МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

на правах рукописи

Теретёнков
Александр Евгеньевич

Точно решаемые задачи необратимой квантовой эволюции

01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель	–	**Чеботарёв Александр Михайлович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	–	**Башаров Асхат Масхудович** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник РНЦ «Курчатовский институт»
		Манько Владимир Иванович доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН» (ФИАН)
		Холево Александр Семёнович член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Математический институт им. В.А.Стеклова РАН» (МИАН)

Защита диссертации состоится «17» мая 2018 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.06 Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова 119992, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, Физический факультет МГУ, аудитория СФА.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе научной библиотеки МГУ им. М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/105380486/

Автореферат разослан «__» ________ 2018 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.01.06
доктор физико-математических наук
профессор П.А. Поляков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель работы

Основной целью работы является решение уравнений необратимой квантовой динамики (квантовых кинетических уравнений) с генераторами, квадратичными по бозонным или фермионным операторам рождения и уничтожения, и исследование их свойств. При этом коэффициенты генератора могут быть как постоянными, так и зависящими от времени. Среди свойств этих уравнений изучаются условия на параметры генератора, приводящие к положительной и к вполне положительной динамике матриц плотности, наличие или отсутствие гауссовских стационарных состояний и ряд других свойств.

Обзор литературы, историческая справка и актуальность темы исследования

Необратимая динамика является прямым обобщением унитарной динамики с квадратичным гамильтонианом. Систематическое исследование унитарной динамики с квадратичными гамильтонианами общего вида было проведено в работах К. О. Фридрихса (K. O. Friedrichs) [61] и Ф. А. Березина [4][1]. Дальнейшее развитие изучение унитарной динамики получило в работах И. А. Малкина, В. И. Манько и В. В. Додонова [16], [9], [57]. Ряд современных исследований на эту тему был проведён в работах А. М. Чеботарёва, Т. В. Тлячёва и А. А. Родионова [29], [30], [43]. Обзор этих результатов и соответствующая литература могут быть найдены в диссертации Т. В. Тлячёва [22].

Одной из наиболее важных областей приложения квадратичных гамильтонианов общего вида является квантовая оптика. Основным источником таких гамильтонианов является приближение заданного поля накачки (параметрическое приближение) (см. [1, Глава II], [19, Глава 16], [79, Раздел 7.1.2]). Когерентные состояния для многомодовых параметрических систем рассматривались в [56]. Современные приложения можно найти в работах А. С. Чиркина, М. Ю. Сайгина, И. В. Шутова, А. М. Чеботарёва, Т. В. Тлячёва [46], [31], [45], [90], [98], [97]. Также квадратичные гамильтонианы возникают в оптомеханических задачах (см., например, [68], [69]). Ещё одним источником таких гамильтонианов является метод приближённого вторичного квантования Н. Н. Боголюбова (см. [6], а также современное изложение в [13, с. 192-200]). Таким образом, исследование уже унитарных квадратичных систем является актуальной современной задачей.

[1] Мы в дальнейшем будем ссылаться на более позднее издание [5].

Мы будем рассматривать генераторы как с постоянными коэффициентами, так и более общие генераторы с коэффициентами, зависящими от времени. Обсуждение унитарной динамики с нестационарными гамильтонианами можно найти в [44], [76],[16], [8]. Физические приложения таких нестационарных гамильтонианов в контексте сжатой томографии обсуждались в [94].

Стоит также отметить, что динамика квантовых систем с квадратичным генератором тесно связана с классической гамильтоновой динамикой с квадратичным гамильтонианом. Общие свойства такой динамики изучались в работах Дж. Вилльямсона (J. Williamson) [101], [100], [102]. Квазиклассическое приближение сжатых состояний обсуждается в [34].

В данной работе мы приводим ссылки на статьи, наиболее близкие к теме нашего исследования. За более подробной библиографией для бозонного случая мы отсылаем читателя к сборнику [57] и обзору [54].

Для фермионов случай без диссипации подробно исследован в [5]. С единой точки зрения и бозонная, и фермионная обратимая динамика рассматривалась В. И. Манько и В. В. Додоновым в [10].

В нашей работе рассматривается общая необратимая (неунитарная) динамика с квадратичными генераторами. С исторической точки зрения, здесь следует отметить знаменитую статью Л. Д. Ландау 1927 года (см. [15, стр. 19-31]), в которой впервые было введено понятие матрицы плотности. Для нашего исследования интересна мотивация введения данного понятия. А именно, то, что только в терминах матрицы плотности можно описывать необратимые процессы, такие как релаксация населённостей и декогеренция. Таким образом, первыми уравнениями, написанными для матрицы плотности, были именно уравнения необратимой квантовой эволюции. Л. Д. Ландау рассматривал квантовую систему в электромагнитном резервуаре при нулевой температуре. Как отмечается в [57, стр. 183] и (более подробно) в [17, стр. 219-220], если в уравнении, полученном Л. Д. Ландау (уравнение (31) в [15]), в качестве системы выбрать гармонический осциллятор, то получится уравнение (в современных обозначениях)

$$\dot{\rho}_t = \gamma \left(\hat{a} \rho_t \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t \hat{a}^\dagger \hat{a} \right).$$

Следующий важный результат был получен Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в [14, стр. 73] формула (147)

$$\dot{\rho}_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \mathcal{E}(\rho_t) + \mathcal{E}^*(\rho_t) - \mathcal{E}(I)\rho_t - \rho_t\mathcal{E}(I), \tag{1}$$

где $\hat{H}$ и $\mathcal{E}$ определяются через корреляционные функции резервуара. В случае осциллятора при стандартном дипольном взаимодействии $\hat{H} = \frac{1}{2}\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$, $\mathcal{E}(\rho_t) = \gamma N(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a})$, тогда (1) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t =& - i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_t]+\\ &+ \gamma N\left(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) + \gamma N\left(\hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}\hat{a}^\dagger\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Фактически, это высокотемпературный предел ($N >> 1$) широко известной модели затухающего осциллятора (см., например, [62, Пункт 6.1.1], [7, Пункт 3.4.6])

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_t =& - i\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho_t]+\\ &+ \gamma(N+1)\left(\hat{a}\rho_t\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) + \gamma N\left(\hat{a}^\dagger\rho_t\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}\hat{a}^\dagger\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t\hat{a}\hat{a}^\dagger\right).\end{aligned}$$

При произвольной температуре и уже в явном виде эта модель, вероятно, впервые изучалась Р. Баушем (R. Bausch) и А. Штейлом (A. Stahl) в [38].

