в лесотехническом институте семинар кафедры высшей математики и теоретической механики, которой руководил С.Г. Крейн. Тематика докладов была различной. Например, я рассказывала о программировании на Алголе. Селим Григорьевич постоянно учился сам и побуждал к этому окружающих.

Посчастливилось мне принимать участие и в городском математическом семинаре, который проводился в ВГУ. На нем были, в основном, обзорные доклады, на основе которых был издан сборник: Теория операторных уравнений, Воронеж, изд-во ВГУ, 1979. Приведу содержание этого сборника: Ахмеров Р.Р. К теории уравнений нейтрального типа, Баскаков А.Г. Локально регулярные коммутативные банаховы алгебры, Дядченко Ю.А. О разрешимости нелинейного операторного уравнения типа Вольтерра, Иохвидов И.С. О некоторых новых идеях и результатах в теории линейных операторов в пространствах Π_∞ , Курбатов В.Г. Об обратимости запаздывающих операторов, Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах

оптимального управления, Кучмент П.А. Представление решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными и периодическими коэффициентами (обзор), Чубурин Ю.П. Гиперфункции и теорема Н.Н. Боголюбова об "острие клина".

Помимо научных семинаров, руководимых С.Г. Крейном, был и так называемый философский семинар в лесотехническом институте, секретарем которого я была. На этом семинаре был официальный консультант с кафедры философии. Посещение семинара было обязательным для преподавателей нескольких кафедр лестех. По просьбе С.Г. перед семинаром вывешивались на кафедрах объявления с непременно перечислением всех участников. Благодаря Селиму Григорьевичу, заседания семинара всегда проходили очень живо и интересно. Особенно мне запомнились дискуссии и доклады, касающиеся образования.

Воссоздать атмосферу семинаров С.Г. Крейна невозможно. Всегда чувствовался неподдельный интерес Селима Григорьевича к математическим проблемам и людям, которые этими проблемами занимаются. Энциклопедическая широта его интересов и знаний всегда восхищала. Не знаю ни одного человека, который так радовался бы успехам своих учеников, как Селим Григорьевич. Он навсегда остался Учителем для всех своих многочисленных учеников.

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ СЕЛИМА ГРИГОРЬЕВИЧА КРЕЙНА

А.И. Перов (Москва)

perov@amtm.vsu.ru

Я не был прямым учеником Селима Григорьевича Крейна и не работал у него на кафедре, однако живя в одном городе и, более того, иногда работая вместе на одном факультете (речь идёт о математико-механическом факультете Воронежского университета) мы, естественно, встречались по разным делам.

Весной 1952 года в Воронеже появился Марк Александрович Красносельский, который стал работать на математико-механическом факультете ВГУ. Некоторое время спустя в Воронеже объявился и Селим Григорьевич Крейн, который обосновался в Воронежском лесотехническом институте, став заведующим кафедрой высшей математики. К этим математикам потянулась талантливая студенческая молодёжь. Как лекции, так и проводимые ими семинарские занятия превратились в увлекательные и полезные мероприятия. Я посещал лекции Селима Григорьевича по линейной алгебре, и мне очень понравилось, как он читал лекции. Может быть, потому что этот курс я уже слышал раньше, может быть по какой-то другой причине, но лекции Селима Григорьевича по линейной алгебре мне казались чуть ли не вершиной педагогического мастерства.

В 1954 году в переводе с английского Анатолия Дмитриевича Мышкиса вышла из печати книга известного американского математика Ричарда Беллмана "Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений". Селим Григорьевич вёл семинар по этой книге. На этом семинаре заслушивались выступления у доски с мелом студентов по отдельным ранее оговоренным темам. Выступление каждого докладчика сопровождалось пояснениями и комментариями Селима Григорьевича. К несомненным достоинствам изучаемой нами книги относятся многочисленные упражнения разной степени трудности, размещённые по ходу дела в книге. Эти упражнения мы пытались выполнить и в процессе возникали постановки новых задач, из которых впоследствии выкристаллизовывались темы курсовых и дипломных работ. Конечно, центральной фигурой во время семинарских занятий была фигура Селима Григорьевича, который сам в то время интенсивно занимался вопросами теории линейных дифференциальных уравнений.

Крупным событием математической жизни Советского Союза было издание "Математической энциклопедии" в пяти томах. Статьи писали приглашённые математики разных школ и направлений. Солидный вклад в эту энциклопедию внесли воронежские математики — профессора Селим Григорьевич Крейн, Владимир Иванович Соболев, Иосиф Семёнович Иохвидов и Евгений Михайлович Семёнов. К слову сказать, Селим Григорьевич был научным редактором одной из книг справочной математической библиотеки с названием "Функциональный анализ крупнейшим специалистом в котором, как известно, он являлся.

К концу жизни каждый учёный (а, может быть, ещё раньше) прикидывает, какое место он занимает в науке своего времени. Так, по некоторым сведениям, Марк Александрович Красносельский считал, что он входит в первую пятёрку математиков, занимающихся нелинейным функциональным анализом (наряду с Ниренбергом, Браудером). Аналогично Селим Григорьевич Крейн считал себя сопоставимым с известным американским математиком японского происхождения Тосио Като.

Одним из известных учеников Селима Григорьевича, а их у него только кандидатов наук более восьми десятков, был Юрий Львович Далецкий, который впоследствии стал академиком. Я ему благодарен — хотя бы за то, что он был одним из оппонентов по моей докторской диссертации (другими оппонентами были Анатолий Дмитриевич Мышкис и Самуил Давидович Эйдельман). Кстати сказать, моя диссертация довольно-таки долго пролежала в ВАКе. Когда в это время мы встречались с Юрием Львовичем, я ему говорил так: "Конечно, профессором столичного ВУЗа я себя не вижу, но что касается провинциального ВУЗа, то тут я думаю был бы на месте". На что Юрий Львович мне отвечал: "Да не бывает деления профессоров на столичных и провинциальных". В конце концов меня всё-таки утвердили, и на протяжении более 40-ка лет я руководил одной из кафедр факультета прикладной математики ВГУ.

Как-то, когда я работал деканом математико-механического факультета ВГУ, мы с Селимом Григорьевичем по поручению нашего министерства ездили в Ленинград для ознакомления с работой механико-математического факультета ЛГУ (до этого наш факультет проверяла комиссия из ленинградских математиков во главе с профессором Ниной Николаевной Уралцевой). Механико-математический факультет ЛГУ имеет славные традиции. По учебникам, написанными ленинградскими математиками Григорием

Михайловичем Фихтенгольцем и академиком Владимиром Ивановичем Смирновым училось не одно поколение советских студентов. В то время на нём работали З. И. Борович, О. А. Ладыженская (впоследствии академик), В. А. Плисс, В. А. Якубович, Б. З. Вулих, М. К. Гавурин и так далее. От имени нашей небольшой комиссии выступал Селим Григорьевич Крейн. На это выступление мы шли вместе, и меня несколько удивило, что Селим Григорьевич зашёл в одну из аптек и приобрёл какие-то лекарства.

Я не говорю ни о роли Селима Григорьевича в создании института математики в Воронежском университете, ни о проводимых им регулярно зимних математических школах, ни о научных семинарах, которыми он руководил. Обращала на себя внимание его неспешная спокойная манера руководить. Я никогда не видел и не слышал, чтобы Селим Григорьевич повышал голос. Было такое впечатление, что всё делалось само собой.

В истории математики может быть отмечено несколько случаев, когда оба брата являются математиками, причём выдающимися математиками. Я бы хотел назвать русских математиков А. А. Маркова и В. А. Маркова — славных представителей петербургской математической школы, венгерских математиков Фридьеша Риса и Марселя Риса, финских математиков — Рольфа Неванлинна и Фритьофа Неванлинна. Этот перечень я закончу блестящей парой Марка Григорьевича Крейна и Селима Григорьевича Крейна.

В год столетия Великой Октябрьской социалистической революции мне бы хотелось вспомнить, что некоторое время на математико-механическом факультете ВГУ секретарём партийного бюро был Селим Григорьевич Крейн. У меня сохранились воспоминания о его продуманных и чётких выступлениях.

Как-то уже под вечер Селим Григорьевич и я шли по направлению к площади Ленина. Не было никаких праздников, и площадь, как обычно, была полупустынной. Селим Григорьевич обратил внимание на фигуру негра, который положив цветы к подножию монумента, некоторое мгновение стоял, склонив голову перед памятником Ленину. Селим Григорьевич отметил, что развернувшаяся перед нашими глазами картина носит символический характер.

В заключение приведу интересное изречение, принадлежащее польскому математику Гуго Штейнгаузу, которое высказывал Селим Григорьевич Крейн: "Если одну и ту же работу поручить представителям разных профессий, то математик всегда ее сделает лучше".

НАШ КРЕЙН
С.А. Складнев (Воронеж)
s.a.sklyadnev@yandex.ru

Мысль о том, что Селим Григорьевич великий ученый и великий учитель, обязательно возникала у всех, кто слушал его лекции, читал его книги и статьи, разговаривал с ним.

Он (вместе с Красносельским Марком Александровичем и Соболевым Владимиром Ивановичем) был соавтором настоящего чуда — когда за 20 лет на месте обыкновенного факультета провинциального университета была создана всемирно известная Воронежская школа функционального анализа.

Этот опыт необходимо изучить и с пользой использовать сегодня во времена серьёзного кризиса нашей системы образования, так как без образования и науки шансы России на успехи иллюзорны.

Селим Григорьевич обладал высочайшим творческим уровнем, доступным лишь избранным. Он мог передать студентам свое равнодушие к науке, умел создавать атмосферу интеллектуальной и психологической поддержки и подъема.

Он всегда стремился к пониманию чувств и переживаний каждого студента, умел вызывать интерес к предмету, возбуждать у аудитории активную и самостоятельную мысль. Он умел четко и ясно выражать свои мысли, умно и тонко дирижировать познавательной активностью студентов, организовать их деятельность.

Селим Григорьевич обладал целым рядом положительных качеств, таких как устремленность, справедливость, настойчивость, трудолюбие, умение владеть собой, своим настроением и своим темпераментом. Он владел стратегиями превращения математики в средство формирования личности студента, удовлетворения его потребностей в самовоспитании, самообразовании и саморазвитии.

Он был создателем Института математики ВГУ.

Он был создателем Воронежской зимней математической школы.

Он был патриотом своей страны, патриотом своего факультета. Забота о престиже факультета была одной из самых основных его забот. Он был абсолютно убежден в том, что порядок жизни факультета должен демонстрировать ответственность за воспитание и развитие профессионализма и профессионального достоинства обучающихся.

Я имею право на такие оценки, так как мне довелось долгие годы быть его помощником. Селим Григорьевич читал лекции, я вел за ним практические занятия. Он был деканом, я был его заместителем. Селим Григорьевич был секретарем парторганизации факультета, а я был заместителем секретаря этой организации. Начиная с самой первой Воронежской зимней математической школы, я под его руководством много лет подряд работал в оргкомитете школы.

Селим Григорьевич любил песни В. Высоцкого и Б. Окуджавы, внимательно читал множество «толстых» журналов и с особенным удовольствием обсуждал публикации в разделе «Если бы я был директором» «Литературной газеты». Помню темы: «Студент не сосуд, который нужно наполнить, а факел, который нужно зажечь», «А пустой факел не горит», «Можно ли отождествлять ценность образования и научных исследований с их экономической прибыльностью?», «Какие вопросы из предлагаемых («что?», «кто?», «когда?», «как?», «где?», «почему?») должны чаще задаваться студентам?».

Наверное, из этих бесконечных обсуждений в дальнейшем и родился мой интерес к проблемам философии образования.

Спасибо Селиму Григорьевичу за все то, чему он учил меня: как отличать правду от лукавства и громких слов, и как отличать работу от имитации и проведения мероприятий.

Большое спасибо.

ВСПОМИНАЯ С.Г. КРЕЙНА

Ученики из зарубежья

«Я с ностальгией вспоминаю мои годы учебы в университете, наполненные постоянным интенсивным и восторженным научным взаимодействием. Работа под руководством Крейна сделала меня математиком. Созданная им Воронежская Зимняя Математическая Школа привела многих из нас в соприкосновение с передним краем математики, предотвратив нас от впадания в провинциализм. Светлая память о СГ, как мы его звали, остается с нами навсегда»

Peter Kuchment, Professor
Mathematics Department Texas A&M University, College
Station, TX

«Я очень многим обязан Мат-Мех-у ВГУ и Воронежской Зимней Математической Школе, участником которой я был начиная с первой школы, организованной Селимом Григорьевичем Крейном в 1967г., и по 1989г. почти без перерыва. В особенности я обязан Селиму Григорьевичу, моему учителю и научному руководителю в аспирантуре. Его неповторимая человеческая личность, энтузиазм, влюбленность в нашу науку, огромный организаторский талант и талант Учителя, безмерное обаяние оказали на всех (многочисленных) учеников Селима Григорьевича влияние ни с чем не сравнимое, такое, которое остается на всю последующую жизнь и передается в свою очередь нашим ученикам»

Зайденберг Михаил Григорьевич, Почетный Профессор
Математический Институт Фурье Университета Гренобль, Альпы

«Я счастлив, что был учеником Селима Григорьевича. Он дал нам настолько много, что трудно перечислить. Главное - он научил нас всегда стремиться узнавать новое. Жизненная энергия и энтузиазм Селима Григорьевича всегда были для нас примером»

Александр Панков, Профессор
Mathematics Department, Morgan State University,
Baltimore, MD, United States

«Селим Григорьевич был моим учителем, руководителем диплома, а затем моим зав. кафедрой. Я горжусь что я был его соавтором и коллегой. Селим Григорьевич был выдающийся математик и замечательный человек; вне моей семьи он оказал наибольшее влияние на мою жизнь»

Sergey Lvin, Professor
Mathematics department at University of Maine, Orono,
ME

«After graduation I was sent back to Kharkov State University for doing a PhD thesis on optimal control theory. However, wishing to study approximate methods for operator equations, I asked Dr. Ngo Huy Can, who was a postgraduate fellow of Professor S.G. Krein, to introduce me to Selim Grigorevich. I would like to thank most sincerely Selim Grigorevich for accepting me as his Ph.D. student, for believing in me, for teaching me, for giving me support, understanding, and inspiration during my studies in Voronezh»

Prof. DSc. Pham Ky Anh
Head of Department of Computational and Applied
Mathematics, Faculty of Math., Mech. & Informatics VNU-
Hanoi University of Science (HUS), VIETNAM

«Professor Selim Grigorevich Krein had a great influence to my success in mathematics and my life. In 1991, with his agreement, I wanted my son, NGO bao Chau to become a Krein's student. But it was a pity, it was not successful. We are very grateful to Professor Selim Grigorevich Krein and proud to be his student.»

Prof. DSc. Ngo Huy Can
Head of Fluid Mechanics Department, Institute of
Mechanics, Vietnam Academy of Science & Technology,
Hanoi, Vietnam

КРЕЙН С.Г. И ВОПРОСЫ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

А.И. Фурменко (Воронеж)

furmenko@mail.ru

Вопросы педагогического мастерства неизменно в той или иной форме встают перед преподавателем ВУЗа. Форма и стиль изложения учебного материала, прием экзаменов, методы формирования интереса к более глубокому изучению учебной дисциплины, общение со студентами на вузовских мероприятиях – все это и есть образ преподавателя в студенческом коллективе. Этот образ создается годами и становится визитной карточкой преподавателя. Селим Григорьевич был не только выдающимся ученым, но и уникальным педагогом. Примеры его педагогического мастерства для преподавателей кафедры математики (и не только математики) Воронежского лесотехнического института буквально являлись путеводной звездой. По-видимому, на формирование педагогического таланта Селима Григорьевича повлияли и пример старшего брата Марка Григорьевича, и совместная работа во время войны с академиком Лаврентьевым, но, по моему мнению, основное влияние оказали его жена – Евгения Петровна и ближайшие друзья семьи: Ольга Леонидовна Серкина и Иван Иванович Костенко. Селим Григорьевич работал на кафедре математики Воронежского лесотехнического института почти 30 лет. Обидно, что по молодости часто не понимаешь уникальности того, что судьба дала шанс работать, разговаривать, видеть ученого с мировым именем. Нет записей лекций Селима Григорьевича, нет киноматериалов его выступлений. На одном из заседаний кафедры при обсуждении открытой лекции преподавателя Селим Григорьевич сказал: "Как же интересно учить студентов. Какая у нас замечательная профессия". По инициативе Селима Григорьевича в начале 80 годов в лестехе стали из наиболее подготовленных первокурсников формировать отдельную группу, занятия в которой проводил сам Селим Григорьевич и наиболее опытные преподаватели. На современном языке это был педагогический эксперимент. Он проходил несколько лет, далее сошел на нет – оказалось, что расширенные знания математики на старших курсах востребованы не были. Тщательным образом Селим Григорьевич подходил к отбору учебного материала лекций. Он считал, что информационная перегруженность лекции оказыва-

ет негативное влияние на усвоение материала. Примером такого отбора можно считать книгу Селима Григорьевича и Валентины Николаевны Ушаковой «Математический анализ элементарных функций». Селим Григорьевич показывал молодым преподавателям, да и не только молодым, пример неформального общения со студентами. По его инициативе в лестехе были проведены вечера русских поэтов начала 20 века, вечера вел преподаватель кафедры Яцкин Николай Иванович и Селим Григорьевич был неизменным слушателем. Это лишь некоторые примеры педагогического мастерства выдающегося ученого.

ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Х.Т. Алероева (Москва)

BinSabanur@gmail.com

Рассматривается задача

$$u'' - \varepsilon D_{0x}^\alpha u = \lambda u, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

где D_{0x}^α — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка $0 < \alpha < 2$. Исследуется функция Грина (функция влияния) этой задачи

$$G_2(x, \tau) = G_1(x, \tau) - \frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon, 2)} \int_{\tau}^1 E_{\rho}[\varepsilon(\eta - \tau)^{\beta}] d\eta \int_0^1 G(x, t) D_{0t}^{\alpha-1} E_{\beta}[\varepsilon t^{\beta}] dt, \quad (3)$$

где

$$G_1(x, \tau) = \begin{cases} (1-x) \int_{\tau}^x E_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)] dt - x - \\ - \int_x^1 E_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}] dt, & x \geq \tau, \\ -x \int_{\tau}^1 E_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}] dt, & x < \tau, \end{cases} \quad G(x, \tau) = \begin{cases} t(x-1), & t \leq x, \\ x(t-1), & t > x, \end{cases} \quad (4)$$

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \kappa \rho^{-1})}$$

— функция типа Миттаг-Леффлера.

Показано, что задача (1)–(2) обладает основными осцилляционными свойствами.

**СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА,
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ КРИТЕРИЮ
ДАНФОРДА-ПЕТТИСА¹**

С.В. Асташкин (Самара)

astash56@mail.ru

Будут рассмотрены некоторые старые и новые результаты о свойствах симметричных пространств X , удовлетворяющих следующему условию: из того, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \rightarrow 0$ слабо в X и $x_n \rightarrow 0$ по мере следует $\|x_n\|_X \rightarrow 0$. Это в точности класс симметричных пространств, для которых справедлив аналог характеристики Данфорда-Петтиса относительно слабо компактных подмножеств пространства L_1 . Средние по Чезаро произвольной последовательности мартингалных разностей в таком пространстве X стремятся к нулю по норме. Кроме того, на каждом рефлексивном подпространстве X сходимость по норме эквивалентна сходимости по мере.

**О СВЯЗИ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С
ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА²**

А.Д. Баев, М.Б. Давыдова (Воронеж)

alexsandrbaev@mail.ru

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функция $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}. \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00138.)

© Асташкин С.В., 2017

² Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

© Баев А.Д., Давыдова М.Б., 2017

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau \rightarrow \eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{dp}{\alpha(p)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R_+^1)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \dots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi} = F_{x_1 \rightarrow \xi_1} F_{x_2 \rightarrow \xi_2} \dots F_{x_{n-1} \rightarrow \xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $P(D_x, D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $P(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1}[p(t, \xi, \eta) F_\alpha F_{x \rightarrow \xi}[v(x, t)]]$, где символ $p(t, \xi, \eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ (открытое множество), если функция $\lambda(t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки $|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t, \xi, \eta)| \leq c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l}$ с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число, $\rho \in (0; 1]$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leq c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geq 2N - |\sigma|$, где

$$N \geq \max_{0 \leq p_1 \leq l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ — открытое множество. Будем говорить, что функция $a(t, y, \xi, \eta)$ принадлежит классу $S_{m, \alpha, \rho}(\Omega)$, $m \in R^1, \rho \in (0, 1]$, если $a(t, y, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $t \in \Omega, y \in \Omega, \eta \in R^1$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место при всех $j, k, l = 0, 1, 2, \dots$ оценка

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j(\alpha(y)\partial_y)^k\partial_\eta^l a(t, y, \xi, \eta)| \leq c_{jkl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{m-\rho l}$$

с константами $c_{jkl} > 0$, не зависящими от t, y, η и $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим оператор вида

$$Au(x, t) = F_{\alpha_{\eta \rightarrow t}}^{-1} F_{\alpha_{y \rightarrow \eta}} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [a(t, y, \xi, \eta) F_{x \rightarrow \xi}^l u(x, y)], \quad (2)$$

где $F_{\alpha_{y \rightarrow \eta}} (F_{\alpha_{y \rightarrow \eta}}^{-1})$ — прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее y в η (η в t).

Доказана следующая теорема.

Теорема 7. Пусть A — оператор вида (2), причем $a(t, y, \xi, \eta) \in S_{m, \alpha, \rho}(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}_+^1, m \in R^1, \delta \in [0, 1]$. Тогда найдется такой символ $p(t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, \rho}^m(\Omega)$, что $A = P(t, D_x, D_{\alpha, t})$, где $P(t, D_x, D_{\alpha, t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(t, \xi, \eta)$.

Причем $p(t, \xi, \eta) = \sqrt{\alpha(t)} \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} \exp(-i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$.

При этом справедливо соотношение

$$p(t, \xi, \eta) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!} (\alpha(y)\partial_y)^j \partial_\eta^j a(t, y, \xi, \eta)|_{y=t} \in S_{\alpha, \rho}^{m-N}(\Omega)$$

при любых $N = 1, 2, \dots$

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S_{\alpha, \rho}^m(\Omega)$ доказаны в [4] — [8].

Литература

1. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.
2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.
3. Баев А. Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.
4. Баев А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.
5. Баев А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.
6. Баев А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.
7. Баев А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.
8. Баев А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

А.Д. Баев, В.В. Панков (Воронеж)

alexandrbaev@mail.ru

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t . В работе А.Д. Баева, В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки общей краевой задачи для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t . Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t , были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

© Баев А.Д., Панков В.В., 2017

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t), \quad (1)$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b(-1)^k \partial_t^{2k-1}v$,
 $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $b, a_{\tau j}$ — комплексные
числа, $Im \bar{b} a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$,
 $D_x^\tau = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x) v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1} v|_{t=0} = G_j(x), j = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re \bar{b} L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η) .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max_{1 \leq j \leq k} (m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi_\tau \neq 0, j = 1, 2, \dots, k$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α , которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1} , которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где

$\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}, F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0, d]$ и удовлетворяет условиям $u(0) = \partial_t u(0) = \dots = \partial_t^{s-1}(0) = 0$, то справедливо равенство $F_\alpha \left[D_{\alpha, t}^j u \right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$ при всех $j = 0, 1, 2, \dots, s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)–(3).

Определение 1. Пространство $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s \geq 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x, t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m} \right]} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s - \frac{2m}{2k-1}l)} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^l v(x, t)] \right] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\left[\frac{(2k-1)s}{2m} \right]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Здесь $F_{x \rightarrow \xi} (F_{\xi \rightarrow x}^{-1})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau| + j + \frac{2m}{2k-1}l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha, t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_s$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $s \geq \max\{2m, \max_{1 \leq j \leq k} (m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — целое число, $m \geq 2k-1$ и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3), принадлежащего пространству

$H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ справедлива коэрцитивная априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leq c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^k \|B_j v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v .

Литература

1. Вишик М. И. / М.И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Вып. 79 (121). — С. 3–36.
2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.
3. Баев А. Д. О разрешимости общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Вестник Самарского гос. ун-та. Сер.: Естеств. науки. — 2008. — № 3 (62). — С. 27–39.
4. Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — № 111 (153). — С. 483–501.
5. Баев А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады академии наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.
6. Баев А. Д. Априорные оценки решений краевых задач в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Известия вузов. Серия Математика. — 2012. — № 7. — С. 1–4.
7. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.
8. Баев А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.
9. Баев А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ¹

А.Д. Баев, Н.И. Работинская (Воронеж)

alexandrbaev@mail.ru

Исследование теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в настоящее время является актуальной задачей в связи с использованием этих операторов при доказательстве теорем о существовании решений и получении коэрцитивных априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся уравнений. Такие краевые задачи возникают, например, при моделировании процессов гидродинамики с сингулярными особенностями. В настоящей работе исследуется вопрос об ограниченности одного класса весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α , введенному в [1]. Теорема об ограниченности доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [1] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad (1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau \rightarrow \eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta \tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)],$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №16-11-10125, выполняемого в Воронежском государственном университете.

© Баев А.Д., Работинская Н.И., 2017

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R_+^1)}.$$

Это равенство позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leq c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geq 2N - |\sigma|$, где $N \geq \max_{0 \leq p_1 \leq l} \{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2}\}$, $l = 1, 2, \dots$, σ - некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi} = F_{x_1 \rightarrow \xi_1} F_{x_2 \rightarrow \xi_2} \dots F_{x_{n-1} \rightarrow \xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) = F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [p(t, \xi, \eta) F_{x \rightarrow \xi} F_\alpha[v(x, t)]].$$

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho,\delta}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, если функция $p(t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t, \xi, \eta)| \leq c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l + \delta j}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ - произвольный отрезок.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $p(t, \xi, \eta) \in S_{\alpha,\rho,\delta}^m(\Omega)$, m - действительное число, $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = m$. Тогда вырождающийся псевдодифференциальный оператор $P^{(m)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R_+^n)$ в $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Аналогичные свойства для других классов псевдодифференциальных операторов доказаны в [1]–[8].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. – 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.
2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.
3. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.
4. Баев А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.
5. Баев А. Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестник Воронежского государственного университета Серия : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А. Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ С ПРИСТЕННЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ПОРОГОВОГО ТИПА¹

Е.С. Барановский (Воронеж)

esbaranovskii@gmail.com

Рассматривается математическая модель, описывающая стационарное течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройда в ограниченной локально-липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с непроницаемой границей Γ при смешанных краевых условиях, а именно: на участке границы $\Gamma_0 \subset \Gamma$ задано условие проскальзывания порогового типа, а на оставшейся части границы — условие прилипания:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{S} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + (1 - \alpha)\eta \mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{E} + \lambda(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \alpha\eta \mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

$$|(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| \leq q \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (6)$$

$$|(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| < q \implies \mathbf{v}_{\tan} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (7)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00182 мол_а).

© Барановский Е.С., 2017

$$|(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| = q \implies \mathbf{v}_{\tan} \updownarrow (\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan} \text{ на } \Gamma_0, \quad (8)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{S}$ — тензор избыточных напряжений, p — давление, $\mathbf{f}$ обозначает внешние массовые силы, $\mathbf{E}$ — «упругая» часть тензора $\mathbf{S}$, η — вязкость, λ — время релаксации, α — безразмерный параметр, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ , q — некоторая функция, заданная на Γ_0 . Символ $\updownarrow$ используется для обозначения противоположно направленных векторов, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \{v_i v_j\}$.

В системе (1)–(9) величины α , η , λ , q , $\mathbf{f}$ считаются известными. Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \eta, \quad 0 < \lambda, \quad q \in L^2(\Gamma_0, \mathbb{R}_+), \quad \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (10)$$

Введем следующие пространства:

$$\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} = \{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n} : F_{ij} = F_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n\},$$

$$\mathbf{U}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \text{замыкание } \mathbf{U}(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ в } \mathbf{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

$$\mathbf{H}_0^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}) = \text{замыкание } \mathbf{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}) \text{ в } \mathbf{H}^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}).$$

Определение. Слабым решением задачи (1)–(9) назовем пару вектор-функций $(\mathbf{v}, \mathbf{E}) \in \mathbf{X}(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n})$ такую, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \{(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{E}\} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) \, dx + (1 - \alpha)\eta \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}) \, dx \\ & - (\alpha\eta)^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{E} : \mathbf{E} \, dx + \int_{\Gamma_0} q|\boldsymbol{\varphi}| \, d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} q|\mathbf{v}| \, d\Gamma_0 \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}) \, dx, \\ & \int_{\Omega} \mathbf{E} : \boldsymbol{\Phi} \, dx - \lambda \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \mathbf{E} : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x_i} \, dx = \alpha\eta \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\Phi} \, dx \end{aligned}$$

для любых $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}(\Omega)$ и $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{H}_0^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n})$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. При выполнении условий (10) краевая задача (1)–(9) имеет по крайней мере одно слабое решение $(\mathbf{v}, \mathbf{E})$, удовлетворяющее энергетическому неравенству

$$(1 - \alpha)\eta \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 \, dx + (\alpha\eta)^{-1} \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 \, dx + \int_{\Gamma_0} q|\mathbf{v}| \, d\Gamma_0 \leq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

Замечание. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1, 2], где рассматриваются уравнения вязкоупругих жидкостей типа Олдройда при условии проскальзывания Навье.

Литература

1. Барановский, Е.С. О стационарном движении вязкоупругой жидкости типа Олдройда / Е.С. Барановский // Математический сборник. — 2014. — Т. 205, № 6. — С. 3–16.

2. Baranovskii, E.S. Global Existence Results for Oldroyd Fluids with Wall Slip / E.S. Baranovskii, M.A. Artemov // Acta Applicandae Mathematicae. — 2017. — V. 147, № 1. — P. 197–210.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

Я.И. Белопольская, А.О. Степанова (Санкт-Петербург)

yana@yb1569.spb.edu

Вероятностные подходы к построению неклассических решений задачи Коши для систем нелинейных уравнений описывающих сложные явления в физике, химии, биологии и других областях, например в финансовой математике, позволяют глубже понять природу этих явлений, а также разработать эффективные методы построения численных решений для рассматриваемой задачи.

Ниже будут интересовать прямая и обратная задача Коши следующего вида

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} = [\mathcal{L}g]_m, \quad g_m(0, x) = g_{m0}(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial s} + [\mathcal{L}g]_m = 0, \quad g_m(T, x) = g_{m0}(x), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (2)$$

где $m = 1, 2, \dots, d_1$ и

$$[\mathcal{L}g]_m = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_m^j(g)}{\partial x_j} + \sum_{ij=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F_{ml}^{ij}(g) \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \right], \quad g_m(0, x) = g_{m0}(x).$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-11-01136).

© Белопольская Я.И., Степанова А.О., 2017

Изучение случайных процессов, ассоциированных с задачей Коши для систем такого вида позволяет разбить их на несколько классов.

Рассмотрим системы обратных уравнений вида (2), среди которых, в свою очередь выделим два класса 1) системы вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial s} + \mathcal{L}^u u_k + \sum_{l=1}^{d_1} \sum_{i=1}^d B_{lk}^i(x, u) \nabla_i u_l + \sum_{l=1}^{d_1} c_{lk}(x, u) u_l = 0, \quad (3)$$

$$u_k(T, x) = u_{0k}(x),$$

где $\mathcal{L}^u u_k = a(x, u) \cdot \nabla u_k + \frac{1}{2} \text{Tr} A(x, u) \nabla^2 u_k A^*(x, u)$ and $0 \leq s \leq T$ и 2) системы вида

$$\frac{\partial v_m}{\partial s} + \mathcal{L}^v v_m + [Q^v v]_m = 0, \quad v_m(t, x) = v_{0m}(x), \quad (4)$$

где $[Q^v v]_m = \sum_{l=1}^{d_1} c_{lm} v_l$,

$$\mathcal{L}_m^v v_m = a_m(x, v) \cdot \nabla v_m + \frac{1}{2} \text{Tr} A_m(x, v) \nabla^2 v_m A_m^*(x, v).$$

Вероятностные представления классических решений задачи Коши для этих уравнений описаны ниже. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — заданное вероятностное пространство, $w(t) \in R^d$ — стандартный винеровский процесс и $p(dt, dz)$ — пуассоновская мера на $[0, T] \times R^d$ со средним $E p(dt, dz) = dt dz$. Ниже мы будем использовать обозначения вида $a^u(x) = a(x, u)$ и предполагать, что выполнено равенство $B^u(x) = C^u(x) A^u(x)$.

Будем говорить что выполнено условие **C1**, если коэффициенты $a^u(x)$, $A^u(x)$, $c^u(x)$, $C^u(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x и u и имеют сублинейный рост по x и полилинейный рост по u .

Будем говорить, что выполнено условие **C2**, если производные коэффициентов $a^u(x)$, $A^u(x)$ по x до порядка 2 непрерывны и ограничены по x .

Теорема 1. Пусть выполнено условие **C1**, тогда классическое решение задачи Коши (3) допускает вероятностное представление

$$\langle h, u(s, x) \rangle = E[\langle \eta(T), u_0(\xi(T)) \rangle], \quad (5)$$

где случайные процессы $\xi(\theta), \eta(\theta), 0 \leq s \leq \theta \leq T$ удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям (СДУ)

$$d\xi(\theta) = a^u(\xi(\theta)) d\theta + A^u((\xi(\theta)) dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \quad (6)$$

$$d\eta(\theta) = c^u(\xi(\theta))\eta(\theta)d\theta + C^u(\xi(\theta))(\eta(\theta), dw(\theta)), \quad \eta(s) = h \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие **C2**, тогда $\exists!$ решение системы (5)–(7) и функция $u(s, x)$ вида (5) задает единственное классическое решение задачи Коши (3).

Пусть $c_{lm}^v(x) \geq 0$, $\sum_{m=1}^{d_1} c_{lm}^v(x) = 0$, а $\Delta_{lm}(x, v)$ — последовательность полузамкнутых интервалов, покрывающих множество $G \subset R_+$ и имеющих длину $c_{lm}^v(x)$, и $g(l, z) = \sum_{m=1}^{d_1} (m - l) I_{\{z \in \Delta_{lm}(x, v)\}}$.

Теорема 3. Пусть коэффициенты $a_m^u(x)$, $A_m^u(x)$, $c_m^u(x)$ удовлетворяют условию **C1**, тогда классическое решение задачи Коши (4) допускает вероятностное представление

$$v_m(s, x) \equiv v(s, x, m) = E[v_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))], \quad (8)$$

где случайные процессы $\xi_{s,x}(\theta)$, $\gamma_{s,m}(\theta)$, $0 \leq s \leq \theta \leq T$ удовлетворяют СДУ

$$d\xi(\theta) = a^u(\xi(\theta), \gamma(\theta))d\theta + A^u((\xi(\theta), \gamma(\theta))dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \quad (9)$$

$$d\gamma(\theta) = \int_G g(\gamma(t-), z)p(dt, dz), \quad \gamma(s) = m. \quad (10)$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие **C2**, тогда $\exists!$ решение системы (8)–(10) и функция $v_m(s, x)$ вида (8) задает единственное классическое решение задачи Коши (5).

Вероятностные представления обобщенных и вязкостных решений обратной задачи Коши для систем вида (4), (5), а также обобщенного решения прямой задачи Коши для системы вида (1), построенные недавно в работах [1]–[3], также будут обсуждены.

Литература

1. Белопольская, Я.И. Вероятностные представления и численные алгоритмы построения классических и вязкостных решений задачи Коши для квазилинейных параболических систем / Я.И. Белопольская, Е.И. Немченко // Записки научн. сем. ПОМИ. — 2015. — Т. 442. — С. 18–47.
2. Belopolskaya, Ya.I. Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems / Ya.I. Belopolskaya, // Modern Stochastics and Applications. Springer Optimization and Its Applications. Berlin : Springer. — 2014. — V. 90. — P. 71–94.
3. Белопольская, Я.И. Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией / Я.И. Белопольская // Теория вероятностей и ее применения. — 2016. — Т. 61, вып. 2. — С. 268–299.

МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДОВЕРИЯ В ОБЩЕСТВЕ: ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ АГЕНТОВ НА ДИНАМИКУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДОВЕРИЯ В ОБЩЕСТВЕ¹

Ф.А. Белоусов, В.А. Истратов, Т.Я. Шевгунов,

А.Л. Бекларян (Воронеж)

sky_tt@list.ru

На некотором ареале живут и перемещаются агенты, которые посредством общения взаимодействуют друг с другом. Взаимодействуя, у агентов изменяются их уровни доверия. Результат взаимодействия двух простых агентов в период k с уровнем доверия $trust_1(k)$ и $trust_2(k)$ определяется по правилу (1). Уровни доверия варьируются в диапазоне от 0 до 100. При этом 0 соответствует полному отсутствию доверия, а 100 соответствует абсолютному доверию.

$$trust_1(k+1) = trust_2(k+1) = \alpha trust_1(k) + (1-\alpha) trust_2(k), \alpha \in [0, 1], \quad (1)$$

где $trust_1(k+1)$ и $trust_2(k+1)$ - уровни доверия каждого из агентов в период $k+1$. Параметром модели является $\alpha \in [0, 1]$. Рассматриваются такие его значения как 0,5, 0,7, 0,9 и 0,99. При $\alpha = 0,5$ взаимодействие агентов считается симметричным.

Помимо этого в модели кроме простых агентов присутствуют так называется устойчивые агенты, уровень доверия которых не меняются ни при каких обстоятельствах. В случае взаимодействия простых агентов с устойчивым агентом правило взаимодействия схоже с правилом (1) с той лишь разницей, что уровень доверия меняется только у простого агента.

На базе построенной модели проведена серия экспериментов, рассмотрено несколько вариантов начального расположения агентов на ареале. Изучено как начальное расположение агентов влияет на скорость распространения доверия в обществе.

Литература

1. Epstein, J. Growing artificial societies: Social science from the bottom up / J. Epstein, R. Axtell. — Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 1996. — 223 p.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-36-00338, № 15-06-05877, № 16-37-00395).

© Белоусов Ф.А., Истратов В.А., Шевгунов Т.Я., Бекларян А.Л., 2017

2. Alesina, A. Who trust others? / A. Alesina, E. La Ferrara // Journal of Public Economics. — 2002. — V. 85. — P. 207–234.
3. Aghion, P. Regulation and Distrust / P. Aghion, Y. Algan, P. Cahuc, A. Shleifer // NBER Working Paper № 14648. — January 2009.
4. Banfield, E C. The Moral Basis of a Backward Society / Edward C. Banfield, with the assistance of Laura Banfield L. — Glencoe, IL : The free Press, 1958. — 204 p.
5. Айвазян, С.А. Методы экономики / С.А. Айвазян. — М. : Магистр : ИНФРА-М, 2010. — 512 с.

КОМБИНИРОВАННЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА

Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко (Казань)
ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

В работе используются обозначения и сокращения из [1].

1. Прямая задача (1) из [1] является частью *прямой экстремальной задачи* (далее – ПЭЗ), рассмотренной в [2, 3, 4]. В ПЭЗ $_m^Q$ для заданных $\tau(x)$ и $s(x)$ требуется найти управление $m(x)$ (в заданных ограничениях (9) из [1]) как решение экстремальной задачи

$$Q(m, \tau, s) \rightarrow \inf_m \quad (1)$$

при ограничении на мощность системы охлаждения

$$N(m, \tau, s) \leq N_{\max}. \quad (2)$$

В ПЭЗ $_m^F$ в тех же условиях требуется найти $m(x)$ как решение

$$F(m, \tau, s) \rightarrow \inf_m \quad (3)$$

при ограничении (2).

2. В работе [5] были поставлены три комбинированные задачи, сочетающие в себе ОЗ $_m^g$ и ПЭЗ $_m^Q$ на случай фрагментов сетки при $X_1 = X_2$. В условиях заданной (11) из [1] фрагментации сетки $X_1 \subseteq X_2$ дополним таблицу 1 из [1]:

Таблица 2

	ПЗ	ПЭЗ $_m^Q$	ПЭЗ $_m^F$	ОЗ $_m^q$	ОЗ $_m^f$	ОЗ $_τ^q$	ОЗ $_τ^f$	ОЗ $_{(m,τ)}^{(q,f)}$
q				3		3		3
f					3		3	3
m	3					3	3	
$τ$	3	3	3	3	3			
$N_{\max}$		3	3					

Если на всех фрагментах тип задачи ПЭЗ – один и тот же, то такая задача является обычной ПЭЗ. Случай сочетания ПЭЗ $_m^Q$ и ПЭЗ $_m^F$ требует изменений в ограничении (2). Сочетание ПЭЗ (одного типа) и ПЗ сводится к ПЭЗ. Если присутствуют ПЭЗ (одного типа) и ОЗ, то такую задачу будем называть *комбинированной*.

3. Для некоторых смешанных и некоторых комбинированных задач обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Литература

1. Бильченко, Г.Г. Смешанные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Международная конференция, посвящённая 100-летию Селима Григорьевича Крейна (13 – 19 ноября 2017 г.) — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. — (настоящий сборник)

2. Бильченко, Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

3. Бильченко, Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

4. Бильченко, Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува / Н.Г. Бильченко //

Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

5. Бильченко, Г.Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // “Герценовские чтения — 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” в электронном журнале “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 2016. — № 2. — Ч. 2. — С. 50–56.

СМЕШАННЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА

Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко (Казань)

ggbil2@gmail.com, bilchnat@gmail.com

1. Рассмотренную в [1, 2, 3] прямую задачу:

$$(m, \tau, s) \rightarrow (q, f; Q, F, N), \quad (1)$$

рассмотренные в [3] обратные задачи по вдуву $m^\sim(x)$:

$$q^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (2)$$

$$f^\vee \rightarrow m^\sim, \quad (m^\sim, \tau, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee) \quad (3)$$

и обратные задачи по температурному фактору $\tau^\sim(x)$:

$$q^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim), \quad (4)$$

$$f^\vee \rightarrow \tau^\sim, \quad (m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee), \quad (5)$$

а также рассмотренную в [4] двумерную обратную задачу:

$$(q^\vee, f^\vee) \rightarrow (m^\sim, \tau^\sim), \quad (m^\sim, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim \approx f^\vee) \quad (6)$$

обозначим ПЗ, OZ_m^q , OZ_m^f , OZ_τ^q , OZ_τ^f , $OZ_{(m,\tau)}^{(q,f)}$, соответственно. ОЗ в интерполяционной (в аппроксимационной) постановке [3, 4] будем обозначать ИПОЗ (соответственно – АПОЗ).

В [3, 4] управления: вдув $m(x)$, температурный фактор $\tau(x) = T_w(x)/T_{e_0}$, магнитное поле $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ задавались для $X = [0; 1]$ или разыскивались в виде элементов [5] для сетки управления

$$X_1: \quad x_0^\wedge = 0 < x_1^\wedge < \dots < x_{n_1}^\wedge = 1; \quad (7)$$

контрольные значения $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$, $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$ задавались, а значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$, $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0,\dots,n_2}$ вычислялись для всех узлов сетки *наблюдения*

$$X_2: x_0^\vee = 0 < x_1^\vee < \dots < x_{n_2}^\vee = 1. \quad (8)$$

2. Предположим, что: выполнены условия существования решения [3, 4], в частности, $X_1 \subseteq X_2$, согласованы *ограничения* [5] на вдув $I_{j,k}^m = [b_{j,k}^m; t_{j,k}^m]$ и на температурный фактор $I_{j,k}^\tau = [b_{j,k}^\tau; t_{j,k}^\tau]$:

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^m \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], k = 0, \dots, \nu_1^m, \nu_1^m \geq 0; \quad (9)$$

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^\tau \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], k = 0, \dots, \nu_1^\tau, \nu_1^\tau \geq 1. \quad (10)$$

Пусть в сетке X_1 выделены $r \geq 1$ *фрагментов* $(X_{1,\ell})_{\ell=1,\dots,r}$, где

$$X_{1,\ell} = (x_j^\wedge)_{j=i_{\ell-1}, \dots, i_\ell} \text{ для } \ell = 1, \dots, r; \quad i_0 = 0, \quad i_r = n_1. \quad (11)$$

Для каждого $\ell = 1, \dots, r$, в зависимости от того, какие два из четырёх параметров m, τ, q, f – заданы (“З”), а какие – свободны, реализуются соответствующие *задачи на фрагменте* $X_{1,\ell}$:

Таблица 1

	ПЗ	ОЗ _{<i>m</i>} ^{<i>q</i>}	ОЗ _{<i>m</i>} ^{<i>f</i>}	ОЗ _{<i>τ</i>} ^{<i>q</i>}	ОЗ _{<i>τ</i>} ^{<i>f</i>}	ОЗ _{<i>(m,τ)</i>} ^{<i>(q,f)</i>}
<i>q</i>		З		З		З
<i>f</i>			З		З	З
<i>m</i>	З			З	З	
<i>τ</i>	З	З	З			

Если на всех фрагментах тип задачи – ПЗ, то такая задача является обычной ПЗ (на всём X). Если на всех фрагментах тип задачи ОЗ – один и тот же, причём, это – либо ИПОЗ, либо АПОЗ, то такая задача является обычной ОЗ (на всём X). Если же присутствуют разные типы задач, то такую задачу будем называть *смешанной*. В случае наличия АПОЗ *простая смешанная* задача предполагает последовательное (вниз по потоку) от $\ell = 1$ до $\ell = r$ решение соответствующих задач на фрагментах.

Отметим, что для получения управлений, непрерывных [5] в узлах $(x_{i\ell}^\wedge)_{\ell=1,\dots,r}$ стыка фрагментов, между каждой парой фрагментов с ИПОЗ разного типа, а также между парой фрагментов с ПЗ и ИПОЗ, требуется наличие *переходного* фрагмента с АПОЗ.

Другой разновидности постановок задач на фрагментах – комбинированным задачам посвящено продолжение [6] данной работы.

Литература

1. Бильченко, Н.Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

2. Бильченко, Н.Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

3. Бильченко, Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 5–12.

4. Бильченко, Г.Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло – трение» / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2017. — № 1. — С. 18–25.

5. Бильченко, Г.Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016»: Материалы международной конференции (Воронеж, 25 – 31 января 2016 г.) / под ред. В. А. Костина. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. — С. 82–86.

6. Бильченко Г.Г. Комбинированные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режи-

мах полёта / Г.Г. Бильченко, Н.Г. Бильченко // Международная конференция, посвящённая 100-летию Селима Григорьевича Крейна (13 – 19 ноября 2017 г.) — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. — (настоящий сборник)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА¹

А.М. Бирюков (Москва)

birukovalmix@mail.ru

В данной работе рассматривается задача Коши для систем комплексных линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t, z, D)u &= h(t, z) \\ u(t_0, z) &= \varphi(z) \end{aligned}$$

в банаховых пространствах аналитических функций типа пространств Харди-Лебега с весом. Норма в классе решений задаётся по следующей формуле

$$\|u\|_{\delta; m, R, q; p} = \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{\delta; m_j, R, q; p} = \sum_{j=1}^N \sup_{|t-t_0| < \delta} \left(\sup_{0 < r < +\infty} \left(\left(\int_0^{2\pi} |u_j(t, re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} (1+r)^{-m_j} \exp\{-Rr^q\} \right) \right).$$

Таким образом, функции из данного пространства могут допускать рост экспоненциального типа на бесконечности.

Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты дифференциального оператора $A(t, z, D)$, при выполнении которых исходная задача будет корректной в заданной шкале функциональных пространств, то есть установлен критерий корректности.

Ранее подобные задачи, но в пространствах с супремум-нормами рассматривались в работе [1].

Литература

1. Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области / Ю. А. Дубинский. — М. : Изд-во МЭИ, 1996. — 180 с.

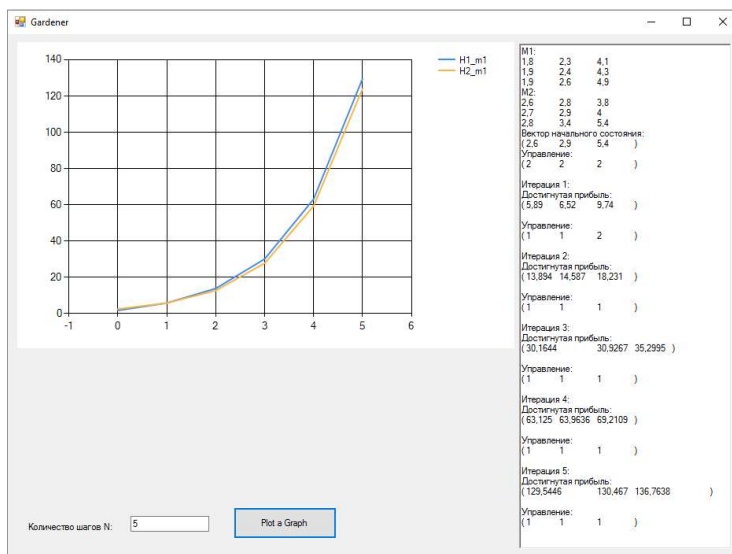
¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (соглашение № 14-11-00306).

© Бирюков А.М., 2017

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ “ПЕРЕВООРУЖЕНИЯ” В ЗАДАЧЕ САДОВНИКА

Е.С. Бондаренко, С.И. Мирошниченко,
В.А. Родин (Воронеж)

Получен алгоритм визуализации моментов переключения в задаче садовника, использующей две матрицы прибыли и две стохастические матрицы. Прямой и обратный ход алгоритма известной задачи садовника относятся к дискретным пошаговым Марковским моделям. Рассмотрена модель для составления планов с возможной переадресацией использования одной из двух матриц на каждом шаге. Алгоритм имеет разнообразные применения (суммарное налогообложение и инвестирование, процессы смены оборудования, инструментов и приборов по ходу развития производства, своевременная замена аппаратуры наружного наблюдения, войсковое перевооружение, смена программ обучения и т.д.).



Задача планирования с конечным горизонтом предполагает обратный процесс рассмотрения и учета моментов возможных переключений с матрицы на матрицу. При достаточно длительном процессе эта задача сама становится неозримой для лица, принимающего решение. Получение графико-аналитической программы,

© Бондаренко Е.С., Мирошниченко С.И., Родин В.А., 2017

дающей визуализацию всего пошагового процесса, есть главная задача, успешно решенная в работе.

В качестве средств реализации было выбрана интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio 2013 Ultimate edition, которая включает в себя компонент Visual C#.

Синяя линия соответствует применению первой матрицы, желтая – второй матрицы. Та линия в определенный момент расположенная выше отмечает автоматическое применение одной из матриц для увеличения суммарной прибыли. При обратном планировании ЛПП визуально ориентирован на правильное планирование.

Литература

1. Акоф, Р. Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. — М. : Мир, 1971. — 536 с.
2. Рихтер, Д. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.5 на языке C# / Д. Рихтер. — 2017, 896 с.

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ МАЛЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУННО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ¹

Н.И. Бугакова (Воронеж)

golovko_nadezhda46@mail.ru

В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (r(x) \frac{\partial u}{\partial x}) - u \frac{dQ}{d\sigma} + f(x; t), \\ u(0, t) = u'_x(0, t) = u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (1)$$

которая описывает малые вынужденные поперечные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого зашкреплен, а ко второму прикрепленна растянутая струна, другой конец которой закреплен.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16-11-10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

© Бугакова Н.И., 2017

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0, \xi]$, где ξ — точка соединения стержня и струны. Продолжим его на оставшуюся часть отрезка нулем, полученную функцию мы также будем обозначать $p(x)$.

Функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x . Как и функцию $p(x)$, продолжим $r(x)$ на $[0, \xi]$ нулем, обозначив продолженную функцию через $r(x)$. Функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0, x]$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. Здесь $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальное отклонение и скорость соответственно.

Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных по совокупности переменных функций $u(x, t)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$, σ -абсолютно непрерывна на $[\xi, l]$; вторая производная u''_{xx} , определенная на $[0, \xi]$ имеет конечное изменение на $[0, \xi - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ -абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0, l]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0, l]$ функция и $\inf_{x \in [0, \xi]} p(x) > 0$,

$\inf_{x \in (\xi, l]} r(x) > 0$. Приближенное решение модели (1) будем искать в виде

$$u_N(x; t) = \sum_{k=1}^{3N-1} a_k(t) \varphi_k(x), \quad (2)$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные следующим образом. Каждый из отрезков $[0; \xi]$ и $[\xi; l]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\bar{x}_i \in [0; \xi]$ и $\bar{\bar{x}}_i \in [\xi; l]$.

Тогда $\varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, 2N - 2$) на $[\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i]$ и $[\bar{\bar{x}}_i; \bar{\bar{x}}_{i+1}]$ определяется как кубический эрмитов многочлен ($\varphi_{2i-1}(x)$ — с нулевым значением в точках $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}$) и нулевой производной во всех трех точках $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}$ и равной единице в точке $\bar{x}_i$; $\varphi_{2i}(x)$ — с нулевым значением в точках $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}$, производная в конечных точках равна нулю и единице в $\bar{x}_i$; на дополнении к отрезку $[\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_{i+1}]$ все функции равны нулю. Функция $\varphi_{2N-1}(x)$ на отрез-

ке $[\bar{x}_{N-1}; \xi]$ определяется как эрмитов многочлен третьего порядка, на отрезке $[\xi; \bar{x}_1]$ — линейной функцией так, чтобы $\varphi_{2N-1}(\xi) = 1$ и $\varphi_{2N-1}(\bar{x}_1) = 0$; $\varphi_{2N}(x)$ на $[\bar{x}_{N-1}; \xi]$ определяется как кубический эрмитов многочлен, так что $\varphi_{2N}(\bar{x}_{N-1}) = \varphi'_{2N}(\bar{x}_{N-1}) = \varphi_{2N}(\xi) = 0$; $\varphi'_{2N}(\xi) = 1$, и нулем на остальной части отрезка $[0; l]$; остальные функции определяются линейным образом на $[\bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i]$ и $[\bar{x}_i; \bar{x}_{i+1}]$ так что $\varphi_{2N+i}(\bar{x}_{i-1}) = \varphi_{2N+i}(\bar{x}_{i+1}) = 0$; $\varphi_{2N+i}(\bar{x}_i) = 1$.

Умножая уравнение в (1) на базисные функции и интегрируя по мере σ по всему отрезку $[0; l]$ для определения $a_k(t)$, мы получаем задачу Коши (из исходных начальных условий) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Полученную систему дифференциальных уравнений мы решаем применяя явную схему. Получена оценка скорости сходимости найденного приближенного решения к точному.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.
4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.
6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.
7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Во-

ронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стильтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

С.С. Бунеев, А.Д. Баев, М.Б. Давыдова (Елец, Воронеж)
alexandrbaev@mail.ru

В работах А. Д. Баева [1]–[2] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

© Бунеев С.С., Баев А.Д., Давыдова М.Б., 2017

В данной работе получена априорная оценка решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t). \quad (1)$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - \partial_t^3 v,$$

$$L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B_j(D_x) v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq m_* - m(j-1)} b_\tau D_x^\tau \partial_t^j v|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1; 2 \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами b_τ .

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Пусть что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η) .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $B_j(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $j = 1, 2$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \geq 0$ - действительное число) состоит из тех функций $v(x, t) \in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{3s}{2m}\right]} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} [(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s - \frac{2m}{3}l)} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^l v(x, t)]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\left[\frac{3s}{2m}\right]$ — целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s — целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное число) состоит из всех функций $u(x) \in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s = \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [(1 + |\xi|)^s F_{x \rightarrow \xi} [u(x)]] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geq \max\{2m, m^* + m\}$ — целое число и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x, t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m^*-m(j-1)-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$, $j = 1, 2$. Тогда существует единственное решение $v(x, t)$ задачи (1) – (3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$.

Литература

1. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. — 240 с.

2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ¹

М.Ш. Бурлуцкая (Воронеж)

bmsb2001@mail.ru

Для следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1/2], t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

© Бурлуцкая М.Ш., 2017

$$u(0, t) = u(1/2, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1/2], \quad (3)$$

в соответствие с [1] при минимальных условиях на $\varphi(x)$ имеем

Теорема 1. *Если $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначные, $q(x)$ — непрерывна, $\varphi(x) \in C^2[0, 1/2]$, $\varphi(0) = \varphi(1/2) = \varphi'(0) = \varphi'(1/2) = 0$, то формальное решение по методу Фурье задачи (1)–(3) является классическим решением.*

Установим связь между решением задачи (1)–(3) и решением смешанной задачи для уравнения с инволюцией на отрезке $[0, 1]$, рассматриваемом в классе разрывных в точке $x = 1/2$ решений:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + p(x)v(x, t), \quad x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$v(0, t) = v(1/2 - 0, t) = 0, \quad (5)$$

$$v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (6)$$

Обозначим через $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2$, функции: $\varphi_k(x) = \varphi(x)$, при $x \in [0, 1/2]$, $\varphi_k(x) = (-1)^k \varphi'(1 - x)$, при $x \in (1/2, 1]$.

Теорема 2. *Если $u(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3), то $v(x, t)$ такая, что $v(x, t) = u(x, t)$, при $x \in [0, 1/2]$, $v(x, t) = u'_t(1 - x, t) + u'_x(1 - x, t)$, при $x \in (1/2, 1]$, является разрывным решением задачи (4)–(6), где $p(x) = 1$, при $x \in [0, 1/2]$, $p(x) = -q(1 - x)$, при $x \in (1/2, 1]$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_1(x)$.*

Аналогично, функция $v(x, t)$ такая, что $v(x, t) = u(x, t)$, при $x \in [0, 1/2]$, $v(x, t) = u'_t(1 - x, t) - u'_x(1 - x, t)$, при $x \in (1/2, 1]$, является решением уравнения

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + p(x)v(x, t), \quad x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}, \quad (4')$$

с условиями (5), (6), где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_2(x)$.

Теорема 3. *Пусть $v(x, t)$ есть решение задачи (4)–(6) с $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_1(x)$, $\tilde{v}(x, t)$ есть решение задачи (4')–(5)–(6), с $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_2(x)$, причем $v(x, t) = \tilde{v}(x, t)$ при $x \in [0, 1/2]$. Тогда $v(x, t)$, $\tilde{v}(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in [0, 1/2]$ и всем t , и функция $u(x, t) = v(x, t)$, при $x \in [0, 1/2]$, является классическим решением задачи (1)–(3).*

Литература

1. Бурлуцкая, М.Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

ТОЧНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДВУХКОНТУРНОЙ СЕТИ¹

А.П. Буслаев, А.Г. Таташев (Москва)

apal2006.yandex.ru

В [1], [2] исследована динамическая система с детерминированным движением частиц на кольцевой решетке по правилу *CA 184* в терминологии [3] и доказано, что при плотности частиц $\rho \leq \frac{1}{2}$ для любого начального состояния все частицы спустя конечное время перемещаются на каждом шаге (*самоорганизация*). Доказательство в [1] основано на монотонности длины кластера. В настоящей работе рассматривается система из двух одинаковых по длине контуров с общей ячейкой (*простой узел*) или общей точкой между двумя ячейками на контуре (*альтернирующий узел*). На контурах действует правило *CA 184* или *CA 240*. Частицы одного из контуров имеют приоритет при прохождении узла. Эта система — частный случай многоконтурной системы с узлом, исследовавшейся в [4], где большинство результатов получено для системы с правилом *CA 240*. Доказано, в частности, следующее утверждение.

Теорема. *Критерием самоорганизации при правиле CA 184 и простом узле является неравенство $\rho_1 + \rho_2 \leq 1/2$, а при правиле CA 240 и альтернирующем узле $\rho_1 + \rho_2 \leq 1$. При правиле CA 184 и альтернирующем узле или правиле CA 240 и простом узле наличие самоорганизации зависит от начального состояния.*

Получены обобщения на системы с более общими структурами.

Литература

1. Бланк, М.Л. Точный анализ динамических систем, возникающих в моделировании транспортных потоков / М.Л. Бланк // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 50, вып. 3. — С. 167–168.

2. Belitzky, V. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes / V. Belitzky, P.A. Ferrari // J. of Stat. Phys. — 2005. — V. 118, № 3. — P. 589–623.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00821, № 17-07-01358).

© Буслаев А.П., Таташев А.Г., 2017

3. Wolfram, S. Statistical mechanics of cellular automata / S. Wolfram // Rev. Mod. Mod. Phys. — 1983. — V. 55. — P. 601–644.

4. Buslaev, A.P. Flows on discrete traffic flower / A.P. Buslaev, A.G. Tatashev // J. of Math. Res. — 2017. — V. 9, № 1. — P. 98–108.

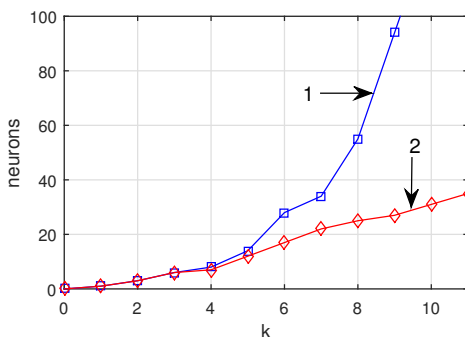
О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКАХ В ЗАДАЧЕ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОСЕТЕВОГО ДЕКОДЕРА ХЕММИНГА

В.В. Бутов, А.Н. Копылов (Воронеж)

butovvladislav@yandex.ru

Теоретической основой построения помехоустойчивых кодов являются алгебро-геометрические методы [1]. Активно идет поиск альтернативных методов построения каналов информации [2–5]. Быстро развивающиеся компьютерные технологии привели к возникновению новых методов обработки больших объемов данных [6]. В настоящей работе предлагается модель декодера блочного кода Хемминга основанная на использовании нейронной сети [7]. Простейший нейросетевой декодер кода Хемминга $[n, k]$ содержит два слоя: n -мерный первый слой и второй слой с k нейронами.

Уменьшение количества нейронов первого слоя можно добиться с помощью увеличения пространства признаков входной последовательности. На рисунке представлена зависимость количества нейронов, необходимых для точной настройки декодера от длины кодового слова.



Здесь, номером 1 обозначен график обучения сети для $[n, k]$ кода Хемминга использующий n -мерным вход; номером 2 — график для того же кода, но с r дополнительными признаками.

Литература

1. Berlekamp, E.R. Algebraic Coding Theory / E.R. Berlekamp. — NY : Aegean Park Pr., 1984. — 474 p.
2. Думачев, В.Н. Коды над алгеброй Клиффорда / В.Н. Думачев, С.Б. Колесников // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14, № 6. — С. 1101–1102.
3. Думачев, В.Н. Модели и алгоритмы квантовой информации / В.Н. Думачев. — Воронеж : ВИ МВД России, 2009. — 231 с.
4. Думачев, В.Н. О квантовании помехоустойчивых кодов / В.Н. Думачев, С.Б. Колесников // Системы управления и информационные технологии. — 2007. — Т. 29, № 3.3. — С. 350–353.
5. Думачев, В.Н. О квантовых корректирующих кодах / В.Н. Думачев, С.Б. Колесников // Вестник Воронежского института МВД России. — 2007. — № 2. — С. 152–160.
6. Haykin S. Neural Networks / S. Haykin. — New Jersey : Prentice Hall, 1999. — 823 p.
7. Думачев, В.Н. Особенности обучения нейросетевого декодера / В.Н. Думачев, А.Н. Копылов, В.В. Бутов // Системы управления и информационные технологии. — 2017. — Т. 67, № 1. — С. 29–33.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ, УРАВНЕНИЯХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ¹

В.Б. Васильев (Белгород)

vvv57@inbox.ru

Целью работы является обобщение понятия эллиптического оператора, которое принято применять к псевдодифференциальным операторам с использованием символа [1], на более общие классы операторов, так называемые операторы локального типа [2]. Основная идея заключается в том, что эллиптичность можно определять в терминах обратимости некоторых операторов. В случае псевдодифференциальных операторов это эквивалентно стандартному определению эллиптичности. Краевая задача возникает тогда, когда отсутствует упомянутая обратимость, причем тип этой краевой задачи определяется характером необратимости (ненулевое ядро или ненулевое коядро). Предпосылки содержатся в [3], некоторое приращение и развитие намечено в [4,5].

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).

© Васильев В.Б., 2017

Литература

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин — М. : Наука, 1973. — 236 с.
2. Симоненко И. Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих / И. Б. Симоненко. — Ростов-на-Дону : Изд-во ЦВВР, 2007. — 120 с.
3. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях / В. Б. Васильев // Труды ММО. — 1998. — Т. 59. — С. 73–105.
4. Васильев В. Б. Эллиптические уравнения и граничные особенности / В. Б. Васильев // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016 : Материалы Международной конференции. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2016. — С. 105–108.
5. Васильев В. Б. Псевдодифференциальные операторы, граничные особенности и фредгольмовость / В. Б. Васильев // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 86–90.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОТОКА

О.В. Владимирова, В.А. Костин, Д.В. Костин,

Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев (Воронеж)

olya31051995@mail.ru, vkostin@mail.ru, dvk605@mail.ru,

yusapr@mail.ru, bobrikantus@gmail.com

Противоречивое отношение специалистов по экономической динамике к роли математических формализмов в практической экономике отражено, например, в книге [1]. В ней приведена следующая теорема о рыночном процессе, сформулированная в середине XX века Рональдом Коузом (будущим нобелевским лауреатом): «независимо от того, как первоначально распределены активы, в итоге будет достигнуто оптимальное их распределение». Теорема отражает либеральное представление о функционировании рынка. В книге имеются еще утверждения типа «по правилам — даже по плохим правилам — жить лучше, чем без правил» или «в результате действия любого правила издержки одних людей становятся доходами других — просто потому, что правило так устроено», а также

© Владимирова О.В., Костин В.А., Костин Д.В., Сапронов Ю.И., Царев С.Л., 2017

«если вы каждый раз готовы найти оригинальное решение, то вам алгоритм не нужен» и т.п. С другой стороны, известно, что формальные экономико-математические модели позволяют создавать приемлемое «автоматическое управление» отдельными элементами экономической динамики, принося тем самым практическую пользу (см. [2]–[5]).

Важными показателями удачного математического моделирования являются такие факторы, как 1) сбалансированность инновационных мероприятий, отсутствие «перекосов», соблюдение допустимых пропорций между компонентами инновационной системы в целом; 2) регулярное и оптимальное использование инновационных заимствований; 3) недопустимость рискованных инвестиций.

Напомним, что понятие «диффузия инноваций» было введено и изучено французским социологом Габриэлем Тардом (1890), им же была предложена S -образная кривая (логистическая кривая) для характеристики инновационных процессов (1903). Эверетт Роджерс позже использовал эту кривую в своей модели (1962 году он опубликовал книгу о диффузии инноваций). Известно также, что логистическую кривую впервые ввел Пьер Ферхюльст при построении модели роста численности населения (1838). Если применить его модель к простейшему (иммитационному) потоку инвестиций, то получим уравнение (Ферхюльста-Пирла) $\dot{N} = \mathcal{D}N(M - N)$, решением которого является S -образная кривая (Р. Пирл — американский эколог, также использовавший это уравнение (1920)). Здесь $N(t)$ — число людей, принявших инновацию к моменту t , M — емкость рынка (это предельно допустимое число лиц, которые способны принять данную инновацию). Если предположить, что *объем инвестиций строго пропорционален числу сторонников инноваций*, то получим, что S -образная кривая отражает и динамику инвестиций. Она при этом дает основные фазы распространения новых продуктов: медленный рост (вовлечение первых потребителей), затем резкий рост и, наконец, замедление роста (насыщение). Течение этого процесса, согласно Э. Роджерсу, зависит от основных инновационных свойств нового продукта, оцениваемые потребителями при принятии решения об использовании инновации.

В работах Полтеровича и Хенкина [6]–[7] предложена дискретная модель взаимодействия между объемом внедренных инноваций (на заданном предприятии) и объемом предстоящего (необходимо-

го) инвестирования инноваций, основанная на уравнении

$$\dot{x}_n = (-\alpha + \beta(1 - x_n))(x_n - x_{n-1}) + \mu(x_{n+1} - x_n),$$

носящем в настоящее время название «уравнение Полтеровича-Хенкина». В этом уравнении x_n — объем необходимого инвестирования инноваций. Уравнение Полтеровича-Хенкина можно переписать в виде

$$\dot{x}_n = \mu(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) - \gamma(x_n - x_{n-1}) + \beta(1 - x_n)(x_n - x_{n-1}),$$

$\gamma = \alpha + \mu$, что позволяет воспринимать уравнение как разностную аппроксимация «непрерывного» модельного уравнения $\dot{x} = \mu x'' - \gamma x' + \beta(1 - x)(x')$, или $\dot{x} = \mu x'' - (\gamma - \beta + \beta x)x'$. Здесь $x = x(r, t)$ — скорость инвестирования, зависящая от уровня инвестиционных затрат r и времени t . Сделав замену $\gamma - \beta + \beta x = v$, получим, после отбрасывания общего множителя β и переноса конвективного члена $v v'$ в левую часть, уравнение Бюргерса $\dot{v} + v' v = \mu v''$, которое можно исследовать разнообразными методами, включая приближенные методы, изложенные в [8].

Для повышения точности можно ввести в уравнение Бюргерса дополнительное слагаемое $v(\lambda - \|v\|^2)$, учитывающее прямой (механический) обмен инновационными ресурсами. В результате получим более общее модельное уравнение в виде

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + v(\lambda - v^2) - c. \quad (1)$$

Анализ решений уравнения (1) базируется на вычислении собственных функций и собственных значений операторного пучка $A + \lambda B : E \rightarrow F$, $A = \frac{d^4}{dx^4}$, $B = \frac{d^2}{dx^2}$, при краевых условия Дирихле и Неймана, $E = \{u \in C^4[0, 1] : u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}$, $F = C[0, 1]$. Собственные функции операторного пучка $A + \lambda B$ в пространстве E определяются формулой $u_k(r) = 1 - \cos(2kr)$, функция u_k отвечает собственному значению $\lambda = 4(\pi k)^2$. Приближение Галеркина по n модам к решению уравнения (1) имеют следующий вид: $v(r, t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) u_k(r)$. Поток инвестиций определяется дифференциальным уравнением $\dot{r} = v(r, t)$. Имеется прямой вывод аналога уравнения Бюргерса при моделировании инвестиционной динамики, аналогичный вывод имеет место в случае фирмы,

состоящей из нескольких предприятий. Такой вывод позволяет поток инвестиций «уподобить потоку воды» и, таким образом, перенести на область экономической динамики вычислительные методы многомерной гидродинамики (на основе уравнения Навье-Стокса и его обобщений [9]–[12]). Возможно, на этом пути удастся обнаружить новые полезные правила в «организации динамики» инвестиций и инноваций.

Пусть имеется фирма, состоящая из n предприятий, и пусть при этом $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))^T$ — вектор инвестирования инноваций в этой фирме ($r_j(t)$ — затраты на инновации j -го предприятия вплоть до момента времени t), $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))^T$ — вектор скорости инвестирования инноваций ($v_j(t) = \dot{r}_j(t)$), а $s(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T \in \Omega$ — вектор внедренных инноваций к данному моменту времени (например, в процентах от планового показателя внедрения инноваций за весь контрольный период).

Будем предполагать, что выполнено следующее условие: *вектор скорости внедрения инноваций пропорционален вектору скорости инвестиций*: $\dot{s} = \beta v$, $\beta = \text{const}$. Для скорости инвестирования можно составить, по хорошо известным схемам, балансовое уравнение. Сначала заметим, что $\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} \dot{r} = \dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v$ (здесь $\frac{\partial v}{\partial r} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial r_k} \right)$ — матрица Якоби). Следовательно, уравнение динамики инвестирования инноваций можно записать в виде, аналогичном широко известному уравнению Навье-Стокса из динамики несжимаемой вязкой жидкости:

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \Delta(v) - \text{grad}(p), \quad (2)$$

где $v = v(r, t)$, $p = p(r, t)$ — функция влияния спроса и предложения на инновации (*инновационный потенциал*), $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$ — n -мерный гармонический оператор. Слагаемое $\mu \Delta(v)$ в последнем уравнении отвечает за «инновационную вязкость» (вызванную диффузией инноваций), коэффициент μ характеризует величину «инновационной вязкости». Естественно предположить также, что выполнено условие неразрывности $\text{div}(v) = 0$ и граничное условие «условия прилипания» $v|_{\partial\Omega} = 0$ на границе области $\Omega := \{r = (r_1, \dots, r_n)^T \mid 0 \leq r_j \leq R_j\}$. Для повышения точности модели можно ввести в уравнение (2) дополнительное слагаемое $v(\lambda - \|v\|^2)$, учитывающее прямой (механический) обмен иннова-

ционными ресурсами. В результате получим более общее модельное уравнение в виде $\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \Delta(v) + v (\lambda - \|v\|^2) - \text{grad}(p)$,

Литература

1. Аузан, А. Институциональная экономика : Новая институциональная экономическая теория / А. Аузан, М. Дорошенко, В. Иванов, А. Елисеев, Г. Калягин и др. — М. : ИНФРА-М, 2011. — 266 с.
2. Арнольд, В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В.И. Арнольд — М. : МЦНМО, 2008. — 32 с.
3. Маслов, В.П. Квантовая экономика / В.П. Маслов - Рос. академия наук. 2-е изд., доп. — М. : Наука, 2006. — 92 с.
4. Пу, Е. Нелинейная экономическая динамика / Е. Пу. — Ижевск : Удмуртский университет, 2000. — 200 с.
5. Воркуев, Б.Л. Модели макро- и микроэкономики / Б.Л. Воркуев. — М. : ТЕИС, 1999. — 235 с.
6. Полтерович В.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий / В.М. Полтерович, Г.М. Хенкин // Экономика и математические методы. — 1988. — № 6.
7. Гельман, Л.М. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) / Л.М. Гельман, М.И. Левин, В.М. Полтерович, В.А. Спивак // Экономика и математические методы. — 1993. — Т. 29, № 3.
8. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12 — С. 3–134.
9. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
10. Крейн, С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике / С. Г. Крейн // Усп. матем. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 1(73). — С. 208–211.
11. Копачевский, Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике : Эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Наука, 1989. — 416 с.

СПЕЦИАЛЬНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Бу Нгуен Шон Тунг (Москва)

vnsontung@mail.ru

Рассматриваем следующую нелокальную по времени задачу для общего уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla_x u + \sigma_a(x, v)u = Ku, \quad u = u(x, v, t), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma^{(-)}} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, v, t) dt = \varphi(x, v), \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}_x^3$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in V \subset \mathbb{R}_v^3$, $0 \leq t \leq T$ с заданным значением $T > 0$. При этом Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}_x^3$, а V — обобщенный шаровой слой вида

$$V \equiv \{ v \in \mathbb{R}_v^3 : 0 < \nu_{\min} \leq |v| \leq \nu_{\max} < \infty \}$$

с фиксированными положительными значениями $\nu_{\min}, \nu_{\max}$. Через $\Gamma^{(-)}$ обозначаем множество таких (x, v) , что $x \in \Gamma \equiv \partial\Omega$, а вектор $v \in V$, приложенный к точке x , направлен внутрь области Ω . Функция $\sigma_a \in L^\infty(\Omega \times V)$ называется коэффициентом поглощения. Считаем, что $\sigma_a(x, v) \geq 0$ почти всюду в $\Omega \times V$. Оператор K , входящий в (1), определен формулой

$$(Ku)(x, v, t) = \int_V k(x, v, v') u(x, v', t) dv'.$$

Ядро рассеяния $k(x, v, v')$ — измеримая неотрицательная функция на $\Omega \times V \times V$. Считаем, что $k(x, \cdot, v') \in L^1(V)$ при всех $(x, v') \in \Omega \times V$, причем функция

$$\sigma_p(x, v) \equiv \int_V k(x, v', v) dv', \quad (x, v) \in \Omega \times V,$$

принадлежит $L^\infty(\Omega \times V)$. Пару функций $\langle \sigma_a, k \rangle$, удовлетворяющую перечисленным условиям, назовем *регулярной парой* (см. [1]). Уравнение переноса (1) с краевым условием (2) трактуем, как эволюционное уравнение в банаховом пространстве $L^1(\Omega \times V)$ (см. [1]–[3]).

Нелокальное условие (3) замещает традиционное начальное условие

$$u(x, v, 0) = f(x, v). \quad (4)$$

Начальная функция f сейчас неизвестна. Напротив, функция φ в формуле (3) предполагается заданной. Требуется восстановить решение $u = u(x, v, t)$ из соотношений (1)–(3).

Используя теорию [4], связанную с нелокальными задачами для абстрактных дифференциальных уравнений, можно установить такой результат.

Теорема. Пусть $\langle \sigma_a, k \rangle$ — регулярная пара, причем

$$\alpha \equiv \operatorname{ess\,inf}_{\Omega \times V} (\sigma_a(x, v) - \sigma_p(x, v)) > 0. \quad (5)$$

Тогда нелокальная задача (1)–(3) имеет и притом единственное решение $u(x, v, t)$ при любом выборе функции $\varphi(x, v)$ из области определения оператора $A_0 \equiv v \nabla_x$ в пространстве $L_1(\Omega \times V)$. Кроме того, справедлива оценка устойчивости

$$\|u(x, v, t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|v \nabla_x \varphi(x, v)\|, \quad t \geq 0,$$

в норме $L^1(\Omega \times V)$ с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от выбора функции φ , и значением $\alpha > 0$ из формулы (5).

В условиях теоремы начальное состояние f из формулы (4) можно восстановить конструктивным способом при помощи соответствующего ряда Неймана. В случае, когда $k(x, v, v') \equiv 0$, т. е. когда интеграл столкновений в уравнении (1) отсутствует, ряд Неймана превращается в конечную сумму и начальная функция f выражает в виде

$$f(x, v) = T(v \nabla_x + \sigma_a) \sum_{k=0}^{n_0(x, v)} \varphi(x - vkT, v) \exp \left(- \int_0^{kT} \sigma_a(x - vs, v) ds \right).$$

Здесь $n_0(x, v) \equiv \lceil \tau_0(x, v)/T \rceil - 1$ при $(x, v) \in \Omega \times V$, где через $\lceil h \rceil$ обозначен *потолок* числа $h \in \mathbb{R}$. При этом функция $\tau_0(x, v)$

выражает время свободного пробега от точки $x \in \Omega$ до границы Γ со скоростью $(-v)$, т. е.

$$\tau_0(x, v) \equiv \sup \{ \tau \in \mathbb{R} : x - v\tau \in \Omega \}.$$

Частный случай $\sigma_a(x, v) \equiv 0$ подробно разобран в [5].

Автор благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании.

Литература

1. Рид, М. Методы современной математической физики. Т. 3 : Теория рассеяния / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1982. — 443 с.
2. Kaper, H.G. Spectral methods in linear transport theory / H.G. Kaper, C.G. Lekkerkerker, J. Hejtmanek. — Basel : Birkhäuser, 1982. — 345 p.
3. Mokhtar-Kharroubi, M. Mathematical Topics in Neutron Transport Theory / M. Mokhtar-Kharroubi. — New aspects, vol. 46, World Scientific, Singapore, 1997. — 344 p.
4. Тихонов, И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И.В. Тихонов // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 6. — С. 841–843.
5. Тихонов, И.В. Формула явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса / И.В. Тихонов, Ву Нгуен Шон Тунг // Математические заметки СВФУ. — 2016. В печати.

О РАСЩЕПЛЕНИИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова (Воронеж)

g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Изучается разностный оператор $(\mathcal{E}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n) - x(n-1) - x(n+1)$, действующий в гильбертовом пространстве двусторонних, суммируемых с квадратом, комплексных последовательностей: $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$, с растущим потенциалом. Рассматриваемая последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям: 1) существуют две последовательности вещественных чисел $(b_k), (b'_k)$ такие, что $0 \leq b_1 < b'_1 < b_2 < b'_2 < \dots < b_n < b'_n < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, множества $\Delta_i = \{a(k) : b_i \leq |a(k)| < b'_i\}$,

$i \in \mathbb{N}$, взаимно непересекаются ($\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$), $\Delta = \cup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i$, $0 < d_i \leq \text{dist}(\Delta_i, \Delta \setminus \Delta_i) \leq \max\{b_i - b'_{i-1}, b_{i+1} - b'_i\} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$; 2) число членов $n(i)$ последовательности $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ в множестве Δ_i , $i \in \mathbb{N}$, положительно и конечно.

Представим оператор $\mathcal{E}$ в виде $\mathcal{E} = A - B$, где $(Ax)(n) = a(n)x(n)$, $(Bx)(n) = \mathcal{E} - A$, $n \in \mathbb{Z}$. С помощью теории расщепления линейных операторов [1,2] метода подобных операторов доказана

Теорема. *Существует разложение для спектра оператора A , $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, на взаимно непересекающиеся спектральные множества σ_1, σ_2 , где σ_1 – конечное множество такое, что гильбертово пространство $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ есть прямая сумма $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно оператора A подпространств ($\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $k = 1, 2$, где P_k проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_k). Оператор $\mathcal{E} = A - B$ подобен оператору, представляющему собой прямую сумму операторов вида $A_k - C_k$, $k = 1, 2$, т. е. $(A_1 - C_1) \oplus (A_2 - C_2)$, относительно разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, где $C_k : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$ ограниченные операторы и $A_k = A|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$.*

Эта теорема позволяет получать оценки спектральных характеристик оператора $\mathcal{E}$. Отметим, что случаи других условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ без применения теории расщепления рассматривались в [3-6].

Литература

1. Баскаков, А.Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А.Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. : Матем. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.
2. Баскаков, А.Г. Расщепление возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / А.Г. Баскаков // Фундам. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, № 1. — С. 1–16.
3. Гаркавенко, Г.В. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 395–402.
4. Зголич, А.Р. Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом / А.Р. Зголич, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Научные ведомости Белгород-

ского государственного университета. Серия : Математика. Физика. — 2016. — Т. 44, № 20 (241). — С. 42–49.

5. Гаркавенко, Г.В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 101–112.

6. Гаркавенко, Г.В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 673–680.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю.А. Гладышев (Калуга)

v572264@yandex.ru

Основная идея метода обобщенных степеней (ОС) в случае дифференциальных операторов порядка выше первого состоит в сведении решения уравнения высокого порядка к решению уравнения более низкого порядка, желательно первого. Предложенный метод понижения порядка не требует введения новых функций, что делается при замене одного уравнения на систему уравнений. В известном смысле он близок к методам операционного исчисления, когда имеется оригинал и его изображение. Проведем краткое изложение идей метода сначала для одного переменного [1].

Обобщенной степенью (ОС) называется функция $X^{(n)}(x, x_1)C$ полученная последовательным применением некоторого интегрального оператора I , который является правым обратным для дифференциального оператора D , где C – функция из ядра оператора D . Снабженная факториальным множителем $n!$, она удовлетворяет правилам дифференцирования, формально аналогичным обычным правилам дифференцирования и условию обращения в нуль при $x = x_1$

$$DX^{(n)}C = nX^{(n-1)}C, \quad X^{(n)}(x_1, x_1) = 0, \quad n \neq 0. \quad (1)$$

Для более подробного ознакомления с этой конструкцией следует обратиться к [1]. Далее в настоящем сообщении будем использовать

оператор второй производной по x

$$D = \frac{d^2}{dx^2}. \quad (2)$$

Ядро этого оператора составляют линейные функции

$$C = c_1 + c_2 x. \quad (3)$$

При простейшем выборе оператора $I(x, x_1)$

$$I(x, x_1) = \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \quad (4)$$

ОС имеет вид

$$X^{(n)}(x, x_1)C = n! \left(\frac{1}{(2n)!} x^{2n} c_1 + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} c_2 \right). \quad (5)$$

Полезность введенной конструкции раскрывается принципом соответствия, впервые введенном Берсом: пусть некоторому выражению типа ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_1)^k \quad (6)$$

сопоставляется выражение

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^{(k)}(x, x_1) C_k. \quad (7)$$

При выборе операторов вида (2) $F(X)$ определено с точностью до констант c_2, c_3, c_4 , которые могут быть выбраны в зависимости от поставленной задачи.

Если $f(x)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то функция $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с заменой $\frac{d}{dx}$ на $\frac{d^2}{dx^2}$.

Понятие ОС легко распространяется на случай любого числа переменных. Покажем это на примере двух переменных x, y . Взяв операторы

$$D_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8)$$

легко для обобщенной константы (ОК) найдем

$$C = c_1 + xc_2 + c_3y + c_4xy, \quad (9)$$

где c_i – константы. Поэтому для степени $X^{(n)}Y^{(m)}C$ можно предложить набор функций

$$X^{(n)}Y^{(m)}C = \frac{n!m!}{(2n)!(2m)!} \times \left(x^{2n}y^{2m}c_1 + \frac{x^{2n+1}y^{2m}}{2n+1}c_2 + \frac{x^{2n}y^{2m+1}}{2m+1}c_3 + \frac{x^{2n+1}y^{2m+1}}{(2n+1)(2m+1)c_4} \right). \quad (10)$$

Можно дать геометрическую иллюстрацию для таких ОС. Возьмем таблицу Паскаля, разместив вместо числа сочетаний C_n^i соответствующие им одночлены. Такая таблица разбивается на четырехугольники соответствующих ОС. Для примера использования принципа соответствия возьмем функцию $(x - y)^n$, которая удовлетворяет уравнению $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} = 0$, тогда функция $(X + Y)$, представленная в виде разложения по биному, дает решение уравнения Лапласа $D_1F - D_2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

В сообщении [3] было проведено построение решений трехмерно-го уравнения Лапласа и показано их совпадение со сферическими функциями.

Перейдем к уравнению деформации анизотропной пластины [4], считая, что оно путем замены координат приведено к виду

$$\alpha_2 \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^4} + \alpha_1 \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (11)$$

Соответствующее уравнение второго порядка имеет вид

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (12)$$

В работе [5] было показано, что линейно независимые многочлены решения $f^{(n)}$ этого уравнения имеют вид

$$f_1^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i \alpha_2^{i/2} U_{i-1}(t), \quad (13)$$

$$f_2^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i \alpha_2^{(i-1)/2} U_i(t). \quad (14)$$

Здесь $U(t)$ – многочлены Чебышева второго рода от параметра t , равного

$$t = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2^{1/2}} = -\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2^{(-1/2)}. \quad (15)$$

Переходя к ОС, имеем

$$F_1^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i X^{n-i} Y^i \alpha_2^{i/2} U_{i-1}(t) C, \quad U_{-1}(t) = 0, \quad (16)$$

$$F_2^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i X^{n-i} Y^i \alpha_2^{(i-1)/2} U_i(t) C. \quad (17)$$

Это набор восьми однородных многочленов степени однородности от n до $n+2$.

Предложенный метод может быть обобщен в двух направлениях. Можно увеличить число размерности основного пространства до 3 (или 4), причем число независимых констант возрастет до 8 (или соответственно 16). Другое направление – это учет нестационарности процесса. При этом временная координата может сохранять порядок производной [2]. В следующих публикациях предполагается рассмотреть эти возможности.

Литература

1. Гладышев, Ю.А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложение в математической физике / Ю.А. Гладышев. — Калуга : Издательство КГПУ им. К. Э. Циолковского, 1997. — 259 с.

2. Гладышев, Ю.А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса для построения базисных решений уравнений высшего порядка / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы Тринадцатой Международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань : Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. — Т. 54. — С. 107–112.

3. Гладышев, Ю.А. Об одном методе построения системы сферических функций / Ю.А. Гладышев // Научные труды Калужского государственного университета имени К. Э. Циолковского. Серия : Естественные науки. — 2017. — Калуга : КГУ имени К. Э. Циолковского, 2017. — С. 13–15.

4. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1966. — 708 с.

5. Гладышев, Ю.А. Об использовании полиномов П. Л. Чебышёва при построении степенных функций сопряжённых параметрических комплексных переменных / Ю.А. Гладышев // Вестник Калужского университета. — 2016. — № 2. — С. 16–17.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИЯ ГОЛУБОГО НЕБА В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ БЫСТРОЙ И НЕСКОЛЬКИМИ МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ¹

С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов (Черноголовка, Ярославль, Москва)
glyzin.s@gmail.com

В [1] рассмотрена бифуркация голубого неба в системе

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

В данной работе результат из [1] распространяется на задачу

$$\dot{x} = f_1(x, \mu) + \sqrt{\varepsilon} y^2 f_2(x), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x) - h(y),$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, а $|\mu| \leq \mu_0$ фиксировано и достаточно мало. Предполагается, что функции $f_1(x, \mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2)$, $f_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $h(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяют набору специальных условий, гарантирующих существование у системы неклассических релаксационных колебаний. Под такими колебаниями понимаются решения, у которых медленные компоненты асимптотически близки к некоторым разрывным по времени функциям, а быстрая компонента δ -образна.