Особую роль при рассмотрении необратимой динамики играют генераторы в форме Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада (ГКС-Л), введённые в [65] для систем в конечномерном гильбертовом пространстве и в [77] в более общем случае. Уравнение для матрицы плотности ρ_t с генератором ГКС-Л имеет вид

$$\dot{\rho}_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \sum_i \left(\hat{C}^{(i)}\rho_t(\hat{C}^{(i)})^\dagger - \frac{1}{2}(\hat{C}^{(i)})^\dagger\hat{C}^{(i)}\rho_t - \frac{1}{2}\rho_t(\hat{C}^{(i)})^\dagger\hat{C}^{(i)}\right),$$

где $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ и $\hat{C}^{(i)}$ — операторы; мы будем интересоваться случаем, когда $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ квадратичны, а $\hat{C}^{(i)}$ линейны по операторам рождения и уничтожения бозонов или фермионов. Уравнения с ГКС-Л генератором имеют наиболее ясную физическую интерпретацию и математические свойства. В частности, они описывают квантовую марковскую динамику (см. [7, Раздел 3.2]) и могут быть выведены из микроскопических соображений в ряде важных случаев (см. [7, Раздел 3.2]). Краткий исторический обзор уравнений ГКС-Л можно найти в [50].

Строгая теория вывода уравнений вида ГКС-Л в пределах слабой связи и низкой плотности была развита Л. Аккарди (L. Accardi), Ю. Г. Лу (Yu. G. Lu), И. В. Воловичем, С. В. Козыревым, А. Н. Печенем (см. изложение этих результатов и соответствующую литературу в [32], [33], [18]). Ряд существенных результатов для обоснования предела слабой связи был также получен Е. Б. Девисом (E. B. Davies) [52, Глава 10]. Вывод ГКС-Л генераторов на основе квантовых стохастических уравнений невиноровского типа был получен А. М. Башаровым (см. [37], [2], [3]).

Важнейшим свойством ГКС-Л уравнений является убывание квантовой относительной энтропии (обобщающее соответствующее утверждение для классической марковской динамики), позволяющее придавать соответствующей динамике термодинамический смысл. Это привело к формированию такой новой области физики, как квантовая термодинамика (см. [63], [75]). Ряд современных результатов в этой области можно найти в работах И. В. Воловича и А. С. Трушечкина [99], [23].

Бозонная динамика с квадратичным ГКС-Л генератором является квантовым аналогом динамики в соответствии с классическими стохастическими линейными дифференциальными уравнениями. Изложение результатов в этой области можно найти, например, в [36, Глава 8] или в [88, Раздел 6.5].

Многомодовая бозонная динамика вида ГКС-Л в представлении Вигнера изучалась В. И. Манько, В. В. Додоновым и О. В. Манько в [9], [11] , [55], [12]. Несколько конкретных примеров уравнений такого вида изучались в [89], [70], [71]. В случае двудиагонализуемости форм, определяющих генератор, общие решения бозонных ГКС-Л уравнений обсуждаются в [86], но такая двудиагонализуемость не всегда возможна даже в унитарном случае [29]. Предельные равновесные состояния связанных осцилляторов, взаимодействующих с резервуарами при разных температурах, рассматривались Р. Дж. Глаубером (R. J. Glauber) и В. И. Манько в [64].

Необратимая динамика с (локально) зависящим от времени генератором, а также сравнение подходов к немарковской динамике на основе локальных и нелокальных по времени кинетических уравнений в последнее время активно исследовались Д. Крушинским (D. Chruscinski) и др. в [48], [49], [47], [93].

Эволюционные отображения, соответствующие квадратичным генераторам, имеют тесную связь с бозонными и фермионными гауссовскими каналами, играющими существенную роль в квантовой теории информации. При этом она задаётся не в терминах генераторов, а непосредственно линейными преобразованиями форм, определяющих гауссовские состояния [24], или (значительно реже) посредством усреднения операторов Вейля, действующих на операторы плотности, по классическим распределениям [84]. Ряд современных результатов в этой области можно найти в работах А. С. Холево (см. [26], [27], [28], [25]). Стоит отметить, что, вообще говоря, не всякий бозонный или фермионный канал может быть представлен как эволюционное отображение (однопараметрическая полугруппа) в некоторый момент времени. В бозонном случае такая представимость и соответствующие квадратичные генераторы обсуждались Т. Хейносаари (T. Heinosaari), А. С. Холево и М. М. Вольфом (M. M. Wolf) в [67].

Современный интерес к фермионным гауссовским состояниям берёт своё начало в работе К. Е. Кейхила (K. E. Cahill) и Р. Дж. Глаубера (R. J. Glauber) [42]. Случай фермионной необратимой динамики рассматривался в [87] и [58]. В [87] супероператор ГКС-Л, квадратичный по $2n$ фермионным операторам рождения и уничтожения, сводится к неэрмитову оператору, квадратичному по $4n$ фермионным операторам рождения и уничтожения. Далее в [87] требовалась диагонализуемость получившейся формы, чего не требуется в нашей работе. В работе [58] получена динамика в представлении Гейзенберга операторов, коммутирующих с оператором чётности. Однако, изложенный в [58] подход, на наш взгляд, является весьма громоздким, так как требует расширения диссипативной динамики системы до унитарной динамики системы и резервуара, а затем взятия следов по степеням свободы резервуара. Таким образом, исследование фермионных квадратичных операторов с постоянными коэффициентами является современной актуальной задачей.

Кроме того, многомодовое фермионное уравнение ГКС-Л как конечномерное матричное уравнение может быть решено общими методами (см. [35]). Однако, такой подход требует решения систем линейных уравнений, количество которых экспоненциально зависит от n, но в данной работе мы получим, что соответствующее число линейно растёт с n.

Динамика, описываемая квадратичным фермионным уравнением ГКС-Л, тесно связана с гауссовскими фермионными каналами. Здесь следует отметить работу С. Б. Бравого (S. Bravyi) [39], где исследовались представления квантовых фермионных каналов в виде грассмановых интегральных ядер. Данная работа развивала концепцию ”фермионной линейной оптики”, введённую в силу аналогии между бозонными (возникающими в квантовой оптике) и фермионными гауссовскими каналами в работах [74] и [96]. Также применение квадратичных фермионных генераторов в квантовой теории информации изучалось перед этим А. Ю. Китаевым в [73]. Кроме того, связь между вычислениями с фермионными модами и вычислениями с кубитами обсуждалась в [40]. Систематическое изложение вопросов, связанных с фермионными гауссовскими каналами, а также соответствующий обзор литературы можно найти в магистерской работе Э. Грепловой (E. Greplova) [66].

В последнее время (см. [81], [60], [53], [91]) всё большую актуальностью приобретают задачи описания немарковской динамики. Такие вопросы могут приводить к генераторам, явно зависящим от времени и не имеющим вид ГКС-Л генератора (см. [7, Глава 10]). В частности, к такого вида генераторам приводит метод устранения временной свёртки (см. [41], [7, Глава 9]). Нелиндбладовская динамика одномерной квантовой броуновской частицы рассматривалась в [78] и [82]. Положительные, но не вполне положительные отображения также приобретают в последнее время всё большую актуальность [92], [85], [83], [59]. Динамика сцепленности в двухмодовом немарковском гауссовском канале исследовалась в [80].

Научная новизна

- Несколькими методами получены гауссовские решения уравнений необратимой квантовой эволюции с квадратичными бозонными и фермионными генераторами с зависящими от времени коэффициентами в терминах решений непрерывного уравнения Ляпунова для матриц ковариаций и (в бозонном случае) системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора средних. Для фермионов данный результат имеет научную новизну уже в случае постоянных коэффициентов.

- В работе изучаются генераторы не только вполне положительной, но и положительной динамики гауссовских состояний.

- В случае бозонов получена динамика с квадратичными генераторами, зависящими от времени, для состояний, имеющих антинормальные символы, в терминах гауссовских свёрток с такими символами.

- В работе изучаются условия стремления к предельному стационарному состоянию для многомодовых генераторов (в литературе встречаются, в основном, 1-2-модовые случаи исследования стационарных состояний).

Объект исследования

В диссертационной работе исследуются

1. Уравнения необратимой квантовой динамики матрицы плотности, в частности, ГКС-Л уравнения, с генератором, содержащим линейные и квадратичные формы по *бозонным* операторам рождения и уничтожения. При этом коэффициенты генератора могут как зависеть от времени, так и быть постоянными. (Таким бозонным квадратичным генераторам посвящена глава 1.)

2. Уравнения необратимой квантовой динамики матрицы плотности, в частности, ГКС-Л уравнения, с генератором, содержащим квадратичные формы по *фермионным* операторам рождения и уничтожения. Вновь коэффициенты генератора могут как зависеть от времени, так и быть постоянными. (Таким фермионным квадратичным генераторам посвящена глава 2.)

Методология и методы исследования

Уравнения для средних и вторых центральных моментов в бозонном случае получены несколькими методами: методом экспоненциальной подстановки (см. пункт 1.6.1), методом усреднения уравнений Гейзенберга (см. пункт 1.6.2), методом уравнений для нормальных символов (см. пункт 1.6.3), методом уравнений Гейзенберга для супероператоров (см. пункт 1.6.5). Уравнения для вторых моментов в фермионном случае также получены некоторыми из этих методов (см. раздел 2.6). Для решения этих уравнения предложено несколько методов решения уравнения Ляпунова (см. явные формулировки и обсуждение в разделах 1.7 и 2.7).

Защищаемые положения

- Доказана теорема 2, а также утверждение 8, сводящие уравнения для гауссовских матриц плотности к уравнениям для матриц вторых центральных моментов и средних в случае бозонов.

- Доказана теорема 6, а также утверждение 38, сводящие уравнения для чётных гауссовских матриц плотности к уравнениям для матрицы вторых моментов.

- Показано (см. утверждения 14 и 42), что решение уравнения Ляпунова, возникающее в теоремах 2 и 6, может быть выражено в терминах матрицанта размера $(2n) \times (2n)$, где n — число мод (пар операторов рождения и уничтожения) в генераторе. Причём, в случае постоянных коэффициентов при определённых условиях невырожденности это может быть сделано чисто алгебраическим путём (см. утверждения 26 и 50). Кроме того, показано, что решения уравнения Ляпунова могут быть выражены через решение системы $4n$ линейных уравнений (см. утверждения 15 и 43). Специально рассмотрены случаи генераторов с постоянными коэффициентами (см. пункты 1.7.2 и 2.7.2). Получены явные формулы в виде экспонент от постоянных матриц.

- Получены условия на параметры квадратичного генератора (см. теорему 4 для бозонного случая и теорему 7 для фермионного случая) с постоянными коэффициентами, определяющие корректную положительную (но не обязательно вполне положительную) динамику гауссовских состояний. Данные условия являются достаточными в случае переменных коэффициентов. Приведены примеры такой положительной динамики (см. пункты 1.10.6 и 2.10.5).