В работе построено отображение, отвечающее за аттрактор системы (отображение Пуанкаре вдоль траекторий на специальном образе выбранном сечении), с помощью которого удастся обосновать наличие бифуркации голубого неба. Разбираются случаи, когда в результате этой бифуркации возникает устойчивый релаксационный цикл или устойчивый двумерный инвариантный тор. Рассматривается также вопрос о появлении в системе гиперболического аттрактора (аттрактора Смейла – Вильямса). Сделана попытка применения обсуждаемых систем к моделированию кардиоритмов.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 14-21-00158).

© Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х., 2017

Литература

1. Глызин, С.Д. Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 158–171.

РЕДУЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В 3D-ДИФФУЗОРЕ

И.А. Гнеушев, М.И. Ковалева, Ю.И. Сапронов (Воронеж)

wtn70@yandex.ru, marinkov@mail.ru, yusapr@mail.ru

Трехмерное уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (в прямоугольной системе координат) $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$, рассмотренное совместно с уравнением неразрывности $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$, [1–3], после перехода к сферическим координатам r, θ, φ и наложения условие осевой симметрии на рассматриваемые течения (в коническом диффузоре) $\mathbf{v} := (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (v, 0, 0)$, переходит в более простое уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\tilde{\Delta} v - \frac{2v}{r^2} \right], \quad (1)$$

где $(\mathbf{v}, \tilde{\nabla}) = v \frac{\partial}{\partial r}$, $\tilde{\Delta}(f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$. Из (1) получаем $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ (p не зависит от φ и θ : $p = p(r)$), вследствие чего имеем уравнение $-\frac{\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} v \right)}{r^2} - \frac{\nu \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} v \right)}{r^2 \sin \theta} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} v \right) + v \left(\frac{\partial}{\partial r} v \right) - \frac{2\nu \left(\frac{\partial}{\partial r} v \right)}{r} - \frac{\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v \right)}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2\nu v}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho} = 0$. После подстановки $v = \frac{u(\varphi, \theta)}{r}$ и умножения полученного соотношения на r^3 возникнет соотношение $-\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u \right) - \frac{\nu \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} u \right)}{\sin \theta} - \frac{\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u \right)}{\sin^2 \theta} - u^2 + 2\nu u + \frac{r^3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$, Из которого следует $\frac{r^3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = C$ (C — некоторая константа) и $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho C}{r^3}$. Следовательно, давление описывается формулой: $p = -\frac{\rho C}{2r^2} + C_1$. Если, далее, принять $v = \frac{u(\theta)}{r}$ (аналог подстановки Джефффри-Гамеля), то получим, после сокращения на множитель ν , более простое уравнение

$$u'' + \text{ctg}(\theta) u' - 2u + \mathcal{R} u^2 = C, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\nu}, \quad (2)$$

являющееся в некоторой степени аналогом уравнения Джеффри-Гамеля [1–3] (при добавлении к (2) нескольких условий, связанных с течением в специальной области $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) | r > 0, \theta \leq \beta\}$ (круговом конусе), где $0 < \beta < \pi$). Учитывая условие прилипания жидкости к границе области и осевую симметрию, получим граничное условие

$$u(\beta) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (3)$$

Левая часть уравнения (2) является антиградиентом функционала энергии: $f(u) = -\text{grad}V(u)$,

$$V(u) := \int_0^\beta \sin(\theta) \left(\frac{(u')^2}{2} + u^2 - \frac{\mathcal{R}u^3}{3} - Cu \right) d\theta,$$

при граничном условии (3) и условии постоянства величины потока: $\int_0^\beta \sin(\theta)v(\theta)d\theta = \text{const}$. Следовательно, при исследовании краевой задаче (2)-(3) можно применить вариационную схему Ляпунова-Шмидта [4],[5]. После подстановки $\theta \mapsto \beta\theta$ и отбрасывания множителя β^2 получим

$$\tilde{V}_\beta(u) := \int_0^1 \frac{\sin(\beta\theta)}{\beta} \left(\frac{(u')^2}{2} + \beta^2 \left(u^2 - \frac{\mathcal{R}u^3}{3} + Cu \right) \right) d\theta.$$

В предельном случае $\beta = 0$ имеем $\tilde{V}_0(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 \theta u'(\theta)^2 d\theta$ при условиях

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \int_0^1 \theta u(\theta) d\theta = \sigma = \text{const}. \quad (4)$$

Последнее соотношение в (4) выполняется, если $\int_0^1 \sin(\beta\theta)u(\theta)d\theta = \sigma\beta + o(\beta)$. Критическая точка функционала действия при условии (4) определяется уравнением $u'' + \frac{u'}{\theta} = \text{const}$ и, следовательно, задается функцией $u_0(\theta) = 4\sigma(1 - \theta^2)$. При малых $\beta > 0$ критическую точку функционала V можно приближенно вычислить как критическую точку ритцевской аппроксимации этого функционала:

$$W_\beta(\xi) := V_\beta \left(u_0 + \sum_1^n \xi_k e_k \right),$$

при некотором фиксированном n , где $e_k = \mu_k B_0(\alpha_k \theta)$, $B_0(\theta)$ — функция Бесселя первого рода с нулевым порядком, $\{\alpha_k\}$ — последовательность нулей этой функции, пронумерованная по возрастанию величин, μ_k — нормирующая константа (относительно скалярного произведения $\langle u, v \rangle = \int_0^1 \theta u(\theta) v(\theta) d\theta$). В этой связи отметим, что $\|B_0(\alpha_k \theta)\|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dB_0}{d\theta}(\alpha_k) \right)^2$ (норма $\|\cdot\|$ в указанным выше скалярном произведении). Последовательность функций e_k является ортонормированной системой собственных векторов оператора Бесселя $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(u) = u'' + \frac{u'}{\theta}$, на отрезке $[0, 1]$ при указанном выше граничном условии. Пусть, далее, $w = Q + v$ ($[v]_\beta = 0$). Уравнение (3) запишем в виде

$$v'' + \beta \operatorname{ctg}(\beta \tilde{\theta}) v' - 2\beta^2 v + \beta^2 (\mathcal{R}(Q + v)^2) = D(\beta) + 2\beta^2 Q$$

или в виде $v = \mathcal{A}_\beta^{-1} g(v, \beta)$, где $\mathcal{A}_\beta := -\frac{d^2}{d\theta^2} - \beta \operatorname{ctg}(\beta \tilde{\theta}) \frac{d}{d\theta} + 2\beta^2 (1 - \mathcal{R}Q)I$, $g(v, \beta) := \beta^2 \mathcal{R}v^2 - \mathcal{M}(\beta)$, $\mathcal{M}(\beta) = (2Q - \mathcal{R}Q^2)\beta^2 + D(\beta)$. На основе этих формул можно получать асимптотические представления высокого порядка (по угловому параметру β) для ветвей решений модельного уравнения (2).

Литература

1. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
2. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин — М. : ГИТТЛ, 1955. — 520 с.
3. Акуленко Л.Д. Бифуркация многомодовых течений в плоском диффузоре / Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев // ПММ. — 2008. — Т. 72, вып. 3. — С. 421–441.
4. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
5. Сапронов, Ю.И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю.И. Сапронов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. : Матем. моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, вып. 2. — С. 74–86.

ТРЕХМОДОВЫЕ ПРОГИБЫ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ БАЛКИ НА ДВОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

И.А. Гнеушев, И.В. Колесникова, Д.В. Костин,

Ю.И. Сапронов (Воронеж)

wtn70@yandex.ru, kolinna@inbox.ru, dvk605@mail.ru, yusapr@mail.ru

В докладе рассмотрена алгоритмизируемая методика приближенного вычисления закритических прогибов продольно сжатой упругой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова-Леонтьева [1] (стр. 136, уравнение (8.20)), представленной в виде ОДУ шестого порядка

$$-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p \quad (1)$$

при обобщенных краевых условиях Дирихле

$$\frac{d^4 w}{dx^4}(0) = \frac{d^4 w}{dx^4}(1) = \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = w(1) = w(0) = 0, \quad (2)$$

$w = w(x)$ — функция прогиба средней линии балки, a_1, a_2, a_3 — положительные механические константы, $p = p(x)$ — функциональный параметр внешней нагрузки, x — (промасштабированный) параметр длины средней линии балки. Уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве H^6 соболевских функций класса $W_2^6[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2), что объясняется положительной определенностью симметричного оператора $-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w$ (при выполнении краевых условий (2)). Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Фусса-Винклера-Циммермана $\frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = p$ из строительной механики [1] (стр. 75, уравнение (1.8)). Рассмотренная ниже модификация предполагает наличие продольного сжатия балки, приводящего к смене знаков перед коэффициентами в модельном уравнении, что дает эффект 3-модового вырождения в нулевом состоянии:

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w - w^3 = p. \quad (3)$$

Наличие нелинейного слагаемого позволяет «контролировать» рост амплитуд посткритических прогибов балки. Методикой исследования прогибов служит вариационная версия метода Ляпунова-

Шмидта, позволяющая вычислять прогибы и определять их устойчивость, а также проводить построение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров (a_1, a_2, a_3) . Центральная конструктивная идея — сведение (редукция) задачи изучения изгибов к анализу ветвления критических точек полинома от шести переменных — главной части ключевой функции

$$W(\xi, \delta, q) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a, q) = V\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i e_i + \Phi(\xi)\right), \quad (4)$$

где $V(\xi, \delta, q) := \int_0^1 L\left(\frac{dw}{dx}, w\right) dx$ — потенциал уравнения (1),

$$L = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)^2 - a_3 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{w^4}{4} + p w,$$

e_1, e_2, e_3 — моды прогиба в нуле при соответствующем значении векторного параметра $a = \bar{a}$, $\delta := a - \bar{a}$. Уравнение (1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (4). Данная краевая задача допускает 3-мерное вырождение, порождающие 3-модовые бифуркации с разнообразными геометрическими и физическими эффектами.

Обратимся к примеру, в котором тройка мод бифуркации задана набором функций $e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi x)$, $e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi x)$, $e_3 = \sqrt{2} \sin(3\pi x)$, — базисом ядра второго дифференциала, соответствующим (критическому) значению управляющего параметра $a = \bar{a} := (36\pi^6, 49\pi^4, 14\pi^2)$. После пересечения точкой $a = (a_1, a_2, a_3)$ произвольной характеристической плоскости (в $\mathbb{R}^3$) нулевая функция теряет стабильность и вблизи нее рождаются ненулевые стабильные состояния. Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации управляющих параметров вблизи точки $\bar{a} = (1, 2, 3)$: $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$, $k = 1, 2, 3$, можно осуществить посредством редукции к ключевой функции (от трех ключевых переменных). Известно, что в рассматриваемых условиях функция $W(\xi, \delta)$ является гладкой. Эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V на E . В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W , сохраняющее типы точек (кратности, значения индекса Морса и т. п.). Так как функционал V четен: $V(-w, a) = V(w, a)$ и симметричен относительно инволюции $I_1 : w(x) \mapsto w(1 - x)$, то

V инвариантен относительно действия группы $\mathbb{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1, I_2 , где $I_2 = -I_1$. Очевидно, что выполняются соотношения $I_1(e_1) = e_1$, $I_1(e_2) = -e_2$, $I_1(e_3) = e_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} W(-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) &= W(\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) = \\ &= W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3). \end{aligned}$$

Можно записать, учитывая эту симметрию, следующее асимптотическое представление ключевой функции: $W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta)$, где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \delta)$ — ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2, e_3 . Непосредственные вычисления приводят к следующему утверждению.

Теорема. *Для ключевой функции (4) имеет место асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} W(\xi, \delta) &= \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1 \xi_1^2 + \bar{\delta}_2 \xi_2^2 + \bar{\delta}_3 \xi_3^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + \\ &+ \frac{3}{2} \left(\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 - \frac{1}{3} \xi_1^3 \xi_3 \right) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \end{aligned}$$

где $\bar{\delta}_1 = (-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)\pi^2$, $\bar{\delta}_2 = (-\delta_1 + 4\delta_2 - 16\delta_3)\pi^4$, $\bar{\delta}_3 = (-\delta_1 + 9\delta_2 - 81\delta_3)\pi^6$.

Литература

1. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М. : Физматгиз, 1960. — 492 с.
2. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
3. Даринский, Б.М. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка / Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2009 — №1. — С. 101–107.

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА–ХОПФА В ОДНОЙ БИОФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ БЕЛОУСОВА¹

В.Е. Горюнов (Ярославль)

salkar@ya.ru

Проводится асимптотический и численный анализ математической модели окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, в основе которых лежит механизм реакции Белоусова. Процесс взаимодействия основных компонентов в реакции Белоусова может быть интерпретирован феноменологически близкой к ней моделью «хищник-жертва» (см. [1]). Система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_1(x+1)(-x-az), \\ \dot{y} &= r_2(y+1)(x-y), \\ \dot{z} &= r_3(z+1)(\alpha x + (1-\alpha)y - z)\end{aligned}\tag{1}$$

из трех обыкновенных дифференциальных уравнений вольтерровского типа представляет собой математическую модель этой реакции. Здесь в качестве $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ обозначены плотности концентраций HBrO_2 , Ce^{4+} и Br^- соответственно, $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. В [1] для системы (1) с помощью метода большого параметра построен релаксационный цикл. Наша задача состоит в локальном исследовании окрестности нулевого состояния равновесия системы (1).

Введем вспомогательные обозначения: $p = r_1 r_2 r_3$, $q = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$, $r = r_1 + r_2 + r_3$. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены неравенства:

$r_1, r_2, r_3 > 0$, $(r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p)) > 0$, $((\alpha + 1)r_1 + (\alpha - 3)r_2 + (3\alpha - 1)r_3)(r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p)) < 0$ и $a = a_{\text{кр}} + \varepsilon$, где $a_{\text{кр}} = (qr - p)/(p(1 - \alpha) - r_1 r_3(r_1 + r_3)\alpha)$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует отвечающий от него орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл системы (1).

Литература

1. Глызин, С.Д. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Журнал

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

© Горюнов В.Е., 2017

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И.В. Денисов (Тула)

den_tspu@mail.ru

В прямоугольнике $\Omega := \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ для сингулярно возмущенного параболического уравнения рассматривается начально-краевая задача вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Предполагаются выполненными следующие условия.

Условие I. Функция $F(u, x, t, \varepsilon)$ является достаточно гладкой, а функции $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и согласованными: $\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\varphi(1) = \psi_2(0)$.

Условие II. Уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие III. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие IV. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0), \quad (4)$$

где параметр $x \in [0, 1]$, имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$, $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$.

Условие IV означает, что начальное значение $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$ принадлежит области влияния точки покоя $\Pi_0 = 0$ уравнения (4), и эта точка является устойчивой в силу условия III.

Условие V. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (5)$$

где число $k = 0$ или 1 , а t играет роль параметра, прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$.

В силу условий I – III точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (5).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удастся. Решение задачи будем искать в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (6)$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1, 2]). Основные проблемы доставляет построение угловой части асимптотики решения. Например, в окрестности точки $(0, 0)$ прямоугольника Ω угловая часть асимптотики ищется в виде ряда

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Для нахождения $P_0(\xi, \tau)$ получается нелинейная параболическая задача того же типа, что и (1)–(3). Для функций $P_k(\xi, \tau)$ с номерами $k \geq 1$ получаются линейные параболические задачи, в которых коэффициентом перед $P_k(\xi, \tau)$ является значение производной F'_u на полном нулевом приближении. Даже в случае разрешимости задачи для нулевого приближения доказательство того, что задача (1)–(3) имеет решение, все равно остается проблемой. Это связано с тем, что, не зная явного вида функции $P_0(\xi, \tau)$, мы не можем знать явного вида коэффициента F'_u , который может оказаться как положительным, так и отрицательным.

Необходимо разрешить следующие три основные проблемы.

1) Имеет ли нелинейная задача для $P_0(\xi, \tau)$ решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания?

2) Если задача для $P_0(\xi, \tau)$ имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания, то имеют ли линейные задачи для $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$ решения, удовлетворяющие подобным оценкам?

3) Если асимптотический ряд может быть построен, то имеет ли задача (1)–(3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$?

Разрешению обозначенных проблем посвящены работы [3–5].

Литература

1. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Высшая школа, 1990. — 208 с.

2. Бутузов, В.Ф. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа / В.Ф. Бутузов, А.В. Нестеров // Вестник Московского университета. Серия 15 : Вычислительная математика и кибернетика. — 1978. — № 2. — С. 49–56.

3. Денисов, И.В. Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике / И.В. Денисов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1996. — Т. 36, № 10. — С. 56–72.

4. Денисов, И.В. Оценка остаточного члена в асимптотике решения краевой задачи / И.В. Денисов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1996. — Т. 36, № 12. — С. 64–67.

5. Денисов, И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью / И.В. Денисов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 2017. — Т. 57, № 2. — С. 255–274.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.Б. Диденко (Воронеж)

dmixtry@gmail.com

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\text{End } \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — линейный оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$ и B_1 и B_2 — операторы из алгебры $\text{End } \mathcal{X}$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ — замкнутый оператор. Рассмотрим следующие условия: 1) $\text{Ker } \mathcal{B} = \{0\}$, т.е. оператор $\mathcal{B}$ инъективен; 2) $1 \leq n = \dim \text{Ker } \mathcal{B} < \infty$; 3) $\text{Ker } \mathcal{B}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathcal{Y}$; 4) $\text{Ker } \mathcal{B}$ — дополняемое подпространство в $\mathcal{Y}$; 5) $\overline{\text{Im } \mathcal{B}} = \text{Im } \mathcal{B}$; 6) $\overline{\text{Im } \mathcal{B}} \neq \text{Im } \mathcal{B}$; 7) $\text{Im } \mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ конечной коразмерности ($\text{codim } \text{Im } \mathcal{B} = m < \infty$); 8) $\text{Im } \mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ бесконечной коразмерности; 9) $\text{Im } \mathcal{B} = \mathcal{Z}$, т.е. $\mathcal{B}$ — сюръективный оператор; 10) $\overline{\text{Im } \mathcal{B}} \neq \mathcal{Z}$; 11) оператор $\mathcal{B}$ непрерывно обратим, т.е. $\mathcal{B}^{-1} \in \text{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$.

Если для оператора $\mathcal{B}$ выполнены все условия из совокупности непротиворечивых условий $S \subset \{1, 2, \dots, 11\}$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{B}$ находится в состоянии обратимости S . Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{B})$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = D(A^2)$.

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ определим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ с помощью матрицы $\begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{A} : D(A^2) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ и $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ совпадают, т.е.*

$$\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{A}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathbb{A}).$$

Литература

1. Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка / А.Г. Баскаков, Л.Ю. Кабанцова, И.Д. Коструб, Т.И. Смагина // Дифференц. уравнения — 2017. — Т. 59, № 1. — С. 1–10.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СМО С КОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА С НЕНУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Т.А. Жук, Н.И. Головки (Владивосток)

tatyana_zhukdv@mail.ru

В работе рассматривается система массового обслуживания типа $M/M/m/N_0$, с конечной емкостью накопителя $0 \leq N_0 < \infty$,

с m обслуживающими приборами. Время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . На вход системы поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ является диффузионным процессом с ненулевым коэффициентом сноса a , коэффициентом диффузии b и принимает значения из интервала $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

Стационарные характеристики числа заявок в системе $q_k(x) = P\{\nu = k, x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ν - число заявок в СМО, $0 \leq k \leq N = N_0 + m$ удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\frac{b}{2}q_0''(x) - aq_0'(x) - xq_0(x) + \mu q_1(x) = 0,$$

$$\frac{b}{2}q_k''(x) - aq_k'(x) + xq_{k-1}(x) - (x + \mu)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) = 0, \quad 0 < k < N,$$

$$\frac{b}{2}q_N''(x) - aq_N'(x) + xq_{N-1}(x) - \mu q_N(x) = 0,$$

$$\frac{b}{2}q_k'(\alpha) - aq_k'(\alpha) = \frac{b}{2}q_k'(\beta) - aq_k'(\beta) = 0, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Доказано существование единственного решения поставленной задачи. С целью наблюдения за установлением стационарного режима в СМО в зависимости от значений входных параметров, обобщения наблюдаемых свойств стационарных характеристик числа заявок в СМО, сравнения характеристик рассматриваемой СМО и классической СМО с усредненной интенсивностью входного потока проведен численный анализ построенного решения.

Литература

1. Головкин, Н.И. Применение моделей СМО в информационных сетях / Н.И. Головкин, В.В. Катрахов // Владивосток : Изд-во ТГЭУ, 2008. — 272 с.

ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж)
margz@rambler.ru

В данной работе мы рассматриваем начально-краевые задачи, описывающие колебательные процессы с нелинейными условиями. Получен аналог формулы Даламбера и изучен ряд задач граничного управления.

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ натянута струна. Рассмотрим задачу о колебаниях, в предположении, что правый конец струны движется вдоль вертикальной спицы (без учета трения) внутри втулки, представленной отрезком $[-h, h]$. Мы исследуем случай, когда втулка может двигаться в перпендикулярном к оси Ox направлении и ее движение задано выражением $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$.

Математическая модель такой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu(t), \\ u(l, t) \in C(t) \\ -u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)), \end{array} \right.$$

где множество $N_{C(t)}(u(l, t))$ представляет собой внешний конус нормалей к множеству $C(t)$ в точке $u(l, t)$.

Также мы рассматриваем аналогичную задачу на геометрическом графе

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ -\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x}(l, 0, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)) \\ u(l, t) = u_1(l, t) = u_2(l, t) = \dots u_n(l, t) \\ u(l, t) \in C(t) \\ u_i(0, t) = \mu_i(t). \end{array} \right.$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (№ 16-11-10125), выполняемого в Воронежском госуниверситете

© Зверева М.Б., Каменский М.И., 2017

Литература

1. Il'in, V.A. Optimization of Boundary Controls of String Vibrations / V.A. Il'in, E.I. Moiseev // Russian Mathematical Surveys. — 2005. — V. 60, № 6. — P. 1093–1119.
2. Kunze, M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process / M. Kunze, M. Monteiro Marques // LNP, Springer. — 2000. — V. 551. — P. 1–60.

ТЕМАТИКА КРЕЙНА В РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж)

spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Решается задача управления для динамической системы

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{B}\tilde{x}(t) + Du(t), \quad (1)$$

где $\tilde{x}(t) \in R^k$; $u(t) \in R^m$; $\tilde{B}$, D — матрицы соответствующих размеров; $t \in [t_0, t_k]$, с произвольно заданными значениями $\tilde{x}(t)$ в моменты времени t_i , ($t_0 < t_1 < \dots < t_k$), при заданных некоторых компонентах вектор-функции $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t_i) = \tilde{x}_i^0, \quad \forall \tilde{x}_i^0 \in R^k, \quad (2)$$

$$\tilde{x}_{n+i}(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k - n, \quad (3)$$

с достаточно гладкими скалярными функциями $\varphi_i(t)$, согласующимися с условиями (2).

Решение такой задачи актуально, например, при решении задачи управления движением летательного аппарата с условием полёта на заданной высоте и прохождением его в заданные моменты времени через нужные точки.

Подстановка значений (3) в систему (1) приводит к системе

$$A \frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + Du(t) + f(t), \quad (4)$$

с искомыми вектор-функциями $u(t)$ и $x(t)$, ($x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$), некоторыми матрицами A , B и вектор-функцией $f(t)$. Из (2) вытекают условия

$$x(t_i) = x_i^0, \quad x_i^0 \in R^n. \quad (5)$$

Особенность системы (4) в том, что матрица A — необратимая и, вдобавок, пучок $A - \lambda B$ может быть необратимым при всех $\lambda \in \dot{U}(0) \cap C$.

Исследованию операторных пучков и дифференциальным уравнениям, неразрешенным относительно производной, Селим Григорьевич уделял особое внимание, побуждал своих учеников (Г.И. Лалтев, Б.В. Квядарас, В. Осипов, В.П. Трофимов, С.П. Зубова, К.И. Чернышов и др.) исследовать операторные пучки и задачу Коши для уравнения $A \frac{dx(t)}{dt} = Bx(t)$ в банаховом пространстве с оператором A , имеющим число 0 нормальным собственным числом, или с фредгольмовым оператором в случаях регулярного и нерегулярного операторного пучка $A - \lambda B$. Под его руководством с 1973 г. по 1993 г. работал семинар, заседания которого проходили в здании ЛТИ, и на котором обсуждались все получаемые результаты по этой тематике. Навыки, полученные при решении уравнений в банаховом пространстве, дали возможность исследовать и задачи управления в конечномерном пространстве.

Именно использование свойств фредгольмовости операторов D , A и операторных пучков позволяют

определить свойства коэффициентов D , A , B , необходимые и достаточные для разрешимости поставленной выше задачи в случае нерегулярной пары (A, B) ;

найти искомые $u(t)$ и $x(t)$ в виде линейных комбинаций известных линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами.

Литература

1. Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1971. — 104 с.
2. Zubova, S.P. On full controllability criteria of a descriptor system. The polynomial solution of a control problem with checkpoints / S.P. Zubova // Automation and Remote Control. — 2011. — V. 72, № 1. — P. 23–37.

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

П.Н. Зюкин (Воронеж)

pzukin@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x^r y^{(r)} + x^{r-1} a_{r-1}(x) y^{(r-1)} + \dots + x a_1(x) y' + a_0(x) y = h(x), \quad (1)$$

где $x \in [0, 1]$, $h(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция со значениями в комплексном банаховом пространстве E , $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{r-1}(x)$ — непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции со значениями в пространстве L линейных ограниченных операторов, действующих из E в E .

Пусть $\overline{C}((0, 1]; E)$ — пространство функций, принадлежащих $C((0, 1]; E)$, каждую из которых можно продолжить на отрезок $[0, 1]$ до функции класса $C([0, 1]; E)$, n, p — натуральные числа, $n \geq p$. Введем функциональное пространство с «весом»

$$C_p^n([0, 1]; E) = \{z(x) \in C^{n-p}([0, 1]; E) : x^k z^{(n+k-p)}(x) \in \overline{C}((0, 1]; E), \\ k = 1, 2, \dots, p\}.$$

Для любого неотрицательного целого числа s по определению полагаем

$$C_0^s([0, 1]; E) = C^s([0, 1]; E).$$

Пусть I — тождественный оператор в E , O — нулевой оператор в E , $\overline{E} = \underbrace{E \oplus E \oplus \dots \oplus E}_r$ при $r > 1$,

$$B = \begin{pmatrix} a_{r-1}(0) + (1-r)I & a_{r-2}(0) & a_{r-3}(0) & \dots & a_1(0) & a_0(0) \\ -I & (2-r)I & O & \dots & O & O \\ O & -I & (3-r)I & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & -I & O \\ O & O & O & \dots & -I & O \end{pmatrix}$$

— линейный ограниченный оператор, действующий из $\overline{E}$ в $\overline{E}$ при $r > 1$, $B = a_0(0)$ при $r = 1$, $\sigma(B)$ — спектр оператора B ,

$$b_{r,i} = a_0(0) + \sum_{k=1}^{r-2} \left(\prod_{l=0}^{k-1} (i-l) \right) a_k(0) \quad \text{при } r > 2,$$

$$\begin{aligned}
b_{2,i} &= a_0(0), b_{1,i} = O, \\
q_{r,i,j} &= a_0^{(j)}(+0) + \sum_{k=1}^{r-1} \left(\prod_{l=0}^{k-1} (i-j-l) \right) a_k^{(j)}(+0) \quad \text{при } r > 1, \\
q_{1,i,j} &= a_0^{(j)}(+0), \\
d_r &= \prod_{l=0}^{r-2} (i-l) \quad \text{при } r > 1, \quad d_1 = 1,
\end{aligned}$$

где i, j — натуральные числа.

Теорема 1. Пусть m — наименьшее из натуральных чисел k таких, что $\sigma(B) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > -k\}$. Пусть в дифференциальном уравнении (1) функции $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{r-1}(x)$ принадлежат $C^n([0, 1]; L)$, $h(x) \in C^n([0, 1]; E)$, где n — натуральное число, $n \geq m$. Если система уравнений

$$\begin{cases} a_0(0)\psi_0 = h(0), \\ (d_r(a_{r-1}(0) + (i+1-r)I) + b_{r,i})\psi_i + \\ + \sum_{j=1}^i C_i^j q_{r,i,j} \psi_{i-j} = h^{(i)}(+0), \quad i = \\ = 1, 2, \dots, m-1 \text{ (при } m > 1) \end{cases} \quad (2)$$

разрешима относительно элементов $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ пространства E , то каждому решению $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ этой системы уравнений соответствует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C_{r-1}^{r+m-1}([0, 1]; E)$ и удовлетворяющее условиям

$$y^{(i)}(+0) = \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1;$$

это решение $y(x)$ принадлежит также $C_r^{r+n}([0, 1]; E)$. Если система уравнений (2) неразрешима относительно элементов $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ пространства E , то дифференциальное уравнение (1) не имеет решения, принадлежащего $C_{r-1}^{r+m-1}([0, 1]; E)$.

Теорема 2. Пусть в дифференциальном уравнении (1) функции $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{r-1}(x)$ принадлежат $C^n([0, 1]; L)$, $h(x) \in C^n([0, 1]; E)$, где n — неотрицательное целое число, и $\sigma(B) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Тогда существует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C_{r-1}^{r-1}([0, 1]; E)$, и это решение принадлежит также $C_r^{r+n}([0, 1]; E)$.

АБСТРАКТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Илолов (Душанбе, Таджикистан)

ilolov.mamadsho@gmail.com

В работе рассматриваются линейные и полудлинейные дробные параболические эволюционные уравнения в банаховом пространстве. В идейном плане полученные результаты близки к теории абстрактных параболических уравнений первого порядка изложенной в монографии С. Г. Крейна [1].

1. Рассмотрим следующую задачу Коши для линейных дробных эволюционных уравнений вида

$${}^{ck}D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(t), 0 < t \leq T, u(0) = u_0 \quad (1)$$

в комплексном банаховом пространстве X , где ${}^{ck}D_t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, регуляризованная дробная производная Капуто-Кочубея (см. напр. [2])

$${}^{ck}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(s)ds}{(t-s)^\alpha} - \frac{u(0)}{t^\alpha} \right], \quad (2)$$

A — секториальный оператор с углом $\omega_A < \frac{\pi}{2}$, такой, что

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \omega, \omega_A < \frac{\pi}{2}\} \quad (3)$$

и

$$\|(\alpha - A)^{-1}\| \leq \frac{M\omega}{|\lambda|}, \lambda \in \Sigma_\omega, \omega_A < \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

X -значная функция $f(t)$ принадлежит весовому банаховому пространству функций непрерывных по Гельдеру

$$\mathcal{F}^{\beta, \sigma}((0, T]; X)$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{F}^{\beta, \sigma}} = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{1-\beta} \|f\|_X + \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{s^{1-\beta+\sigma} \|f(t) - f(s)\|_X}{(t-s)^\sigma}. \quad (5)$$

Начальное значение x_0 берется в X .

Под решением задачи (1) понимается вектор-функция $u(t)$, обладающая следующими свойствами:

$u(t)$ — сильно непрерывная на $[0, T]$ и при $t > 0$ принимает значения из $D(A)$; дробный интеграл Бохнера

$$I_t^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(s) ds}{(t-s)^\alpha}$$

представляет собой сильно непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ вектор-функцию; наконец $u(t)$ удовлетворяет (1).

Для задачи (1) имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть производная Капуто-Кочубея определена посредством (2) и пусть A удовлетворяет условия (3), (4). Тогда для любой функции f с нормой (5) и начальное значение $u_0 \in X$ существует единственное решение и задачи (1) представимое в виде

$$u(t) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} E_\alpha(\lambda^\alpha t^\alpha) \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} u_0 d\lambda + \\ + \int_0^t \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} E_\alpha(\lambda^\alpha (t-s)^\alpha) \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda f(s) ds, 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

— функция Миттаг-Леффлера [3, 4].

2. В этом пункте рассмотрим задачу Коши для дробного полуперолинейного эволюционного уравнения

$${}^{ck}D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)), 0 < t \leq T, u(0) = u_0 \quad (7)$$

в X . Здесь ${}^{ck}D_t^\alpha, 0 < \alpha < 1$, производная (2), A секториальный оператор, удовлетворяющий условиям (3), (4). Относительно нелинейного оператора f предположим, что он действует из $\mathcal{D}(A^\eta)$ в X , $0 < \eta < 1$ и удовлетворяет условию Липшица вида

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \varphi(\|A_u^\beta\| + \|A_v^\beta\|) \|A^\eta(u - v)\| + \\ + (\|A^\eta u\| + \|A^\eta v\|) \|A^\beta(u - v)\|, u, v \in D(A^\eta), \quad (8)$$

где β — второй показатель, такой, что $0 < \beta < \eta < 1$, $\varphi(\cdot)$ — некоторая растущая непрерывная функция. Начальное значение $u_0 \in \mathcal{D}(A^\beta)$.

Под слабым решением задачи (7) понимается функция $u \in ((0, T]; X)$, удовлетворяющая уравнению

$$u(t) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} E_{\alpha}(\lambda^{\alpha} t^{\alpha}) \lambda^{\alpha-1} (\lambda^{\alpha} - A)^{-1} u_0 d\lambda + \\ + \int_0^t \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} E_{\alpha}(\lambda^{\alpha} (t-s)^{\alpha}) \lambda^{\alpha-1} (\lambda^{\alpha} - A)^{-1} f(u(s)) d\lambda ds. \quad (9)$$

Верно следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), (4) и (8). Тогда для каждого $x_0 \in \mathcal{D}(A^{\beta})$ существует $T_0 > 0$ такое, что задача (7) имеет единственное слабое в смысле (9) решение определенное на $(0, T_0)$.

3. Мотивация исследования задач (1) и (7) исходит из широкое их применение в различных областях физики, химии, биологии и др. Например как установлено в [4, 5], дробные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения описывают аномальную диффузию для различных объектах дробной размерности (аморфные полупроводники, сильно пористые неоднородные материалы, космические лучи сверхвысокой энергии) с учетом памяти и других эредитарных свойств. Можно привести другие примеры из теории вязкоупругости, реологии, популяционной динамики.

Литература

1. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 401 с.
2. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н. Кочубей // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 8. — С. 1359–1368.
3. Kostin, V.A. The Cauchy problem for an abstract differential equational derivatives / V.A. Kostin // Dokl. Akad. Nauk. — 1992. — V. 326, № 4. — P. 567–600.
4. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 702 с.
5. Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators / R.-N. Yang et. al. // J. Differential Equations. — 2012. — V. 252. — P. 202–235.
6. Equation of anomalous equations of cosmic ray / M. Ilov et. al. // PoS(ICRC2015), 510, The Hague, The Netherland. — P. 1–7.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ОПЕРАТОРНОГО КЛАССА Γ Е.И. Иохвидов (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы, действующие в пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где

$$H_{\pm} = P_{\pm}H, \quad P_{\pm}^2 = P_{\pm}^* = P_{\pm}, \quad P_+ + P_- = I,$$

а индефинитная метрика задана формулой

$$[x, y] = (Jx, y), \quad J = P_+ - P_-, \quad x, y \in H.$$

Через Γ обозначается класс линейных операторов A , удовлетворяющих условию:

$$\text{Ker}(P_+ + P_- A) = \{0\}.$$

Как известно [1], если $A \in \Gamma$, то имеет смысл операторное преобразование Потапова-Гигзбурга

$$B = \delta(A) = (P_- + P_+ A) \cdot (P_+ + P_- A)^{-1},$$

при этом автоматически выполняется условие $B \in \Gamma$, а также имеет место формула обращения

$$A = \delta(B).$$

Определение 1. Операторное подмножество $M \subset \Gamma$ будем называть инвариантным в классе Γ , если из условия $A \in M$ вытекает условие $\delta(A) \in M \quad \forall A \in M$.

Определение 2. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу Γ_{α}

($\alpha \geq 0$), если выполнено условие

$$\|P_+ Ax\|^2 - \alpha \cdot \|P_- Ax\|^2 \leq \alpha \cdot \|P_+ x\|^2 - \|P_- x\|^2 \quad \forall x \in D_A,$$

или же равносильное условие

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \{\|Ax\|^2 + \|x\|^2\} \quad \forall x \in D_A.$$

Отсюда, в частном случае $\alpha = 1$, получаем класс всех J -нерастягивающих операторов [1].

Отметим важное свойство операторов класса Γ_α : Если $A \in \Gamma_\alpha$, то $A \in \Gamma$, при этом оператор $B = \delta(\Gamma)$ является ограниченным [2].
Введем символ

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{\alpha \geq 0} \Gamma_\alpha.$$

Теорема 1. *Множество всех ограниченных операторов, принадлежащих классу Γ_∞ , является инвариантным подмножеством в классе Γ .*

Определение 3. Пусть α - неотрицательное число. Через M_a будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов A , которые удовлетворяют условиям:

- 1) $A \in \Gamma_\alpha$ для некоторого $\alpha \geq 0$.
- 2) $\alpha \cdot \|A\|^2 = a$.

Теорема 2. *Для всякого неотрицательного числа a множество M_a является инвариантным подмножеством в классе Γ .*

Таким образом, здесь мы имеем бесконечное семейство инвариантных подмножеств.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что величина a является инвариантом преобразования δ . Это означает, что если оператор A ограничен, $A \in \Gamma_\alpha$ для некоторого $\alpha \geq 0$, то оператор $B = \delta(A)$ также ограничен, $B \in \Gamma_\beta$ для некоторого $\beta \geq 0$ и справедлива формула

$$\beta \cdot \|B\|^2 = \alpha \cdot \|A\|^2.$$

Замечание 2. Некоторые другие инвариантные подмножества в классе Γ были анонсированы в [3].

Литература

1. Азизов, Т.Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. — М. : Наука, 1986. — 352 с.
2. Иохвидов, Е.И. О симметрии свойств линейного оператора и его сопряженного / Е.И. Иохвидов // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, вып. 5. — С. 195–196.
3. Иохвидов, Е.И. Описание некоторых инвариантных подмножеств в классе Γ / Е.И. Иохвидов // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016". — Воронеж : Научная книга, 2016. — С. 180–181.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПОМИНАЮЩИМ ОПЕРАТОРОМ

С.Э. Исаева (Баку, Азербайджан)

isayevasevda@rambler.ru

Пусть $\Omega \subset R^N$ ($N \geq 1$) ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений с запоминающим оператором

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [u + F_1(v)] - \Delta u = f_1, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [v + F_2(u)] - \Delta v = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \quad (2)$$

и с начальными условиями

$$[u + F_1(v)]|_{t=0} = u^{(0)} + w_1^{(0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u^{(1)}, \quad (3)$$

$$[v + F_2(u)]|_{t=0} = v^{(0)} + w_2^{(0)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = v^{(1)}, \quad (4)$$

где нелинейные операторы F_1, F_2 действуют из пространства $M(\Omega; C^0([0, T]))$ в $M(\Omega; C^0([0, T]))$. Здесь $M(\Omega; C^0([0, T]))$ есть пространство измеримых функций, действующих из Ω в $C^0([0, T])$. Предполагается, что операторы F_i ($i = 1, 2$) являются запоминающими операторами, которые действуют в каждой точке $x \in \Omega$ независимо, то есть $[F_i(u(x, \cdot))](t)$ зависит от $u(x, \cdot)|_{[0, t]}$ и не зависит от $u(y, \cdot)|_{[0, t]}$ для $y \neq x$.

Пусть операторы F_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если для любых } v_1, v_2 \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } t \in [0, T] \\ v_1 = v_2 \text{ на } [0, t], \text{ то } [F_i(v_1)](\cdot, t) = [F_i(v_2)](\cdot, t) \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \text{если } v_n \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и } v_n \rightarrow v \text{ равномерно} \\ \text{то } F_i(v_n) \rightarrow F_i(v) \text{ равномерно на } [0, T] \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists L > 0, g \in L^2(\Omega), \forall v \in M(\Omega; C^0([0, T])) \\ \|[F_i(v)](x, \cdot)\|_{C^0([0, T])} \leq L \|v(x, \cdot)\|_{C^0([0, T])} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } v \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } [t_1, t_2] \subset [0, T] \\ v(x, \cdot) \text{ является аффинной в } [t_1, t_2], \text{ п.в. в } \Omega, \text{ то} \\ \{[F_i(v)](x, t_2) - [F_i(v)](x, t_1)\} [v(x, t_2) - v(x, t_1)] \geq 0, \text{ п.в. в } \Omega; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists 0 < L_1 < 1/2, \text{ что } \forall v \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для} \\ \forall [t_1, t_2] \subset [0, T], \text{ если } v(x, \cdot) \text{ является аффинной} \\ \text{в } [t_1, t_2] \text{ п.в. в } \Omega, \\ \text{то } |[F_i(v)](x, t_2) - [F_i(v)](x, t_1)| \leq L_1 |v(x, t_2) - v(x, t_1)| \\ \text{п.в. в } \Omega. \end{array} \right. \quad (9)$$

Предполагается, что

$$u^{(0)} \in H_0^1(\Omega), \quad w_1^{(0)} \in L^2(\Omega), \quad u^{(1)} \in L^2(\Omega), \quad f_1 \in L^2(Q), \quad (10)$$

$$v^{(0)} \in H_0^1(\Omega), \quad w_2^{(0)} \in L^2(\Omega), \quad v^{(1)} \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^2(Q). \quad (11)$$

Определение. Пара функций (u, v) такая, что при $u, v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ удовлетворяются включения $F_1(v) \in L^2(Q)$, $F_2(u) \in L^2(Q)$ и которая удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [u + F_1(v)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_1 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} \left[u^{(0)}(x) + w_1^{(0)}(x) + u^{(1)}(x) \right] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [v + F_1(u)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla v \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_2 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} \left[v^{(0)}(x) + w_2^{(0)}(x) + v^{(1)}(x) \right] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned}$$

для любого $\bar{v} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ($\bar{v}(\cdot, T) = 0$ п.в. в Ω), называется решением задачи (1)-(4).

Разрешимость аналогичной задачи, для случая одного параболического уравнения исследовано в [1]. В работах [2,3] исследованы задачи с запоминающим оператором с применением результатов теории нелинейных полугрупп. В данной работе доказаны теоремы о существовании и единственности решений задачи (1)-(4) (теоремы 1,2).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5)-(11). Тогда задача (1)-(4) имеет по крайней мере одно решение (u, v) , для которого имеет место

$$u, v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$F_1(v), F_2(u) \in H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, и условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для любого } r > 0 \text{ существует такое } L_{2i}(r) > 0, \text{ что} \\ \text{для } \forall t \in (0, T] \text{ и } \forall u, v \in \left\{ \tilde{u} \in L^2(Q_t) : \|\tilde{u}\|_{L^2(Q_t)} \leq r \right\} \\ \left\| F_i(u) - F_i(v) \right\|_{L^2(\Omega; C^0([0, t]))} \leq L_{2i}(r) \|u - v\|_{L^2(\Omega; L^2([0, t]))} \end{array} \right. \quad \text{п.в. в } \Omega$$

для $i = 1, 2$. Тогда решение задачи (1)-(4) единственно.

Литература

1. Visintin, A. Differential Models of Hysteresis / A. Visintin. — Springer, 1993.
2. Visintin, A. Hysteresis and semigroups, in “Models of Hysteresis” / A. Visintin // A. Visintin, ed. Longman, Harlow, 1993, P. 192–206.
3. Hilpert, M. On uniqueness for evolution problems with hysteresis / M. Hilpert // In: Mathematical Models for Phase Change Problems (J.F.Rodrigues, ed.), Birkhauser, Basel, 1989. — P. 377–388.

МНОГОТЕМПОВЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ (ОБЗОР)

М.А. Калашникова (Воронеж)

margarita.kalashnikova@mail.ru

Большинство реальных математических моделей в различных областях науки включает в свое описание быстрые и медленные переменные. Широкий спектр применения моделей такого типа послужил толчком к изучению многотемповых сингулярно возмущенных задач, содержащих несколько малых параметров при старших производных. Один из распространенных подходов решения таких задач связан с построением асимптотического решения, включающего пограничные функции. Впервые он был реализован для многотемповой задачи Коши в работе Васильевой А.Б. [1]. Появление

многотемповых сингулярных возмущений обусловлено не только спецификой совершаемых движений, но и применяемыми методами исследования для одготемповых систем, например, в задачах с "дешевым" управлением. Минимизируемый функционал можно при этом рассматривать как линейную комбинацию критериев качества с учетом степени важности критериев в многокритериальной задаче. Задачи такого типа возникают при исследовании моделей многосекторной экономики, когда управляющие функции имеют разный уровень "дешевизны". Некоторый обзор работ по многотемповым сингулярно возмущенным задачам приведен в [2], [3].