- В случае генераторов с постоянными коэффициентами получены выражения параметров, задающих гауссовские квантовые каналы (как бозонные, так и фермионные), являющиеся эволюционными отображениями, соответствующими этим генераторам (см. утверждения 30 и 52).

- В случае генераторов с постоянными коэффициентами получены условия на наличие стационарных гауссовских состояний (см. утверждения 25 и 49).

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы связана с тем, что рассматриваемые в ней квадратичные генераторы подобно унитарному случаю могут служить отправной точкой для исследования необратимой динамики общего вида. Во-первых, такое исследование может быть проведено в рамках теории возмущений, где квадратичные генераторы возникают в виде естественного нулевого приближения, а члены высших степеней рассматриваются как малые поправки. Во-вторых, уравнения необратимой динамики с неквадратичными потенциалами могут быть исследованы методом Монте-Карло, основанным на представлении их решений в виде корректных континуальных интегралов. В унитарном случае было показано [30], что решение задач с квадратичным генератором также играет фундаментальную роль. В-третьих, квадратичные ГКС-Л генераторы важны с точки зрения квантовой теории информации, где центральную роль играют гауссовские (как бозонные, так и фермионные) каналы. Эволюционные отображения, порождаемые квадратичными ГКС-Л генераторами, задают широкий класс таких каналов. В-четвёртых, квадратичные генераторы возникают и при исследовании нелинейных моделей в тех случаях, когда в результате тех или иных приближений удаётся заменить часть операторов в гамильтониане взаимодействия на заданные числовые функции. Характерным примером может служить уже упомянутое выше приближение заданной волны накачки и метод приближённого вторичного квантования.

Практическая значимость полученных в работе результатов тесно связана с их теоретической значимостью. А именно, указанная выше связь с приближением заданного поля накачки позволяет применять результаты в квантовой оптике. В частности, при учёте диссипации в процессе трёх- и четырёх-модовых взаимодействий в апериодическом нелинейном фотонном кристалле. Указанная выше связь с квантовыми гауссовскими каналами может быть использована для изучения вопросов физической реализации этих каналов. Возможность описания некоторых уравнений немарковской динамики может иметь дальнейшее применение в тех областях, где немарковские эффекты играют существенную роль (структурированные резервуары [51], светособирающие комплексы [72]).

Степень разработанности темы исследования

Поставленные в диссертационной работе цели и задачи полностью выполнены. Однако, полученные результаты ставят новые вопросы для дальнейшего исследования.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность выносимых на защиту диссертационной работы результатов обеспечивается использованием строгих математических методов, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе формул. В ряде частных случаев на основе этих формул были воспроизведены уже известные в литературе утверждения. Кроме того, наиболее важные результаты работы получены несколькими независимыми способами.

Личный вклад автора

Автором разработан метод решения задач необратимой квантовой эволюции посредством экспоненциальной подстановки, применённый в работе как к бозонному, так и к фермионному случаю. Как этим методом, так и другими методами в работе получены чётные гауссовские решения в фермионном случае. Кроме того, автором рассмотрены не только ГКС-Л генераторы, но и генераторы более общего вида. А именно, изучены условия корректной положительной динамики гауссовских состояний.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы обсуждались и отражены в тезисах и докладах следующих конференций:

- 24th Central European Workshop on Quantum Optics, Lyngby, Denmark, 27 – 30 June 2017 // Teretenkov A. E. ”Quadratic fermionic dynamics with dissipation”.
- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам ”Ломоносов-2017”, Секция ”Физика”, МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия, 10 – 14 апреля 2017 // Теретёнков А. Е. ”Квадратичная фермионная динамика с диссипацией”.
- 23rd Central European Workshop on Quantum Optics, Crete, Greece, 27 June – 1 July 2016 // Teretenkov A. E. ”Gaussian solutions to the Lindblad equation with a multimode quadratic generator”.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», Секция «Физика», МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–15 апреля 2016 // Теретёнков А. Е. ”Квадратичная линдбладовская эволюция гауссовских состояний”.
- Четвертая международная конференция ”Математическая физика и ее приложения”, Самара, Россия, 25 августа – 1 сентября 2014// Теретёнков А. Е., Тлячев Т. В., Чеботарев А. М. ”Разложение Такаги и диагонализация многомодовых сжатий”.
- 21st Central European Workshop on Quantum Optics, Brussels, Belgium, 23–27 June 2014 // Teretenkov A. E. ”A note on the Takagi factorization of symmetric matrices and diagonalization of multimode squeezings”.
- 34th International Conference on Quantum Probability and Related Topics, Moscow, Russia, 16–20 September 2013 // Chebotarev A. M., Tlyachev T. V., Teretenkov A. E., Belokurov V. V. ”On the normal form of multimode squeezing”.

Также полученные результаты были доложены на семинаре Отдела теории вероятностей и математической статистики МИАН им. В А. Стеклова 12 марта 2018 г. и на семинаре Лаборатории квантовой теории информации МФТИ 20 марта 2018 г.

Структура и объём диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации: 148 страниц. Список литературы включает 141 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении сформулированы цели работы, дан обзор литературы и истории вопросов, рассматриваемых в работе, обоснованы актуальность и новизна выбранной темы, перечислены основные защищаемые положения, приведена структура работы и краткое содержание.

Основной текст поделён на две главы. Первая из них посвящена генераторам необратимой квантовой динамики, квадратичным по бозонным операторам рождения и уничтожения, вторая — их фермионным аналогам. Главы специально устроены так, чтобы иметь максимально сходную структуру. А именно, большинство разделов главы 1 имеют аналоги среди разделов главы 2, приведённые в одинаковой последовательности. Сделано это, чтобы максимально подчеркнуть сходства и различия, возникающие между бозонными и фермионными системами. Кроме того, это позволяет читателю рассматривать эти главы не только последовательно, но и параллельно, читая парами аналогичные разделы из двух глав. Такая структура во многом навеяна структурой книги Ф. А. Березина [5].

Первые пять разделов в обеих главах (1.1 – 1.5 и 2.1 – 2.5) являются вводными. В них даются основные обозначения и определения. Также в них приводится ряд предварительных лемм и утверждений, необходимых для формулировки и доказательства основных результатов работы.

Эти результаты изложены в разделах 1.6 – 1.9 и 2.6 – 2.9. А именно, в разделах 1.6 и 2.6 рассматриваются несколько подходов к сведению необратимой динамики гауссовских матриц плотности к динамике их первых и вторых моментов. При этом метод, основанный на подстановке обратимых гауссовских матриц плотности и использовании их в качестве операторов невещественного канонического преобразования, был разработан автором в [20], [95], [21]. В разделах 1.7 и 2.7 рассматриваются решения уравнений для вторых (центральных) моментов и средних. Отдельно обсуждается случай постоянных коэффициентов. В случае бозонов также рассмотрен случай, когда только коэффициенты при линейных членах в генераторе зависят от времени. В разделах 1.8 и 2.8 рассматриваются свойства решений, полученных в предшествующих разделах. В первую очередь, изучаются условия на коэффициенты генераторов, которые приводят к корректной положительной динамике. Также, в случае постоянных коэффициентов генератора, получены условия наличия предельных стационарных состояний. В разделах 1.9 и 2.9 описана связь квадратичных генераторов с квантовыми каналами. В частности, выписаны явные формулы, связывающие параметры, задающие квантовые каналы, с параметрами квадратичных генераторов.

В разделах 1.10–1.11 и 2.10 рассмотрены примеры, иллюстрирующие применение разработанных в работе методов к конкретным задачам.

В Заключении приведены основные результаты работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие результаты:

Разработан метод решения квадратичного уравнения необратимой квантовой динамики, основанный на экспоненциальной подстановке.

Несколькими методами уравнения необратимой квантовой динамики на гауссовских решениях сведены к уравнениям для средних и матриц ковариаций в фермионном случае и уравнениям для матриц вторых моментов в случае фермионов. Важно отметить, что при этом рассматриваются и случаи, когда коэффициенты этих уравнений явно зависят от времени.

Получены условия, когда формальный генератор задаёт полугруппу на гауссовских состояниях. В частности, рассмотрены условия на генератор, когда такая полугруппа вполне положительна.

Рассмотрены несколько подходов к решению уравнений Ляпунова (для матриц вторых центральных моментов) и уравнений для средних.

Отдельно рассмотрен случай постоянных коэффициентов генератора. Исследованы условия на генератор с постоянными коэффициентами на наличие и отсутствие предельных состояний. В случае бозонов рассмотрен случай, когда только линейные члены являются зависящими от времени, а квадратичные члены постоянны.

Рассмотрен ряд примеров и частных случаев, иллюстрирующих применение разработанных в работе методов.

Несмотря на то, что поставленные цели работы достигнуты, направление исследований, представленное в работе ни в коей степени ни стоит считать тупиковым, так как полученные результаты приводят к новым содержательным вопросам. Полученные решения квадратичных моделей могут служить нулевыми приближением для теории возмущений, а также отправной точкой для численного решения более сложных моделей методом Монте-Карло.

Полученные в 1.8 и 2.8 условия поднимают проблему более удобного описания возникающих там множеств Σ_b и Σ_f. Результаты пункта 1.8.6 ставят вопрос о том, как необходимо ввести понятие стохастических интегралов движения для уравнений ГКС-Л общего вида. Особенно остро стоит вопрос о полноте набора таких интегралов уже в случае квадратичных генераторов. Пример из пункта 1.10.2 может служить отправной точкой для изучения квазиклассического приближения уравнения ГКС-Л, а пример из пункта 1.10.5 — отправной точкой для рассмотрения уравнений ГКС-Л для квантовых полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С. А.*, *Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М. : Изд. ВИНИТИ, 1964. — 292 с.

2. *Башаров А. М.* Квантовая теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений обобщенного ланжевеновского (невинеровского) типа // ЖЭТФ. — 2012. — Т. 142, 3 (9). — С. 419—441.

3. *Башаров А. М.* Теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений // Оптика и спектроскопия. — 2014. — Т. 116, № 4. — С. 532—540.

4. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М. : Наука, 1965. — 236 с.

5. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — 2-е изд., дополн. — М. : Наука, 1986. — 320 с.

6. *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1947. — Вып. 11. — С. 77—90.

7. *Бройер Х. П.*, *Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. — М.-Ижевск : НИЦ ”Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. — 824 с.

8. *Буданов В. Г.* Об одном уравнении для распутывания Т-экспонент с произвольными квадратичными генераторами // ТМФ. — 1987. — Т. 71, № 3. — С. 331—336.

9. *Додонов В. В.*, *Манько В. И.* Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем // Труды ФИАН. — 1987. — Т. 183.

10. *Додонов В. В.*, *Манько В. И.* Интегралы движения и динамика нестационарных квадратичных Ферми—Бозе-систем общего вида // Труды ФИАН. — 1983. — Т. 152. — С. 145—193.

11. *Додонов В. В.*, *Манько В. И.* Эволюционные уравнения для матриц плотности линейных квантовых открытых систем // Труды ФИАН. — 1986. — Т. 176. — С. 40—45.

12. *Додонов В. В.*, *Манько О. В.* Релаксация квантовой частицы в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т. 65, № 1. — С. 93—107.

13. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 4: Квантовая статистика. — М. : КомКнига, 2014. — 352 с.