Литература

1. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных / А.Б. Васильева // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1963. — Т. 3, № 9. — С. 611–642.

2. Калашникова, М.А. Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены / М.А. Калашникова, Г.А. Курина // Тр. Инст. матем. и мех. УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 124–139.

3. Калашникова, М.А. Асимптотика решения трехтемповой задачи оптимального управления / М.А. Калашникова, Г.А. Курина // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ — 2014. — Москва. 16-19 июня. — 2014. — С. 1560–1570.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович (Минск)

kalininai@bsu.by, lavrinovichl@mail.ru

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно непрерывными компонентами рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(t, x) + B(t)u, x(t_*) = x_*, \quad (1)$$

$$Hx(t^*) = g, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (x' M(t)x + u' P(t)u) dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где μ — малый (по модулю) параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), x — n -вектор, g — m -вектор ($m \leq n$), $M(t)$ — неотрицательно-определенная, а $P(t)$ — положительно-определенная симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$) в задаче (1), (2), если оно отклоняется по критерию качества от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $x(t, \mu)$ удовлетворяет терминальным ограничениям с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) , ($t_* < t^*$), имеет место $u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1), (2).

Доклад посвящен построению асимптотически субоптимальных программных управлений и обратных связей в рассмотренной задаче.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.С. Калитвин (Липецк)

kalitvinas@mail.ru

К линейным уравнениям с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и другие проблемы [1,2]. Основы теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами представлены в книгах [1-4]. Однако многие вопросы теории таких операторов и уравнений требуют дальнейших исследований. В данной заметке изучается один класс линейных операторов с частными интегралами.

Пусть $t, s, \tau, \sigma \in [0, 1]$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$, функции $l(t, s, \tau)$, $m(t, s, \sigma)$, $n(t, s, \tau, \sigma)$ непрерывны по совокупности переменных, функции $p(u, s)$ и $q(t, v)$ чётны по $u, v \in [-1, 1]$, а функция $r(u, v)$ на $[-1, 1] \times [-1, 1]$ удовлетворяет условию $r(-u, -v) = r(u, v)$.

Пусть K, L, M, N — операторы, определяемые равенствами

$$K = L + M + N, (Lx)(t, s) = \int_0^1 l(t, s, \tau)p(t - \tau, s)x(\tau, s)d\tau,$$

$$(Mx)(t, s) = \int_0^1 m(t, s, \sigma)q(t, s - \sigma)x(t, \sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t, s) = \int_0^1 \int_0^1 n(t, s, \tau, \sigma)r(t - \tau, s - \sigma)x(\tau, s)d\tau d\sigma.$$

Будем предполагать, что

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} \int_{-1}^1 |p(s, u)|du \leq P < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{-1}^1 |q(t, v)|dv \leq Q < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq s, t \leq 1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |r(u, v)|dudv \leq R < \infty \text{ и для любого } \varepsilon > 0 \text{ суще-}$$

ствует $\delta > 0$, такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta, |s_1 - s_2| < \delta$

$$\int_0^1 |l(t_1, s_1, \tau)p(t_1 - \tau, s) - l(t_2, s_2, \tau)p(t_2 - \tau, s)|d\tau < \varepsilon,$$

$$\int_0^1 |m(t_1, s_1, \sigma)q(t_1, s_1 - \sigma) - l(t_2, s_2, \sigma)q(t_2, s_2 - \sigma)|d\sigma < \varepsilon,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |n(t_1, s_1, \tau, \sigma)r(t_1 - \tau, s_1 - \sigma) - n(t_2, s_2, \tau, \sigma)r(t_2 - \tau, s_2 - \sigma)|d\tau d\sigma < \varepsilon.$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях относительно l, m, n, p, q, r операторы L, M, N и K действуют в пространствах $C(D)$ и $L^1(D)$ и непрерывны.*

В дальнейшем под фредгольмовым оператором понимается ограниченный линейный оператор с замнутым множеством значений и индексом, равным нулю [5].

В условии теоремы 1 операторы $I - L, I - M$ и $I - K$ не являются фредгольмовыми. Условия фредгольмовости этих операторов в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций содержит [3]

Теорема 2. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда в $C(D)$ оператор $I - N$ фредгольмов, фредгольмовость операторов $I - L$ и $I - M$ равносильна их обратимости, а фредгольмовость оператора $I - K$ равносильна обратимости операторов $I - L$ и $I - M$.*

Частными случаями оператора K являются линейные операторы свёртки с частными интегралами.

Пусть функции $a(u), b(v)$ и $c(u, v)$ суммируемы на $[-1, 1]$ и $[-1, 1] \times [-1, 1]$ соответственно. В этом случае интегральные операторы $(Ax)(t) = \int_0^1 l(t - \tau)x(\tau)d\tau, (Bx)(t) = \int_0^1 m(s - \sigma)x(\sigma)d\sigma$ и $(Cx)(t, s) = \int_0^1 \int_0^1 c(t - \tau, s - \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma$ компактны в $C([0, 1]), L^1([0, 1])$ и $C(D), L^1(D)$, а операторы L и M допускают представление в виде тензорных произведений $A \otimes I$ и $I \otimes B$. В силу [1, 2] $\sigma_{es}(L + M) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$, где через $\sigma_{es}(F)$ обозначен существенный спектр Шехтера [1, 2] действующего в банаховом пространстве ограниченного линейного оператора F ($\sigma_{es}(F)$ — дополнение до области фредгольмовости оператора F), а через $\sigma(F)$ — его спектр. Отсюда и устойчивости фредгольмовости относительно компактных возмущений вытекает равенство $\sigma_{es}(K) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$, т.е. оператор $I - K$ фредгольмов в $C(D)$ и в $L^1(D)$ при $1 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$.

Поэтому фредгольмовость этого оператора в $C(D)$ и в $L^1(D)$ означает обратимость в $C([0, 1])$ и в $L^1([0, 1])$ операторов $I - A$ и $I - B$.

Литература

1. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
3. Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.
4. Калитвин, А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.
5. Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1971. — 104 с.

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В $C^{(1),n}(D)$

А.С. Калитвин, Н.И. Трусова (Липецк)

kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

При исследовании разрешимости систем интегральных уравнений Гаммерштейна с частными интегралами полезны условия дифференцируемости матричных операторов Гаммерштейна с частными интегралами и формулы для вычисления их производных. В данной заметке рассматривается дифференцируемость по Фреше матричных операторов Гаммерштейна с частными интегралами в пространстве $C^{(1),n}(D)$ непрерывно дифференцируемых на D вектор - функций $x(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$, где $x_j \in C^{(1)}(D)$ ($j = 1, \dots, n$), а через $C^{(1)}(D)$ обозначено пространство непрерывно дифференцируемых на D функций.

Отметим, что дифференцируемость по Фреше операторов Гаммерштейна с частными интегралами в различных классах функциональных пространств изучалась в [1, 2]. Асимптотическая дифференцируемость и (u, v) — дифференцируемость операторов Гаммерштейна с частными интегралами в квазибанаховых идеальных пространствах изучались в [1].

Напомним, что оператор $F(x)$ называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in X$, если существует действующий в банаховом пространстве X ограниченный линейный оператор $F'(x)$ такой, что

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|}{\|h\|} = 0,$$

а $F'(x)$ называют производной Фреше оператора $F(x)$ в точке x .

Рассмотрим матричный оператор $B = (B_{ij})_{i,j=1}^n$, в котором

$$(B_{ij}x_j)(t, s) = c_{ij}(t, s)f_j(t, s, x_j(t, s)) + \int_T l_{ij}(t, s, \tau)f_j(\tau, s, x_j(\tau, s))d\tau +$$

$$+ \int_S m_{ij}(t, s, \sigma)f_j(t, \sigma, x_j(t, \sigma))d\sigma + \iint_D n_{ij}(t, s, \tau, \sigma)f_j(\tau, \sigma, x_j(\tau, \sigma))d\tau d\sigma,$$

$T = [a, b]$, $S = [c, d]$, $t, \tau \in T$, $s, \sigma \in S$, $D = T \times S$, $u \in (-\infty; +\infty)$, а c_{ij}, l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) — вещественные функции.

Нелинейный оператор B_{ij} есть композиция оператора суперпозиции f_j и линейного оператора

$$(A_{ij}x_j)(t, s) = c_{ij}(t, s)x_j(t, s) + \int_T l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau +$$

$$+ \int_S m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(t, \sigma)d\sigma + \iint_D n_{ij}(t, s, \tau, \sigma)x_j(\tau, \sigma)d\tau d\sigma.$$

Поэтому действие и непрерывность оператора B_{ij} в $C^{(1)}(D)$ вытекают из непрерывной дифференцируемости функции f_j на $D \times (-\infty, \infty)$ [3] и ограниченности в $C^{(1)}(D)$ оператора A_{ij} , а дифференцируемость по Фреше оператора $B_{ij}(x_j)$ в точке $x_j \in C^{(1)}(D)$ следует из дифференцируемости по Фреше в $C^{(1)}(D)$ оператора суперпозиции f_j и условий ограниченности в $C^{(1)}(D)$ оператора A_{ij} .

Теорема. Пусть функции $c_{ij}, l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) и их частные производные первого порядка непрерывны на $D \times [a, b]$, $D \times [c, d]$, $D \times D$ соответственно, функция $f_j(t, s, u)$ ($j = 1, \dots, n$) имеет непрерывные частные производные первого порядка и смешанные производные второго и третьего порядков по t, s, u на $D \times (-\infty, \infty)$. Тогда оператор $B(x)$ дифференцируем по Фреше в любой точке $x \in C^{(1),n}(D)$ и $B'(x) = (B'_{ij}(x_j))$, где

$$(B'_{ij}(x_j)h_j)(t, s) = \int_T l_{ij}(t, s, \tau)f'_{ju}(\tau, s, x_j(\tau, s))h_j(\tau, s)d\tau +$$

$$+ \int_S m_{ij}(t, s, \sigma) f'_{ju}(t, \sigma, x_j(t, \sigma)) h_j(t, \sigma) d\sigma + \\ + \iint_D n_{ij}(t, s, \tau, \sigma) f'_{ju}(\tau, \sigma, x_j(\tau, \sigma)) h_j(\tau, \sigma) d\tau d\sigma.$$

В [2] показано, что оператор B может быть дифференцируемым в $C^{(1),n}(D)$, если операторы f_j и A_{ij} не действуют в $C^{(1)}(D)$.

Литература

1. Калитвин, А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2014. — 208 с.
2. Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2013. — 177 с.
3. Appell J. Nonlinear superposition operators / J. Appell, P.P. Zabrejko. — Cambridge : Cambridge University Press, 1990. — 311 p.

О ЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.А. Калитвин (Липецк)

kalitvinas@mail.ru

Основы теории линейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина (ИДУБ) с частной производной первого порядка представлены в [1]. В данной заметке изучается линейное ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t, s)}{\partial t^2} = l(t, s) \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} + c(t, s) x(t, s) + \int_c^d n(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma + f(t, s) \quad (1)$$

с начальными условиями $x(a, s) = \varphi(s)$, $x'_t(a, s) = \psi(s)$.

Предполагается, что $t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, функции $l, l'_t, c, f, n, \varphi, \psi$ непрерывны, а решением задачи считается непрерывная на $D = [a, b] \times [c, d]$ вместе с $x''_{tt}(t, s)$ функция $x(t, s)$, удовлетворяющая ИДУБ и начальным условиям.

Данная задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t, s) = \int_a^t \left[l(\tau, s) + (t - \tau) \left(c(\tau, s) - \frac{\partial l(\tau, s)}{\partial \tau} \right) \right] x(\tau, s) d\tau +$$

$$+ \int_a^t \int_c^d (t - \tau) n(\tau, s, \sigma) d\tau d\sigma + p(t, s), \quad (2)$$

где

$$p(t, s) = \varphi(s) + \int_a^t h(\tau, s) d\tau, \quad h(t, s) = \psi(s) + \int_a^t f(\tau, s) d\tau - l(a, s)\varphi(s),$$

если под решением интегрального уравнения (2) понимается непрерывная вместе с $x'_t(t, s)$ функция $x(t, s)$.

Теорема 1. *Если функции $l, l'_t, n, \varphi, \psi$ непрерывны, то интегральное уравнение (2) имеет на D единственное непрерывное вместе с $x'_t(t, s)$ решение*

$$x(t, s) = \int_a^b r_1(t, s, \tau) p(\tau, s) d\tau + \int_a^t \int_c^d r_2(t, s, \tau, \sigma) p(\tau, \sigma) d\tau d\sigma + p(t, s),$$

где $r_1(t, s, \tau)$ и $r_2(t, s, \tau, \sigma)$ — непрерывные резольвентные ядра.

Отметим, что в силу [2,3] резольвентные ядра записываются в виде

$$r_1(t, s, \tau) = \sum_{p=1}^{\infty} l^{(p)}(t, s, \tau), \quad r_2(t, s, \tau, \sigma) = \sum_{p=1}^{\infty} n^{(p)}(t, s, \tau, \sigma),$$

где

$$\begin{aligned} l^{(1)}(t, s, \tau) &= l(\tau, s) + \left((t - \tau) (c(\tau, s) - \frac{\partial l(\tau, s)}{\partial \tau}) \right), \\ l^{(p)}(t, s, \tau) &= \int_{\tau}^t l^{(1)}(t, s, u) l^{(p-1)}(u, s, \tau) du, \\ n^{(1)}(t, s, \tau, \sigma) &= (t - \tau) n(\tau, s, \sigma), \quad n^{(p)}(t, s, \tau, \sigma) = \\ &= \int_{\tau}^t l^{(1)}(t, s, u) n^{(p)}(u, s, \tau, \sigma) du + \int_{\tau}^t n^{(1)}(t, s, u, \sigma) l^{(p-1)}(u, \sigma, \tau) du + \\ &+ \int_{\tau}^t \int_c^d n^{(1)}(t, s, u, v) n^{(p)}(u, v, \tau, \sigma) dudv. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 и эквивалентности в описанном выше смысле задачи Коши для ИДУБ (1) интегральному уравнению (2) вытекает

Теорема 2. *Если функции $l, l'_t, n, \varphi, \psi$ непрерывны, то задача Коши для ИДУБ (1) имеет единственное решение.*

В заключение отметим, что в силу эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению (2) численное решение задачи Коши заменяется численным решением уравнения (2), причём может быть использован метод механических квадратур.

Литература

1. Appell, J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.
2. Калитвин, А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
3. Калитвин, А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2006. — 177 с.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА, ГЕНЕРИРОВАННЫХ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ ШИРОКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

В.В. Калманович (Калуга)

v572264@yandex.ru

Диффузия неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в однородной полупроводниковой мишени, может быть количественно описана дифференциальным уравнением

$$D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho(z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$D \left. \frac{d \Delta p(z)}{dz} \right|_{z=0} = v_s \Delta p(0), \quad \Delta p(\infty) = 0. \quad (2)$$

Здесь D , τ и v_s — заданные электрофизические параметры полупроводниковой мишени, а $\rho(z)$ — плотность ННЗ, генерированных в полупроводнике. Значения $\rho(z)$ могут быть определены из соотношения для плотности энергии $\rho(z)^*$, выделяемой в мишени в единицу времени, делением $\rho(z)^*$ на энергию образования электронно-дырочной пары [1]. Для широкого электронного пучка справедлива

полуэмпирическая формула [2]

$$\rho^*(z) = \frac{1,085(1-\eta)P_0}{\sqrt{\pi}\left(1-\eta+\eta\frac{z_{ss}}{z_{ms}}\right)} \left(e^{-\left(\frac{z-z_{ms}}{z_{ms}}\right)^2} + \frac{\eta}{\eta+1} e^{-\left(\frac{z-z_{ss}}{z_{ss}}\right)^2} \right), \quad (3)$$

где η , z_{ms} , z_{ss} , P_0 — заданные физические величины.

Ранее [2] методом функций Грина было получено аналитическое решение уравнения (1)–(2), однако для него отмечалась вычислительная неустойчивость при $x \rightarrow \infty$ [3].

В связи с этим предлагается другой способ построения аналитического решения задачи (1)–(2).

Рассмотрим вспомогательную задачу с заданными постоянными m , C и v

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - m^2 f = C e^{-x^2}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_1} + v f(x_1) = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (6)$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$e^{mx} \frac{d}{dx} \left(e^{-2mx} \frac{d}{dx} (e^{mx} f) \right) = C e^{-x^2}$$

и проведем последовательное интегрирование с помощью методов замены переменной и интегрирования по частям. Получим общее решение уравнения (4), где C_1 и C_2 — произвольные постоянные:

$$f(x) = \frac{C\sqrt{\pi}}{4m} e^{\frac{m^2}{4}} \left[e^{mx} \left(\operatorname{erf} \left(x + \frac{m}{2} \right) + C_1 \right) - e^{-mx} \left(\operatorname{erf} \left(x - \frac{m}{2} \right) + C_2 \right) \right]. \quad (7)$$

В силу ограниченности функции ошибок второе слагаемое в (7) на бесконечности стремится к нулю. С помощью правила Лопиталя можно показать, что при $C_1 = -1$ и первое слагаемое на бесконечности стремится к нулю, а значит, граничное условие (6) выполнено.

Определим C_2 из условия (5), подставив в него решение (7):

$$C_2 = \frac{e^{2mx_1}(m+v) \left(\operatorname{erf} \left(x_1 + \frac{m}{2} \right) - 1 \right)}{v-m} - \operatorname{erf} \left(x_1 - \frac{m}{2} \right).$$

Таким образом, аналитическое решение задачи (4)–(6) найдено.

Вернемся к задаче (1)–(2). Раскрыв скобки, запишем правую часть уравнения (1) в виде $-\rho(z) = K_1 e^{-\left(\frac{z}{z_{ms}} - 1\right)^2} + K_2 e^{-\left(\frac{z}{z_{ss}} - 1\right)^2}$ и найдем решение задачи (1), (2) как сумму решений уравнений $D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = K_1 e^{-\left(\frac{z}{z_{ms}} - 1\right)^2}$ и $D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = K_2 e^{-\left(\frac{z}{z_{ss}} - 1\right)^2}$ при граничных условиях (2) в каждом случае. Используя результат (7), получим аналитическое решение задачи (1)–(2), которое имеет иную форму записи, чем аналитическое решение, полученное ранее методом функций Грина, обладающее вычислительной неустойчивостью на бесконечности. Наше решение, полученное непосредственным интегрированием уравнения (1)

$$\begin{aligned} \Delta p(z) = & \frac{z_{ms} K_1 \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\frac{\tau}{D}} e^{\frac{z_{ms}^2}{4L^2}} \left[e^{\frac{z - z_{ms}}{L}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ms}} - 1 + \frac{z_{ms}}{2L} \right) - 1 \right) - \right. \\ & \left. - e^{-\frac{z - z_{ms}}{L}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ms}} - 1 - \frac{z_{ms}}{2L} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-\frac{2z_{ms}}{L}} \left(v_s - \frac{z_{ms}}{L} \right) \left(\operatorname{erf} \left(-1 + \frac{z_{ms}}{2L} \right) - 1 \right)}{v_s + \frac{z_{ms}}{L}} + \operatorname{erf} \left(1 + \frac{z_{ms}}{L} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{z_{ss} K_2 \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\frac{\tau}{D}} e^{\frac{z_{ss}^2}{4L^2}} \left[e^{\frac{z - z_{ss}}{L}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ss}} - 1 + \frac{z_{ss}}{2L} \right) - 1 \right) - \right. \\ & \left. - e^{-\frac{z - z_{ss}}{L}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{z_{ss}} - 1 - \frac{z_{ss}}{2L} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-\frac{2z_{ss}}{L}} \left(v_s - \frac{z_{ss}}{L} \right) \left(\operatorname{erf} \left(-1 + \frac{z_{ss}}{2L} \right) - 1 \right)}{v_s + \frac{z_{ss}}{L}} + \operatorname{erf} \left(1 + \frac{z_{ss}}{L} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

где $L = \sqrt{D\tau}$ будет устойчивым вследствие доказанного выполнения условия (6) при любых значениях коэффициентов.

Литература

1. Mikheev, N.N. Distribution of energy losses in interaction of an electron probe with material / N.N. Mikheev, M.A. Stepovich // Industrial Laboratory. — 1996. — V. 62, № 4. — P. 221–226.
2. Белов, А.А. Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком / А.А. Белов, В.И. Петров, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1317–1322.

3. О некоторых проблемах моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале / Е.В. Серегина, М.А. Степович, А.М. Макаренков, М.Н. Филипов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2016. — № 4. — С. 88–93.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ РАСХОДА ЖИДКОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Т.В. Клодина, Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону)

simon@sfedu.ru

Рассмотрим решение плоской или осесимметричной задачи стационарной фильтрации

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0, \bar{V} = -\kappa \operatorname{grad} h, \quad (1)$$

($\bar{V} = (V_x, V_y)$ — скорость фильтрации, $h(x, y)$ — напорная функция, κ — коэффициент фильтрации).

Если область фильтрации имеет сложную конфигурацию, определение фильтрационных характеристик вызывает существенные трудности. Метод мажорантных областей дает возможность найти приближенное и, в то же время, достаточно точное решение для самых сложных задач плоской установившейся фильтрации [1].

Авторами предлагается новая теорема об изменении расхода при решении задачи, когда варьируется область фильтрации, ограниченная тремя потенциальными линиями и одной линией тока. Краевые условия имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -\kappa H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -\kappa H_0, \varphi|_{BC} = 0, \quad (2)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциальная функция, $\varphi(x, y)$ — линия тока, H и H_0 — величины напоров на границе области фильтрации, когда $H > H_0$.

Теорема. При вдавливании линии тока расход жидкости через всякую связную область потенциальной линии, имеющей общий конец с линией тока, уменьшается при одновременном уменьшении линии тока и увеличении линии наибольшего напора.

Литература

1. Положий, Г.Н. Теория и применение p -аналитических и (p, g) -аналитических функций / Г.Н. Положий. — Киев : Наукова думка, 1973. — 423 с.

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА, СОПРЯЖЕННОГО К ОДНОМУ КЛАССУ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

Р.А. Ковалевский (Воронеж)

alexandrbaev@mail.ru

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Свойства этого преобразования доказаны в [1], [2], [3]. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R_+^1)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В [1] показано, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, \dots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор с символом, зависящим от комплексного параметра p . Этот

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

© Ковалевский Р.А., 2017

оператор определен формулой $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha, t}) v(x, t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_{\alpha}^{-1} [\lambda(p, t, \xi, \eta) F_{\alpha} F_{x \rightarrow \xi} [v(x, t)]]$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leq c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha, p}^{\sigma}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$ открытое множество, $p \in Q$, где Q - некоторый сектор в правой полуплоскости комплексной плоскости, σ - действительное число, если функция $\lambda(p, t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(p, t, \xi, \eta) \right| \leq c_{m, l} \left(|p| + |\xi|^2 + |\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}(\sigma - l)}$$

с константами $c_{m, l} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $p \in Q$, $t \in \Omega$.

Определение 5. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$ назовем оператор $K^*(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$, удовлетворяющий равенству

$$\begin{aligned} & (K(p, t, D_x, D_{\alpha, t})u(x, t), v(x, t))_{L_2(R_+^n)} = \\ & = (u(x, t), K^*(p, t, D_x, D_{\alpha, t})v(x, t))_{L_2(R_+^n)} \end{aligned}$$

для всех $v(x, t) \in L_2(R_+^n)$, $u(x, t) \in L_2(R_+^n)$ таких, что $P(\lambda, t, D_x, D_{\alpha, t})u(x, t) \in L_2(R_+^n)$.

Здесь $(\cdot, \cdot)_{L_2(R_+^n)}$ - скалярное произведение в $L_2(R_+^n)$.

Теорема 1. Пусть $\lambda(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, p}^m(\Omega)$, $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $m \in R^1$. Тогда оператор $K^*(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$ с символом $\lambda(p, t, \xi, \eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $\lambda^*(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, p}^m(\Omega)$. Причём справедливо соотношение

$$\lambda^*(p, t, \xi, \eta) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!} (\alpha(y) \partial_y)^j \partial_{\eta}^j \bar{\lambda}(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, p}^{m-N}(\Omega)$$

для любых $N = 1, 2, \dots$

Некоторые свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S_{\alpha,p}^m(\Omega)$ содержатся в [4] - [8].

Литература

1. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.
2. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.
3. Баев А.Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 7–10.
4. Баев А. Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.
5. Баев А.Д. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 461, № 1. — С. 1–3.
6. Баев А.Д. Об одном классе весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 16–20.
7. Баев А.Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.
8. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

ЭНТРОПИЙНЫЕ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Л.М. Кожевникова (Стерлитамак)

kosul@mail.ru

Для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1 -правой частью в работе [1] было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} - |u|^{p_0(x)-2}u - b(x, u, \nabla u) = f(x), \quad u(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1)$$

с функцией $f(x) \in L_1(\Omega)$ в произвольных областях $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s_1, \dots, s_n)$, $b(x, s_0, s_1, \dots, s_n)$ имеют степенной рост по s_i с показателями $p_i(x) \in (1, \infty)$, $i = 1, \dots, n$. По переменной s_0 рост этих функций может быть произвольным. Автором доказано существование энтропийных решений задачи (1) в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями. Установлено, что построенное энтропийное решение является ренормализованным решением задачи (1). Кроме того, показано, что если $f \leq 0$ п.в. в Ω , то $u \geq 0$ п.в. в Ω .

Существование энтропийных решений задачи (1) в ограниченных областях при фиксированном росте функций $a_i(x, s_0, s)$, $i = 1, \dots, n$, по переменной s_0 установлено в работе [2].

Литература

1. An L_1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations / Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Galluet et. al. // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. — 1995. — V. 22, № 2. — P. 241–273.

2. Entropy and renormalized solutions for nonlinear elliptic problem involving variable exponent and measure data / M.B. Benboubker, H.Chrayteh, M.El. Moumni, H. Hjaaj // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2015. — V. 31, № 1. — P. 151–169.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

М.М. Кокурин (Йошкар-Ола)

kokurin@nextmail.ru

Изучаются некорректные задачи Коши первого и второго порядка

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = f \in D(A). \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый неограниченный секториальный оператор с углом секториальности φ_0 в банаховом пространстве X , $\overline{D(A)} = X$. Известно, что задачи (1), (2) не могут иметь более одного классического решения.

Для аппроксимации решения задачи (1) строится класс одношаговых разностных схем с порядком аппроксимации $m = 1$

$$\begin{aligned} -x_n + x_{n+1} &= \Delta t A((1 + \beta)x_n - \beta x_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ x_0 &= f \quad (\beta > 0) \end{aligned} \quad (3)$$

и класс двушаговых разностных схем с $m = 2$

$$\begin{aligned} (-2\gamma_1 + 3)x_n + (2\gamma_1 - 4)x_{n+1} + x_{n+2} &= \Delta t A((\gamma_2 - 2)x_n + \\ &+ (3\gamma_1 - 2\gamma_2)x_{n+1} + (\gamma_2 - \gamma_1)x_{n+2}), \quad 0 \leq n \leq N-2, \\ x_0 &= f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1}f \quad (\gamma_1 \in (1, 2), \gamma_2 < \gamma_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Для аппроксимации решения задачи (2) предлагается класс двушаговых разностных схем, имеющих порядок аппроксимации $m = 2$:

$$\begin{aligned} x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} &= (\Delta t)^2 A(-\beta x_n + (1 + 2\beta)x_{n+1} - \beta x_{n+2}), \\ 0 \leq n \leq N-2, \quad x_0 &= f, \quad x_1 = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}(E + (\Delta t)^2 A)^{-1}f \quad (\beta > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (3)–(5) $\Delta t = T/N$ есть шаг дискретизации, $x_n \in X$ — приближение к значению $x(n\Delta t)$ искомой функции $x(t)$ в n -м узле дискретизации, E — единичный оператор в X .

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00039а) в рамках государственного задания по Марийскому государственному университету № 1.5420.2017/8.9.

© Кокурин М.М., 2017

Если $x(t)$ — классическое решение задачи (1) или (2), то элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление $x(T) = A^{-pw}$ с некоторыми $p \geq 1$, $w \in X$. Следующие теоремы устанавливают степенные оценки скорости сходимости схем (3)–(5) в зависимости от показателя истокопредставимости p соответствующего решения.

Теорема 1. Для разностных схем (3) решения задачи (1) с углом секториальности $\varphi_0 \leq \pi/4$ справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2 \\ C_1\Delta t \ln \frac{1}{\Delta t}, & p = 2 \\ C_1\Delta t, & p > 2 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_1 = C_1(p).$$

Теорема 2. Для разностных схем (4) решения задачи (1) с углом секториальности $\varphi_0 \leq \pi/6$, коэффициенты которых удовлетворяют условию $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega^{(1)}(\varphi_0)$, справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2 \ln \frac{1}{\Delta t}, & p = 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p > 3 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_2 = C_2(p).$$

Теорема 3. Для разностных схем (5) решения задачи (2) с углом секториальности $\varphi_0 \leq \pi/3$, при $\beta \in \Omega^{(2)}(\varphi_0)$ справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_3(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leq p < \frac{3}{2} \\ C_3(\Delta t)^2 \ln \frac{1}{\Delta t}, & p = \frac{3}{2} \\ C_3(\Delta t)^2, & p > \frac{3}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_3 = C_3(p).$$

Принадлежность коэффициентов каждой конкретной схемы вида (4), (5) множеству $\Omega^{(1)}(\varphi_0)$ или $\Omega^{(2)}(\varphi_0)$ устанавливается с помощью компьютерного вычисления. Расчёты в среде Maple 15 позволяют предположить, что условиям $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega^{(1)}(\varphi_0)$, $\beta \in \Omega^{(2)}(\varphi_0)$ удовлетворяют все схемы классов (4) и (5) соответственно.

Автором также доказаны теоремы, обратные к теоремам 1–3 и устанавливающие необходимые условия степенной сходимости схем (3), (4), (5) в терминах показателя истокопредставимости p , близкие к достаточным условиям.

УСЛОВНО–КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ¹

М.Ю. Кокурин (Йошкар–Ола)

kokurinm@yandex.ru

В докладе исследуются методы регуляризации некорректных экстремальных задач $\min\{J(x) : x \in Q\}$ с выпуклым замкнутым ограниченным множеством Q из гильбертова пространства и невыпуклым приближенно заданным функционалом J . Рассматриваются задачи с $J \in \mathcal{K}$, где класс $\mathcal{K}$ состоит из слабо полунепрерывных снизу функционалов. Пусть $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$ – класс приближенных функционалов $\tilde{J}$. Погрешность регуляризующего алгоритма $\mathcal{R}(\tilde{J}, \delta)$ на классе $\mathcal{K}$ измеряется величиной $\sup_{J \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{R}, J, \delta)$, где $\Delta(\mathcal{R}, J, \delta) \triangleq$

$\sup\left\{\text{dist}(\mathcal{R}(\tilde{J}, \delta), X^*(J)) : \tilde{J} \in \mathcal{L}, \sup_{x \in Q} |\tilde{J}(x) - J(x)| \leq \delta\right\}$. Будем гово-

рить, что исходная задача равномерно условно корректна на $\mathcal{K}$, если для некоторой монотонно возрастающей функции $g = g(\tau) \geq 0$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} g(\tau) = g(0) = 0$, выполняется $\text{dist}(x, X^*(J)) \leq g(J(x) - J^*) \forall x \in Q$. Если $(\{x_n\} \subset Q, \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J^*) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, X^*(J)) = 0)$ для всех $J \in \mathcal{K}$, то задачу (1) называем условно корректной на $\mathcal{K}$. Здесь $J^* = \min\{J(x) : x \in Q\}$, $X^*(J) \triangleq \text{Argmin}\{J(x) : x \in Q\} \neq \emptyset$.

Условие 1. *Класс $\mathcal{K}$ состоит из слабо полунепрерывных снизу функционалов, и если $J \in \mathcal{K}$, то функционал $x \rightarrow J(x) + \alpha\|x - u\|^2$ принадлежит $\mathcal{K}$ для всех $\alpha > 0$, $u \in Q$.*

Теорема 1. *Пусть выполняется Условие 1. Регуляризующий оператор вида $\mathcal{R}(\tilde{J}, \delta) = \mathcal{R}(\tilde{J})$ на классе $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда исходная задача условно корректна на $\mathcal{K}$.*

Необходимым и достаточным условием существования регуляризующего оператора $\mathcal{R}$ с равномерной оценкой погрешности $\Delta(\mathcal{R}, J, \delta)$ на классе $\mathcal{K}$ является равномерная условная корректность исходной задачи на этом классе. Строятся устойчивые итерационные методы решения условно–корректных обратных задач $F(x) = f$ с гладким оператором $F : X \rightarrow Y$, где X, Y — гильбертовы пространства. Конструкция методов использует эффект кластеризации стационарных точек функционала невязки обратных задач.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00039а) в рамках государственного задания по Марийскому государственному университету № 1.5420.2017/8.9.

© Кокурин М.Ю., 2017

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А.Н. Конёнков (Рязань)

a.konenkov@rsu.edu.ru

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается равномерно-параболическое уравнение дивергентного вида

$$\partial_t u - \partial_x(a(x, t)\partial_x u) - \partial_x(b_1(x, t)u) - b_2(x, t)\partial_x u - c(x, t)u = 0.$$

Для уравнения без младших коэффициентов двусторонние оценки фундаментального решения были получены Аронсоном [1]. При определенных предположениях относительно младших коэффициентов такие оценки доказаны в [2]. Константы в этих неравенствах зависели лишь от размерности пространства, постоянной параболичности и некоторых слабых условий на младшие коэффициенты.

Мы устанавливаем оценку для пространственных производных первого порядка фундаментального решения, константы в которой зависят от модуля непрерывности коэффициентов.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения a , b_1 , b_2 , c принадлежат параболическому пространству Гельдера $C^\alpha(\bar{D})$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для фундаментального решения $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ справедлива оценка

$$|\partial_x^k \partial_\xi^l \Gamma(x, t, \xi, \tau)| \leq C t^{-(k+l+1)/2} \exp \left\{ -c \frac{(x-y)^2}{t-\tau} \right\}, \quad k+l \leq 1,$$

где константы C , c зависят от постоянной параболичности, норм коэффициентов в пространстве Гельдера $C^\alpha(\bar{D})$ и T .

Литература

1. Aronson, D.G. Non-negative solutions of linear parabolic equations / D.G. Aronson // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1968. — V. 22. — P. 607–694.
2. Порпер, Ф.О. Свойства решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами / Ф.О. Порпер, С.Д. Эйдельман // Тр. ММО. — 1992. — Т. 54. — С. 118–159.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ¹

Л.И. Кононенко (Новосибирск)

volok@math.nsc.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ — медленные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные; f, g — достаточно гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$ — переменная, имеющая смысл времени, $\dot{x}, \dot{y}$ — производные по времени, ε — положительный малый параметр. Система рассматривается в ограниченной выпуклой инвариантной притягивающей области [1].

Задача отыскания решений системы по некоторым исходным данным при известных функциях в правых частях представляет собой так называемую *прямую* задачу для дифференциальных уравнений. *Обратная* задача сводится к нахождению неизвестных правых частей по некоторым данным о решении прямой задачи.

Постановка обратной задачи. Введены следующие ограничения: 1) рассматривается обратная задача для системы (1) при $\varepsilon = 0$, т.е. для вырожденной системы; 2) функция f в правой части медленной подсистемы системы (1) задается в виде многочлена p -й степени $f = \sum_{i+j \leq p} b_{ij} x^i y^j$, $p = 1$; 3) система (1) имеет одну медленную и одну быструю переменные, $m = n = 1$; 4) функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ считаем заданной и удовлетворяющей всем условиям теоремы о неявной функции в каждой точке области, в частности, $\frac{\partial g(x, y, t, 0)}{\partial y} \neq 0$; 5) медленная поверхность состоит из одного листа.

При этих условиях имеем систему со следующими данными

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_0 + p_1 x + p_2 y, \\ 0 &= g(x, y, t, 0), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, p_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, (x, y) \in W, \\ x(t_i) &= \alpha_i, \dot{x}(t_i) = \beta_i, i = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{2}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00745).

© Кононенко Л.И., 2017

Для данных t_i, α_i, β_i , $i = 1, 2, 3$, требуется найти коэффициенты p_0, p_1, p_2 , удовлетворяющие системе (2).

Используя данные $x(t_i) = \alpha_i, \dot{x}(t_i) = \beta_i$ и вводя обозначения $\gamma_i = y_i = \varphi(\alpha_i, t_i)$, $i = 1, 2, 3$, имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными p_0, p_1, p_2 :

$$p_0 + p_1 \alpha_i + p_2 \gamma_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Предложение. Пусть данные t_i, α_i, β_i , $i = 1, 2, 3$, такие что выполнены условия 1)–5) и определитель системы (3) при этих значениях t_i , $i = 1, 2, 3$, не равен нулю. Тогда обратная задача имеет единственное решение, которое определяется стандартными формулами линейной алгебры [2].

Литература

1. Гольдштейн, В.М. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем / В.М. Гольдштейн, В.А. Соболев. — Новосибирск : Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

2. Gutman, A.E. Formalization of inverse problems and applications to systems of equations with parameters / A.E. Gutman, L.I. Kononenko // International Conference "Geometric Analysis and Control Theory". Abstracts. — 2016. — P. 40–42.

СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНАЯ КОСИНУС-ФУНКЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

В.А. Костин (Воронеж)

Как известно [1], начиная с работ М. Совы и Курепы операторные косинус-функции (КОФ) стали важным инструментом при исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховых пространствах и находятся в таком же отношении к этой задаче как сильно непрерывные полугруппы к задаче Коши для уравнений первого порядка.

В настоящей заметке впервые применяются КОФ к исследованию корректной разрешимости граничных задач, а именно задачи Дирихле для уравнений второго порядка.

В банаховом пространстве E рассматриваем уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0, \quad t \in [0, l] \subset \mathbb{R}^1 = (0, \infty), \quad (1)$$

где оператор A является производящим оператором (генератором) сильно непрерывной операторной косинус-функции $C(t, A)$ в E .

Это означает, что $C(t, A)$ — есть семейство ограниченных операторов в E при каждом $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

1. $C(t + s, A) + C(t - s, A) = 2C(t, A)C(s, A)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$;
2. $C(0, A) = I$ — тождественный оператор в E ;
3. Для каждого $\varphi \in E$ выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|C(t, A)\varphi - \varphi\|_E = 0.$$

Для φ из области определения $D(A)$ оператора A справедливо соотношение

$$Au = \left. \frac{d^2}{dt^2} C(t, A)\varphi \right|_{t=0},$$

область определения $D(A)$ плотна в E , причем

$$D(A) = \left\{ \varphi \in E, \frac{d^2 C(t, A)}{dt^2} \varphi \in E \right\}.$$

Существуют константы M и $\omega > 0$, при которых имеет место оценка

$$\|C(t, A)\| \leq M e^{\omega|t|}.$$

Ставится задача отыскания функции $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды дифференцируемой, удовлетворяющей уравнению (1) на отрезке $[0, l]$ и условиям

$$u(0) = \varphi, \quad u(l) = \psi. \quad \varphi, \psi \in D(A). \quad (2)$$

Определение. Задача (1.1)–(1.2) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $M > 0$ такая, что для всех решений уравнения (1) справедливо неравенство

$$\sup_{t \in [0, l]} \|u(t)\|_E \leq M(\|\varphi\|_E + \|\psi\|_E).$$

Теорема. Если оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(t, A)$ с порядком роста $\omega \in [0, 1)$, то задача (1)–(2) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{l} \sin \frac{\pi t}{l} \left[\int_0^\infty \frac{C(y, A)\varphi dy}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + \cos \frac{\pi t}{l}} + \int_0^\infty \frac{C(y, A)\psi dy}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - \cos \frac{\pi t}{l}} \right].$$

Заметим, что по теореме С.Г. Крейна ([2], с. 306) решение рассматриваемой задачи выражается через сильно-непрерывные полугруппы с генератором $-(A)^{\frac{1}{2}}$.

Литература

1. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Выща школа, 1989. — 347 с.
2. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ТИПА РЭЛЕЯ ДЛЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ЗАДАЧЕ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков (Москва)

abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

В статье авторов [1] исследовался вопрос о расположении на комплексной плоскости корней уравнения вида

$$\mu \cos \alpha J'_n(\mu) + i n \sin \alpha J_n(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

с параметрами $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, \pi/2]$ и функцией Бесселя $J_n(\mu)$. Это уравнение встречается в известной работе [2], посвящённой спектральной задаче для оператора Лапласа в круге с условием равенства нулю наклонной производной на границе круга. Из общей теории целых функций вытекает, что уравнение (1) имеет бесконечное счётное множество корней. При $\alpha \in (0, \pi/2)$ отличные от $\mu = 0$ корни образуют множество $\{\pm \mu_{n,k}(\alpha)\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $\mu_{n,k}(\alpha)$, упорядоченные по возрастанию модулей, расположены в открытом первом квадранте и $\mu_{n,k}(\alpha) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ (см. [1]). В докладе будут представлены результаты о вычислении специальных сумм, составленных по корням уравнения (1). Так, справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n,k}^2(\alpha)} = \frac{n + 2 \cos^2 \alpha}{4n(n+1)} - i \frac{\sin 2\alpha}{4n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

В частности, при $\alpha = \pi/2$ формула даёт известное выражение для классической суммы Рэлея

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,k}^2} = \frac{1}{4(n+1)},$$

где $j_{n,k}$ — положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)$.

Литература

1. Костин, А. Б. О комплексных корнях уравнения, возникающего в задаче с наклонной производной / А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 6. — С. 564–569.

2. Ильин, В.А. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 1. — С. 128–143.

ОТОБРАЖЕНИЯ В НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

М.Н. Крейн (Липецк)

travkin@lipetsk.ru

В ассоциативной некоммутативной алгебре однородным многочленом n -й степени от одной переменной и определяемым им отображением n -й степени названо $f(x) = \sum_{i=1}^k a_{i1} \cdot x \cdot a_{i2} \cdot x \cdot a_{i3} \cdot \dots \cdot a_{in} \cdot x \cdot a_{i,n+1}$. Название связано с тем, что в каждом слагаемом x встречается в качестве сомножителя n раз. Здесь a_{ij} — фиксированные элементы алгебры, среди которых могут быть единицы. Многочленами названы конечные суммы однородных многочленов. В нормированных алгебрах наряду с многочленами можно рассматривать сходящиеся ряды однородных многочленов; определяемые ими отображения названы аналитическими [2].

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $d_n(\mathcal{A})$ — множество отображений степени n . Очевидно, композиция отображений степени m и n даёт отображение степени mn , поэтому множество $d_1(\mathcal{A})$ отображений 1-й степени замкнуто относительно операции композиции и, таким образом, образует алгебру относительно обычного поточечного сложения и композиции в качестве умножения, нормированную, если нормирована $\mathcal{A}$ ($\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$). Отображения 1-й степени служат аналогом первого дифференциала для многочленов и аналитических отображений.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ означает алгебру, полученную из $\mathcal{A}$ изменением порядка сомножителей на противоположный. Существует эпиморфизм алгебр $h : \mathcal{A} \otimes \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow d_1(\mathcal{A})$, сопоставляющий элементу $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ из $\mathcal{A} \otimes \tilde{\mathcal{A}}$ отображение $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x b_i$. В [3]

приведены примеры алгебр, для которых этот эпиморфизм имеет ненулевое ядро. Там же указано достаточное условие для того, чтобы ядро эпиморфизма было нулевым. Этому условию удовлетворяют алгебры всех линейных операторов любого линейного пространства, алгебры ограниченных линейных операторов нормированных пространств, алгебры компактных линейных операторов.

Пусть $L(A)$ — множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве A , $\widehat{d_1(A)}$ — замыкание $d_1(A)$ в топологии поточечной сходимости в случае нормированной алгебры A . Верны следующие утверждения:

Теорема 1.[1] *Если $A = L(F^n)$ — алгебра линейных операторов конечномерного пространства, то $d_1(A) = L(A)$.*

Теорема 2.[3] *Для алгебры $A = C(H)$ линейных компактных операторов сепарабельного гильбертова пространства H $\widehat{d_1(A)} = B(A)$, где $B(A)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $A = C(H)$.*

Литература

1. Krein, M.N. The mappings of degree 1 / M.N. Krein // Abstract and Applied Analysis. Special Issue.

<http://www.hindawi.com/journals/aaa/2006/090837/abs/>

2. Крейн, М.Н. Многочлены и аналитические функции в некоммутативных алгебрах / М.Н. Крейн // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы конференции ВЗМШ. — Воронеж : ВГУ. — 2007. — С. 112–113.