14. *Крылов Н. М.*, *Боголюбов Н. Н.* Об уравнениях Фоккера—Планка, получаемых в теории возмущений с помощью метода, основанного на спектральных свойствах гамильтониана возмущений // Н. Н. Боголюбов. Избранные труды в трёх томах. Т. 2 / под ред. Ю. А. Митропольского. — Киев : Наукова Думка, 1970. — С. 5—76.

15. *Ландау Л. Д.* Проблема затухания в волновой механике // Ландау Л. Д. Собрание трудов. В 2-х томах. Т. 1 / под ред. Е. М. Лифшица. — М. : Наука, 1969. — С. 19—31.

16. *Малкин И. А.*, *Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М. : Наука, 1979. — 320 с.

17. *Переломов А. М.* Обобщённые когерентные состояния и их применения. — М. : Наука, 1987. — 272 с.

18. *Печень А. Н.* Метод стохастической асимптотики в квантовой динамике : дис. … канд. физ-мат. : 01.01.03 / Печень Александр Николаевич. — М., 2004.

19. *Скалли М. О.*, *Зубайри М. С.* Квантовая оптика. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 512 с.

20. *Теретёнков А. Е.* Квадратичная диссипативная эволюция гауссовских состояний // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 4. — С. 636—640.

21. *Теретёнков А. Е.* Квадратичная фермионная динамика с диссипацией // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, № 6. — С. 881—889.

22. *Тлячёв Т. В.* Метод канонических преобразований в теории сжатых состояний : дис. … канд. физ-мат. : 01.04.02 / Тлячёв Тимур Вячеславович. — М., 2014.

23. *Трушечкин А. С.* Об общем определении производства энтропии в марковских открытых квантовых системах // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2017. — Т. 138. — С. 82—98.

24. *Холево А. С.* Квантовые системы, каналы, информация. — М. : МЦМО, 2010. — 328 с.

25. *Холево А. С.* О гипотезе квантовых гауссовских оптимизаторов в случае $q = p$ // УМН. — 2017. — Т. 72, 6 (438). — С. 205—206.

26. *Холево А. С.* Гауссовские оптимизаторы и проблема аддитивности в квантовой теории информации // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70, 2 (422). — С. 141—180.

27. *Холево А. С.* К доказательству мажоризационной теоремы для квантовых гауссовских каналов // УМН. — 2016. — Т. 71, 3 (429). — С. 197—198.

28. *Холево А. С.* О классической пропускной способности канала со стационарным квантовым гауссовским шумом // Теория вероятностей и ее применения. — 2017. — Т. 62, № 4. — С. 670—691.

29. *Чеботарев А. М.*, *Тлячев Т. В.*, *Радионов А. А.* Обобщенные сжатые состояния и многомерная формула факторизации // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, вып. 45. — С. 762—777.

30. *Чеботарев А. М.*, *Тлячев Т. В.*, *Радионов А. А.* Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, вып. 4. — С. 614—634.

31. *Чиркин А. С.*, *Шутов И. В.* О возможности невырожденного параметрического усиления оптических волн при низкочастотной накачке // Письма в ЖЭТФ. — 2007. — Т. 86, № 11. — С. 803—807.

32. *Accardi L.*, *Kozyrev S.* Lectures on quantum interacting particle systems // Quantum interacting particle systems. — 2002. — Vol. 14. — P. 1–195.

33. *Accardi L.*, *Lu Y. G.*, *Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. — Berlin : Springer-Verlag, 2002. — 473 p.

34. *Alekseev P. S.*, *Moroseev F. V.* Squeezed states in the semiclassical limit // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2009. — Vol. 108, no. 4. — P. 571–582.

35. *Alicki R.*, *Lendi K.* Quantum Dynamical Semigroups and Applications. — Berlin : Springer-Verlag, 2007. — 137 p.

36. *Arnold L.* Stochastic differential equations. — New York : Wiley Interscience, 1974. — 228 p.

37. *Basharov A. M.* Spontaneous emission of the non-Wiener type // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, no. 3. — P. 376–393.

38. *Bausch R.*, *Stahl A.* On the description of noise in quantum systems // Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. — 1967. — Vol. 204, no. 1. — P. 32–46.

39. *Bravyi S.* Lagrangian representation for fermionic linear optics. — 2004. — arXiv: quant-ph/0404180.

40. *Bravyi S. B.*, *Kitaev A. Y.* Fermionic quantum computation // Annals of Physics. — 2002. — Vol. 298, no. 1. — P. 210–226.

41. *Breuer H.-P.*, *Kappler B.*, *Petruccione F.* The time-convolutionless projection operator technique in the quantum theory of dissipation and decoherence // Annals of Physics. — 2001. — Vol. 291, no. 1. — P. 36–70.

42. *Cahill K. E.*, *Glauber R. J.* Density operators for fermions // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 59, issue 1538.

43. *Chebotarev A. M.*, *Tlyachev T. V.* Normal forms, inner products, and Maslov indices of general multimode squeezings // Mathematical Notes. — 2014. — Vol. 95, no. 5/6. — P. 721–737.

44. *Chernikov N. A.* The system whose hamiltonian is a time-dependent quadratic // Soviet Physics JETP. — 1968. — Vol. 26, no. 3. — P. 603–608.

45. *Chirkin A. S.*, *Saigin M. Y.* Four-mode entangled states in coupled nonlinear optical processes and teleportation of two-mode entangled CV state // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, T135. — P. 014029.

46. *Chirkin A. S.*, *Saigin M. Y.* Statistic and information characterization of tripartite entangled states // Journal of Russian Laser Research. — 2007. — Vol. 28, no. 5. — P. 505–515.

47. *Chruściński D.* On time-local generators of quantum evolution // Open Systems & Information Dynamics. — 2014. — Vol. 21, no. 01/02. — P. 1440004.

48. *Chruściński D.*, *Jurkowski J.* Memory in a nonlocally damped oscillator // Quantum Bio-Informatics III. — 2010. — P. 155–166.

49. *Chruściński D.*, *Kossakowski A.* Non-Markovian quantum dynamics: local versus nonlocal // Physical review letters. — 2010. — Vol. 104, no. 7. — P. 070406.

50. *Chruściński D.*, *Pascazio S.* A Brief History of the GKLS Equation // Open Systems & Information Dynamics. — 2017. — Vol. 24, no. 03. — P. 1740001.

51. *Dalton B. J.*, *Garraway B. M.* Non-Markovian decay of a three-level cascade atom in a structured reservoir // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 033809.

52. *Davies E. B.* Quantum theory of open systems. — London : Academic Press, 1976. — 171 p.

53. *De Vega I.*, *Alonso D.* Dynamics of non-Markovian open quantum systems // Rev. Mod. Phys. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 015001.

54. *Dodonov V. V.* 'Nonclassical' states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2002. — Vol. 4, no. 1. — P. R1–R33.

55. *Dodonov V. V.*, *Manko O. V.* Quantum damped oscillator in a magnetic field // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1985. — Vol. 130, no. 1/2. — P. 353–366.

56. *Dodonov V. V.*, *Man'ko V. I.*, *Nikonov D. E.* Even and odd coherent states for multimode parametric systems // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51, no. 4. — P. 3328.

57. *Dodonov V. V.*, *Man'ko V. I.* Theory of nonclassical states of light. — London-New York : Taylor, Francis, 2003. — 384 p.

58. Exact matrix product solutions in the Heisenberg picture of an open quantum spin chain / S. R. Clark [et al.] // New J. Phys. — 2010. — Vol. 12, no. 2. — P. 025005.

59. *Filippov S. N.*, *Rybár T.*, *Ziman M.* Local two-qubit entanglement-annihilating channels // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 012303.

60. *Fleming C. H., Hu B.* Non-Markovian dynamics of open quantum systems: stochastic equations and their perturbative solutions // Annals of Physics. — 2012. — Vol. 327, no. 4. — P. 1238–1276.

61. *Friedrichs K. O.* Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Part V. Fields modified by linear homogeneous forces // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1953. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–72.

62. *Gardiner C., Zoller P.* Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. Vol. 56. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 370 p.

63. *Gemmer J., Michel M., Mahler G.* Quantum Thermodynamics. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 346 p.

64. *Glauber R., Man'ko V.* Damping and fluctuations in coupled quantum oscillator systems // Sov. Phys. JETP. — 1984. — Vol. 60. — P. 450–457.

65. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821–825.

66. *Greplova E.* Quantum Information with Fermionic Gaussian States : Master's thesis / Greplova E. — Munich, 2013.

67. *Heinosaari T., Holevo A. S., Wolf M. M.* The semigroup structure of Gaussian channels. — 2009. — arXiv: 0909.0408.

68. *Huang S., Agarwal G. S.* Entangling nanomechanical oscillators in a ring cavity by feeding squeezed light // New Journal of Physics. — 2009. — Vol. 11, no. 10. — P. 103044.

69. *Huang S., Agarwal G. S.* Squeezing of a nanomechanical oscillator. — 2009. — arXiv: 0909.4234.

70. *Isar A., Sandulescu A.* Damped quantum harmonic oscillator. — 2006. — arXiv: quant-ph/0602149.

71. *Isar A.* Entanglement of formation for Gaussian states of two bosonic modes in a thermal environment // Rom. J. Phys. — 2013. — Vol. 58. — P. 1355.

72. *Ishizaki A.*, *Fleming G. R.* Quantum coherence in photosynthetic light harvesting // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. — 2012. — Vol. 3, no. 1. — P. 333–361.

73. *Kitaev A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Physics-Uspekhi. — 2001. — Vol. 44, no. 10. — P. 131–136.

74. *Knill E.* Fermionic linear optics and matchgates. — 2001. — arXiv: quant-ph/0108033.

75. *Kosloff R.* Quantum thermodynamics: A dynamical viewpoint // Entropy. — 2013. — Vol. 15, no. 6. — P. 2100–2128.

76. *Lewis Jr H. R.*, *Riesenfeld W.* An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field // J. Math. Phys. — 1969. — Vol. 10, no. 8. — P. 1458–1473.

77. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Math. Phys. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130.

78. Lindblad-and non-Lindblad-type dynamics of a quantum Brownian particle / S. Maniscalco [et al.] // Physical Review A. — 2004. — Vol. 70, no. 3. — P. 032113.

79. *Maimistov A. I.*, *Basharov A. M.* Nonlinear optical waves. — Berlin : Springer-Verlag, 1999. — 656 p.

80. *Maniscalco S.*, *Olivares S.*, *Paris M. G.* Entanglement oscillations in non-Markovian quantum channels // Physical Review A. — 2007. — Vol. 75, no. 6. — P. 062119.

81. *Maniscalco S.*, *Petruccione F.* Non-Markovian dynamics of a qubit // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73, no. 1. — P. 012111.

82. *Maniscalco S.*, *Piilo J.*, *Suominen K. A.* Non-Markovian weak coupling limit of quantum Brownian motion // The European Physical Journal D. — 2009. — Vol. 55, no. 1. — P. 181.

83. Normal form decomposition for Gaussian-to-Gaussian superoperators / G. De Palma [et al.] // J. Math. Phys. — 2015. — Vol. 56, no. 5. — P. 052202.

84. *Parthasarathy K. R.* Symplectic dilations, Gaussian states and Gaussian channels // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 46, no. 4. — P. 419–439.

85. Partial positive scaling transform: a separability criterion / O. V. Man'ko [et al.] // Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 339, no. 3. — P. 194–206.

86. *Prosen T.*, *Seligman T. H.* Quantization over boson operator spaces. — 2010. — arXiv: 1007.2921.