3. Крейн, М.Н. Алгебраические и топологические свойства некоторых классов отображений первой степени / М.Н. Крейн // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна — 2008. — Воронеж : ВГУ. — 2008. — С. 194–203.

КОЭФФИЦИЕНТНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^{31}$

А.В. Лобода (Воронеж)

lobvgasu@yandex.ru

В [1] предложена схема коэффицентной классификации однородных строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00592-а).

© Лобода А.В., 2017

Основным элементом этой схемы является многочлен N_{220} из нормального мозеровского (см. [2]) уравнения такой поверхности. В случае *общего положения*, характеризующегося сводимостью N_{220} к виду

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + \mu(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_1|^4), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

любая однородная поверхность определяется не более чем 13 тейлоровскими вещественными коэффициентами своего нормального уравнения.

Для многочлена N_{220} имеется еще две возможности

$$N_{220} = \pm(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_1|^4), \quad (2)$$

реализующиеся, например (см. [1]), на однородных СПВ-гиперповерхностях с более чем дискретными группами изотропии.

Теорема. *Всякая однородная СПВ-гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$, имеющая дискретную группу изотропии и многочлен N_{220} вида (2) в нормальном уравнении, определяется тройкой вещественных коэффициентов из своего нормального уравнения.*

Отметим, что для описания известных примеров однородности в $\mathbb{C}^3$ пока было достаточно двумерных пространств модулей.

Литература

1. Атанов, А.В. О голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода, В.И. Суковых // Труды МИАН. — 2017. — Т. 298. — С. 17–39.
2. Chern, S.S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Math. — 1974. — V. 133. — P. 219–271.

МЕТОД КОРРЕКТИРОВКИ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Ф.Е. Ломовцев (Минск)

lomovcev@bsu.by

Предложен *метод корректировки* (коррекции) пробных решений неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty, \quad (1)$$

где $a_1 > 0$, $a_2 \geq 0$, b_1, b_2 – постоянные вещественные коэффициенты и $G_\infty =]0, \infty[\times]0, \infty[$. Проблема поиска решений с минимальной (необходимой) гладкостью правой части f возникает в смешанных (начально-краевых) задачах при выводе необходимых (обязательных) требований гладкости на f . Идея метода коррекции состоит в вычислении поправки к некоторым его пробным (испытываемым) функциям (решениям), которые могут требовать завышенную гладкость от правой части в четверти плоскости. *Пробной функцией* служит предложенная ранее автором (для решения смешанных задач без продолжения правой части) функция [1, 2]

$$F(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau) ds d\tau. \quad (2)$$

Критическая характеристика $x = a_1 t$ при $a_1 > 0$ делит G_∞ на множества $G_- = \{(x, t) : x > a_1 t, t > 0\}$ и $G_+ = \{(x, t) : x < a_1 t, x > 0\}$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Для любой $f \in C^1(G_\infty)$ эта функция $F \in C^2(G_\infty)$. Гладкость $f \in C^1(G_\infty)$ является только достаточной, завышенной и не обязательной для классических решений. Оказывается, что функция F при $a_1 \neq a_2$ из-за модуля $|s|$ теряет возможную необходимую гладкость в G_+ тогда, когда нижний предел интегрирования $x - a_1(t - \tau)$ меняет знак при $\tau = t - x/a_1$. *Коррекция пробных решений* осуществляется посредством *корректирующей задачи Гурса* в три этапа:

1). Постановка и решение корректирующей задачи Гурса для канонического вида неоднородного уравнения (1).

2). Анализ гладкости слагаемых её решений и обоснование дважды непрерывной дифференцируемости пробных решений или их корректировка до классических решений этого канонического вида.

3). Вычисление классических решений уравнения колебаний струны в четверти плоскости путём обратной невырожденной замены переменных в пробных или скорректированных решениях.

Найдены неизвестные ранее классические решения и необходимая гладкость правой части уравнения (1) на G_+ и G_- .

Теорема 1. Если коэффициенты $(-1)^i(a_2 - a_1) \geq 0$, то существует классическое решение уравнения (1) в G_+ :

$$F_i(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t, \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_i(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], i = 1, 2, \quad (3)$$

где $A = (a_1 b_2 + a_2 b_1)/(a_1 + a_2)$, $B = (b_2 - b_1)/(a_1 + a_2)$, $t_i(x) = [(a_1 + a_i)/(a_1 + a_2)](t - x/a_1)$, $x_i(t, \tau) = a_i(t - x/a_1) - a_2\tau$.

Следствие 1 [3]. Если $a_1 = a_2 = a > 0$, то функция (2) – классическое решение уравнения (1) в G_+ при необходимой гладкости

$$f \in C(G_\infty), \int_0^t f(|x \pm a(t - \tau)|, \tau) d\tau \in C^1(G_+).$$

Теорема 2. Если $(-1)^i(a_2 - a_1) \geq 0$, то функция (3) – классическое решение уравнения (1) в G_+ при необходимой гладкости

$$f \in C(G_\infty), \int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \\ \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{i-1} \int_0^{t_i(x)} f(x_i(t, \tau), \tau) d\tau - \int_{t_i(x)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), i = 1, 2.$$

Следствие 2. Если f не зависит от x /от t и в уравнении (1) коэффициент $a_2 > 0$ /, то функция (3) – классическое решение уравнения (1) в G_+ и f лишь непрерывна по t /по x /.

Теорема 3. При всех коэффициентах $a_1 > 0, a_2 \geq 0$ существуют классические решения уравнения (1) в G_- :

$$F^{(k)}(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_0(x)} \int_{k(x - a_1 t) - a_2 \tau}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], k \geq 1, \quad (4)$$

где $t_0(x) = (k-1)(x - a_1 t)/(a_1 + a_2)$, с необходимой гладкостью

$$f \in C(G_-), \int_0^t f(x + (-1)^m a_m(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_-), m = 1, 2.$$

Следствие 3. Если f не зависит от x/t , то (4) – классические решения уравнения (1) в G_- и f лишь непрерывна по t/x .

Замечание. Частный случай функции (3) при $i = 2$, $a_1 = a_2 = a > 0$, $b_1 = b_2 = 0$ простейшего уравнения колебаний струны присутствует в формуле (31) обобщённого решения первой краевой задачи на полугораниченной прямой в учебнике [4, с. 83].

Литература

1. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Издат. дом ВГУ. — 2015. — С. 73–76.
2. Ломовцев, Ф.Е. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1128–1132.
3. Юрчук, Н.И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полугораниченной струны / Н.И. Юрчук, Е.Н. Новиков // Весці НАН Беларусі. — 2016. — Сер. фіз.-мат. навук. — № 4. — С. 116–120.
4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 2004. — 798 с.

НОВОЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА¹

К.В. Лыков (Самарская область, Смышляевка)
alkv@list.ru

По банаховой решетке F измеримых функций на $[1, \infty)$ определим симметричное пространство $\mathcal{L}_F$ функций на $[0, 1]$:

$$\mathcal{L}_F := \{x = x(t), t \in [0, 1] : \|x\|_{\mathcal{L}_F} := \|f\|_F < \infty, f = f(p) = \|x\|_p\},$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00138, 16-41-630676).

© Лыков К.В., 2017

где через $\|x\|_p$ обозначена L_p -норма функции x , $\|x\|_p^p = \int_0^1 |x(t)|^p dt$. Представление симметричного пространства X в виде $\mathcal{L}_F$ называется экстраполяционным. Такое представление позволяет по росту норм оператора T в шкале $\{L_p\}$ определять свойства образа $T(X)$, а также получать оценки распределения случайной величины с помощью моментных неравенств. Естественная задача состоит в определении соответствия между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и банаховыми решетками на $[1, \infty)$ в таком представлении.

Пусть φ — неотрицательная функция на $[1, \infty)$. Определим пространство $G(\varphi)$ с помощью нормы

$$\|f\|_{G(\varphi)} := \inf\{\lambda > 0 : \int_1^\infty \left(\frac{|f(p)|}{\lambda}\right)^p \varphi(p) dp \leq 1\}.$$

Через L_M обозначим пространство Орлича на $[0, 1]$, построенное по функции M , $\|x\|_{L_M} = \inf\{\lambda > 0 : \int_0^1 M(x(t)/\lambda) dt \leq 1\}$.

Теорема 1. Пусть

$$M(u) = \int_1^\infty |u|^p \varphi(p) dp.$$

Тогда $L_M = \mathcal{L}_{G(\varphi)}$.

Теорема 2. Пусть

$$M(u) = \sum_{k=1}^\infty a_k |u|^k, \quad a_k \geq 0.$$

Тогда

$$x \in L_M \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{p \in \mathbb{N}} \|x\|_p a_p^{1/p} < \infty.$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ С НЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В.В. Лысенко, Ф.Е. Ломовцев (Минск)
valery.sholomitskaya@gmail.com, lomovcev@bsu.by

Решена без продолжений данных f, φ, ψ, μ и изучена однозначная устойчивая везде разрешимость начально-краевой задачи:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [\Gamma(t)u]|_{x=0} &\equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \\ &+ \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_1 > 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2 \in]-\infty, +\infty[$ и $G_\infty = [0, \infty[\times [0, \infty[$.

Методом характеристик выведена обобщённая формула Даламбера (Эйлера) единственных классических решений $u_- \in C^2(G_-)$ задачи (1)–(3) на $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : x > a_1 t, t > 0\}$, как решение задачи Коши (1), (2), и классических решений $u_+ \in C^2(G_+)$ на $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : x \leq a_1 t, x \geq 0\}$, как решение задачи Пикара: уравнения (1) при граничном условии (3) и соответствующих граничных условиях на $x = a_1 t$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на Ω , $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Теорема. Пусть $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C[0, \infty[$, не характеристическое условие (3): $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \neq 0, t \in [0, \infty[$, и существует решение $v \in C^2[0, \infty[, v(\rho) \neq 0, v'(\rho) \neq 0, \rho \in [0, \infty[$, уравнения

$$\begin{aligned} [a_1^2 \zeta(\rho/a_1) - a_1 \xi(\rho/a_1) + \theta(\rho/a_1)]v''(\rho) + [-2a_1 b_1 \zeta(\rho/a_1) + b_1 \xi(\rho/a_1) + \\ + a_1 \alpha(\rho/a_1) - \beta(\rho/a_1)]v'(\rho) + b_1^2 \zeta(\rho/a_1) - b_1 \alpha(\rho/a_1) + \gamma(\rho/a_1)]v(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Если $(-1)^i(a_2 - a_1) \geq 0$, то задача (1)–(3) имеет единственное устойчивое по f, φ, ψ, μ классическое решение $u_+ \in C^2(G_+)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости:

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, \infty[, \quad \psi \in C^1[0, \infty[, \quad \mu \in C[0, \infty[,$$

$$\int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{i-1} \int_0^{t_i(x)} f(x_i(t, \tau), \tau) d\tau -$$

$$- \int_{t_i(x)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_+), t_i(x) = \frac{a_1 + a_i}{a_1 + a_2} \left(t - \frac{x}{a_1}\right), i = 1, 2,$$

и условие согласования режима (3) с равенствами (2) и (1):

$$\begin{aligned} & \zeta(0)[f(0, 0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) + \\ & + (a_2b_1 - a_1b_2)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] + \xi(0)\psi'(0) + \theta(0)\varphi''(0) + \\ & + \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \end{aligned}$$

Если $(-1)^i(a_2 - a_1) \geq 0$, то на G_+ её решением является функция

$$\begin{aligned} u_+^{(i)}(x, t) = & e^{-b_2t}\Phi(x, t) + F_i(x, t) + \\ & + e^{-b_1t}v(a_1t - x) \left\{ \int_0^{t_2(x)} \frac{1}{v^2(a_1\varrho)} \int_0^{\varrho} \frac{a_1^2 e^{b_1\tau} \chi(\varrho, \tau) v(a_1\tau) P_i(\tau)}{a_1^2 \zeta(\tau) - a_1 \xi(\tau) + \theta(\tau)} d\tau d\varrho + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 v(0)[b_2\varphi(0) + \psi(0) - a_2\varphi'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{t_2(x)} \frac{\chi(s, 0)}{v^2(a_1s)} ds \right\}, i = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = (a_1b_2 + a_2b_1)/(a_1 + a_2), B = (b_2 - b_1)/(a_1 + a_2),$$

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \int_0^{x+a_2t} e^{B(x+a_2t-s)} [A\varphi(s) + \psi(s)] ds + a_2 e^{B(x+a_2t)} \varphi(0) + \right.$$

$$\left. + a_1 \varphi(x + a_2t) \right\}, F_i(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t, \tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_i(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], x_i(t, \tau) = a_i t_2(x) - a_2 \tau,$$

$$P_i(t) = \mu(t) - [\Gamma(t)(\Phi(x, t) + F_i(x, t))]|_{x=0},$$

$$\chi(a, b) = \exp \left\{ a_1 \int_a^b \frac{-2a_1b_1\zeta(s) + b_1\xi(s) + a_1\alpha(s) - \beta(s)}{a_1^2\zeta(s) - a_1\xi(s) + \theta(s)} ds \right\}.$$

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова (Елабуга)

lbmironova@yandex.ru

Приложения инвариантов Лапласа уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

хорошо известны [1, с. 116–125]. Определяющие уравнения для уравнения (1) могут быть записаны в терминах инвариантов Лапласа [1, с. 121], [2, с. 126].

В данной работе построены инварианты Лапласа для уравнения

$$\begin{aligned} &u_{xxyz} + a_{210}(x, y, z)u_{xxy} + a_{201}(x, y, z)u_{xxz} + \\ &+ a_{111}(x, y, z)u_{xyz} + a_{200}(x, y, z)u_{xx} + a_{110}(x, y, z)u_{xy} + \\ &+ a_{101}(x, y, z)u_{xz} + a_{011}(x, y, z)u_{yz} + a_{100}(x, y, z)u_x + \\ &+ a_{010}(x, y, z)u_y + a_{001}(x, y, z)u_z + a_{000}(x, y, z)u = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В терминах указанных инвариантов для (2) записаны определяющие уравнения.

Уравнение (2) является определенным обобщением уравнения

$$\begin{aligned} &u_{xxy} + c_{20}(x, y)u_{xx} + c_{11}(x, y)u_{xy} + c_{10}(x, y)u_x + \\ &+ c_{01}(x, y)u_y + c_{00}(x, y)u = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Частным случаем (3) является уравнение Аллера [3, с. 17–18]

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x.$$

Литература

1. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
2. Ибрагимов, Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н.Х. Ибрагимов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4. — С. 83–144.
3. Нахушев, А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2006. — 287 с.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ НА ГРАФАХ¹

Г.Е. Мурзабекова (Астана)

guldenmur07@gmail.com

Обратная задача восстановления компактного графа по собственным значениям рассмотрена в [1]. В [2] показано, что обратная задача рассеяния может быть решена и для графов специальной структуры, таких как звездные графы. Однако, даже в этих случаях имеющиеся результаты не полны, и нет конструктивных процедур для решения целого класса обратных задач.

В работах [3-5] изучалась управляемость для волнового уравнения на графах: развит метод векторных экспонент, разработан рекурсивный метод решения обратных задач для волновых уравнений на графах, предложен новый подход к идентификации источника, развит новый подход к теории управления для интегро-дифференциальных уравнений, основанный на доказательстве свойств базисности Рисса семейств, квадратично близких к ортонормированным экспонентам.

В данном докладе доказана управляемость для волновых уравнений с памятью на графах-деревьях и решена задача восстановления топологии графа-дерева, длин рёбер, масс, потенциала.

Литература

1. Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — 351. — P. 4069–4088.
2. Gerasimenko N. I. Scattering problems on compact graphs / N. I. Gerasimenko, B. S. Pavlov // Theor. Math. Phys. — 1988. — 74. — P. 230—240.
3. Avdonin S. The inverse spectral problem for the wave equation on finite trees / S. Avdonin, G. Murzabekova // Abstr. of the 11th AIMS conf. — Orlando. — 2016. — P. 151.
4. Avdonin S. Source identification problems for the wave equation on graphs / S. Avdonin, S. Nicaise // Inverse Problems. — 2015. — 31, 095007. — P. 29.
5. Avdonin S. On controllability of a linear elastic beam with memory under axial load / S. Avdonin, B. Belinskiy // Evolution

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК, проект 4290/ГФ4.

© Мурзабекова Г.Е., 2017

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА ЭЙЛЕРА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Р. Мустафокулов (Душанбе)

rmustaf@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$x^{n\alpha}y^{(n)} + A_1(x)x^{(n-1)\alpha}y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)x^\alpha y' + A_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты $A_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и правая часть $f(x)$ непрерывны в промежутке $(0, l)$, а числовой параметр $\alpha > 0$.

В [1] было доказано, что уравнение (1) подстановкой

$$t = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha} = \omega(x)$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = F(t), \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты $A_k(x)$ имеют вид

$$A_k(x) = a_k - \sum_{i=1}^k A_{k-i}(x)P_{n-k+i}^i(\alpha)x^{i(\alpha-1)}, \quad (3)$$

где многочлены $P_m^i(\alpha)$ ($m = 1, 2, \dots, m$) определены формулами

$$P_{m+1}^i(\alpha) = P_m^{i-1}(\alpha)[-m\alpha + (i-1)(\alpha-1)] \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$A_0(x) \equiv 1$, $A_n(x) \equiv a_n$, а $F(t) = f[v(t)]$, $v(t)$ — обратное к $\omega(x)$ преобразование.

Уравнение (1) с коэффициентами (3) будем называть *модельным уравнением*.

Таким образом, для решения модельного уравнения (1) достаточно интегрировать уравнения (2) и положить в найденное решение $t = \omega(x)$.

В работе [2] получено многообразие решений модельного уравнения в случае, когда все корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4)$$

вещественны и различны, а в [3] в случае, когда среди корней уравнения (4) имеются комплексно-сопряженные. В настоящей работе обсуждается случай, когда характеристическое уравнение (4) имеет вещественный кратный корень.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ — простые, а λ_{n-1} — двухкратный вещественный корни уравнения (4). Тогда функции

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi_n(t) = t e^{\lambda_{n-1} t} \quad (5)$$

образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (2) ($F(t) \equiv 0$).

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (2) воспользуемся следующей леммой, которая следует из метода вариации произвольных постоянных:

Лемма. Если функции $c_i(t)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(k)}(t) c_i'(t) = 0 & (k = 0, 1, 2, \dots, n-2), \\ \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(n-1)}(t) c_i'(t) = F(t), \end{cases} \quad (6)$$

то функция

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t) e^{\lambda_i t} + c_n(t) t e^{\lambda_{n-1} t}$$

является решением уравнения (2).

Решая систему (6) методом Крамера, находим

$$c_i'(t) = (-1)^{n+i} \frac{W_i(t)}{W(t)} F(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где $W(t)$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений (5), а $W_i(t)$ — определитель $(n-1)$ -го порядка, получающийся после вычеркивания из $W(t)$ i -го столбца и n -й строки.

Для определителя $W(t)$ имеем

$$W(t) = (-1)^n e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2} + 2\lambda_{n-1})t} \prod_{k=1}^{n-2} (\lambda_k - \lambda_{n-1}) V_{n-1},$$

где V_{n-1} - определитель Вандермонды с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Аналогичным образом для $i = 1, \dots, n-2$ вычисляются

$$W_i(t) = (-1)^{n-1} e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + 2\lambda_{n-1})t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-2} (\lambda_k - \lambda_{n-1}) V_{n-2}^i,$$

$$W_{n-1}(t) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})t} \left(\prod_{k=1}^{n-2} (\lambda_k - \lambda_{n-1}) \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1)^{i-1} V_{n-2}^i}{(\lambda_i - \lambda_{n-1})} + t V_{n-1} \right),$$

$$W_n(t) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})t} V_{n-1},$$

где V_{n-2} — определитель $(n-2)$ -го порядка, получающийся после вычеркивания из V_{n-1} i -го столбца и $(n-1)$ -ой строки.

Из (7) получим

$$c'_i(t) = \frac{(-1)^n}{(\lambda_i - \lambda_{n-1}) A_i} \cdot \frac{F(t)}{e^{\lambda_i t}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$c'_{n-1}(t) = (-1)^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_{n-1}) A_i} - \frac{t}{A_{n-1}} \right] \frac{F(t)}{e^{\lambda_{n-1} t}},$$

$$c'_n(t) = \frac{(-1)^n}{A_{n-1}} \cdot \frac{F(t)}{e^{\lambda_{n-1} t}}, \quad \text{где } A_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_i).$$

Интегрируя эти равенства (в предположении интегрируемости их правых частей), находим $c_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда в силу леммы, функция $\bar{y}(t)$ является частным решением уравнения (2). Общее же решение этого уравнения определяется как сумма $y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t)$, где $y_0(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения. Для нахождения теперь общего решения модельного уравнения (1) заменяем в $y(t)$ переменную t на $\omega(x)$ и мы приходим к следующему результату:

Теорема. Пусть коэффициенты $A_k(x)$ модельного уравнения (1) такие, что характеристическое уравнение (4) имеет $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ — простые и λ_{n-1} — двукратный вещественные корни, а правая часть $f(x)$ удовлетворяет условиям: при $0 < \alpha < 1$, а также при $\alpha > 1$ и $\lambda^* = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} < 0$ является ограниченной на $[0, l]$ функцией, а если $\alpha > 1$ и $\lambda_* = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} \geq 0$, то $f(x) = o(x^\alpha e^{\lambda_* \omega(x)})$ при $x \rightarrow 0$, причем, если $\lambda_* = \lambda_{n-1}$, то $f(x) = o(x^{2\alpha-1} e^{\lambda_{n-1} \omega(x)})$ при $x \rightarrow 0$. Тогда общее решение модель-

ного уравнения (1) представимо в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{\lambda_i \omega(x)} + c_n \omega(x) e^{\lambda_{n-1} \omega(x)} + (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_{n-1}) A_i} \right. \\ \times \int_0^x \left(e^{\lambda_i (\omega(x) - \omega(s))} - e^{\lambda_{n-1} (\omega(x) - \omega(s))} \right) \frac{f(s)}{s^\alpha} ds + \\ \left. + \frac{1}{A_{n-1}} \int_0^x e^{\lambda_{n-1} (\omega(x) - \omega(s))} [\omega(x) - \omega(s)] \frac{f(s)}{s^\alpha} ds \right),$$

где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Литература

1. Мустафокулов, Р. О приводимости линейного однородного уравнения типа Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами / Р. Мустафокулов // Междунар. матем. конф. по теории функций, посвященная 100-летию А. Ф. Леонтьева : Сб. тезисов (24–27 мая 2017 г.) — Уфа, 2017. — С. 113–114.

2. Кодиров, Г.М. Интегральные представления и многообразия решений для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с одной левой граничной сверхсингулярной точкой, когда корни характеристического уравнения являются вещественными и разными / Г.М. Кодиров, Н. Раджабов // Совр. проблемы функц. анализа и диф. уравн. : материалы Междунар. конф. — Душанбе, 2005. — С. 106–108.

3. Мустафокулов, Р. О разрешимости и многообразия решений одного класса линейных дифференциальных уравнений типа Эйлера, когда характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни / Р. Мустафокулов, Дж. А. Мирзоев // "VII Ломоносовские чтения" : материалы научно-практ. конф. филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Душанбе. — Душанбе, 2017. — С. 20–24.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

А.В. Нестеров (Москва)

andrenesterov@yandex.ru

В работе приведен обзор некоторых результатов исследований сингулярно возмущенных (с. в.) систем уравнений переноса в критическом случае (вырожденная задача имеет семейство решений

[1]) и близких к ним. В работе А. Б. Васильевой [2], [3] за 1985г. исследовалась с. в. система уравнений первого порядка

$$\varepsilon(u_t + \Lambda_1 u_x) = -au + bv, \varepsilon(v_t + \Lambda_2 v_x) = \gamma(au - bv), x, t > 0, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ - малый параметр (и ниже). Краевые и начальные значения функций (u, v) , заданные при $x = 0$ и $t = 0$, согласованы в угловой точке $(0, 0)$. Показано, что вырожденное решение системы (1) удовлетворяет уравнению первого порядка, и имеет разрыв на линии $x = \Lambda_3 t$, $\Lambda_3 = (\gamma b \Lambda_1 + a \Lambda_2)(a + \gamma b)$, выходящей из угловой точки $(0, 0)$, которая не является характеристикой системы (1). Доказана теорема о предельном переходе при $\varepsilon \rightarrow +0$, т. е. доказано существование переходного слоя в окрестности линии $x = \Lambda_3 t$. Особенностью задачи (1) является наличие однократного нулевого собственного значения матрицы, которой задается взаимодействие между компонентами решения. Такая же особенность присуща и остальным задачам, рассмотренным ниже.

В работе [4] рассмотрена близкая к [2] по постановке задача. Показано, что в окрестности линии разрыва вырожденного решения точное решение имеет переходный слой, который описывается параболическим уравнением.

В работе [5] методом согласования АР [6] исследовалась трансформация разрыва, присущего решениям гиперболических уравнений, в параболический переходный слой.

В работе [7] строилось АР решения начально-краевой задачи для с. в. системы уравнений

$$\varepsilon^2(U_t + DU_x) = AU + \varepsilon F(U), x > 0, t > 0, \quad (2)$$

где U — вектор решения, матрица A имеет однократное нулевое собственное значение. При определенных условиях на данные задачи построено асимптотическое представление (АП) решения.

Главный член АП решения задачи (2) имеет вид $s_0(\zeta, t) = \varphi_0(\zeta, t)h$, где h - собственный вектор матрицы A , отвечающий $\lambda = 0$, $\varphi_0(\zeta, t)$ удовлетворяет задаче Коши для параболического уравнения

$$\varphi_{0t} + M\varphi_{0\zeta\zeta} = (S_0 F_{ef}(\varphi_0))_{\zeta}, \quad (3)$$

M_{ij} , $S_0 F_{ef}(\varphi_0)$ и переменная ζ выражаются через данные задачи.

В работе [8] строилось АР решения начально-краевой задачи для с. в. системы уравнений с двумя пространственными перемен-

НЫМИ

$$\varepsilon^2(U_t + D_1 U_{x_1} + D_2 U_{x_2}) = AU + \varepsilon^2 F(U), x > 0, t > 0,$$

— АР решения, R — остаточный член, переменные $\bar{\zeta}, \bar{\xi}, \tau$ выражаются через данные задачи. Главный член АР решения имеет вид $s_0(\bar{\zeta}, t) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t)h$, где $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ удовлетворяет задаче Коши для параболического уравнения

$$\varphi_{0t} + M_{11}\varphi_{0\zeta_1\zeta_1} + M_{12}\varphi_{0\zeta_1\zeta_2} + M_{22}\varphi_{0\zeta_2\zeta_2} = S_0 F_{ef}(\varphi_0), \quad (4)$$

$M_{ij}, S_0 F_{ef}(\varphi_0)$ и переменные ζ_1, ζ_2 выражаются через данные задачи. Уравнение (4) может быть вырожденным.

В [9] строилось АР решения аналогичной задачи для уравнения с несколькими пространственными переменными

$$\varepsilon^2(U_t + \sum_{i=1}^N D_i U_{x_i}) = AU + \varepsilon^2 F(U), \bar{x} \subset \Omega, t > 0, \quad (5)$$

В этом случае главный член АР решения имеет аналогичный вид, где $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\varphi_{0t} = \sum_{i,j=1}^N M_{ij}\varphi_{0\zeta_i\zeta_j} + F_{i,ef}(\varphi_0). \quad (6)$$

которое так же может быть вырожденным. Степень вырождения зависит от соотношения между размерностью решения и размерностью пространства.

В случае нелинейности вида $\varepsilon F(U)$ при дополнительном условии $(F(U), h*) = 0$, $h*$ — собственный вектор A^T , отвечающий $\lambda = 0$, главный член АР удовлетворяет параболическому уравнению с иной нелинейностью:

$$\varphi_{0t} = \sum_{i,j=1}^N M_{ij}\varphi_{0\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^N (F_{i,ef}(\varphi_0))_{\zeta_i}. \quad (7)$$

В работе [10] строилось АР решения задачи Коши для с. в. дифференциально-операторного уравнения

$$\varepsilon^2(U_t + D(p)U_x) = L_p U + \varepsilon \bar{F}(U), \|\bar{x}\| < \infty, t > 0, \quad (8)$$

где линейный оператор L_p имеет однократное нулевое собственное значение. АР решения задачи (8) имеет те же особенности, что и АР решений задач, рассмотренных выше.

В работах [5], [11] строились АР решений систем уравнений переноса в случае, когда к переносу добавляется диффузия одной или несколькими компонентами решения (и система становится параболического или смешанного типа). Задачи такого типа возникают при описании процессов переноса в многофазных средах.

Подобные задачи встречаются при моделировании различных процессов, описанных, например, в [5],[11]-[16] и других источниках.

Литература

1. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — 262 с.
2. Васильева, А.Б. О внутреннем переходном слое в решении системы уравнений в частных производных первого порядка / А.Б. Васильева // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 9. — С. 1537–1544.
3. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Высшая школа, 1990. — 208 с.
4. Бутузов, В.Ф. О некоторых сингулярно возмущенных задачах с негладкими погранфункциями / В.Ф. Бутузов, А.В. Нестеров // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 4. — С. 786–789.
5. Нестеров, А.В. Об асимптотике решения системы уравнений диффузия-сорбция при малых коэффициентах диффузии / А.В. Нестеров // ЖВМиМФ. — 1989. — Т. 29, № 9. — С. 1318–1330.
6. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 334 с.
7. Нестеров, А.В. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка с малой нелинейностью в критическом случае / А.В. Нестеров, О.В. Шулико // ЖВМиМФ. — 2007. — Т. 47, № 3. — С. 438–444.
8. Нестеров, А.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы с несколькими пространственными переменными в критическом случае / А.В. Нестеров, Т.В. Павлюк // ЖВМиМФ. — 2014. — Т. 54, № 3. — С. 450–462.
9. Нестеров, А.В. О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными

в дальней зоне / А.В. Нестеров // ЖВМиМФ. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 639–649.

10. Заборский, А.В. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения в критическом случае / А.В. Заборский, А.В. Нестеров // Матем. моделир. — 2014. — Т. 26. — С. 65–79.

11. Нестеров, А.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае / А.В. Нестеров, О.В. Шулико // ЖВМиМФ. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 268–275.

12. Варламов, В.В. Асимптотическое представление решения задачи о распространении акустических волн в неоднородной сжимаемой релаксирующей жидкости / В.В. Варламов, А.В. Нестеров // ЖВМиМФ. — 1990. — Т. 30, № 5. — С. 705–715.

13. Рачинский, В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии / В.В. Рачинский. — М. : Наука, 1964.

14. Возженников, О.И. О переносе примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхности / О.И. Возженников, А.В. Нестеров // Метеорология и гидрология. — 1988. — № 11. — С. 63–70.

15. Луков Н.М., Ромашкова О.Н., Космодемьянский А.С., Алейников И.А. Автоматическая система регулирования давления в пневматической системе тягового транспортного средства. Патент на изобретение *RUS 2239220 12.08.2003*.

16. Горелов, Г.В. Оценка качества обслуживания в сетях с пакетной передачей речи и данных / Г.В. Горелов, О.Н. Ромашкова // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия : Прикладная и компьютерная математика. — 2003. — Т. 2, № 1. — с. 23–31.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

А.В. Нестеров, Д.С. Кожеуров (Москва)

andrenesterov@yandex.ru

Строится асимптотическое разложение (АР) решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса

$$\varepsilon^2(U_t + \sum_{i=1}^N D_i U_{xi}) = AU + \varepsilon \bar{F}(U), \|\bar{x}\| < \infty, t > 0, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ - малый параметр, D, A - матрицы, A -вырожденная. В отличие от [1], при нелинейности стоит первая степень ε . Наличие однократного нулевого собственного значения матрицы A относит задачу к критическому случаю [2].

При определенных условиях, наложенных на данные задачи, построено полное АР решения по малому параметру, доказана теорема об оценке остаточного члена.

Старший член АР имеет вид $s_0(\bar{\zeta}, t) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t)\bar{h}$ где $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ есть решение задачи Коши для параболического уравнения

$$\varphi_{0t} = \sum_{i,j=1}^N M_{ij} \varphi_{0\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^N (F_{i,ef}(\varphi_0))_{\zeta_i}. \quad (2)$$

Нелинейное слагаемое в уравнении (2) имеет иной вид, чем в аналогичном уравнении в работе [1]. Подобные задачи встречаются при моделировании различных процессов, в частности, [3].

Литература

1. Нестеров, А.В. О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне / А.В. Нестеров // ЖВМиМФ. — 2016. — Т. 56, № 4. — С. 639–649.

2. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — 262 с.

3. Луков Н. М., Ромашкова О. Н., Космодемьянский А. С., Алейников И. А. Автоматическая система регулирования давления в пневматической системе тягового транспортного средства. Патент на изобретение RU 2239220 12.08.2003.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ НА ГРАФАХ¹

К.Б. Нуртазина (Астана)

nurtazina.k@gmail.com

В 1948 г. Cattaneo С. впервые ввел и через 20 лет Gurtin М. and Pipkin А. обобщили тепловое уравнение с памятью, которое гораздо лучше, чем обычное уравнение теплопроводности описывает физические явления в экстремальных ситуациях, близких к фазовым переходам.

В работе [1] рассматривалась обратная задача для уравнения параболического типа: $u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x)$ на графе-дереве. Во внутренних вершинах задавались условия согласования Кирхгофа-Неймана. По динамическим обратным данным решена задача восстановления топологии графа, длин ребер, а также потенциала q и источника h на ребрах графа. При этом функция p предполагалась известной. В работе [2] исследовались задачи управляемости и обратные задачи для волнового уравнения на деревьях с точечными массами, сосредоточенными во внутренних вершинах.

В данном докладе рассматривается тепловое уравнение с памятью на графе-дереве, положительные массы M_ν прикреплены к каждой внутренней вершине. Оператор отклика $R^T = \{R_{ij}^T\}_{i,j=1}^m$, на $\mathcal{F}^T$ определяется как $(R^T f)(t) = \partial u^f(\cdot, t)|_{\partial\Gamma}$, $0 < t < T$.

Решена динамическая обратная задача: оператор R^T , известный для $T > \text{diam}\Gamma$ однозначно определяет топологию графа-деревя, длин ребер $\{l_j : j = 1, \dots, N\}$, масс $M_\nu : \nu \in V \setminus \partial\Gamma$ и потенциала g на Γ . Если топология известна, то все другие параметры могут быть найдены по главной диагонали $\{R_{ij}^T\}_{i,j=1}^m$ оператора отклика.

Литература

1. Avdonin S. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph / S. Avdonin, J. Bell, K. Nurtazina // Mathematical Methods in Applied Sciences — 2017. — V. 40, № 11. — P. 3973–3981.
2. Al-Musallam F. Control And Inverse Problems For Networks Of Vibrating Strings With Attached Masses / F. Al-Musallam, S. Avdonin, N. Avdonina, J. Edward // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. — 2016. — № 7 (5). — P. 835–841.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК, проект 4290/ГФ4.

© Нуртазина К.Б., 2017

СИМВОЛИЧЕСКИЙ ОБРАЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹

Г.С. Осипенко (Севастополь)

george.osipenko@mail.ru

Рассмотрим гладкую дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

на компактном многообразии M . Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ замкнутое покрытие многообразия M ячейками $M(i)$. Построим ориентированный граф G с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны направленным ребром $i \rightarrow j$ если $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$. Граф G называется символическим образом отображения f относительно покрытия C .

Исследование символического образа позволяет получить полезную информацию о глобальной структуре динамической системы. На примере проверки структурной устойчивости мы покажем как работают методы символического анализа.

Вершина i называется возвратной, если через нее проходит допустимый периодический путь на G . Обозначим множество возвратных вершин через RV . Возвратные вершины i и j являются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через i и j . Множество возвратных вершин RV разбивается на классы эквивалентности $\{H_k\}$. В теории графов классы H_k называются компонентами сильной связности. Обозначим $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$, для которых вершина i является возвратной.

Теорема 1. *$P(d)$ есть замкнутая окрестность цепно-рекуррентного множества CR и, если максимальный диаметр ячеек $d \rightarrow 0$, то $\lim_{d \rightarrow 0} P(d) = CR$.*

На основании этой теоремы создана компьютерная программа, локализующая цепно-рекуррентное множество.

Дифференциал $Df : TM \rightarrow TM$ гинерирует отображение на проективном расслоении P

$$Pf(x, e) = (f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|}), \quad |e| = 1.$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00452).

© Осипенко Г.С., 2017

Пусть $\xi = \{(x_k, e_k)\}$ есть p -периодическая псевдотраектория отображения Pf , тогда показатель Ляпунова для ξ есть

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |\ln |Df(x_k)e_k||.$$

Определим спектр дифференциала как множество $\Sigma(Df) = \{\lambda : \exists \text{ периодические } \varepsilon_k\text{-траектории } \xi_k, \text{ что } \varepsilon_k \rightarrow 0, \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda\}$.

Теорема 2. *Диффеоморфизм f является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве тогда и только тогда, когда спектр дифференциала не содержит нуля.*

Пусть $G(Pf)$ есть символический образ отображения Pf для покрытия $C(P) = \{M(z)\}$. Построим оснащение этого символического образа следующим способом. В ячейке $M(i)$ выберем точку (x_i, e_i) и положим $b[i] = \ln |Df(x_i)e_i|$ для каждой вершины i . Для любого p -периодического пути $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ на $G(PF)$ число $\lambda(\omega) = 1/p \sum_{k=1}^p b[z_k]$ назовем характеристическим показателем пути ω . Спектр оснащенного символического образа $G(Pf)$ определяется как

$$\Sigma(G(PF)) = \{\lambda : \exists \text{ периодические пути } \omega_k, \text{ что } \lambda(\omega_k) \rightarrow \lambda\}.$$

Пусть H есть класс эквивалентных возвратных вершин. Периодический путь $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ назовем простым, если вершины $z_1, \dots, z_p$ различны. Число простых периодических путей конечно. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q\}$ есть набор простых периодических путей класса H , положим $\lambda_{\min} = \min \lambda(\varphi_k)$, $\lambda_{\max} = \max \lambda(\varphi_k)$.

Теорема 3. *1) Спектр оснащенного символического образа $G(PF)$ состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов символического образа $G(Pf)$.*

2) Спектр дифференциала $\Sigma(Df)$ лежит в расширенном спектре оснащенного символического образа

$$\bigcup_k [\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)],$$

где d есть максимальный диаметр ячеек, $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции $\ln |Df(x)e|$.

3) Диффеоморфизм f является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве, если и только если существует число $d_0 > 0$, что расширенный спектр символического образа для покрытия с диаметром $d < d_0$ не содержит нуля.

Создана компьютерная программа для вычисления расширенного спектра символического образа.

Дифференциал Df есть естественный пример линейного расширения отображения f . Рассмотрим другой пример линейного расширения - двойственный дифференциал $\hat{D}f$, который определяется как

$$\hat{D}f(x) = ((Df(x))^*)^{-1} : TM(x) \rightarrow TM(f(x)).$$

Двойственный дифференциал $\hat{D}f$ генерирует динамическую систему на проективном расслоении

$$(x_{n+1}, e_{n+1}) = (f(x_n), \frac{\hat{D}f(x)e}{|\hat{D}f(x)e|}) = P\hat{D}f(x_n, e_n).$$

Спектр двойственного дифференциала $\Sigma(\hat{D}f)$ определяется как спектр усреднения функции $\varphi(x, e) = \ln|\hat{D}f(x)e|$ над псевдотраекториями отображения $P\hat{D}f$.

Рассмотрим символический образ G двойственного дифференциала $P\hat{D}f$. Предположим, что расширенный спектр этого символического образа не содержит нуля. Тогда каждый класс H_k получает расширенный интервал

$$[a_k, b_k] = [\lambda_{min}(H_k) - \vartheta(d), \lambda_{max}(H_k) + \vartheta(d)],$$

который является положительным при $a_k > 0$ или отрицательным при $b_k < 0$, где $\vartheta(d)$ есть модуль непрерывности для $\ln|\hat{D}f(x)e|$. Обозначим H^+ объединение классов с положительными интервалами и H^- с отрицательными интервалами. Будем говорить, что существует связь $H^+ \rightarrow H^-$, если существует допустимый путь из H^+ в H^- на G .

Theorem 4. *Диффеоморфизм f является структурно устойчивым, если и только если существует $d_0 > 0$, что для покрытия $C(P)$ с диаметром $d < d_0$ расширенный спектр символического образа двойственного дифференциала не содержит нуля и не существует связи $H^+ \rightarrow H^-$.*

Имеется компьютерно-ориентированный алгоритм, который проверяет условия теоремы.

Литература

1. Osipenko, G. Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms / G. Osipenko // Lecture Notes in Mathematics. — 2007. — V. 1889.

О ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ МЕРАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

О.В. Охлупина (Брянск)

helga131081@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, σ, α - положительные числа, $T(r, u)$ - характеристика Р. Неванлинны субгармонической функции u в $\mathbb{C}$, $T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$, $u^+ = \max(u, 0)$.

Введём в рассмотрение $SH_{\alpha, \sigma}(C)$ - класс функций u , субгармонических в $\mathbb{C}$, для которых:

$$\int_1^{+\infty} T(r, u) e^{-\sigma r^\alpha} dr < +\infty.$$

Изучены представляющие меры субгармонических функций из класса $SH_{\alpha, \sigma}(C)$.

Теорема. Пусть функция u принадлежит классу $SH_{\alpha, \sigma}(C)$. Тогда представляющая мера μ функции u удовлетворяет соотношению

$$\int_1^{+\infty} \frac{n(t) e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty, \quad (1)$$

где $n(t) = \mu(D_t)$, $|z| < t$.

Обратно: если μ - некоторая борелевская неотрицательная мера в C , для которой выполняется (1), то можно построить в явном виде субгармоническую функцию из класса $SH_{\alpha, \sigma'}(C)$, для произвольного $\sigma' : \sigma' > \frac{1}{e\alpha} + \sigma e^\alpha$, такую, что μ является представляющей мерой этой функции.

Литература

1. Hayman W. K. Subharmonic functions / W. K. Hayman. — Acad. Press, London etc., Vol. 2, 1989. — 591 p.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л. И. Ронкин. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
3. Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н. Введение в теорию весовых L^p -классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко. — Брянск : РИО БГУ, 2009. — 153 с.

СОЗДАНИЕ ТЕСТОВЫХ ВОПРОСОВ С ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В СРЕДЕ MOODLE

Ю.А. Плотникова (Вологда)

japlotnikova@yandex.ru

В последние десятилетия в России как в учебных заведениях, так и на предприятиях все активнее используется электронное обучение, т.е. обучение при помощи информационных и электронных технологий, так называемое e-learning (см. [1]). Завоевывание e-learning всё более прочных позиций в системе образования обусловлено потребностью современного общества в непрерывном, гибком и мобильном обучении и доступе к нему из любой точки. В России электронное обучение традиционно отождествляют с дистанционным обучением (см. [2]), хотя это не совсем одно и то же. Часто e-learning не полностью заменяет, а дополняет традиционное обучение, и от взаимодополнения оба только выигрывают.

В процессе электронного обучения большую роль играет самостоятельная работа обучаемого, при этом преподаватель осуществляет постановку целей и контролирует самостоятельную работу. Одной из форм контроля усвоения знаний является онлайн-тестирование. Оно может использоваться не только преподавателем для контроля, но студентами и для самопроверки. Например, при освоении определенной темы студент, занимающийся дистанционно, может неоднократно проходить тест, просматривать результаты, обсуждать онлайн с преподавателем допущенные ошибки.

Одной из образовательных сред, позволяющих осуществлять электронное обучение, является обучающая среда MOODLE (см. [3]). В среде MOODLE в электронных курсах математических дисциплин для создания тестов можно использовать различные типы вопросов (см. [4]). В случае тестирования с помощью вопросов типов "Множественный выбор", "Верно/Неверно", "На соответствие" или "Числовой ответ" недостатком является то, что один и тот же вопрос может повторяться в тесте у разных студентов даже при достаточно большой базе вопросов. Кроме того, в случае первых трех указанных типов вероятность правильного ответа достаточно высока, даже если студент не знает его. Такие недостатки сводят тестирование к угадыванию, формальности (сдал-забыл), не позво-

ляют развить умение решать математические задачи и творческое мышление студентов.

Опыт автора показывает, что, используя другие типы вопросов в среде MOODLE, можно избежать указанных недостатков. Специфика математических дисциплин позволяет преподавателю использовать для тестирования задачи, ответ к которым является функцией от входных данных. Создать в MOODLE тестовые вопросы в виде задач с меняющимися входными данными можно с помощью с помощью вопросов типов "Вычисляемый", "Множественный вычисляемый" и "Простой вычисляемый" (см. [4]). Задав входные данные вопроса зависящими от параметров, преподаватель формирует отдельную задачу для каждого студента. Чтобы ответить на такой тестовый вопрос-задачу, студент должен именно решить ее, что позволяет сформировать необходимые навыки и умения при изучении математической дисциплины. Практически нулевая вероятность угадывания ответа избавляет тестирование от одного из главных недостатков.

Рассмотрим в качестве примера формирования вычисляемого вопроса следующий: "Вычислить значение производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) ." В случае конкретной функции и точки (x_0, y_0) студент дает ответ в виде числа. Создать большое количество вариантов такого вопроса позволяет задание функции и координат точки зависящими от параметров.

Важно, чтобы при всех возможных входящих значениях параметров формула для ответа была корректной. Для вопросов типа "Множественный вычисляемый" также необходимо, чтобы не возникало одинаковых ответов.

Создание таких вычисляемых вопросов требует по сравнению с другими типами несколько больших затрат времени и более высокого уровня квалификации преподавателя. Взамен это дает возможность сразу получать большое количество вариантов задачи. За счет параметричности, лежащей в их основе, вычисляемые вопросы позволяют внести элемент неожиданности в тестирование и открывают возможности для творчества преподавателя.

Литература

1. Шляхтина С. Перспективы развития дистанционного обучения в мире и в России / С. Шляхтина // КомпьютерПресс. — 2006. — № 1. — Режим доступа: <http://compress.ru/article.aspx?id=14659> (дата обращения: 07.10.2017).

2. Сергеев А. Г. Введение в электронное обучение : монография / А. Г. Сергеев, И. Е. Жигалов, В. В. Баландина. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2012. — 182 с.

3. Официальный сайт обучающей среды MOODLE. — Режим доступа: <https://moodle.com> (дата обращения: 07.10.2017).

4. Сайт обучающей среды MOODLE на русском. — Режим доступа <https://moodle.org/course/view.php?id=25> (дата обращения: 07.10.2017).

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

А.В. Подорога (Москва)
anastasiapodoroga@gmail.com

При математическом описании транспортных потоков используют макроскопический и микроскопический подходы (см. [1, 2]). В рамках макроскопического подхода транспортный поток трактуют как специфический поток сплошной среды, и для моделирования вводят уравнения, схожие с уравнениями гидродинамики. Напротив, при микроскопическом подходе каждый автомобиль представляет собой индивидуальный объект с некоторыми свойствами, и взаимодействие этих объектов приводит к формированию общего транспортного потока. В отличие от задач гидродинамики, где число отдельных частиц крайне велико, число элементов транспортного потока существенно конечно, и появляется возможность сравнивать микро- и макро- подходы, выявляя их связи и особенности.

Напомним, что при макроскопическом подходе основными характеристиками транспортного потока являются плотность $\rho(x, t)$, скорость $v(x, t)$ и интенсивность $q(x, t)$, означающая примерное число автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t . Специфику транспортных задач выражает особое предположение о связи скорости и плотности потока

$$v = V(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \quad (1)$$

где $V(\rho)$ — кусочно гладкая, монотонно убывающая функция.

С учетом предположения (1) получаем основное уравнение дорожного движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V(\rho))}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t). \quad (2)$$

Квазилинейное уравнение (2) аналогично стандартному уравнению неразрывности. Дополним (2) начальным условием

$$\rho(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

и условием L -периодичности

$$\rho(x, t) = \rho(x + L, t). \quad (4)$$

Условие (4) соответствует движению замкнутого транспортного потока по кольцевому шоссе длины $L > 0$.

При численном решении задачи (2)–(4) используют ряд специальных методов, учитывающих особенности квазилинейного уравнения (2) (см. в частности [3], где обсуждаются разностные схемы, метод характеристик, метод частиц и новый специальный метод движения разрывов).

Результаты численного решения квазилинейного уравнения (2) интересно сопоставить с данными, полученными на основе микромоделирования [4, 5]. С помощью разработанной нами имитационной компьютерной программы “Cars” можно находить аналоги макроскопических характеристик транспортного потока и сравнивать их с расчетами по численному решению задачи (2)–(4).

Выясняется, что результаты микромоделирования хорошо согласуются с аналитическими решениями задачи (2)–(4), но с определенными оговорками. Укажем, в частности на проблему учета «вязкости» транспортного потока: в микроскопической модели зависимость (1) реализуется лишь в виде верхней огибающей для «облака» значений (ρ, v) , когда при одной и той же плотности потока скорости дают существенный разброс в зависимости от текущей дорожной ситуации.

Литература

1. Treiber, M. Traffic Flow Dynamics / M. Treiber, A. Kesting // Data, Models and Simulation. — Berlin : Springer-Verlag, 2013. — 506 p.
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учебное пособие / А.В. Гасников и др. ; под ред. А.В. Гасникова. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2013. — 427 с.
3. Подорога, А.В. Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения / А.В. Подорога, И.В. Тихонов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2017. — СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. — С. 216–225.

4. Подорога, А.В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование / А.В. Подорога, И.В. Тихонов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015. — СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. — С. 209–213.

5. Подорога, А.В. О некоторых соотношениях между микроскопическими и макроскопическими параметрами транспортных потоков / А.В. Подорога // Современные методы теории функций и смежные проблемы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 165.

СПЛЕТЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ОПЕРАТОРА ДУНКЛА С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПСЕВДОАЛГЕБРЕ ЧЕРЕДНИКА¹

К.О. Политов (Коломна)

punk.stum@gmail.com

В работе [1] изучается операторное уравнение

$$\nabla_{\varkappa} V = V \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

ассоциированное с алгеброй Чередника $A = \langle 1, x, \frac{d}{dx}, s \rangle$. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования на $\mathbb{R}$, s – оператор отражения на $\mathbb{R}$ ($sf(x) = f(-x)$), $\nabla_{\varkappa} = \frac{d}{dx} - \varkappa s$ – оператор Дункла ($\varkappa$ – оператор умножения на достаточно гладкую функцию) [2] и V – искомый линейный дифференциально-разностный оператор, допускающий сплетение (1).

В [1] получены условия на коэффициенты оператора $V \in A$, и фактически установлено, какие $\varkappa$ допускают сплетение (1).

Рассмотрим задачу (1) при условии, что оператор V принадлежит алгебре Чередника $A^* = \langle A, \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \rangle$ псевдо-дифференциально-разностных операторов (псевдоалгебре Чередника), где $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ – псевдо-дифференциальный оператор, обратный к $\frac{d}{dx}$. В этом случае оператор V примет вид

$$V = \sum_{i=1}^M F_i \frac{d^{-i}}{dx^{-i}} + \sum_{i=1}^M G_i \frac{d^{-i}}{dx^{-i}} s + \sum_{i=0}^{m+1} f_i \frac{d^i}{dx^i} + \sum_{i=0}^m g_i \frac{d^i}{dx^i} s.$$

¹ ГОУ ВО МО "ГЦГУ"

© Политов К.О., 2017

Теорема. Коэффициенты оператора V удовлетворяют следующей системе дифференциально-разностных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_i(x) + (-1)^{i+1} \varkappa G_i(-x) = 0, \quad i = \overline{1, M}, \\ G'_i(x) + 2G_{i+1}(x) + (-1)^{i+1} \varkappa F_i(-x) = 0, \quad i = \overline{1, M}, \\ f'_i(x) + (-1)^{i+1} \varkappa g_i(-x) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ g'_i(x) + 2g_{i-1}(x) + (-1)^{i+1} \varkappa f_i(-x) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad g_{-1} = G_1. \end{array} \right.$$

С учетом функции $\varkappa$, это определенная система порядка $2m+2M+4$. Она допускает итерационный "спуск" о уравнения на $\varkappa$.

ПРИМЕР. Если $M = 1$, $m = 0$, то уравнение на $\varkappa = (\ln \varphi)'$ имеет следующий вид

$$\varphi''' \varphi' \varphi - (\varphi'')^2 \varphi - \varphi'' (\varphi')^2 + 4\varphi'' \varphi^3 - 8(\varphi')^2 \varphi^2 = 0.$$

Литература

1. Мещеряков, В.В. Дифференциально-разностные операторы Дункла и их интегрируемость / В.В. Мещеряков, С.П. Хэкало // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы материалы V научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. — 2013. — С. 51–54.
2. Dunkl, C.F. Differential-difference operators associated to reflection groups / C.F. Dunkl // Trans. Math. Soc. — 1989. — V. 311. — P. 163–183.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В (В) – ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Прилепко (Москва)

prilepko.ai@yandex.ru

Рассматриваются задачи управления ($Au = e$) и наблюдения ($A^*e^* = u^*$) для операторных уравнений первого рода в рефлексивных строго выпуклых банаховых пространствах. Предлагается BUME-метод (Banach uniqueness and existence method) и метод нелинейных монотонных отображений для нахождения оптимальных управлений, формулируется абстрактный принцип максимума.

Ниже рассматриваются вещественные (В)-пространства U , E и их сопряжённые U^* , E^* , как рефлексивные и строго выпуклые (см. [1]).

Задача. Найти элемент $u \in U$ из уравнения

$$Au = e, \quad (1)$$

где $A \in \mathcal{L}(U, E)$ – данный линейный непрерывный оператор, элемент e пространства E задан. Через $u_e \in U$ обозначаем решение задачи (1), а множество всех решений (1) обозначим U_e . Считаем $U_e \neq \emptyset$, если существует решение (1) при $e \neq 0$, причём $N(A) \neq 0$, т.е. $U_e \subset U$, $U_e \neq U$. Решение задачи (1) называется точным управлением (иначе, управлением), а саму задачу (1) называем задачей управления. Оптимальным решением (1) называется решение $u_e^{opt} \equiv u_e^o$, дающее $\min$ простейшему функционалу $F_0(u) = \|u\|_U$. Таким образом, $\|u_e^{opt}\|_U = \inf\{\|u_e\|_U \mid \forall u_e \in U_e\}$.

При рассмотрении различных задач теории управления и наблюдения для ОДУ, а также для уравнений с частными производными U может зависеть от времени, например, $U = L^p(0, T; E)$, $1 < p < \infty$, где E , E^* – рефлексивные, строго выпуклые (В)-пространства, $U^* = L^q(0, T; E^*)$, $1/p + 1/q = 1$. В этом случае U , U^* являются строго выпуклыми рефлексивными (В)-пространствами.

Литература

1. Крейн, С.Г. Функциональный анализ / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. — 544 с.
2. Прилепко А.И. Метод Банаха и монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных В–

**УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА
ЗАЯВОК В СМО С ДИФFUЗИОННОЙ
ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА
И НЕНУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА**

Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головки (Владивосток)
prokopievad@yandex.ru, tatiana@mail.ru, ygolovko@yahoo.com

Системы массового обслуживания (СМО) являются аналитическими моделями информационных сетей и их элементов. Статистический анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока. В данной работе строится математическая модель СМО в виде системы уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с ненулевым коэффициентом сноса.

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, экспоненциальным обслуживанием с параметром μ , емкостью накопителя $N_0 \leq \infty$. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b . Случайный процесс $\lambda(t)$ принимает значения на интервале $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

В теоремах приведены уравнения относительно характеристик числа заявок $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$, полученные с применением динамики Колмогорова [1]. Построены краевые задачи для нестационарной и стационарной плотности диффузионного процесса, нестационарных и стационарных характеристик числа заявок. Вывод уравнений при ненулевом коэффициенте сноса отличается от вывода уравнений при нулевом коэффициенте сноса $a = 0$.

Пусть $x \in [\alpha, \beta]$; $Q_k(t, x) = P\{\nu(t) = k, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t ;
 $q_k(x) = P\{\nu = k, x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ν — число заявок в СМО и λ — интенсивность входного потока в стационарном режиме, $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$ — характеристики числа заявок, $k \geq 0$;

$f(t, x) = P \{x < \lambda(t) < x + dx\} / dx$ – нестационарная плотность интенсивности входного потока $\lambda(t)$; $f(x) = P \{x < \lambda < x + dx\} / dx$ – стационарная плотность интенсивности λ .

Теорема 1. Нестационарная плотность $f(t, x)$ диффузионного процесса $\lambda(t)$ с ненулевым коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{b}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} - a \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$$

с начальным условием $f(0, x) = f_0(x)$ и краевыми условиями

$$\frac{b}{2} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial x} - a f(t, \alpha) = 0, \quad \frac{b}{2} \frac{\partial f(t, \beta)}{\partial x} - a f(t, \beta) = 0.$$

Теорема 2. Стационарная плотность $f(x)$ диффузионного процесса $\lambda(t)$ с ненулевым коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b удовлетворяет уравнению во внутренних точках: $\frac{b}{2} f''(x) - a f'(x) = 0$,

в граничных точках: $\frac{b}{2} f'(\alpha) - a f(\alpha) = 0$, $\frac{b}{2} f'(\beta) - a f(\beta) = 0$.

Теорема 3. Нестационарные характеристики числа заявок $Q_l(t, x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} l = 0 : \quad \frac{\partial Q_0(t, x)}{\partial t} &= -x Q_0(t, x) + \mu Q_1(t, x) - a \frac{\partial Q_0(t, x)}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 Q_0(t, x)}{\partial x^2}, \\ 0 < l < N : \quad \frac{\partial Q_l(t, x)}{\partial t} &= x Q_{l-1}(t, x) - (x + \mu) Q_l(t, x) + \mu Q_{l+1}(t, x) - \\ &- a \frac{\partial Q_l(t, x)}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 Q_l(t, x)}{\partial x^2}, \\ l = N : \quad \frac{\partial Q_N(t, x)}{\partial t} &= x Q_{N-1}(t, x) - \mu Q_N(t, x) - a \frac{\partial Q_N(t, x)}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 Q_N(t, x)}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

с краевыми условиями:

$$\frac{b}{2} \frac{\partial Q_l(t, \alpha)}{\partial x} - a Q_l(t, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial Q_l(t, \beta)}{\partial x} - a Q_l(t, \beta) = 0. \quad \text{С начальным условием: } Q_k(0, x) = \pi_l(x), \text{ причем выполняется условие нормировки:}$$

$$\sum_{l=0}^N Q_l(t, x) = f(t, x).$$

Теорема 4. Стационарные характеристики числа заявок $q_l(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} l = 0 : \quad \frac{b}{2} q_0''(x) - a q_0'(x) - x q_0(x) + \mu q_1(x) &= 0, \\ 0 < l < N : \quad \frac{b}{2} q_l''(x) - a q_l'(x) + x q_{l-1}(x) - (x + \mu) q_l(x) + \mu q_{l+1}(x) &= 0, \\ l = N : \quad \frac{b}{2} q_N''(x) - a q_N'(x) + x q_{N-1}(x) - \mu q_N(x) &= 0; \end{aligned}$$

с краевыми условиями: $\frac{b}{2} q_l'(\alpha) - a q_l(\alpha) = 0$, $\frac{b}{2} q_l'(\beta) - a q_l(\beta) = 0$

причем выполняется условие нормировки: $\sum_{l=0}^N q_l(x) = f(x)$.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. / И.И. Грушко; ред. В.И. Нейман. — М. : Машиностроение, 1979. — 432 с.

К ТЕОРИИ СТЕПЕНИ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ИНДЕКСА И ИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Н.М. Ратинер (Воронеж)

ratiner@phys.vsu.ru

Доклад будет посвящен развитию теории степени для нелинейных собственных фредгольмовых отображений неотрицательного индекса и различных классов их возмущений, а также приложениям построенной степени.

Мы рассматриваем банахово многообразие X как открытое ограниченное подмножество метрического пространства $\hat{X}$ и отображения вида $h = f - g: \bar{X} \rightarrow E$ со значениями в банаховом пространстве E , где f – нелинейное фредгольмово отображение а g нелинейное, вообще говоря, недифференцируемое отображение, которое может принадлежать к одному из классов: конечномерных, компактных, компактно сжимаемых или локально уплотняющих отображений.

На X предполагается заданной так называемая фредгольмова структура. Фредгольмовы структуры были введены в работах К. D. Elworthy, A. J. Tromba, J. Eells, они дают естественную среду для изучения фредгольмовых нелинейных отображений и обобщения на бесконечномерные многообразия результатов конечномерной теории, таких как ориентация, топологическая степень, отношение оснащенной бордантности и др.

Для конструкции степени мы используем группы GL_c -оснащенных бордизмов q -мерных многообразий. Для случая $q = 0$ эти группы дают целочисленную степень, если фредгольмова структура ориентированная, и степень по модулю 2, если фредгольмова структура неориентируемая.

Использованный в конструкции метод конечномерной редукции удобен для продолжение степени на перечисленные выше классы недифференцируемых возмущений фредгольмовых отображений.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00370).

© Ратинер Н.М., 2017

В докладе будут рассмотрены модельные примеры применения степени к задачам в теории дифференциальных уравнений.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ФОЙГТА

Д.А. Роде (Воронеж)

dmitryrode@gmail.ru

В $\Omega \subset R^N$, $N = 2, 3$, $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \partial v / \partial t + \sum_{i=1}^N v_i \partial v / \partial x_i - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega; \quad (1) \\ v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (t, x) \in \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_N(t, x))$ – вектор скорости, $p = p(t, x)$ – давление искомые функции, $\mathcal{E}(v)$ тензор скоростей деформации, с компонентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$.

Данная модель вязкоупругости соответствует механической модели параллельного соединения элементов Ньютона и Скотта-Блэра с уравнением состояния $\sigma = \mu_0 \mathcal{E}(v) + \mu_1 I_{0t}^{1-\alpha} \mathcal{E}(v)$, $0 < \alpha < 1$.

Здесь $I_{0t}^{1-\alpha} z(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} z(s) ds$ является дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка $1 - \alpha$.

Функция $v \in L_2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap W_1^1(0, T; V^{-1})$ называется слабым решением задачи (1), если она удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} d(v, \varphi) / dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \varphi / \partial x_i) + \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (I_{0t}^{1-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)) = \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in V, \quad \text{п.в. } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Теорема. При $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v^0 \in H$ существует слабое решение задачи (1). При $N = 2$ оно единственно.

Результат получен совместно с Орловым В.П. и Плиевым М.А.

Литература

1. Темам, Р. Уравнение Навье-Стокса / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

© Роде Д.А., 2017

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ КЛАССОВ

И.И. ПРИВАЛОВА

Е.Г. Родикова (Брянск)
evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D . При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова Π_q (см. [2]):

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Пусть $0 < p, q < +\infty$. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ называется *коэффициентным мультипликатором* из класса Π_q в класс Харди H^p , если $\forall f \in \Pi_q$, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in H^p$. Обозначается $CM(\Pi_q, H^p)$. Мультипликаторы из пространств Π_q ($q > 1$) в классы Харди H^p ($p > 0$) описаны в [1]. Нами получено решение указанной задачи в классах Π_q ($0 < q < 1$).

Теорема. Пусть $0 < q < 1$, $0 < p \leq +\infty$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$. Для того чтобы $\Lambda = CM(\Pi_p, H^p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{1}{q+1}}\right)\right), \quad c > 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Литература

1. Гаврилов, В.И. Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад) / В.И. Гаврилов, А.В. Субботин, Д.А. Ефимов. — М. : Изд-во Московского ун-та, 2012. — 264 с.
2. Привалов, И.И. Граничные свойства однозначных аналитических функций / И.И. Привалов. — М. : Изд-во МГУ, 1941. — 206 с.
3. Родикова, Е.Г. Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской Междунар. конф. — Петрозаводск : ПетрГУ. — 2012. — С. 64–69.

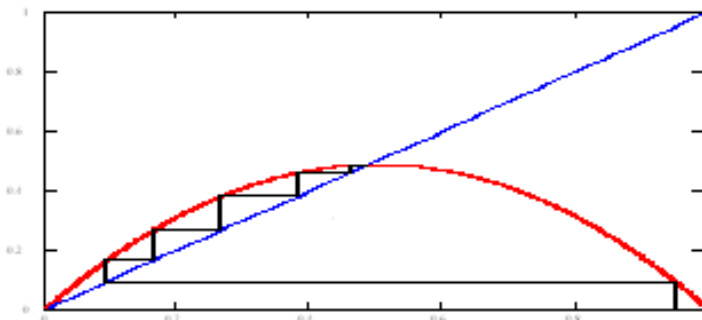
4. Родикова, Е.Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций / Е.Г. Родикова // Вестник Брянского гос. ун-та : точные и естественные науки. — 2012. — № 4. — С. 61–69.

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРИРОСТА КАПИТАЛА

В.А. Родин, С.В. Синегубов (Воронеж)

Рост капитала в банковской сфере с непрерывным потоком денежных поступлений описывается экспоненциальным ростом: $K(t) = K_0 \exp(\beta t / \tau)$. Относительное изменение прироста капитала в уравнении $\frac{dK}{K} = A dt$ есть функция от K , с учетом потерь, ограничиваясь только линейной частью разложения в ряд $A(K) = a - bK$ получаем более реалистическое решение в виде логистической кривой. Капитал со временем выходит на стационарное значение a/b . В финансовой сфере случайные влияния на изменение капитала уже не являются малым возмущением а главным приближением к реальности и описываются стохастическими уравнениями.

В докладе мы приводим простую схему появления итерационной схемы вида Ферхюльста для описания возможного поведения изменения капитала с дискретным приростом. Пусть время поступления капитала дискретно: $t = n\tau$, тогда изменение капитала происходит по формуле $K(n) = K_0(1 + \beta)^n$. Коэффициент прироста описывается уравнением $K(n+1) - K(n) = \beta K(n)$. Если β - константа то мы опять получаем безграничный экспоненциальный рост не отражающий действительность. Если, как и происходит в действительности предположить, что $\beta = \beta(n)$ с увеличением числа периодов пополнения уменьшается и стреми к нулю, то динамика изменения суммы капитала сильно усложняется. Предположим, что $\beta(n) = (K_{max} - K(n))/K_{max}$. Тогда, учитывая два последних равенства и вводя переменную $k_n = K(n)/K_{max}$ мы получаем итерационную схему Ферхюльста для изменения численности популяции с ограничением роста: $k_{n+1} = \lambda k_n(1 - k_n)$ с константой $\lambda = 2$. Известно [1], что в этом случае сумма капитала меняется согласно рисунку 1. Колебание и предел итерациям. В работе [2] приведены и другие возможности: скайлинговые явления и даже хаос.



Литература

1. Скалецкая, Е.И. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла / Е.И. Скалецкая, Е.Я. Фрисман, А.П. Шапиро. — М. : Наука, 1979. — 164 с.
2. Царьков, В.А. О динамике Ферхюльста и динамике роста капитала в экономике / В.А. Царьков // Экономика и математические методы. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 92–97.

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

О.М. Родионова, Ф.В. Голованева (Воронеж)

alexandrbaev@mail.ru

В работе изучается модель малых отклонений от положения равновесия сжатого стержня на упругом основании с локализованными особенностями:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = -\lambda u''_{x\sigma}, \\ u(0) = u''(0) = 0, \\ u(l) = u''(l) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

здесь $p > 0$ — коэффициент, характеризующий материал из которого сделан стержень; Q'_σ — строго возрастающая функция, которая порождает на $[0; l]$ меру и имеет непустое множество точек разрыва; λ — спектральный параметр.

Уравнение в (1), следуя концепции Покорного Ю.В. [1] (и показавшей свою эффективность [2]–[12]), мы понимаем как поточечно

заданное, и в точке $\xi \in S(\sigma)$ ($S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$) уравнение понимается следующим образом:

$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = -\lambda\Delta u'_x(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — полный скачок функции ψ в точке ξ .

Решение математической модели (1) мы будем искать в классе дважды непрерывно дифференцированных функций $u(x)$, вторая квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0; l]$; $(pu''_{xx})'_x(x) - \sigma$ -абсолютно непрерывная на $[0; l]$.

Показано, что существует бесконечно много положительных λ , при каждом из которых задача (1) имеет хотя бы одно нетривиальное решение.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Во-

ронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стильтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

ОБ ОДНОКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В.С. Рыхлов (Саратов)

RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассматривается пучок $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$y^{(4)} + p_1 \lambda y^{(3)} + p_2 \lambda^2 y'' + p_3 \lambda^3 y' + p_4 \lambda^4 y, \quad p_j \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad p_4 \neq 0,$$

и распадающимися краевыми условиями специального вида

$$\sum_{j+s \leq \varkappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad \sum_{j+s \leq \varkappa_{i1}} \beta_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(1) = 0, \quad i = 3, 4;$$

© Рыхлов В.С., 2017

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $0 \leq \kappa_{10} \leq \kappa_{20} \leq 3$, $0 \leq \kappa_{31} \leq \kappa_{41} \leq 3$.

Предполагается, что характеристики пучка простые, отличны от нуля и три из них лежат на одном луче, исходящем из начала. Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, $\omega_4 \notin (-\infty, +\infty)$.

Исследуется вопрос о кратной полноте корневых функций (к.ф.) пучка $L(\lambda)$ в $L_2[0, 1]$. Этот пучок является простейшим из пучков, для которых не выполняются условия теоремы о кратной полноте к.ф. из [1].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Система к.ф. пучка $L(\lambda)$ однократно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.

В основе доказательства лежат результаты, полученные автором в [2].

Литература

1. Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators / V. S. Rykhlov // Results in Mathematics. — 2016. — P. 281–301. doi: 10.1007/s00025-016-0599-7

2. Рыхлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГРУППАМИ КВАНТОВАННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ¹

А.Ю. Савин (Москва)

antonsavin@mail.ru

С представлением группы Ли G квантованными каноническими преобразованиями $\Phi_g : H^s(M) \rightarrow H^s(M)$, $g \in G$, на гладком многообразии M ассоциирован класс G -операторов вида

$$D = \int_G D_g \Phi_g dg : H^s(M) \longrightarrow H^s(M), \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке DFG и РФФИ (проекты № 16-01-00373, 15-01-08392).

© Савин А.Ю., 2017

где D_g — гладкое семейство (псевдо)дифференциальных операторов на M . В докладе даётся понятие символа и устанавливается фредгольмовость эллиптических операторов вида (1). Отметим, что операторы (1) представляют интерес со многих точек зрения. Например, они интересны с точки зрения некоммутативной геометрии, так как символы таких операторов образуют существенно некоммутативные алгебры — скрещенные произведения с группой G . Ранее в литературе рассматривались G -операторы, в которых операторы Φ_g были операторами сдвига (замены переменных), индуцированными действием группы на основном многообразии. В нашей работе рассматривается существенно более общий случай квантованных канонических преобразований. Одной из мотивировок для такого обобщения могут служить недавние работы Bär С., Strohmaier А. (2015) об индексе краевых задач для оператора Дирака в лоренцевой геометрии (в которой проблема индекса сводится на границу к тёплицеву аналогу оператора (1)). Наконец, наши результаты в качестве частных случаев дают теоремы конечности во многих известных теориях.

Доклад основан на результатах совместной работы докладчика с Б.Ю. Стерниным (Москва) и Э. Шпроэ (Ганновер).

Литература

1. Savin, A. Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations / A. Savin, E. Schrohe, B. Sternin // ArXiv: 1612.02981. 2016.

СХОДИМОСТЬ СХЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ¹

В.В. Семёнов (Киев)

semenov.volodya@gmail.com

Пусть H — действительное гильбертово пространство, $A_i : H \rightarrow {}_2H$ — монотонный оператор, $i = \overline{1, p}$; $A = \sum_{i=1}^p A_i$ — максимальный монотонный оператор. Рассмотрим операторное включение:

$$\text{найти } x \in H : 0 \in Ax = (A_1 + A_2 + \dots + A_p)x. \quad (1)$$

Множество решений задачи (1) обозначим S .

Выберем последовательность положительных чисел $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$.

¹ Работа выполнена при поддержке ГФФИ Украины (проект № F74/24921).
© Семёнов В.В., 2017

Цель доклада — рассказ о доказательстве сходимости и опыте использования следующих явных итерационных методов расщепления для решения включения (1). Под явным мы понимаем метод не содержащий операций вычисления резольвент операторов A_i .

Алгоритм 1 (барицентрический).

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_{(n,i)} = x_n - \lambda_n u_{(n,i)}, \quad u_{(n,i)} \in A_i x_n, \quad i = \overline{1, p}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{p} y_{n,1} + \frac{1}{p} y_{n,2} + \dots + \frac{1}{p} y_{n,p}. \end{cases}$$

Алгоритм 2 (последовательный).

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_{(n,0)} = x_n, \\ y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}, \quad u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \quad i = \overline{1, p}, \\ x_{n+1} = y_{n,p}. \end{cases}$$

Даже в случае $p = 1$, когда методы совпадают с классическим «субградиентным методом», на таком уровне общности не приходится ожидать сходимости последовательностей (x_n) . Поэтому основной целью будет доказательство слабой сходимости в H последовательности чезаровских средних

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

СТРОГО СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p ¹

Е.М. Семенов (Воронеж)

alexandrbaev@mail.ru

Линейный оператор A , действующий из банахова пространства E в банахово пространство F , называется строго сингулярным (кратко $A \in SS(E, F)$), если для любого бесконечномерного подпространства $Q \subset E$ сужение A на Q не является изоморфизмом. Ясно, $K(E, F) \subset SS(E, F)$, где $K(E, F)$ — множество компактных операторов, действующих из E в F .

¹ Автор был поддержан РФФИ, грант 17-01-00138.

© Семенов Е.М., 2017

Теорема 1. Если $1 < p, q < \infty$, то $SS(L_p, L_q) = K(L_p, L_q)$ тогда и только тогда, когда $p \geq 2 \geq q$, где $L_p = L_p[0, 1]$.

Если $p = q = 2$, то этот результат известен и следует из классической теоремы Калкина.

Обозначим через A^* сопряженный к A оператор.

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$. Существует $A \in SS(L_p, L_q)$ такой, что $A^* \in SS(L_{q'}, L_{p'})$ тогда и только тогда, когда $p > q > 2$.

Если линейный оператор A ограничен из L_1 в L_∞ , то обозначим через $L(A)$ его L -характеристику, т. е. множество таких (p, q) , что A ограничен из L_p в L_q , а через $V(A)$ обозначим множество таких (p, q) , что $A \in SS(L_p, L_q) \setminus K(L_p, L_q)$.

Теорема 3. Пусть A ограничен из L_1 в L_∞ . Тогда $V(A)$ содержится в границе $L(A)$.

Теорема 4. Если $0 < \lambda < 1$, то существует такой линейный оператор A , что $(p, q) \in V(A)$ для всех (p, q) , удовлетворяющих условию $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda$.

Совместная работа с F. L. Hernandez, P. Tradacete [1].

Литература

1. Hernandez F.L. Interpolation and Extrapolation of Strictly Singular Operators between L_p Spaces / F. L. Hernandez, E. M. Semenov, P. Tradacete // Adv. in Math. — 2017. — V. 316. — P. 667–690.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СВЯЗАННЫХ ОБРАТНЫХ МАЯТНИКОВ

М.Е. Семёнов, М.А. Попов (Воронеж)

mkl150@mail.ru, soeltic@gmail.com

В настоящей работе рассматривается система, состоящая из двух перевернутых маятников, стоящих на подвижной тележке, связанных между собой пружиной с нелинейной жесткостью k . Основная задача работы заключается в формировании такого закона управления горизонтальным движением точки крепления, при котором фазовые координаты системы остаются в ограниченной области фазового пространства. Иными словами, речь идёт об условиях, накладываемых на параметры системы и управление, обеспечивающих диссипативность системы. Задачу стабилизации будем решать в предположении, что тележка не имеет массы и движется без трения. В фазовом пространстве существует три точки равновесия,

из которых вещественные координаты имеет только одна. Исследуем устойчивость этого единственного стационарного решения по первому приближению Ляпунова [2] — линеаризуем матрицу системы и найдём собственные числа: $\det(\Theta - \lambda E) = 0$, где $\Theta = \frac{\partial F}{\partial z}$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Характеристическое уравнение можно переписать в следующем виде $\lambda^4 + \gamma_1 \lambda^3 + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda + \gamma_4 = 0$. Найдём собственные значения в единственной стационарной точке. Во избежание громоздких выкладок, дальнейшие вычисления приведём для случая, в котором: величина управления $D = 10$; начальная жёсткость пружины $k_0 = 14.5$; высота крепления пружины $h = 0.1$; длины и массы осцилляторов $l_1 = 0.1$, $l_2 = 0.15$, $m_1 = 0.1$, $m_2 = 0.2$. Получим собственные значения: $\lambda_1 = -0.8794 + i10.9709$, $\lambda_2 = -0.8794 - i10.9709$, $\lambda_3 = -0.5705$, $\lambda_4 = -0.3231$. Поскольку старший показатель Ляпунова $\Lambda < 0$ то при данных выбранных параметрах система устойчива [1].

Литература

1. Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. — М. : Физматлит, 2006. — 356 с.
2. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы / И.В. Мирошник. — СПб. : Питер, 2006. — 272 с.

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА–ЭРДЕЙИ

С.М. Ситник (Белгород)

mathsms@yandex.ru

В докладе излагается теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, которые имеют многочисленные приложения в дифференциальных уравнениях с особенностями в коэффициентах типа Эйлера–Пуассона–Дарбу или B — эллиптических уравнениях в терминологии И.А.Киприянова, теории функций и функциональном анализе, дробном исчислении, а также в задачах, связанных со специальными функциями, интегральными преобразованиями, томографией, преобразованием Радона и рядом других приложений, см. [1]–[6].

Литература

1. Sitnik S.M. Transmutations and Applications : a Survey // 2012. — arXiv:1012.3741. — 141 P.

© Ситник С.М., 2017

2. Sitnik S.M. Buschman–Erdélyi transmutations, classification and applications // Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. — Cambridge Scientific Publishers, Cottenham. — pp. 171–201. (arXiv version <http://arxiv.org/abs/1304.2114v1>).

3. Sitnik S.M. A short survey of recent results on Buschman–Erdelyi transmutations // Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski’s contributions). 2017. — Vol. 8, Issue 1. — pp. 140–157.

4. Shishkina E.L., Sitnik S.M. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method // Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). 2017. — Vol. 2017, No. 177. — pp. 1–20.

5. Катрахов В.В., Ситник С.М. Композиционный метод построения В-эллиптических, В-гиперболических и В-параболических операторов преобразования // ДАН СССР. 1994. — Том 337, № 3. — с. 307–311.

6. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи // ДАН СССР. 1991. — Том 320, № 6. — с. 1326–1330.

АФФИННЫЕ БАЗИСЫ РИССА¹

П.А. Терехин (Саратов)

terekhinpa@mail.ru

Пусть $f \in L^2[0, 1]$, $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Системой сжатий и сдвигов функции f (или аффинной системой типа Хаара) называется последовательность функций

$$f_0(t) = 1, \quad f_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2} f(2^k t - l), & t \in [l2^{-k}, (l+1)2^{-k}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $n = 2^k + l$, $k = 0, 1, \dots$ и $l = 0, \dots, 2^k - 1$. Для функции $f = h = \chi_{(0, \frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}$ получаем классическую систему Хаара $\{h_n\}_{n=0}^\infty$, нормированную в $L^2[0, 1]$.

Достаточные условия на функцию f , при выполнении которых аффинная система $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ образует базис Рисса, приведены в [1]. Следующая теорема прямо следует из результатов работ [2], [3].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

© Терехин П.А., 2017

Теорема 1. *Всякий аффинный базис Рисса $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ эквивалентен системе Хаара $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ в каждом пространстве $L^p[0, 1]$ при $1 < p < 2$.*

Заметим, что согласно примеру Т. Тао [4] из обратимости фреймового оператора $Tx = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (x, f_{k,l}) f_{k,l}$ в $L^2(\mathbb{R})$ не следует его обратимость в $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$. Здесь $f_{k,l}(t) = 2^{k/2} f(2^k t - l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$ и $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Литература

1. Терехин, П.А. Аффинные базисы Рисса и дуальная функция / П.А. Терехин // Матем. сборник. — 2016. — Т. 207, № 9. — С. 111–143.
2. Асташкин, С.В. Об ограниченности оператора, порожденного мультисдвигом Хаара / С.В. Асташкин, П.А. Терехин // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 476, № 2. — С. 133–135.
3. Astashkin, S.V. Sequences of dilations and translations in function spaces / S.V. Astashkin, P.A. Terekhin // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — V. 457, № 1. — P. 645–671.
4. Tao, T. L^p non-invertibility of frame operators, <https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/inverse.dvi>

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

С.Н. Тимергалиев, Р.С. Якушев (Казань)

Samat_tim@mail.ru, Sultanich@km.ru

В произвольной односвязной ограниченной области V , занятой упругим телом, рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\sigma_{x_j}^{kj} + f_k + X_k = 0, k = \overline{1, 3} \quad (1)$$

(здесь и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3), в которой приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma^{kj} &= B^{kijnm} \varepsilon_{nm}, n \leq m, j, k = \overline{1, 3}; \quad \varepsilon_{kj} = e_{kj} + \chi_{kj}, \quad e_{jj} = u_{jx_j}, \\ e_{jk} &= u_{jx_k} + u_{kx_j}, \quad \chi_{jj} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_j^2)/2, \quad \chi_{jk} = -\omega_j \omega_k, \\ j &\neq k, j, k = \overline{1, 3}; \quad \omega_1 = (u_{3x_2} - u_{2x_3})/2, \quad \omega_2 = (u_{1x_3} - u_{3x_1})/2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\omega_3 = (u_{2x_1} - u_{1x_2})/2; \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j3}\omega_2 - \sigma^{j2}\omega_3),$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j1}\omega_3 - \sigma^{j3}\omega_1), \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j2}\omega_1 - \sigma^{j1}\omega_2);$$

$X_k(x)$, $B^{kjnm} = B^{k j n m}(x)$ — известные функции переменной $x = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющие условиям $B^{kjnm} = B^{nmkj} = B^{jknm}$; x_1, x_2, x_3 — прямоугольные декартовы координаты точки x области V .

Система уравнений (1) совместно с соотношениями (2) описывает состояние равновесия упругого анизотропного неоднородного тела, при этом $\sigma^{kj} = \sigma^{jk}$ — компоненты напряжений, $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}$ — компоненты деформаций, ω_k — углы поворота элемента тела вокруг оси Ox_k , $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений точек упругого тела, $X_k(k = \overline{1, 3})$ — компоненты объемных внешних сил, действующих на упругое тело, $B^{kjnm}(x)$ — упругие характеристики тела.

Пусть выполнены следующие условия: (а) квадратичная форма $B^{jknm}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{nm}$ положительно определена в $\overline{V}$; (б) упругие характеристики $B^{jknm} \in W_p^{(1)}(V)$, $p > 3$, $j, k, n, m = \overline{1, 3}$; (в) внешние силы $X_k \in L_p(V)$, $p > 3$, $k = \overline{1, 3}$.

Задача. Требуется найти решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$ системы (1) в области V , удовлетворяющее на его границе ∂V условию $u = 0$.

Задачу сведем к задаче в шаре. Пусть $y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) \in W_p^{(2)}(V)$ — взаимно однозначное отображение области V на шар $S_R : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq R^2$ и $x = \psi(y) \in W_p^{(2)}(S_R)$ — отображение, обратное $y = \varphi(x)$. Если в системе (1) напряжения и деформации заменить их выражениями из (2) и после этого перейти к новым переменным y_j , $j = \overline{1, 3}$, то в шаре S_R получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно $u = (u_1, u_2, u_3)$ вида

$$a_{kj}^{nm} u_{jy_n y_m} + h_k(u) + g_k(u) + X_k = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где $h_k(u)$ ($k = \overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(S_R)$ в $L_p(S_R)$, отображающие $W_p^{(2)}(S_R)$ в $C_\alpha(\overline{S_R})$, $\alpha = (p-3)/p$, $p > 3$; $g_k(u)$ ($k = \overline{1, 3}$) — нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(S_R)$ в $L_p(S_R)$; $a_{kj}^{nm} \in C_\alpha(\overline{S_R})$ — известные функции, зависящие от упругих характеристик B^{ijkn} .

Решение задачи для системы (3) ищем в виде

$$u(y) = \iiint_{S_R} G(x, y) \rho(x) dx \equiv u(\rho), \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ — произвольная вектор-функция, принадлежащая пространству $L_p(S_R)$, $p > 3$; $G(x, y)$ — гармоническая функция Грина задачи Дирихле для шара S_R .

Для определения вектор-функции ρ получим систему трехмерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$P_{kj}(\rho_j) = g_k(\rho) + X_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

где

$$P_{kj}(\rho_j) = \frac{1}{3}(a_{kj}^{11} + a_{kj}^{22} + a_{kj}^{33})\rho_j - \frac{1}{4\pi} a_{kj}^{nm} \iiint_{E_3} \frac{f_{nm}(\theta)}{|x - y|^3} \rho_j^*(x) dx - h_k(\rho_j)$$

(по j нет суммирования), $g_k(\rho) \equiv g_k(u(\rho))$, $h_k(\rho) \equiv h_k(u(\rho))$, $f_{nm}(\theta) = 3\theta_n \theta_m - \delta_{nm}$, $\theta_j = (x_j - y_j)/|x - y|$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\rho_j^*(x) = \rho_j(x)$ при $x \in S_R$ и $\rho_j^*(x) = -(R^5/|x|^5)\rho_j(R^2 x/|x|^2)$ при $x \in \overline{S_R}$; δ_{nm} — символ Кронекера, E_3 — трехмерное евклидово пространство.

Отметим, что $P_{kj}(j, k = \overline{1, 3})$ — линейные ограниченные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$. При изучении разрешимости системы (4), в которой правую часть временно считаем известной, будем следовать [1]. Через $\Phi_{kj}(y, \theta)$ обозначим символ сингулярного оператора $P_{kj}(\rho_j)$ (по j нет суммирования). Используя формулу из ([1], с.109), вычисляем символ $\Phi_{kj}(y, \theta) = a_{kj}^{nm}(y)\theta_n \theta_m$, $k, j = \overline{1, 3}$. Можно показать, что при выполнении условия (а) квадратичные формы $\Phi_{jj}(y, \theta)$ ($j = \overline{1, 3}$) являются положительно определенными. Обозначим

$$\Delta_1 = \Phi_{11}(y, \theta), \quad \Delta_2 = \det(\Phi_{jk}(y, \theta))_{2 \times 2}, \quad \Delta_3 = \det(\Phi_{jk}(y, \theta))_{3 \times 3}.$$

Тогда $|\Delta_1| \geq c > 0 \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1$. Предположим, что упругие характеристики B^{jknm} таковы, что выполняются условия $|\Delta_j| \geq c > 0$ ($j = 2, 3$) $\forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1$. Тогда точные нижние границы модулей определителей Δ_j ($j = \overline{1, 3}$) положительны. Следовательно ([1], с.192), индекс системы уравнений (4) равен нулю и к ней применима альтернатива Фредгольма. Нетрудно показать, что

система (4) при $g_k(\rho) + X_k = 0 (k = \overline{1, 3})$ имеет только нулевое решение в $L_p(S_R), p > 3$. Тогда система (4) сведется к эквивалентной системе вида

$$\rho - G\rho = 0 \quad (5)$$

с нелинейным ограниченным оператором $G\rho$ в $L_p(S_R), p > 3$, причем для любых $\rho^j (j = 1, 2) \in L_p(S_R), p > 3$, принадлежащих шару $\|\rho^j\|_{L_p(S_R)} < r$, справедлива оценка $\|G\rho^1 - G\rho^2\|_{L_p(S_R)} \leq q\|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(S_R)}, \quad q = cr(1 + r)$.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на упругое тело, таковы, что выполняются условия

$$q < 1, \quad \|G0\|_{L_p(S_R)} < (1 - q)r.$$

В этих условиях к уравнению (5) можно применить принцип сжатых отображений ([2], с.146), согласно которому уравнение (5) в шаре $\|\rho\|_{L_p(S_R)} < r$ имеет единственное решение $\rho \in L_p(S_R), p > 3$.