87. *Prosen T.*, *Zunkovic B.* Exact solution of Markovian master equations for quadratic Fermi systems: thermal baths, open XY spin chains and non-equilibrium phase transition // New J. Phys. — 2010. — Vol. 12. — P. 025016.

88. *Risken H.*, *Frank T.* The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Vol. 18. — Berlin : Springer-Verlag, 1996. — 454 p. — (Springer series in synergetics).

89. *Sandulescu A.*, *Scutaru H.*, *Scheid W.* Open quantum system of two coupled harmonic oscillators for application in deep inelastic heavy ion collisions // J. Phys. A: Mathematical and General. — 1987. — Vol. 20, no. 8. — P. 2121.

90. *Saygin M. Y.*, *Chirkin A. S.* Simultaneous parametric generation and up-conversion of entangled optical images // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2010. — Vol. 111, no. 1. — P. 11–21.

91. *Semin V.*, *Petruccione F.* Minimalistic analytical approach to non-Markovian open quantum systems // EPL. — 2016. — Vol. 113, no. 2. — P. 20004.

92. *Shaji A.*, *Sudarshan E. C. G.* Who's afraid of not completely positive maps? // Physics Letters A. — 2005. — Vol. 341, no. 1–4. — P. 48–54.

93. *Siudzińska K.*, *Chruściński D.* Memory kernel approach to generalized Pauli channels: Markovian, semi-Markov, and beyond // Physical Review A. — 2017. — Vol. 96, no. 2. — P. 022129.

94. Squeezing Operator and Squeeze Tomography / O. Castanos [et al.] // Topics In Mathematical Physics, General Relativity And Cosmology In Honor Of Jerzy Plebanski. — World Scientific, 2006. — P. 109–120.

95. *Teretenkov A. E.* Quadratic dissipative evolution of Gaussian states with drift // Math. Notes. — 2017. — Vol. 101, no. 2. — P. 341–351.

96. *Terhal B. M.*, *Di Vincenzo D. P.* Classical simulation of noninteracting-fermion quantum circuits // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 032325.

97. *Tlyachev T. V.*, *Chebotarev A. M.*, *Chirkin A. S.* A new approach to quantum theory of multimode coupled parametric processes // Physica Scripta. — 2013. — Vol. 2013, T153. — P. 014060.

98. *Tlyachev T. V.*, *Chebotarev A. M.*, *Chirkin A. S.* Canonical transformations and multipartite coupled parametric processes // Physica Scripta. — 2014. — Vol. 2014, T160. — P. 014041.

99. *Trushechkin A. S.*, *Volovich I. V.* Perturbative treatment of inter-site couplings in the local description of open quantum networks // EPL. — 2016. — Vol. 113, no. 3. — P. 30005.

100. *Williamson J.* An algebraic problem involving the involutory integrals of linear dynamical systems // American J. Math. — 1940. — Vol. 62, no. 1. — P. 881–911.

101. *Williamson J.* On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // American J. Math. — 1936. — Vol. 58, no. 1. — P. 141–163.

102. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // American J. Math. — 1937. — Vol. 59, no. 3. — P. 599–617.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Из результатов совместных работ в диссертацию автором включены результаты, полученные им лично.

Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI

- Теретёнков А. Е. Квадратичная фермионная динамика с диссипацией // Математические заметки. – 2017. – Т. 102. – № 6. – С. 881–889;
  Teretenkov A. E. Quadratic fermionic dynamics with dissipation // Mathematical Notes. — 2017. — Vol. 102. – no. 5–6. — P. 846–853.

- Teretenkov A. E. Quadratic dissipative evolution of Gaussian states with drift // Mathematical Notes. – 2017. – Vol. 101 – no. 1–2. – P. 341–351.

- Теретёнков А. Е. Квадратичная диссипативная эволюция гауссовских состояний // Математические заметки. – 2016. – Т. 100. – № 4. – С. 636–640;
  Teretenkov A. E. Quadratic dissipative evolution of gaussian states // Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 100. – no. 3–4. — P. 642–646.

- Chebotarev A. M., Teretenkov A. E. Singular value decomposition for the Takagi factorization of symmetric matrices // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 234. – P. 380–384.

- Чеботарев А. М., Теретёнков А. Е. Операторные ОДУ и формула Фейнмана // Математические заметки. – 2012. – Т. 92. – № 6. – С. 943–948;
  Chebotarev A. M., Teretenkov A. E. Operator-valued ODEs and Feynman's formula // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 92. – no. 5–6. — P. 837–842.

Иные публикации (сборники тезисов)

- Teretenkov A. E. Quadratic fermionic dynamics with dissipation // 24th Central European Workshop on Quantum Optics. Book of Abstracts. — Lyngby: Technical University of Denmark, 2017. — P. 204.

- Теретёнков А. Е. Квадратичная фермионная динамика с диссипацией // XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2017». Секция «Физика». — М.: Физический факультет МГУ, 2017. — С. 305–307.

- Teretenkov A. E. Gaussian solutions to the Lindblad equation with a multimode quadratic generator // The 23rd Central European Conference on Quantum Optics. Book of Abstracts. — Kolymbari: Orthodox Academy of Crete. — P. 193-196.

- Теретёнков А. Е. Квадратичная линдбладовская эволюция гауссовских состояний // XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2016». — М.: Физический факультет МГУ, 2016. — С. 187.

- Teretenkov A. E., Tlyachev T. V., Chebotarev A. M. A note on the Takagi factorization of symmetric matrices and diagonalization of multimode squeezings // 21st Central European Workshop on Qunatum Optics. Book of Abstracts. — Brussels: Université libre de Bruxelles , 2014. — P. 242.

- Теретёнков А. Е., Тлячев Т. В., Чеботарев А. М. Разложение Такаги и диагонализация многомодовых сжатий // Четвёртая международная конференция "Математическая физика и её приложения": материалы конф. — Самара: СамГТУ, 2014. — С. 353.