Литература

1. Михлин, С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. — М. : Физматгиз, 1962. — 255 с.
2. Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Гостехиздат, 1956. — 392 с.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

И.В. Тихонов, Д.Г. Цветкович, В.Б. Шерстюков (Москва)
ivtikh@mail.ru, dianacve@inbox.ru, sherub73@gmail.com

Недавно замечено [1], что при некоторых частных выборах порождающей функции $f \in C[0, 1]$ нули полиномов Бернштейна

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1 - z)^{n-k}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ведут себя весьма регулярным образом и стягиваются к специальным подмножествам в плоскости $\mathbb{C}$. Такие подмножества естественно называть *аттракторами нулей* (см. [2]). В докладе будет подробно освещена данная тематика. В частности, планируется

- обсудить общую постановку задачи и основные подходы к ее решению,
- дать полную классификацию аттракторов нулей, возникающих для кусочно линейных порождающих функций f ,
- показать связь строения аттракторов с областью сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области,
- раскрыть возможности численного нахождения нулей для описания точной области сходимости полиномов Бернштейна.

Значимая часть исследований проводится компьютерными средствами. Некоторые результаты удастся обосновать аналитически. Дополнительную информацию см. в [2]–[5].

Литература

1. Новиков, И.Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши / И.Я. Новиков // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, вып. 2. — С. 239–253.
2. Тихонов, И.В. Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — № 2. — С. 59–73.
3. Тихонов, И.В. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XVII международной научной конференции. — Смоленск : СмолГУ, 2016. — Т. 17. — С. 224–227.
4. Тихонов, И.В. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016. — СПб : РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. — С. 139–145.
5. Цветкович, Д.Г. О некоторых численных соотношениях, связанных с распределением нулей полиномов Бернштейна / Д.Г. Цветкович // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. — Смоленск : СмолГУ, 2017. — Т. 18. — С. 46–50.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В.И. Усков (Воронеж)

vum1@yandex.ru

Рассматривается задача о нахождении функции $U(x, t)$, дважды непрерывно дифференцируемой по $x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ и дважды непрерывно дифференцируемой по $t \in [0, T]$, удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c(x, t)U(x, t) = \varphi(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega = \left[0, \frac{2\pi}{b}\right] \times [0, T],$$

и условиям

$$\begin{cases} U(x, 0) = h(x), & x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right], \\ U(0, t) = U\left(\frac{2\pi}{b}, t\right), & t \in [0, T], \\ h(0) = h\left(\frac{2\pi}{b}\right), \end{cases} \quad (2)$$

где a, b — постоянные, $a \neq 0, b > 0$; $c(x, t), \varphi(x, t), h(x)$ — заданные функции: $h(x)$ непрерывно дифференцируемая по $x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$; $c(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ — непрерывны в Ω и дифференцируемы по $x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$; функция $c(x, t)$ удовлетворяет равенству $c(0, t) = c\left(\frac{2\pi}{b}, t\right)$.

Поставленная задача сводится к равносильной задаче вида:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} = B(x, t)u(x, t) + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x), & x \in \left[0, \frac{2\pi}{b}\right], \\ u(0, t) = u\left(\frac{2\pi}{b}, t\right), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4)$$

задаваемой в банаховом пространстве

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C \left[0, \frac{2\pi}{b} \right], \quad i = 1, 2 \right\},$$

с оператором вида

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \alpha \\ \beta & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

имеющим область определения

$$\text{dom } A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : y_i(x) \in C^2 \left[0, \frac{2\pi}{b} \right], y_i(0) = y_i \left(\frac{2\pi}{b} \right), i = 1, 2 \right\}.$$

По сравнению с работой [1] изменена постановка задачи (1), (2): коэффициент c в уравнении теперь зависит от переменных; задача ставится без второго начального условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{h}(x), & x \in \left[0, \frac{2\pi}{b} \right], \\ \tilde{h}(0) = \tilde{h} \left(\frac{2\pi}{b} \right), \end{cases}$$

где $\tilde{h}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in \left[0, \frac{2\pi}{b} \right]$ функция. Это условие необходимо только для обоснования существования и единственности решения.

В статье [2] решена задача (3), (4) в случае, если B -жордановы цепочки оператора A имеют максимальную длину 1.

В работе [3] изучен на наличие свойств вырожденности оператор вида (5).

Литература

1. Усков, В.И. Решение уравнения четвёртого порядка соболевского типа / В.И. Усков // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 201–202.

2. Баев, А.Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А.Д. Баев, С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

3. Зубова, С.П. О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора / С.П. Зубова, В.И. Усков // Естественные и математические науки : научные приоритеты учёных. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. — Пермь, 2016. — Вып. 1. — С. 9–12.

КЛЮЧ К ТАЙНАМ КОМПЬЮТЕРОВ...

О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, Н.Б. Ускова (Воронеж)

kaplieva@amm.vsu.ru

Приведем полностью высказывание Никлауса Вирта, вынесенное в заголовок [1]: «Ключ к тайнам компьютеров в гармонии математики, инженерии и программирования».

Никлаус Вирт — известный ученый, профессор, директор института информатики Швейцарской высшей политехнической школы в Цюрихе является создателем языка программирования Паскаль. Этот язык был назван в честь Блеза Паскаля (19.04.1623–19.08.1662), французского математика, физика и философа, который в 19-летнем возрасте сконструировал счетную машину для двух арифметических действий (сложения и вычитания), чтобы облегчить труд своего отца — сборщика налогов.

На многих мероприятиях факультета ПММ ВГУ демонстрируется видеofilm о выступлении Никлауса Вирта в сентябре 2006 года на Международной конференции программистов в Нижегородском государственном университете. Фильм сняли студенты ПММ ВГУ, которые как победители Всероссийской студенческой олимпиады 2005 года по программированию присутствовали на выступлении Н. Вирта.

Воронежский государственный университет в течение десяти лет выигрывал гранты Федеральной целевой программ «Государственная поддержка интеграции науки и высшего образования» и был головным вузом организации и проведения третьего (основного) тура Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» [1]. Олимпиада 2007 года была посвящена памяти выдающегося ученого, математика с мировым именем, профессора ВГУ Селима Григорьевича Крейна, который считается одним из первых в СССР авторов расчетных программ для ЭВМ.

Литература

1. Горбенко, О.Д. Воронежский государственный университет — базовый вуз Всероссийских студенческих олимпиад «Информатика. Программирование. Информационные технологии» / О.Д. Горбенко, О.Ф. Ускова, А.И. Шашкин // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Проблемы высшего образования. — 2012. — № 2. — С. 51–56.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА¹

В.Е. Федоров, А.В. Нагуманова (Челябинск)

kar@csu.ru, urazaeva_anna@mail.ru

С использованием подхода, развитого в работе [1] при исследовании одного класса обратных задач для эволюционных уравнений, разрешенных относительно первой производной, результаты о корректности обратных задач для вырожденных эволюционных уравнений первого порядка с регулярной парой операторов [2] обобщены на случай уравнений дробного порядка в смысле Капуто, включая уравнения произвольного целого порядка.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (L, p) -ограничен. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} D_t^\alpha Lx(t) &= Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \\ (Px)^{(k)}(0) &= x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \int_0^T x(t)d\mu(t) &= x_T, \end{aligned} \tag{1}$$

где $P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda L - M)^{-1} L d\lambda$, контур γ охватывает $\sigma^L(M)$, функция $\varphi \in C([0, T]; \mathbf{R})$ задана, вектор $u \in \mathcal{Y}$ и $x : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ — искомые.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, оператор M (L, p) -ограничен, при $n = 0, 1, \dots, p$ $(D_t^\alpha)^n \varphi \in C([0, T]; \mathbf{R})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (1) однозначно разрешима в

том и только том случае, когда $\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$, $\chi(z) \neq 0$ при всех $z \in \sigma^L(M)$. При выполнении этих условий задача корректна.

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание №1.6462.2017/БЧ.

© Федоров В.Е., Нагуманова А.В., 2017

Литература

1. Тихонов, И. В. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида / И.В. Тихонов, Ю.С. Эйдельман // Мат. заметки. — 1994. — Т. 94, № 2. — С. 99–115.

2. Fedorov, V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2004. — V. 12, № 4. — P. 387–395.

СОВПАДЕНИЯ И ОБЩИЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Т.Н. Фоменко (Москва)

tn-fomenko@yandex.ru

Доклад представляет собой обзор ряда работ Т.Н. Фоменко, а также совместных работ Т.Н. Фоменко и Д.А. Подоприхина 2016–2017 годов в теории совпадений и неподвижных точек семейств отображений упорядоченных множеств.

В *теории неподвижных точек* отображений упорядоченных множеств классическими результатами, как известно, являются теоремы Кнастера-Тарского (Knaster-Tarski) для однозначного изотонного отображения, Смитсона (Smithson) для многозначного изотонного отображения, а также известная теорема Цермело (Zermelo) о неподвижной точке так называемого регрессивного отображения (см. [5,6]). Все эти результаты имеют большое количество приложений в самых разных областях математики и за ее пределами. Существенные (и возможно первые) результаты в *теории совпадений* отображений упорядоченных множеств, для случая двух отображений, одно из которых накрывающее, а другое изотонное, были получены в совместных работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского и С.Е. Жуковского [7–10] в 2013–2016 годах.

Эта тематика была развита совместных работах Т.Н. Фоменко и Д.А. Подоприхина [1–3], в работе Т.Н. Фоменко [4] и продолжена в нескольких пока не опубликованных работах. Был рассмотрен вопрос о редукции задачи о совпадениях двух отображений, одно из которых накрывающее, а другое изотонное, к задаче о неподвижных точках композиции изотонного отображения с обратным к накрывающему отображению. Получены достаточные условия для

такой редукции, рассмотрены различия свойств множества совпадений двух таких отображений, с одной стороны, и множества неподвижных точек указанной композиции, с другой стороны. Удалось уточнить некоторые результаты [7–10] о совпадениях двух отображений. Получены теоремы о совпадениях семейства многозначных отображений и новые результаты об итерационном поиске точек совпадения.

Результаты работ [1–3], как и теоремы Арутюнова с соавторами [7–10], обобщают теорему Смитсона и вытекающую из нее теорему Кнастера-Тарского, однако они не охватывают теорему Цермело. Теорема Цермело была обобщена Ячимским (Y. Yachymski) (см., например, [5]). Этот результат Ячимского, с одной стороны, и перечисленные выше результаты о неподвижных точках, с другой стороны, не следуют друг из друга. Естественно возник вопрос: нельзя ли получить более общие теоремы о неподвижных точках и совпадениях, из которых вытекали бы все перечисленные выше результаты? Недавно Т.Н. Фоменко удалось дать положительный ответ на этот вопрос ([4] и др.). Следует отметить, что в полученных теоремах рассматриваемые отображения не предполагаются накрывающими, изотонными или регрессивными. Вместо этого требуется существование в упорядоченном множестве специальных цепей, обладающих нижними границами с определенными свойствами.

Другие недавние результаты Т.Н. Фоменко и Д.А. Подоприхина связаны с аналогом понятия гомотопии отображений упорядоченных множеств, изобретенного в 1984 году (для изотонных отображений) Уолкером (Walker) [11]. С помощью обобщения этого понятия (без требования изотонности), исследована задача о сохранении, при некоторых дискретных изменениях, свойства пары отображений упорядоченных множеств иметь точку совпадения, а также аналогичная задача о сохранении свойства отображения иметь неподвижную точку.

Еще один важный аспект теории неподвижных точек и совпадений отображений упорядоченных множеств — метрический. Существуют способы упорядочения метрического пространства, основываясь на его метрике и некоторых дополнительных структурах. Это дает возможность переносить некоторые теоремы о неподвижных точках и совпадениях отображений упорядоченных множеств в категорию метрических пространств. Например, такими способами из теорем Смитсона и Цермело выводится известная теорема Надлера о неподвижной точке многозначного отображения (см., например,

[5]). Таким образом, полученные новые теоремы о неподвижных точках и совпадениях отображений упорядоченных множеств позволяют получить соответствующие новые теоремы в метрических пространствах.

В докладе будут изложены некоторые из перечисленных результатов.

Литература

1. Fomenko, T.N. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets / T.N. Fomenko, D.A. Podoprikin // *Journal of Fixed Point Theory and its Applications*. — 2016. — V. 18, № 4. — P. 823–842.

2. Подопрехин, Д.А. О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств / Д.А. Подопрехин, Т.Н. Фоменко // *Доклады Академии Наук*. — 2016. — Т. 471, № 1. — С. 16–18.

3. Fomenko, T.N. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered sets / T.N. Fomenko, D.A. Podoprikin // *Topology and its Applications*. — 2017. — V. 221. — С. 275–285.

4. Фоменко, Т.Н. Неподвижные точки и совпадения в упорядоченных множествах / Т.Н. Фоменко // *Доклады Академии Наук*. — 2017. — Т. 474, № 5. — С. 550–552.

5. Kirk, W.A. Handbook of metric fixed point theory / W.A. Kirk, B. Sims. — Springer Science & Business Media, 2001.

6. Smithson, R.E. Fixed points of order preserving multifunctions / R.E. Smithson // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1971. — V. 28. — P. 304–310.

7. Арутюнов, А.В. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах / А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский // *Доклады Академии Наук*. — 2013. — Т. 453, № 5. — С. 475–478.

8. Арутюнов, А.В. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах / А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский // *Доклады Академии Наук*. — 2013. — Т. 453, № 6. — С. 595–598.

9. Arutyunov, A.V. Coincidence Points Principle for Mappings in Partially Ordered Spaces / A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy // *Topol. and Its Appl.* — 2015. — V. 179. — P. 13 – 33.

10. Arutyunov, A.V. Coincidence Points Principle for Set-Valued Mappings in Partially Ordered Spaces / A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy // *Topol. and Its Appl.* — 2016. — V. 201. — P. 330 – 343.

11. Walker, J.W. Isotone relations and the fixed point property for posets / J.W. Walker // Discrete Mathematics. — 1984. — V. 48, № 2–3. — P. 275–288.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Фомин (Тамбов)

vasiliyfomin@bk.ru

Пусть для уравнения (1) $y^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i y^{(m-i)}(x) + a_m y(x) = 0$

требуется интерполировать его решение (2) $y(x) = \sum_{i=1}^m C_i y_i(x)$ на отрезке $[a, b]$ некоторым многочленом $P_N(x) : y(x) \approx P_N(x)$ с заданной точностью $\delta > 0$: $\|R_N\| \leq \delta$, где $R_N(x) = y(x) - P_N(x)$ (здесь и в дальнейшем используется норма $\|u\| = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$ пространства $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $u = u(x)$).

Рассмотрим произвольный фиксированный набор положительных чисел $\{\delta_i\} = \{\delta_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющих условию (3)

$\sum_{i=1}^m |C_i| \delta_i \leq \delta$. Интерполируем на отрезке $[a, b]$ каждое решение $y_i(x)$

из фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения (1) соответствующим многочленом Лагранжа $L_{n_i}(x) : y_i(x) \approx L_{n_i}(x)$ с точностью δ_i : $\|R_{n_i}\| \leq \delta_i$, где $R_{n_i}(x) = y_i(x) - L_{n_i}(x)$ ($i = \overline{1, m}$).

Тогда решение (2) интерполируется на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью δ многочленом (4) $P_N(x) = \sum_{i=1}^m C_i L_{n_i}(x)$. Заметим, что

$N = N(\{\delta_i\}) = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$. Варьируя величинами δ_i ($i = \overline{1, m}$),

удовлетворяющими условию (3) и, тем самым, степенями n_i интерполяционных многочленов Лагранжа $L_{n_i}(x)$, можно минимизировать степень интерполяционного многочлена (4) (см. [1]).

Погрешность интерполяционного процесса (5) $y(x) \approx P_N(x)$ имеет вид $R_N(x) = y(x) - P_N(x) = \sum_{i=1}^m C_i [y_i(x) - L_{n_i}(x)]$. Из оценки

$\|R_N\| \leq \sum_{i=1}^m |C_i| \|R_{n_i}\|$ видно, что для сходимости интерполяционного процесса (5) достаточно, чтобы сходились интерполяционные процессы $y_i(x) \approx L_{n_i}(x)$, $i = \overline{1, m}$. Заметим, что при $\delta_i = \delta^*$,

$i = \overline{1, m}$, условие (3) принимает вид $\delta^* \leq \delta / \left(\sum_{i=1}^m |C_i| \right)$. Известно [2, с. 398], что ФСР уравнения (1) образуют решения из класса функций K , состоящего из функций следующего вида: (6) x^k ($k \geq 0$) (решения вида (6), будучи многочленами, в интерполяции не нуждаются); (7) $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$); (8) $x^k e^{\alpha x}$, $x^k \cos \beta x$, $x^k \sin \beta x$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0, k \geq 1$); (9) $x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0, k \geq 1$). Таким образом, вопрос об интерполяции решений уравнения (1) сводится к следующей задаче: для каждой отдельной функции $f(x) \in K$ нужно подобрать степень n интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ таким образом, чтобы $f(x) \approx L_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью $\delta_0 > 0$: (10) $\|R_n\| \leq \delta_0$, где $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$. Для решения этой задачи воспользуемся известной оценкой [3, с. 60] (11) $\|R_n\| \leq [\|f^{(n)}\| (b-a)^n 2^{1-2n}] / n!$. Вначале находится производная $f^{(n)}(x)$: для функций вида (7) – непосредственно; вида (8) – по формуле Лейбница [4, с. 185]; вида (9) – с помощью обобщения формулы Лейбница на случай трёх сомножителей [5]. Затем находится верхняя оценка для $\|f^{(n)}\|$. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$. Для неё такая оценка имеет вид (12) $\|f^{(n)}\| \leq \varphi(n, \alpha, \beta, k)$, где $\varphi(n, \alpha, \beta, k)$ выражается конкретной формулой. В силу (11), (12) получаем (13) $\|R_n\| \leq [(b-a)^n 2^{1-2n} \varphi(n, \alpha, \beta, k)] / n!$. Правая часть неравенства (13) сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, откуда следует сходимость интерполяционного процесса $f(x) \approx L_n(x)$. В силу (13) для выполнения неравенства (10) достаточно подобрать n так, чтобы выполнялось условие (14) $\{ [(b-a)^n 2^{1-2n} \varphi(n, \alpha, \beta, k)] / n! \} \leq \delta_0$ (естественно, надо взять минимальное из таких n). Такой подбор возможен, ибо, как уже сказано выше, выражение в левой части неравенства (14) сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Проверка выполнимости условия (14) для конкретных значений n проводится на ЭВМ. Аналогично интерполируется решение $y = \sum_{i=1}^m C_i y_i(x) + y_*$ линейного неоднородного дифференциального уравнения m -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида, при этом, такая задача сводится к интерполяции функций из класса K , ибо частное решение y_* представляет собой линейную комбинацию функций из этого класса [2, с. 408]

Литература

1. Фомин, В.И. О минимизации степени интерполяционного многочлена / В.И. Фомин // Современные методы теории функций и

смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней матем. школы. — Воронеж, 2017. — С. 203–204.

2. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. — М. : Высшая школа, 1967. — 564 с.

3. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов. — М. : Наука, 1973. — 832 с.

4. Ильин, В.А. Основы математического анализа : В 2-х ч. Ч. I / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 648 с.

5. Фомин, В.И. Формула Лейбница для m -й производной произведения нескольких функций / В.И. Фомин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней матем. школы. — Воронеж, 2017. — С. 205.

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Т.П. Фомина (Липецк)

fomina_t_p@mail.ru

Несомненно, высокий уровень готовности студентов к исследовательской деятельности является неотъемлемым залогом их успешности в профессиональной деятельности. Нынешнему выпускнику недостаточно просто иметь глубокие предметные знания и владеть практическими умениями и навыками. Он должен владеть исследовательскими умениями и навыками, которые могут развиваться при условии включения студентов в научно-исследовательскую работу.

Различные аспекты проблемы формирования готовности студентов к научно-исследовательской деятельности рассмотрены рядом исследователей. Данная проблематика не нова, однако, и сегодня она актуальна.

Для изучения качественной стороны готовности к научно-исследовательской деятельности студентов было проведено тестирование, в котором приняли 55 студентов, обучающихся по направлению Педагогическое образование с двумя профилями Математика и Физика Института естественных, математических и технических наук университета. Результаты показали, что 75%

испытывают значительные затруднения при организации научно-исследовательской деятельности; 69% считают, что нет достаточных условий для мотивации к занятию этой деятельностью; 36% не хотят ею заниматься. Все это позволило сделать вывод о необходимости поиска новых форм и методов стимулирования мотивации студентов к научно-исследовательской деятельности.

Предлагаем следующие пути решения (многие из которых реализуются в практике обучения): включение научно-исследовательской составляющей в математические дисциплины; привлечение студентов к разработке и реализации исследовательских проектов; заслушивание докладов студентов о результатах исследования и обсуждение; участие в конференциях; курсовые, выпускные квалификационные работы; введение курса по выбору «Основы научно-исследовательской деятельности» (может быть с 1 курса).

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, ДИФфуЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА С НЕНУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головки (Владивосток)
eu.frolova@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru, ygolovko@yahoo.com

Моделирование информационных сетей, основанное на использовании систем массового обслуживания (СМО), является актуальной задачей современной науки. В данной работе строится математическая модель СМО в виде системы уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик незавершенной работы в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока, что обусловлено спецификой потока сообщений на узлах компьютерных сетей, с ненулевым коэффициентом сноса.

Рассматривается СМО с одним обслуживающим прибором, произвольным обслуживанием с функцией распределения $B(x)$ и бесконечным накопителем. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии $b > 0$. Случайный

процесс $\lambda(t)$ принимает значения на интервале $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

Пусть $Q_k(t, x) = P\{\nu(t) = k, x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, где $\nu(t)$ – число заявок в СМО в момент t ; $q_k(x) = P\{\nu = k, x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ν – число заявок в СМО и λ – интенсивность входного потока в стационарном режиме; $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$ – характеристики числа заявок, $k \geq 0$; $f(t, x) = P\{x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ – нестационарная плотность $\lambda(t)$; $f(x) = P\{x < \lambda < x + dx\}/dx$ – стационарная плотность λ , $x \in [\alpha, \beta]$.

Обозначим через $U(t)$ незавершенную работу системы в момент времени t , через U – незавершенную работу в стационарном режиме. Незавершенная работа $U(t)$ представляет собой время, необходимое для освобождения системы от всех заявок, находящихся в ней в момент t .

Обозначим через $\mathbf{H}(\omega, t, x) = P\{U(t) \leq \omega; x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ нестационарную функцию распределения незавершенной работы; через $\mathbf{h}(\omega, x) = P\{U \leq \omega; x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$ – стационарную функцию распределения незавершенной работы.

В следующих теоремах приводятся выведенные уравнения в рассматриваемой СМО относительно $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ и $\mathbf{h}(\omega, x)$. Получены начальные и краевые условия.

Теорема 1. *Нестационарная функция распределения $\mathbf{H}(\omega, t, x)$ незавершенной работы $U(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, t, x)}{\partial t} = & -x\mathbf{H}(\omega, t, x) + x \int_0^\omega B(\omega - s) \frac{\partial \mathbf{H}(s, t, x)}{\partial s} ds + \\ & + \frac{\partial \mathbf{H}(\omega, t, x)}{\partial \omega} + \frac{b}{2} \mathbf{H}_{xx}''(\omega, t, x) - a\mathbf{H}'_x(\omega, t, x), \quad \omega > 0, \end{aligned}$$

с начальным условием: $\mathbf{H}(\omega, 0, x) = \xi(\omega, x)$, с односторонним краевым условием по ω : $\mathbf{H}(0^+, t, x) = Q_0(t, x)$, где $0^+ = \lim \omega$ при $\omega \rightarrow 0$ ($\omega > 0$), $\xi(\omega, x)$ – заданная функция.

Теорема 2. *Если в СМО существует стационарный режим, то стационарная функция распределения $\mathbf{h}(\omega, x)$ незавершенной работы U удовлетворяет уравнению*

$$0 = -x\mathbf{h}(\omega, x) + x \int_0^\omega B(\omega - s) \frac{\partial \mathbf{h}(s, x)}{\partial s} ds +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{h}(\omega, x)}{\partial \omega} + \frac{b}{2} \mathbf{h}_{xx}''(\omega, x) - a \mathbf{h}'_x(\omega, x), \omega > 0,$$

с односторонним краевым условием по ω : $\mathbf{h}(0^+, x) = q_0(x)$.

Вывод приведенных уравнений отличается от вывода соответствующих уравнений относительно характеристик незавершенной работы в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым коэффициентом сноса [1].

Литература

1. Фролова, Е.С. Уравнения для незавершенной работы в СМО с бесконечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головки // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 163–164.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИДОВ СИММЕТРИЙ ОДУ

Н.Х. Хоанг, К.Т. Фам (Ханой, Вьетнам)

luanhoangngu@mail.ru, tuancuonghd@yahoo.com, raetskaya@inbox.ru

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть уравнение (1) допускает k -мерную алгебру Ли L_k , заданную операторами $\{X_\alpha\}$, $X_\alpha = \eta_\alpha \partial_y$, $\alpha = 1, \dots, k$ и имеет s независимых первых интегралов $\{P_\delta\}$, $\delta = 1, \dots, s$. Тогда уравнение (1) допускает бесконечную алгебру Ли-Беклунда, заданную оператором

$$X_B = \left(\sum_{\alpha=1}^k \eta_\alpha F_\alpha \right) \partial_y, \quad (2)$$

где F_α , $\alpha = 1, \dots, k$ — произвольные функции s первых интегралов $P_1, \dots, P_s$.

Теорема 2. Пусть уравнение (1) допускает оператор (2). Тогда для любого первого интеграла P_v уравнения (1) (не обязательно входящего в базисный набор $\{P_\delta\}$) уравнение

$$P_v = C_v \quad (3)$$

имеет $s - 1$ независимых первых интегралов $P_{\delta v}$ из набора $\{P_{\delta v}\}, \delta = 1, \dots, s$

$$P_{\delta v} = P_{\delta} \Big|_{P_v = C_v} \quad (4)$$

и допускает алгебру Ли-Беклунда, заданную оператором

$$X'_B = \left[\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^k \left(\eta_{\alpha} - \frac{Q_{\alpha v}}{Q_{\beta v}} \right) F_{\alpha v} \right] \partial_y, \quad Q_{\beta v} \neq 0 \quad (5)$$

где $Q_{\alpha v} = X_{\alpha}[P_v] \Big|_{P_v = C_v}$, $F_{\alpha v}$ – произвольные функции $s - 1$ независимых интегралов $P_{\delta v}$. Произвол в k функций $s - 1$ переменной достигается лишь в случае, когда $Q_{\alpha v} = 0$ для всех $\alpha = 1, \dots, k$; в этом случае допускается оператор (2), в котором $F_{\alpha} = F_{\alpha v}$.

Рассмотрим пример приложения – уравнение 4-го порядка

$$y^{(IV)} = y^{-5/3}. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет 3 линейно-независимых первых интегралов

$$\begin{aligned} P_1 &= y' y''' - \frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{3}{2}y^{-2/3}, \\ P_2 &= -2/3 x P_1 + y y''' - \frac{1}{3} y' y'', \\ P_3 &= \frac{1}{3} x^2 P_1 + x P_2 - y y'' + \frac{2}{3}(y')^2, \end{aligned} \quad (7)$$

и допускает 3 линейно-независимых операторов

$$X_1 = y' \partial_y, \quad X_2 = \left(x y' - \frac{3}{2} y \right) \partial_y, \quad X_3 = (x^2 y' - 3 x y) \partial_y. \quad (8)$$

Из первых интегралов получаем уравнение 1-го порядка, эквивалентное исходному

$$-2Q(y')^2 + 6Q' y y' - 18C_3 y^2 - Q^2 + 27y^{4/3} = 0, \quad (9)$$

где $Q = C_3 x^2 + 3C_2 x - 3C_1$ и C_1, C_2, C_3 – произвольные константы.

Теперь применив теоремы 1 и 2, мы находим допускаемый уравнением (9) оператор

$$X = (3Q' y - 2Q y') \partial_y. \quad (10)$$

Отсюда записав уравнение (9) через канонические координаты последнего оператора

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{Q}, \\ u = yQ^{-3/2}, \end{cases} \quad (11)$$

получим его решение в квадратуре

$$\int \frac{du}{\sqrt{27(3C_2^2 + 4C_1C_3)u^2 + 54u^{4/3} - 2}} = \pm \int dt + C.$$

Литература

1. Зайцев, В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — М. : Наука, 1993.— 464 с.
2. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — М. : Физматлит.— 2001.
3. Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир.— 1989.

ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ОДНОМЕРНЫМ ОСОБЫМ МНОЖЕСТВОМ¹

И.Г. Царьков (Москва)

tsar@mech.math.msu.su

Часто для описания класса всех C^1 -гладких решений уравнения эйконала $|\nabla u| \equiv 1$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ требуется изучить свойства ее поверхностей уровня (см. [1],[2]). Здесь надо заметить, что гладкость решения зависит от гладкости функции расстояния (метрической функции) до такой поверхности, которая в свою очередь для пространств $\mathbb{R}^n$ определяется локальной солнечностью или, что эквивалентно, локальной единственностью ближайших точек в этой поверхности. Точки локальной солнечности (единственности наилучшего приближения) в дальнейшем будем называть регулярными. Дополнение регулярного множества назовем особым множеством, которое является замыканием точек

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

© Царьков И.Г., 2017

недифференцируемости метрической функции. Тем самым возникает задача исследования взаимосвязей геометрических структур некоторой гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ и ее особого множества. В этой работе мы будем рассматривать эту задачу для случая непрерывной гиперповерхности M с замкнутым следом, т.е. будем предполагать, что существует замкнутая окрестность $U = U_y$ (относительно замкнутого множества M) произвольной точки $y \in M$, являющаяся гомеоморфным образом некоторого $(n-1)$ -мерного параллелепипеда Π .

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$, E – связное особое множество размерности ≤ 1 для гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда гиперповерхность M выпукла и ее множество особых точек E лежит по одну сторону от M в выпуклой компоненте $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Литература

1. Алимов, А.Р. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения / А.Р. Алимов, И.Г. Царьков // Успехи мат. наук. — 2016. — Т. 71, вып. 1. — С. 3–84.

2. Царьков, И.Г. Некоторые приложения геометрической теории приближения / И.Г. Царьков // ВИНТИ РАН. Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Дифференциальные уравнения и математический анализ. — 2017. — Т. 143. — С. 60–73.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ НУЛЕЙ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Д.Г. Цветкович, В.Б. Шерстюков (Москва)

dianacve@inbox.ru, shervb73@gmail.com

Рассмотрим модельный пример полиномов Бернштейна

$$B_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{2m} \left| \frac{k}{m} - 1 \right| C_{2m}^k z^k (1-z)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

для стандартного симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$, взятого на $[0, 1]$ (см. [1], [2]). Полиномы (1) сходятся в комплексной области на компакте, ограниченном лемнискатой

$$|4z(1-z)| = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Лемниската (2) является также *аттрактором нулей* для полиномов Бернштейна (1) (см. [3], [4]). В докладе подробно обсуждается асимптотическое поведение некоторых *экстремальных нулей*, взятых от полиномов (1).

При фиксированном значении $m \in \mathbb{N}$ выделим экстремальную пару ближайших к лемнискату (2) нулей полинома $B_{4m}(z)$, расположенных вне лемнискаты на вещественной оси. Обозначим через d_{4m} расстояние от этих нулей до лемнискаты (2). Тогда

$$\frac{\sqrt{1 + \sqrt[4m]{\pi(6m)^3}} - \sqrt{2}}{2} < d_{4m} < \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4m]{\pi(16m)^3}} - \sqrt{2}}{2}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и справедлива асимптотика

$$d_{4m} \sim \frac{3}{16\sqrt{2}} \frac{\ln m}{m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим также пару комплексно сопряженных нулей полинома $B_{2m}(z)$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = 1/2$. Обозначим через D_{2m} расстояние от этих нулей до точки $z = 1/2$ на лемнискате (2). Тогда

$$\frac{a}{\sqrt{m}} < D_{2m} \leq \frac{0.5}{\sqrt{m}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и справедлива асимптотика

$$D_{2m} \sim \frac{a}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

где $a \approx 0.46207$ — положительный корень специальной функции

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2k-1} \frac{z^{2k}}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Полученные соотношения позволяют качественно оценить скорость сближения нулей полиномов (1) с аттрактором (2).

Авторы признательны И. В. Тихонову за плодотворные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Тихонов, И.В. Приближение модуля полиномами Бернштейна / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков // Вестник Челябинского государственного университета. Серия Математика, Механика, Информатика. — 2012. — Т. 15, № 26. — С. 6–40.

2. Тихонов, И.В. Полиномы Бернштейна : старое и новое / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, М.А. Петросова // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ : ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 126–175.

3. Тихонов, И.В. Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. — Саратов : ООО Издательство «Научная книга», 2016. — С. 271–275.

4. Тихонов, И.В. Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна / И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — № 2. — С. 59–73.

АНАЛИЗ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СОСТОЯНИИ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ¹

О.Б. Цехан (Гродно)
tsekhan@grsu.by

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием (ЛССВСЗ):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_2y(t) + B_1u(t), x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4y(t) + B_2u(t), u \in \mathbb{R}^r, \\ t \in T &= [0, t_1], x(0) = x_0, y_0(0) = y_0, x(\theta, \mu) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0), \end{aligned}$$

где A_{ij} , $i = 1, 3, j = 0, 1, A_k, k = 2, 4, B_j, j = 1, 2$, — постоянные матрицы подходящего размера; $0 < h$ — постоянное запаздывание; $u(t)$, $t \in T$ — r -вектор функция управления, $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ — непрерывные начальные n_1 - и n_2 -вектор-функции; $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$.

На основе метода асимптотической (по малому параметру) декомпозиции, исследований структуры и асимптотических свойств

¹ Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2020" (шифр задания 1.3.02")

© Цехан О.Б., 2017

спектра ЛССВСЗ доказаны достаточные условия спектральной, поточечной (слабой модальной), полной управляемости, наблюдаемости как по всей совокупности переменных ЛССВСЗ, так и отдельно по быстрым и медленным переменным. Условия не зависят от малого параметра, имеют ранговый вид, выражены через матричные параметры ЛССВСЗ. Их выполнение гарантирует наличие изучаемых свойств у ЛССВСЗ для всех достаточно малых значений параметра.

Доказана оценка снизу правой границы интервала значений малого параметра, при которых справедлива асимптотическая декомпозиция ЛССВСЗ, разделение спектра ЛССВСЗ на два непересекающихся множества с «медленными» и «быстрыми» собственными значениями, получена оценка близости «медленных» и «быстрых» собственных значений ЛССВСЗ к собственным значениям вырожденной системы и системы погранслоя.

СВОЙСТВА КОЛЕЦ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ УРАВНЕНИЙ¹

В.Ф. Чистяков (Иркутск)

adsids@mail.ru

Рассматриваются системы уравнений

$$(\mathcal{S}_{m,l} + \lambda \mathcal{K})u_\lambda = f, \quad \mathcal{S}_{m,l} = \Lambda_m + \mathcal{V} + \Theta_l, \quad (1)$$

где $\Lambda_m y = \sum_{j=0}^m A_j(t) (d/dt)^j y$, $m \geq 0$, $\mathcal{V} y = \int_\alpha^t K(t,s)y(s)ds$, $\Theta_l y = \sum_{j=0}^l B_j(t)y^{(j)}(\alpha)$, $l \geq 0$, $\mathcal{K} y = \int_\alpha^\beta K(t,s)y(s)ds$, λ — параметр (в общем случае комплексный), $t \in T$, $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1$, $A_j(t)$, $B_j(t)$, $K(t,s)$ — $(n \times n)$ -матрицы, определенные на T и $T \times T$ соответственно, $u_\lambda(t)$ и $f(t)$ — искомая и известная вектор-функции соответственно, $y^{(i)}(t) = (d/dt)^i y(t)$, $y^{(0)}(t) = y(t)$, $A_m(t)$, $B_l(t) \not\equiv 0$ на T , $y \equiv y(t)$, $t \in T$ — некоторая вектор-функция требуемой гладкости, $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \{-1, 0, \mathbb{N}\}$. Значению индекса $l = -1$ соответствует нулевой оператор, отрицательным значениям

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-51-540002 Вьет-а).

© Чистяков В.Ф., 2017

m соответствует оператор $\mathcal{S}_{m,l} = \mathcal{V} + \Theta_l$, где ядро $K(t, s)$ имеет $|m| - 1$ нулевых производных по t на диагонали $t = s$.

Определение 1. Оператор $\mathcal{S}_{m,l}$ называется регулярным, если $m > l$ и $\det A_m(t) \neq 0 \ \forall t \in T$. Если существует оператор

$\Omega_l = \sum_{j=0}^l L_j(t)(d/dt)^j$, где $L_j(t)$ — $(n \times n)$ -матрицы из $\mathbf{C}(T)$, обладающий свойством

$$\Omega_l \circ \mathcal{S}_{m,l} u = \mathcal{S}_{\mu,\nu} u \ \forall u \equiv y(t) \in \mathbf{C}^{l+m}(T),$$

где $\mathcal{S}_{\mu,\nu}$ регулярен, то он называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО), а наименьшее возможное l называется индексом (левым) оператора $\mathcal{S}_{m,l}$.

Уравнение $\mathcal{S}_{m,l} u = f$, $t \in T$, с регулярным оператором, матрицы коэффициентов которого и свободный член непрерывны на T , имеет решение при любых начальных данных $u^{(j)}(\alpha) = a_j$, $j = 0, m-1$, где a_j — заданные вектора из $\mathbb{R}^n$, и это решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных.

Теорема 1. Множество операторов $M_\infty = \{\mathcal{S}_{m,l} : A_j(t), B_i(t) \in \mathbf{C}^\infty(T), j = 0, 1, \dots, m; i = 0, 1, \dots, l, K(t, s) \in \mathbf{C}^\infty(T \times T)\}$, действующих из пространства $\mathbf{C}^\infty(T)$ в пространство $\mathbf{C}^\infty(T)$, является кольцом с единицей в виде тождественного оператора.

Иначе говоря, для любых операторов $\mathcal{S}_{m,l}, \mathcal{S}_{k,p} \in M_\infty$ найдется оператор $\mathcal{S}_{q,\nu} \in M_\infty$ такой, что

$$(\mathcal{S}_{k,p} * \mathcal{S}_{m,l})u = \mathcal{S}_{q,\nu} u \ \forall u \in \mathbf{C}^\infty(T),$$

где $*$ = $\{ +, \circ \}$, $q \leq k + m$, $\nu \leq \max\{m, l + p\}$, если $*$ операция умножения, и $q \leq \max\{k, m\}$, $\nu \leq \max\{p, l\}$, если $*$ операция сложения.

Более того, кольцо M_∞ содержит полугруппу G_∞ , в которой каждый оператор $\mathcal{S}_{m,l} \in G_\infty$ имеет левый обратный оператор, принадлежащий M_∞ .

Лемма 1. Оператор $\mathcal{S}_{m,l} \in M_\infty$ имеет левый обратный из кольца M_∞ тогда и только тогда, когда для оператора $\mathcal{S}_{m,l}$ определен ЛРО.

Иначе говоря, в условиях леммы 1 общее решение системы уравнений $\mathcal{S}_{m,l} u = f, t \in T$, имеет для любой достаточно гладкой вектор-функции $\text{im } \mathcal{S}_{m,l}$ вид $u(t, c) = X(t)c + \mathcal{S}_{k,p} f$, $t \in T$, где $X(t)$ — некоторая $(n \times d)$ -матрица, c — вектор произвольных постоянных.

Теорема 2. Пусть система $S_{m,l}u = f, t \in T$, удовлетворяет условию леммы 1 и разрешима для любой вектор-функции $f \in \mathbf{C}^\infty(T)$. Тогда система (1) разрешима при всех значениях параметра λ , кроме быть счетного числа значений, и ее общее решение имеет вид

$$u_\lambda(t, c) = (E_n + K_0)[X(t)c + S_{k,p}f], \quad t \in T,$$

где K_0 — некоторый оператор Фредгольма.

По той же методике рассмотрим кольцо операторов в частных производных и соответствующих им уравнений

$$\Lambda_m(D_t, D_x)u := \sum_{j=0}^m A_j(x, t, D_x)D_t^j u = f(x, t), \quad (2)$$

где $(x, t) \in \mathbf{U} = \mathbf{X} \times T$, $\mathbf{X} = [x_0, x_1]$, $A_j(x, t, D_x) = \sum_{i=0}^{k_j} A_i(x, t)D_x^i$, $A_i(x, t)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $D_x \equiv \partial/\partial x$, $D_t \equiv \partial/\partial t$, $f(x, t)$, $u \equiv u(x, t)$ — соответственно заданная и искомая вектор-функции.

Определение 2. Если существует оператор $\Omega_l = \sum_{j=0}^l L_j(x, t)D_x^j$, где $L_j(x, t)$ — $(n \times n)$ -матрицы из $\mathbf{C}(\mathbf{U})$, обладающий свойством

$$\Omega_l \circ A_m(x, t, D_x)y = \tilde{A}_m(x, t, D_x)y \quad \forall y \equiv y(x, t) \in \mathbf{C}^{l+m}(\mathbf{U}),$$

где $\det A_{k_m}(x, t) \neq 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbf{U}$, то он называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО), а наименьшее возможное l называется индексом (левым) оператора $A_m(x, t, D_x)$.

Определение 3. Если существует оператор $\bar{\Lambda}_m(D_t, D_x)$, обладающий свойством

$$\bar{\Lambda}_l(D_t, D_x) \circ \Lambda_m(D_t, D_x)y = \tilde{\Lambda}_m(D_t, D_x)y \quad \forall y \equiv y(x, t) \in \mathbf{C}^{l+m}(\mathbf{U}),$$

где для старшего операторного коэффициента $\tilde{A}_m(x, t, D_x)$ оператора $\tilde{\Lambda}_m(D_t, D_x)$ определен ЛРО, то он называется левым приводящим оператором (ЛПО), а наименьшее возможное l называется индексом (левым) по t оператора $\Lambda_m(D_t, D_x)$.

При достаточной гладкости входных данных при условии существования ДРО система уравнений $A_m(x, t, D_x)z = f(x, t)$ имеет левый обратный и ее общее решение имеет вид

$$z(x, t, c) = X(x, t)c + \int_{x_0}^t Q(x, t, s)f(s, t)ds + \sum_{j=0}^{k_m-1} C_j(x, t)D_x^j f(x, t),$$

где $(x, t) \in \mathbf{U}$, $Q(x, t, s)$, $C_{x,j}(x, t)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $X(x, t)$ — некоторая $(n \times d)$ -матрица, c — вектор произвольных постоянных.

Итак, если для оператора системы (2) определен ЛПО, то система приводима к системе интегро-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных по t . Если $d = 0$, то мы получаем систему в форме Коши-Ковалевской. В докладе, в частности, условия существования ЛРО и ЛПО. Частично результаты доклада можно найти в монографии [1].

Литература

1. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. — Новосибирск : Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. — 273 с.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ¹

М.В. Шамолин (Москва)

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — трехмерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00848-а).

© Шамолин М.В., 2017

результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [1–3] и обобщают ранее рассмотренные.

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции, определяющей метрику на трехмерной сфере. Первый случай формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [1, 3]. Второй случай формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при одних предположениях система описывает пространственное движение четырехмерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы [1–3], а при других предположениях — описывает обобщенный четырехмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1–3].

Литература

1. Шамолин, М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М.В. Шамолин. — М. : Изд-во «Экзамен», 2007. — 352 с.
2. Шамолин, М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М.В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. Т. 125. М. : ВИНТИ, 2013. С. 5–254.
3. Шамолин, М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения / М.В. Шамолин // Фунд. и прикл. мат. — 2015. — Т. 20, вып. 4. — С. 3–231.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРИРУЕМЫМ С КВАДРАТОМ ЯДРОМ¹

А.Н. Шелковой (Воронеж)

shelkovoja.aleksandr@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, задаваемый выражением

$$\mathcal{L}y = -\ddot{y} - \int_0^1 K(t, s)x(s)ds \quad (1)$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int_0^1 a_0(t)y(t)dt, \quad y(1) = \int_0^1 a_1(t)y(t)dt. \quad (2)$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0, 1]$.

Исследуется случай, когда ядро $K(t, s)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2([0, 1]^2)$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора.

Литература

1. Баскаков, А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 164 с.
2. Баскаков, А.Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А.Г. Баскаков, Т.К. Кацаран // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 8. — С. 1424–1433.
3. Ульянова, Е.Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дис... канд. физ.-мат. наук / Е.Л. Ульянова. — Воронеж, 1998. — 100 с.
4. Шелковой, А.Н. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дис... канд. физ.-мат. наук / А.Н. Шелковой. — Воронеж, 2004. — 144 с.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

© Шелковой А.Н., 2017

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ С НАБОРОМ КОРТЕЖЕЙ ДАННЫХ¹

А.М. Шмырин, А.Г. Ярцев, Е.П. Трофимов (Липецк)

amsh@lipetsk.ru, yartsevlekha@mail.ru, trofimovep@list.ru

Идентификация и смешанное управление являются неотъемлемой частью моделирования окрестностной системы [1]. Традиционная идентификация заключается в определении коэффициентов модели, исходя из заданного кортежа параметров состояния и управления. В результате получается окрестностная система с малым количеством данных. Цель данной работы заключается в описании алгоритма идентификации, где в качестве исходных данных служит набор значений параметров состояния и управления.

Алгоритм идентификации с набором кортежей данных был применен для построения окрестностной модели установки поддержания оптимальной температуры полиола. Структурная модель включает 5 узлов. Для проведения идентификации нужно решить систему уравнений, которая включает m уравнений, соответствующих отдельному узлу n , в которых значения коэффициентов одинаковы, а значения параметров состояния и управления отличаются. Уравнение системы записывается в неявной форме, при этом учитывается номер узла, для которого записывается уравнение, и номер кортежа данных m . Значения коэффициентов модели находятся из условия минимума среднеквадратического отклонения. Идентификация проводится отдельно для уравнений, записанных для конкретного узла.

В результате идентификации были получены коэффициенты модели, при этом значения отклонения для каждого узла составили: для первого – 0.0019; второго – 0.0055; третьего – 0.012; четвертого – 0.0105; пятого – 0.0252. Полученные отклонения малы, что говорит о возможности использования идентификации с набором кортежей данных для описания окрестностных систем.

Литература

1. Блюмин, С.Л. Билинейные окрестностные системы / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин, О.А. Шмырина. — Липецк : ЛГТУ, 2006. — 131 с.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00854 а).

© Шмырин А.М., Ярцев А.Г., Трофимов Е.П., 2017

ON RANDOM GENERALIZED INTEGRAL GUIDING FUNCTIONS IN THE PERIODIC PROBLEM FOR RANDOM DIFFERENTIAL INCLUSIONS¹

S. Kornev, V. Obukhovskii (Voronezh), N.V. Loi (Hanoi)

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space, X, Y be metric spaces and $I = [0, T]$. By the symbol $C(Y)$ we denote the collection of all closed subsets of the space Y . If Y is a normed space, $Kv(Y)$ denotes the collections of all convex compact subsets of Y .

Multimap $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ is called a *random multioperator* if it is product-measurable, i.e. measurable w.r.t. $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, where $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ is the smallest σ -algebra on $\Omega \times X$ which contains all the sets $A \times B$, where $A \in \Sigma$ and $B \in \mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{B}(X)$ denotes the Borel σ -algebra on X . If, moreover, $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow C(Y)$ is u.s.c. for all $\omega \in \Omega$ (see, e.g., [1]), then $\mathcal{F}$ is called a *random u-multioperator*.

In this paper we consider the periodic problem for a random differential inclusion of the following form:

$$\begin{cases} x'(\omega, t) \in F(\omega, t, x(\omega, t)), & \text{for a.e. } t \in I, \\ x(\omega, 0) = x(\omega, T), \end{cases} \quad (1)$$

for all $\omega \in \Omega$, where $F: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the following conditions: (F1) $F: \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ is a random u -multioperator; (F2) there exists a map $c: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ such that $c(\omega, \cdot)$ is locally integrable on I for each $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t)$ is measurable for a.e. $t \in I$ and we have $\|F(\omega, t, y)\| := \sup\{|z|: z \in F(\omega, t, y)\} \leq c(1 + |y|)$.

Based on the approach given in [2] we present the notion of a random coincidence degree, the notions of smooth and nonsmooth random generalized integral guiding functions and use them to prove some existence theorems of random periodic solutions to problem (1).

References

1. Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions / Yu.G. Borisovich, B.D. Gelman, A.D. Myshkis, V.V. Obukhovskii. — M. : Librokom, 2011.
2. Andres, J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — V. 40. — P. 337–358.

¹ The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (№ 1.3464.2017/4.6), the RFBR grants (№№ 17-51-52022, 16-01-00386).

© Kornev S., Obukhovskii V., Loi N.V., 2017

ABSTRACT STOCHASTIC PROBLEMS: GENERALIZED AND REGULARIZED SOLUTIONS

I.V. Melnikova (Ekaterinburg)

Irina.Melnikova@urfu.ru

Models of various evolution processes considered with regard for random perturbations lead to the Cauchy problem for differential-operator equations with an inhomogeneity in the form of white noise

$$X'(t) = AX(t) + F(t, X) + B(t, X)\mathcal{W}(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = \Psi, \quad (1)$$

where A generates a regularized semigroup in a Hilbert space H , F is a nonlinear mapping in H , $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, and $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ is a (generalized) $\mathbb{H}$ -valued white noise. It is naturally to look for a solution of the problem as

$$X(t) = U(t)\Psi + U * F(t) + U * B\mathcal{W}(t),$$

where $U(t), t \geq 0$, are solution operators for the corresponding homogeneous (deterministic) problem. However the problem in the statement (1) is ill-posed. That is due to the condition on A not to be the generator a C_0 -semigroup and singularity of $\mathcal{W}$: solution operators $U(t)$ are not bounded and white noise process $\{\mathcal{W}(t)\}$ is not regular even in the $\mathbb{R}$ -valued case (informally $\mathbb{R}$ -valued white noise is defined as a process with independent $\mathcal{W}(t_1), \mathcal{W}(t_2)$ for $t_1 \neq t_2$, zero expectation and infinite covariance); the special question is how to define an $\mathbb{H}$ -valued one. These issues necessitate a framework that allows one to handle both ill-posedness reasons at the same time.

To overcome the challenges with A and $\mathcal{W}$ we consider the following approaches to the problem.

- Itô approach. We study extensions of the ‘classical’ approach considering the integral Cauchy problem with an abstract Itô integral with respect to Winer process W (‘a primitive’ from $\mathcal{W}$) written, as is usually done in the theory of stochastic equations, in the form of differentials:

$$dX(t) = AX(t)dt + F(t, X)dt + B(t, X)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = \Psi,$$

and obtain regularized solutions to the problem.

- Distribution approach. In dependence on properties of semigroups generated by A (integrated or convoluted) we study generalized with

respect to t solutions in spaces of abstract distributions and ultra-distributions. Here, while constructing the generalized solutions we overcome additional questions related to the nonlinear term F .

- White noise analysis approach. We construct spaces of abstract stochastic distributions on a white noise space and study solutions generalized with respect to random variables.

- Construction of generalized solutions with respect to sets of variables.

- ‘Kolmogorov approach’. We study equations for probabilistic characteristics of solutions. They are generalizations of the Kolmogorov equation to the case of Hilbert spaces.

Some practical models reducing to abstract stochastic Cauchy problems will be considered.

Литература

1. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge Univ. Press, 2014. — 380 p.
2. Gawarecki, L. Stochastic differential equations in infinite dimensions / L. Gawarecki, V. Mandrekar. — Springer, Berlin, 2011. — 292 p.
3. Melnikova, I.V. Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions / I.V. Melnikova. — CRC Press, New York and London, 2016. — 300 p.

CONDITION FOR THE EXISTENCE OF THE DERIVATIVE OF FUNCTION IN GRAND LEBESGUE SPACE

N. Orleu, G. Akishev (Karaganda)

narzholorleu@gmail.com; akishev_g@mail.ru

In this article will discuss the condition for the existence of the derivative of function in grand Lebesgue space.

For 2π periodic functions in space $L_p[0, 2\pi]$ which the norm is

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, (1 \leq p < \infty).$$

One of the new functional space that appeared in the 1990s is the space $L^{p),\theta}$ known as Grand Lebesgue space introduced by T.Iwaniec

and C.Sbordone [1] in connection with finding minimal conditions for the integrability of the Jacobian.

The grand Lebesgue space $L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ is defined by the set of all 2π periodic functions which the norm is ([1]-[3])

$$\|f\|_{L^{p),\theta} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \|f\|_{p-\varepsilon}, \quad (1 < p < \infty, 0 < \theta < \infty).$$

It is well known that $L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ is Banach space and $L^p[0, 2\pi] \subset L^{p),\theta}[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty, 0 < \theta < \infty$ (see [3]). Let $E_n(f)_{L^{p),\theta}}$ denote the best approximation function of $f \in L^{p),\theta}$ with trigonometric polynomials of degree less than or equal to $n \in \mathbb{N}$.

Let the function $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ have a corresponding Fourier series $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$, where $a_k(f), b_k(f)$ are Fourier coefficients.

If $\alpha > 0$ and the function $g \in L^{p),\theta}$ have a corresponding Fourier series $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (a_k(f) \cos(kx + \frac{\alpha\pi}{2}) + b_k(f) \sin(kx + \frac{\alpha\pi}{2}))$, then we call g is Weyl's derivative of function $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$, denoted by $f^{(\alpha)}$ [2].

Let $r \in \mathbb{N}$ and $\sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^r f\|_{L^{p),\theta}}$ is called the smoothness modules of function $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ and denoted by $\omega_r(f, \delta)_{L^{p),\theta}}$, $\delta > 0$.

The main result of this article is the following statements.

Theorem 1. *Let $1 < p < \infty, \theta > 0, 0 < \varepsilon < p - 1$, trigonometric polynomial $T_n(f, x)$ is the best approximation of function $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ and $r, \alpha > 0$. If $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ and*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r-1} \left\| T_k^{(\alpha+r)}(f) \right\|_{L^{p),\theta}} < +\infty$$

then we can find $f^{(\alpha)} \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$ and

$$E_n(f^{(\alpha)})_{L^{p),\theta} \leq C \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r-1} \left\| T_k^{(r+\alpha)}(f) \right\|_{L^{p),\theta}}.$$

Theorem 2. *Let $f \in L^{p),\theta}[0, 2\pi]$, $1 \leq p < q < +\infty, 0 < \theta < +\infty$. If the series $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - r - 1} \left\| T_k^{(r+m)}(f) \right\|_{L^{p),\theta}}$ is convergent, then there exists a*

derivative $f^{(m)} \in L^{q,\theta}[0, 2\pi]$ and we have inequality

$$\omega_r \left(f^{(m)}; \frac{1}{n} \right)_{L^{q,\theta}} \leq C_1 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - r - 1} \left\| \mathbb{T}_k^{(r+m)} \right\|_{L^{p,\theta}}$$

where $C_1 = C_{p,q,r,m}$, $n = 1, 2, \dots$

Note. For $L_p[0, 2\pi]$ space, theorem 1 and theorem 2 were proved by V.V.Zhuk and G.I.Natanson [4], N.Bokayev [5].

Литература

1. Iwaniec, T. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses / T. Iwaniec, C. Sbordone Arch. Ration. Mech. Analysis. — 1992. — V. 119, № 2. — P. 129–143.
2. Kokilasvili, V.M. Weighted extrapolation in Iwaniec-Sbordone spaces. Applications to integral operators and approximation theory / V.M. Kokilasvili, A.N. Meskhi // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2016. — V. 293, № 1. — P. 161–185.
3. Anatriello G. Iterated grand and small Lebesgue spaces / G. Anatriello // Collec. Math. — 2013. — V. 65. — P. 273–284.
4. Zhuk, V.V. Properties of functions and growth of derivatives of approximating polynomials / V.V. Zhuk, G.I. Natanson Dokl. AN SSSR. — 1973. — V. 212, № 1. — P. 19–22.
5. Bokayev, N. On integral and differential properties of functions / N. Bokayev // Math. Research. — Karaganda, 1976. — P. 14–20.

THE ORDER OF CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEMES FOR FRACTIONAL EQUATIONS OF ORDER

$$0 < \alpha < 1^1$$

S. Piskarev (Moscow)

piskarev@gmail.com

In this talk, we continue our research on convergence of difference schemes for fractional differential equations. Using implicit difference scheme and explicit difference scheme, we have a deal with the full discretization of the solutions of fractional differential equations in time variables. Lots of works were devoted to the discretization of C_0 -semigroups in traditional way. Recently, we considered the discrete approximation of integrated semigroups [1,2,3], where the order of

¹ This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects № 15-01-00026-a and № 17-51-53008 ГФЕН_a.

© Piskarev S., 2017

convergence was obtained using ill-posed problems theory. In this talk we continue our investigations [4,5,6] on discretization of differential equations of fractional order $0 < \alpha < 1$ in Banach spaces and get the order of convergence $O(\tau_n^\alpha)$. Also we introduce a new method to discretize the problem for $\alpha = 1/2$.

Литература

1. Li, M. On approximation of integrated semigroups / M. Li, S. Piskarev // Taiwanese J. Math. — 2010. — V. 14, № 6. — P. 2137–2161.
2. Li, M. On the approximations of derivatives of integrated semigroups / M. Li, V. Morozov, S. Piskarev // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — V. 18, № 5. — P. 515–550.
3. Li, M. On the approximations of derivatives of integrated semigroups II / M. Li, V. Morozov and S. Piskarev // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2011. — V. 19, № 3–4. — P. 643–688.
4. On the approximation of fractional resolution families / R. Liu, M. Li, J. Pastor, S. Piskarev // Differ. Equ. — 2014. — V. 50, № 7. — P. 927–937.
5. Liu, R. Approximation of Semilinear Fractional Cauchy Problem / R. Liu, M. Li, S. Piskarev // Comput. Methods Appl. Math. — 2015. — V. 15, № 2. — P. 203–212.
6. Liu, R. Stability of difference schemes for fractional equations / R. Liu, M. Li, S. Piskarev // Differ. Equ. — 2015. — V. 51, № 7. — P. 904–924.

ON $\mathbb{Z}_d$ -SYMMETRY OF SPECTRA OF LINEAR OPERATORS IN BANACH SPACES

O. Reinov (Saint-Petersburg)

orein51@mail.ru

It was shown by M. I. Zelikin [1] that the spectrum of a nuclear operator in a separable Hilbert space is central-symmetric iff the traces of all odd powers of the operator equal zero. The criterium can not be extended to the case of general Banach spaces: It follows from Grothendieck-Enflo results that *there exists a nuclear operator U in the space l_1 with the property that $\text{trace } U = 1$ and $U^2 = 0$.*

B. Mityagin [2] generalized Zelikin's criterium to the case of compact operators in Banach spaces some of which powers are nuclear (he considered even the so-called $\mathbb{Z}_d$ -symmetry of spectra).

We give sharp generalizations of Zelikin's theorem (to the cases of subspaces of quotients of L_p -spaces) and of Mityagin's result (for the case where the operators are not necessarily compact). Our results are optimal: We present the following (sharp) generalization of Grothendieck-Enflo theorem.

Theorem. *Let $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$, $1/r = 1 + |1/2 - 1/p|$. There exists a nuclear operator V in l_p such that*

- 1) V is s -nuclear for each $s \in (r, 1]$;
- 2) V is not r -nuclear;
- 3) $\text{trace} V = 1$ and $V^2 = 0$.

Литература

1. Zelikin, M.I. A criterion for the symmetry of a spectrum / M.I. Zelikin // Dokl. Akad. Nauk. — 2008. — V. 418, № 6. — P. 737–740.
2. Mityagin, B.S. A criterion for the $\mathbb{Z}_d$ -symmetry of the spectrum of a compact operator / B.S. Mityagin // J. Operator Theory. — 2016. — V. 76, № 1. — P. 57–65.

О НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А.В. Анохина, Ф.В. Голованева (Воронеж)
alenaanoxina94@yandex.ru

В работе изучается нелинейная граничная задача шестого порядка с негладкими решениями

$$\begin{cases} -(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} + Q'_\mu u = \lambda F(x, u); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(x)$ — μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$.

В точках ξ , принадлежащих множеству $S(\sigma)$ (см. далее), уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi, u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Через Λ

обозначим множество положительных значений λ , при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число λ собственным значением задачи (1), если при этом λ система (1) имеет нетривиальное решение.

Уравнение в (1) задано почти всюду (в смысле меры μ) на множестве $\overline{[0; \ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция $\mu(x)$ определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0; \ell] \setminus S(\mu)$, где $S(\mu)$ — множество точек разрыва функции $\mu(x)$ с метрикой $\varrho(x, y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$. Объединение $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$ и $S(\mu)$ нам даёт $\overline{[0; \ell]}_S$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$ и $Q(x)$ μ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}$, $\min_{x \in \overline{[0; \ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а

$F(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x, u)$ при почти всех x (относительно μ -меры) определена и непрерывна по u ; 2) функция $F(x, u)$ измерима по x при каждом u ; 3) $|F(x, u)| \leq m(x)$, где $m(x)$ — μ -суммируемая функция на $\overline{[0; \ell]}_S$.

Будем говорить, что однородное уравнение $(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + uQ'_\mu = 0$ не осциллирует на $[0; \ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратностей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $F(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x, 0) \equiv 0$; $F(x, u)$ строго возрастает по $u > 0$ и каждом фиксированном x , $F(x, u)$ допускает представление $F(x, u) = f(x, u) \cdot u$, где $f(x, u)$ не возрастает по u при $u > 0$ и каждом x ; однородное уравнение не осциллирует на $[0; \ell]$. Тогда множество Λ собственных значений задачи (1), отвечающих неотрицательным на $[0; \ell]$ собственным функциям, обладает следующими свойствами: 1) Λ связно; 2) при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача (1) имеет единственное положительное в $(0; \ell)$ решение $u(x, \lambda)$; 3) $u(x, \lambda)$ строго возрастает по λ ; при каждом $\lambda^* \in \Lambda$ соответствующее решение $u(x, \lambda^*)$ задачи (1) является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:

$$\begin{cases} -(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{xx\mu} + uQ'_\mu = \lambda^* F(x, u_{k-1}(x)), \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0 \end{cases}$$

($k = 1, 2, \dots$) при любой начальной непрерывной и неотрицательной функции $u_0(x)$.

Для решения задач подобного типа широко используется «поточечный подход», предложенный Ю.В. Покорным. Данный метод использован в работах [1]–[2].

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стильеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стильтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БИОТКАНЯХ

Ж.И. Бахтина (Воронеж)

ioanna83@mail.ru

Актуальность исследований в области моделирования различных биотканей ведет к активному развитию математических методов описания разнообразных процессов в них. Остановимся на моделировании процессов распространения химических веществ через несколько слоев кожи. Результат, естественно, зависит от многих внешних условий и от степени агрессивности химических соединений. Будем считать, что вещество не является концентрированной кислотой, щелочью или горючим с выраженными щелочными свойствами, ведущими к необратимым последствиям для биоткани. Вообще говоря, можно рассматривать различные модели кожи для изучения диффузии в ней. Отметим, что количество растворенного вещества dn , проникаемого через сечение s за время dt в направлении от более высоких концентраций раствора к более низким, пропорционально падению концентрации в направлении диффузии $-\frac{dc}{dt}$ и сечению s : $\frac{dn}{dt} = -Ds\frac{dc}{dt}$. Здесь D - коэффициент диффузии растворенного вещества.

Известна двуслойная модель кожи (эпидермис и дерма), слои которой являются неоднородными по физико-химическим характеристикам. Воздействие вещества на внешний слой кожи распределяется почти равномерно по всей площадке приложения, но отличается неоднородной изменчивостью характеристик по толщине

кожи. Здесь биоткань рассматривается как пористая среда. Тогда масса dQ вещества, проходящего через некоторое сечение x площади S за промежутки времени dt , будет определяться соотношением

$$dQ = -D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S dt,$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая процесс диффузии, $-D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ – плотность диффузионного потока вещества. С учетом коэффициента пористости $C(x)$ и в предположении о том, что внешние источники вещества отсутствуют, уравнение диффузии вещества через кожу принимает вид: $\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$.

Тогда задача заключается в распределении вещества по слоям биоткани и описывается в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = K_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, i = 1, 2,$$

где $u_i(x, t)$ – количество вещества в слоях, $K_i = D_i/C_i$. D_i , C_i – коэффициенты соответственно диффузии и пористости в этих слоях. Задача стандартно решается с условием того, что на поверхности кожи в начальный момент времени находится вещество в некотором количестве, а на выходе через второй слой вещество рассасывается. При этом важными являются условия сопряжения решений на внутренней границе контакта слоев, которые определяют равенство решений и равенство потоков на границе контактов слоев, т.е. обеспечивают непрерывность потоков. В настоящем исследовании рассматривается семислойная модель кожи (роговой слой, эпидермис, верхняя дерма, дерма с поверхностным сплетением сосудов, нижняя дерма, дерма с глубинным сплетением сосудов, гиподерма) в предположении, что поток вещества через нижний слой биоткани отличен от нуля. Таким образом, на основании допущения о представлении кожи в первом приближении в виде семислойной модели с идеальным контактом, получены с помощью метода Фурье решения, позволяющие выявить для любого момента времени t послойное распределение вещества, попавшего на поверхность кожи. Подобная база позволяет решать задачи на исследование процессов диффузии в коже, отягощая модели дополнительными условиями, например, за счет внешних источников химических веществ.

Литература

1. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1966. — 709 с.
2. Бранков, Г. Основы биомеханики / Г. Бранков. — М. : Мир, 1981. — 254 с.
3. Панкратова, Н.Д. Деформация неоднородных анизотропных полых упругих тел с различными видами соединения слоев / Н.Д. Панкратова // Прикл. механика. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 45–51.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

М.А. Буйвалова, Ф.В. Голованева (Воронеж)

marusjabuj@yandex.ru

В работе изучается нелинейная граничная задача с производными по мере

$$\begin{cases} -(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} + qu = f(x, u); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение (1) мы будем искать в классе E дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ которых μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемы, $(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(x)$ — μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$. Нелинейность предполагается «сильной» (типа $f(x, u) = |u|^\alpha$, $\alpha > 1$). В точках ξ , принадлежащих множеству $S(\mu)$, (1) понимается как равенство $-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) + q(\xi)u(\xi) = f(\xi, u(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ .

Уравнение в (1) задано почти всюду (по мере μ) на множестве $[0; \ell]_S$, построение которого можно найти в [1], [2]. При этом каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $[0; \ell]_{S(\mu)}$; $[0; \ell]_S = [0; \ell]_{S(\mu)} \cup S(\mu)$.

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $r(x)$ абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$, $\min_{x \in [0; \ell]} p(x) > 0$, $q(x)$ — μ -суммируема на $[0; \ell]$ и

$f(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $f(x, u)$ при почти всех x (относительно μ -меры) определена и непрерывна по u ; 2) функция $f(x, u)$ измерима по x при каждом u ; 3) $|f(x, u)| \leq m(x)$, где $m(x)$ — μ -суммируемая функция на $[0; \ell]_S$.

Условия, которые мы наложили на функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x, u)$ обеспечивают разрешимость уравнения из (1) в E .

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: 1) $f(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, 2) $f(x, 0) \equiv 0$, 3) $f(x, u)$ порождает непрерывный оператор суперпозиции, действующий из $C[0; \ell]$ в некоторое $L_{p, \mu}[0; \ell]$, 4) при некоторых $0 < r < R < \infty$ справедливо (а) модель (1) при любых $\lambda \in (0; 1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам $u_0(x) \cdot \|u\|_C \leq u(x) \leq r$ ($u_0(x) = \frac{x(\ell-x)}{\ell}$); (б) для некоторой $h(x)$, (отличной от тождественного нуля), принадлежащей $L_{1, \mu}[0; \ell]$, и для любого $\lambda > 0$ модель $-(ru'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{xx\mu} + qu = f(x, u)$, $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0$, $u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$, не имеет решений, для которых $u_0(x)\|u\|_C \leq u(x) \leq R$. Тогда нелинейная модель (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение.

Концепция поточечной трактовки уравнения с негладкими решениями доказала свою эффективность (см. [1]–[2]).

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Pokornyi, Yu. V. Toward A Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No. 6. — P. 769–787.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильеса / С. А. Шабров //

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

6. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

7. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

8. Баев, А. Д. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стильтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

11. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

12. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

ON PROPERTIES OF MEAN VALUES OF SOLUTIONS TO LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

S.M. Sitnik, I.P. Polovinkin, M.V. Polovinkina,

E.L. Shishkina (Voronezh)

polovinkin@yandex.ru

We consider Eq.

$$\prod_{j=1}^m (a_j \partial / \partial x + b_j \partial / \partial t + c_j) u = 0 \quad (1)$$

with constant coefficients $a_j, b_j, c_j, j = 1, \dots, m$. A line given by the equation $b_j x - a_j t = \text{const}$, is called the j -th type characteristic of Eq. (1), $j = 1, \dots, m$. We assume that all of characteristics of Eq. (1) are simple. Let Θ means the set of all streamlined collections $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \{0; 1\}$, $j = 1, \dots, m$. Let two points $A_l^\alpha = (\eta_l^\alpha, \omega_l^\alpha)$ and $A_s^\gamma = (\eta_s^\gamma, \omega_s^\gamma)$ lie on a j -th characteristic i.f.f. their upper indexes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\alpha_j, \gamma_j \in \{0; 1\}$, $j = 1, \dots, m$, are connected with relations $\alpha_k = \gamma_k$, $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, $\gamma_j = \neg \alpha_j$, $s = \neg l$ where " $\neg$ " is the negation operation. Then for any solution $u(x, t)$ to Eq. (1) the mean-value formula

$$\sum_{\alpha \in \Theta} (-1)^l u(A_l^\alpha) \prod_{j=1}^m \exp(-\mu_j \xi_j^{\alpha_j} - \nu_j \tau_j^{\alpha_j}) = 0 \quad (2)$$

takes place.

Let us now decline the requirement of simple characteristics. Then formally the mean-value formula will look as like as (2), but we have to get $2k$ points on every characteristic instead two ones where k is the multiplicity of the characteristic. Furthermore let us assume that we are dealing with alone m -multiple characteristic and $c_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ in Eq. (1). In that case formula (2) becomes like the "inclusions-exceptions formula" to the polynomial with degree $m-1$ [1].

$$u(0) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} u(x_{i_1} + \dots + x_{i_k}),$$

where $x_1, \dots, x_m$ are points of the real line.

References

1. Mean-Value Formula for a Two-Dimensional Linear Hyperbolic Equation / V. Z. Meshkov et. al. // Proceeding of Voronezh State University. Series : Physics. Mathematics. — 2015. — № 3. — P. 138–145.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ

Е.А. Ларионов (Москва)

larionov23021939@bk.ru

В работе показана близость сингулярных чисел операторов A_0 и $A = A_0(I + S)$, выражаемая равенством

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_n(A)}{s_n(A_0)} = 1, \quad (1)$$

установленным в случае $A_0 = A_0^*$ в [1]. Здесь A_0 и S — компактные операторы в гильбертовом пространстве H .

В случае если $A_0 A_0^* = A_0^* A_0$, $A_0 \varphi_n = \mu_n \varphi_n$; $\|\varphi_n\| = 1$, и полной в H системы $(\tilde{x}_n)$ корневых векторов оператора A имеем соотношение (см. [2])

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_k}{\lambda_n} - 1 \right|^2 |(x_n, \varphi_k)|^2 = 0; \quad x_n = \tilde{x}_n / \|(\tilde{x}_n)\|, \quad (2)$$

влекущее существование такой подпоследовательности $(\mu_n(\lambda_n))$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n(\lambda_n)} = 1. \quad (3)$$

Согласно (2) и (3) и соотношения $\|x_n - \varphi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ получим $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n(A)|}{s_n(A_0)} = 1$, откуда следует равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n(A)|}{s_n(A)} = 1$, позволяющее применение известного утверждения Фредгольма [3] для установления ядерности и неэрмитовости интегральных операторов [1].

Литература

1. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

2. Ларионов, Е. А. Локализация собственных чисел и корневых векторов при слабом возмущении / Е.А. Ларионов // ДАН СССР. — 1990. — Т. 313, вып. 6. — С. 1331–1334.

3. Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles / I. Fredholm // Acta math. — 1903. — V. 27. — P. 365–390.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ БИОЛОГОВ

Г.Ю. Ризниченко (Москва)

riznich@biophys.msu.ru

Современные биология и медицина все шире используют в фундаментальных исследованиях и прикладных разработках компьютерные модели, основанные на математических моделях и информационных технологиях. Для создания и осознанного использования и таких моделей от профессионала биолога требуется достаточно высокий базовый уровень знаний в области математики и математического моделирования.

Классические для преподавания в вузах основы математического анализа и теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и статистики представляют собой необходимый элемент культуры любого специалиста. Важно, чтобы в качестве примеров здесь использовались задачи, построенные на биологическом, экологическом, биотехнологическом материале. Для работы с математическими и компьютерными моделями сложных систем, каковыми являются объекты биологии, медицины, экологии, биотехнологии, необходимо иметь представление о результатах, полученных в областях математики, которые легли в основу современного междисциплинарного знания.

Методы и результаты качественной теории дифференциальных уравнений представляют собой математический базис таких современных наук как синергетика, нелинейная наука (Nonlinear Science), теория катастроф (Catastrophe Theory), теория хаоса (Chaos theory), теория сложных систем (Science of Complexity). Для этих областей ключевыми являются понятия устойчивости, аттрактора, следует знать свойства основных типов сложного поведения систем: колебательных, мультистационарных и квазистокастических режимов. Важным является понятие временных масштабов процессов в системе (теорема Тихонова о редукции систем

ОДУ с "быстрыми переменными"). При рассмотрении уравнений в частных производных следует обсудить условия возникновения в системах разных типов автоволновых процессов и диссипативных структур.

Общий курс бакалаврской программы для студентов 2 курса биологического факультета МГУ "Биоинформатика и математическое моделирование в биологии" включает 48 часов лекций и 36 часов семинарских (практических) занятий, их содержание представлено на сайте mathbio.msu.ru/. Факультативно студенты отвечают на форуме на вопросы лектора. В завершение курса проводится студенческая конференция, на которой выступают лучшие студенты. Подготовку докладов курируют преподаватели семинаров.

Литература

1. Мятлев, В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели. Высшая математика и ее приложения к биологии. Университетский учебник / В.Д. Мятлев, Л.А. Панченко, Г.Ю. Ризниченко, В.А. Терехин. — М. : Изд. Центр Академия, 2009. — 316 с.
2. Ризниченко, Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии / Г.Ю. Ризниченко. — М.–Ижевск. : Изд. РХД, 2011. — 560 с.
3. Плюснина, Т.Ю. Математические модели в биологии: учебное пособие/ Т.Ю. Плюснина, П.В. Фурсова, Л.Д. Терлова, Г.Ю. Ризниченко. — М.–Ижевск. : Изд. РХД, 2014. — 136 с.
4. Rubin, A.B. Mathematical biophysics / A.B. Rubin, G.Yu. Riznichenko. — Springer, 2014. — 274 p.

О МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Г. Задорожний, Е.В. Купцова (Воронеж)

zador@amm.vsu.ru

Рассмотрим векторную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\varepsilon(\omega)Ax + f(t, \omega), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ – искомая векторная функция со значением в n -мерном вещественном пространстве X со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| = \langle x, x \rangle^{0,5}$, A – линейный оператор, действующий в пространстве X , f – векторный случайный процесс, ε – случайная величина, $t_0 \in \mathbb{R}$, x_0 – случайный вектор, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – заданная функция, ω – случайное событие.

Требуется найти математическое ожидание $Mx(t)$ решения задачи (1), (2).

Пусть

$$\psi_f(u) = M(\exp i \int_T \langle f(s), u(s) \rangle ds)$$

-характеристический функционал процесса f , где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак математического ожидания по пространству событий, и $\psi_\varepsilon(z) = M(\exp i \varepsilon z)$ – характеристическая функция случайной величины ε и $\frac{\delta_p \psi_f}{\delta u(s)}$ – частная вариационная производная [1] по переменной u .

Теорема 1. Если случайная величина ε и векторный случайный процесс f независимы, существует вариационная производная $\frac{\delta_p \psi_f}{\delta u(s)}$ и ψ_ε аналитическая функция на $\mathbb{R}$, то

$$M(x(t)) = \psi(-iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, u) M(x_0) + \int_{t_0}^t \psi_\varepsilon(-iA \int_s^t a(\tau) d\tau) M f(s) ds$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Находятся формулы для моментных функций второго порядка решения указанной задачи (1), (2).

Литература

1. Задорожний, В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. — М.-Ижевск : РХД, 2006. — 316 с.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ-ЛИТТЛЬВУДА

Е.А. Павлов, А.И. Фурменко (Симферополь, Воронеж)
pavlov-oe@b.k.ru, furmenko@mail.ru

Оператор $(Hg)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t g(x) dx$, который получил название оператора Харди-Литтльвуда (см. [1], [3], [2], [5]) существенно использу-

ется в теории интерполяции линейных операторов, теоремах вложения и других разделах математики. Важную роль в теории интерполяции линейных операторов играют, так же, обобщенные операторы $(H_\varphi x)(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x(s) d\varphi(s)$, Харди-Литтльвуда (см. [3], [7], [6]).

В данной работе получены некоторые свойства оператора Харди-Литтльвуда и его обобщений в симметричных пространствах, симметричных пространствах с весом и ряде более общих идеальных структурах.

Все функциональные пространства определяются для функций, определенных на $(0, +\infty)$ и измеримых в смысле Лебега.

Теорема 1. Пусть идеальная структура E (см. [3],[5], [4]) обладает свойствами:

1) В E выполняется обобщенное неравенство Миньковского (см., например, [3] стр.189-199);

2) Оператор растяжения $\sigma_t x(s) = x(s/t)$ ограниченно действует в E .

Тогда, если выполняется соотношение $\int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E dt < \infty$,

то оператор Харди-Литтльвуда ограниченно действует в E .

Для обобщенного оператора Харди-Литтльвуда

$$(H_\varphi x)(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x(s) d\varphi(s),$$

где $\varphi(s) \geq 0$, $\varphi(s)$ возрастает на $(0, +\infty)$, (такие операторы и формально сопряженные к ним (для некоторых конкретных функций $\varphi(s)$) изучались в работах [3],[5],[6],[7] и др.) Справедлива

Теорема 2. Пусть идеальная структура обладает свойствами 1), 2) из теоремы 1. Тогда, если выполняется соотношение

$$\int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E dM\varphi(\tau) < \infty,$$

где $M_\varphi(\tau)$ функция растяжения для $\varphi(\tau)$ (см.[3]), тогда оператор H_φ ограниченно действует в E .

Литература

1. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.У., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948.

2. Shimogaki T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces // J.Math.Soc.Japan –1965. Vol. 17,(4), P –365-375.

3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978.

4. Семенов Е.М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Доклады АН СССР –1964. –Т. 156, № 6 –С. 1038-1041.

5. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. –М.,1986. –Т. 24. –С.3-163.

6. Maligranda L. Generalized Hardy inequilities in rearrangement invariant spaces // T.Math Pures et Appl. –1980. Vol. 59, № 4, – P.405-415.

7. Павлов Е.А. Об операторе Кальдерона // Anal. Math. –1978. – Vol. 4, № 2. –Р. 117-124.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ФЛОКЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Соколова, Н.Б. Журавлев (Москва)

zhuravlev1980@yandex.ru

В данной работе рассматривается переход от исследования расположения собственных значений оператора монодромии для периодического решения дифференциально-разностного уравнения к исследованию собственных значений некоторого интегрального оператора.

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$x'(t) = f(x(t), x(t-1)).$$

Предполагается, что известно периодическое решение $\tilde{x}$ этого уравнения, имеющее период T . Для таких уравнений имеет место теория Флоке.

Решению $\tilde{x}$ соответствует линеаризованное уравнение

$$v'(t) = a(t)v(t) + b(t)v(t-1),$$

где $a(t) = f'_x(x, y)$, $b(t) = f'_y(x, y)$ при $x = \tilde{x}(t)$, $y = \tilde{x}(t-1)$.

Мультипликаторами Флоке называют ненулевые собственные значения оператора монодромии $M : C[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]$, который действует по формуле $M\varphi(t) = v^\varphi(t + T)$, где v^φ – решение линеаризованного уравнения с начальным условием $v^\varphi(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-1, 0]$.

В работе рассматривается переход от задачи на собственные значения оператора монодромии к задаче отыскания собственных значений оператора, который определяется формулой следующего вида:

$$V\varphi(t) = h(t)\varphi(0) + \int_{-1}^0 \Phi(t, s)\varphi(s)ds, \quad t \in [-1, 0],$$

где вещественнозначные функции h и Φ явно выражаются в квадратурах.

О ЕСТЕСТВЕННОСТИ ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ СЛЕДА В КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ¹

П.А. Сипайло (Москва)
sipaylo@gmail.com

Пусть даны гладкое вложение многообразий $i : X \hookrightarrow M$ и оператор Φ , действующий на M . Следом $i^!(\Phi)$ оператора Φ называется оператор на X , определённый как композиция $i^*\Phi i_*$, где i^* и i_* — операторы ограничения и коограничения, отвечающие вложению i . Оператор ограничения i^* функции на M ставит в соответствие её сужение на X , а оператор коограничения i_* функции на X ставит в соответствие функцию на M , сосредоточенную на X (см. [1]).

Мы изучаем условия, при которых операторы Φ и $i^!(\Phi)$ оба являются интегральными операторами Фурье.

Определение 1. Пусть L — подмногообразие в $T^*(M \times M)$. Следом $i^!(L)$ подмногообразия L называется множество $i^!(L) = \pi(L|_{X \times X})$, где $L|_{X \times X}$ есть пересечение

$$L|_{X \times X} = L \cap T^*(M \times M)|_{X \times X} \quad (1)$$

и π — отображение, индуцированное вложением $X \times X \hookrightarrow M \times M$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00373 А).

© Сипайло П.А., 2017

Теорема 1. Пусть интегральный оператор Фурье Φ , действует в пространствах $H^s(M) \rightarrow H^{s-d}(M)$, $s < -\nu/2$, $s - d > \nu/2$, где $\nu = \text{codim } X$, и ассоциирован с погруженным лагранжевым многообразием $L \subset T^*(M \times M) \setminus \{0\}$, таким, что:

- 1) пересечение (1) является чистым;
- 2) $i^!(L)$ не пересекает нулевое сечение в $T^*(X \times X)$.

Тогда $i^!(L)$ — погруженное лагранжево многообразие в $T^*(X \times X) \setminus \{0\}$ и след $i^!(\Phi)$ есть интегральный оператор Фурье, ассоциированный с ним.

Литература

1. Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи с границей, состоящей из компонент различной коразмерности. / Б. Ю. Стернин // Труды Моск. мат. общ-ва. — 1966. — № 15. — С. 346-382.

Именной указатель

Akishev G., 208
Kornev S., 206
Loi N.V., 206
Melnikova I.V., 207
Obukhovskii V., 206
Orleu N., 208
Piskarev S., 210
Polovinkin I.P., 220
Polovinkina M.V., 220
Reinov O., 211
Shishkina E.L., 220
Sitnik S.M., 220

А

Алероева Х.Т., 32
Анохина А.В., 212
Асташкин С.В., 33

Б

Баев А.Д., 33, 37, 41, 60
Барановский Е.С., 44
Бахтина Ж.И., 215
Бекларян А.Л., 49
Белопольская Я.И., 46
Белоусов Ф.А., 49
Бильченко Г.Г., 50, 52
Бильченко Н.Г., 50, 52
Бирюков А.М., 55
Бондаренко Е.С., 56
Бугакова Н.И., 57
Буйвалова М.А., 217

Бунеев С.С., 60
Бурлуцкая М.Ш., 62
Буслаев А.П., 64
Бутов В.В., 65

В

Васильев В.Б., 66
Владимирова О.В., 67
Бу Нгуен Шон Тунг, 72

Г

Гаркавенко Г.В., 74
Гладышев Ю.А., 76
Глызин С.Д., 80
Гнеушев И.А., 81, 84
Голованева Ф.В., 167, 212, 217
Головко Н.И., 91, 161, 191
Горюнов В.Е., 87

Д

Давыдова М.Б., 33, 60
Денисов И.В., 88
Диденко Д.Б., 90

Ж

Жук Т.А., 91, 161, 191
Журавлев Н.Б., 226

З

Задорожная Н.С., 116
Задорожний В.Г., 223
Зверева М.Б., 93

Зубова С.П., 94
Зюкин П.Н., 96

И

Илолов М., 98
Иохвидов Е.И., 101
Исаева С.Э., 103
Истратов В.А., 49

К

Калашникова М.А., 105
Калинин А.И., 106
Калитвин А.С., 107, 109
Калитвин В.А., 111
Калманович В.В., 113
Каменский М.И., 93
Каплиева Н.А., 183
Клодина Т.В., 116
Ковалева М.И., 81
Ковалевский Р.А., 117
Кожевникова Л.М., 120
Кожеуров Д.С., 147
Кокурин М.М., 121
Кокурин М.Ю., 123
Колесникова И.В., 84
Колесов А.Ю., 80
Конёнков А.Н., 124
Кононенко Л.И., 125
Кошыллов А.Н., 65
Костин А.Б., 128
Костин В.А., 67, 126
Костин Д.В., 67, 84
Крейн М.Н., 129
Кущова Е.В., 223
Курина Г.А., 19

Л

Лавринович Л.И., 106
Ларионов Е.А., 221
Лобода А.В., 130
Ломовцев Ф.Е., 131, 136

Лыков К.В., 134
Лысенко В.В., 136

М

Миронов А.Н., 138
Миронова Л.Б., 138
Мирошниченко С.И., 56
Мурзабекова Г.Е., 139
Мустафокулов Р., 140

Н

Нагуманова А.В., 184
Нестеров А.В., 143, 147
Нуртазина К.Б., 149

О

Осипенко Г.С., 150
Охлупина О.В., 153

П

Павлов Е.А., 224
Панков В.В., 37
Перов А.И., 23
Плотникова Ю.А., 154
Подорога А.В., 156
Политов К.О., 158
Попов М.А., 173
Прилепко А.И., 160
Прокопьева Д.Б., 161

Р

Работинская Н.И., 41
Раецкая Е.В., 94
Ратинер Н.М., 163
Ризниченко Г.Ю., 222
Роде Д.А., 164
Родикова Е.Г., 165
Родин В.А., 56, 166
Родионова О.М., 167
Розов Н.Х., 80
Рыхлов В.С., 169

С

Савин А.Ю., 170
Сапронов Ю.И., 67, 81, 84
Семёнов В.В., 171
Семенов Е.М., 172
Семёнов М.Е., 173
Синегубов С.В., 166
Сипайло П.А., 227
Ситник С.М., 174
Скляднев С.А., 26
Соколова А.Н., 226
Степанова А.О., 46

Т

Таташев А.Г., 64
Терехин П.А., 175
Тимергалиев С.Н., 176
Тихонов И.В., 179
Трофимов Е.П., 205
Трусова Н.И., 109

У

Усков В.И., 181
Ускова Н.Б., 74, 183
Ускова О.Ф., 183

Ф

Фам К.Т., 193
Федоров В.Е., 184
Фоменко Т.Н., 185
Фомин В.И., 188
Фомина Т.П., 190
Фролова Е.С., 191
Фурменко А.И., 30, 224

Х

Хоанг Х.Н., 193

Ц

Царев С.Л., 67
Царьков И.Г., 195

Цветкович Д.Г., 179, 196
Цехан О.Б., 198

Ч

Чистяков В.Ф., 199

Ш

Шамолин М.В., 202
Шевгунов Т.Я., 49
Шелковой А.Н., 204
Шерстюков В.Б., 128, 179, 196
Шмырин А.М., 205

Я

Якушев Р.С., 176
Ярцев А.Г., 205
Яцкин Н.И., 13

Н а у ч н о е и з д а н и е

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,
ПОСВЯЩЕННАЯ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
СЕЛИМА ГРИГОРЬЕВИЧА КРЕЙНА**
(13–19 ноября 2017 г.)

Сборник материалов

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 30.10.2017. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 13,4. Уч.–изд. л. 13,1. Тираж 200 экз. Заказ 694.

Издательский дом ВГУ
394000 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394000 Воронеж, ул. Пушкинская, 3