

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЖЕСТКИХ В ПОПЕРЕЧНОМ НАПРАВЛЕНИИ ТОНКИХ ТЕЛ В МОМЕНТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

М.У.НИКАБАДЗЕ – МГУ им. М.В.Ломоносова,

МГТУ им. Н.Э.Баумана;

А.Р.УЛУХАНИЯН – МГТУ им. Н.Э.Баумана;

Р.С.ЯКУШЕВ – КФУ

Казань, 20-24 августа 2015

1. О параметризации области ТТ трехмерного евклидова прост-ва

1.1. Новая параметризация области тонкого тела с одним малым размером

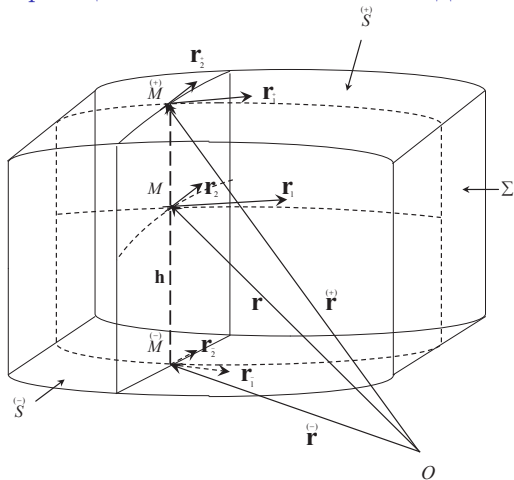


Рис. 1 : Новая параметризация области тонкого тела

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (рис. 1)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(x', x^3) &= {}^{(-)}\mathbf{r}(x') + x^3 \mathbf{h}(x') = (1 - x^3) {}^{(-)}\mathbf{r}(x') + x^3 {}^{(+)}\mathbf{r}(x'), \\ \mathbf{h}(x') &= {}^{(+)}\mathbf{r}(x') - {}^{(-)}\mathbf{r}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad \forall x^3 \in [0, 1]\end{aligned}\quad (1)$$

Компоненты единичного тензора второго ранга (ЕТВР) имеют вид

$$\begin{aligned}g_{p\check{q}} &= (1 - x^3)g_{p\check{q}}^{-} + x^3g_{p\check{q}}^{+}, \quad g_p^{\check{q}} = (1 - x^3)g_p^{\check{q}-} + x^3g_p^{\check{q}+}, \quad \sim \in \{-, +\}, \\ g_{pq} &= (1 - x^3)^2g_{p\bar{q}}^{-} + x^3(1 - x^3)(g_{p\bar{q}}^{-} + g_{p\bar{q}}^{+}) + (x^3)^2g_{p\bar{q}}^{++} \quad (\mathbf{r}_{\bar{I}} = \partial_I {}^{(-)}\mathbf{r}), \\ g^{K\bar{L}} &= {}^{(-)}\vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, \quad g^{K\bar{3}} = {}^{(-)}\vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}} \quad (\mathbf{r}_{\bar{I}}^{+} = \partial_I {}^{(+)}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_p = \partial_p \mathbf{r}), \\ g^{\bar{3}\bar{L}} &= g^{\bar{3}\bar{L}} - {}^{(-)}\vartheta^{-1}g_K^{\bar{3}}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}} - {}^{(-)}\vartheta^{-1}g_K^{\bar{3}}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, \\ \underline{g_{\bar{M}}^K} &= {}^{(-)}\vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K, \quad \underline{g_{\bar{3}}^K} = 0, \quad \underline{g_{\bar{M}}^{\bar{3}}} = -\underline{g_{\bar{K}}^{\bar{3}}g_{\bar{M}}^K} = -{}^{(-)}\vartheta^{-1}\underline{g_{\bar{K}}^{\bar{3}}A_{\bar{M}}^K}, \quad \underline{g_{\bar{3}}^{\bar{3}}} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\bar{M}}^K &\equiv \epsilon^{KL} \epsilon_{\bar{M}N} g_{\bar{L}}^{\bar{N}} = g_{\bar{M}}^{\bar{K}} + x^3 a_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \quad a_{\bar{M}}^{\bar{K}} \equiv (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} - 1) g_{\bar{M}}^{\bar{K}} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \\
\vartheta^{(-)} &= \sqrt{g^{(-)} g^{-1}} = (1 - x^3)^2 + x^3(1 - x^3) \text{tr}(g_{\bar{J}}^{\bar{I}}) + (x^3)^2 \det(g_{\bar{J}}^{\bar{I}}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Имеют место разложения:

$$\begin{aligned}
g_{\bar{M}}^{\bar{P}} &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s, \quad g_{\bar{M}}^{\bar{3}} = -g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} = -g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1}, \\
g_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} &= \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s, \quad B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} = \sum_{r=0}^s A_{(s-r)\bar{M}}^{\bar{P}} A_{(r)\bar{N}}^{\bar{Q}}, \\
g^{\bar{P}\bar{Q}} &= \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g_{(s)\bar{M}}^{\bar{Q}\bar{M}} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s, \quad g^{\bar{P}\bar{3}} = -g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} + \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{M}}^{\bar{Q}\bar{3}} (x^3)^{s+1}, \\
g^{\bar{3}\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{M}}^{\bar{Q}\bar{3}} (x^3)^{s+2}; \quad \underline{g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = \frac{1}{h} \partial_P h}, \quad \underline{g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = x^3 g_{\bar{P}}^{\bar{3}}}, \\
A_{(0)\bar{M}}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \quad A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \quad A_{(2)\bar{M}}^{\bar{P}} = (g_{\bar{N}}^{\bar{P}} - g_{\bar{N}}^{\bar{P}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{N}} - g_{\bar{M}}^{\bar{N}}), \dots, \\
A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} &= (g_{\bar{N}_1}^{\bar{P}} - g_{\bar{N}_1}^{\bar{P}}) (g_{\bar{N}_2}^{\bar{N}_1} - g_{\bar{N}_2}^{\bar{N}_1}) \dots (g_{\bar{N}_{s-1}}^{\bar{N}_{s-2}} - g_{\bar{N}_{s-1}}^{\bar{N}_{s-2}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{N}_{s-1}} - g_{\bar{M}}^{\bar{N}_{s-1}}).
\end{aligned}$$

Теорема. (Фундаментальная теорема для области тонкого тела в $\mathbb{R}^3$ при ее новой параметризации (НП))

Задание единичного тензора второго ранга, представленного в виде

$$\mathbf{E} = g_{\hat{p}\check{q}} \mathbf{r}^{\hat{p}} \mathbf{r}^{\check{q}}, \quad \wedge, \smile \in \{-, \emptyset, +\},$$

компоненты переноса которого удовлетворяют уравнениям, аналогичным уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци, необходимо и достаточно для существования и единственности с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$ некоторой регулярной области тонкого тела (ТТ) при НП. При этом число независимых основных компонент ЕТВР зависит от типа семейства параметризации основной базовой поверхности.

1.2. Параметризации области тонкого тела с одним малым размером при произвольной базовой поверхности

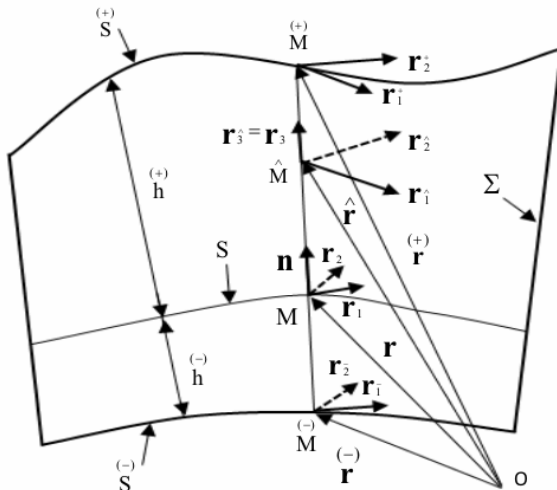


Рис. 2 : Нормальное сечение тонкого тела

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (рис. 2)

$$\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = \mathbf{r}(x') + z(x', x^3)\mathbf{n}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad z(x', x^3) = \bar{h} + x^3 h, \quad (3)$$

$$h(x') = \frac{1}{2} \left[\overset{(+)}{h}(x') + \overset{(-)}{h}(x') \right], \quad \bar{h}(x') = \frac{1}{2} \left[\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h} \right], \quad \forall x^3 \in [-1, 1];$$

$$\mathbf{r}_{\hat{I}}(x', x^3) = [g_I^J - z(x', x^3)b_I^J]\mathbf{r}_J + h^{-1}\partial_I z(x', x^3)\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_{\hat{3}} = \mathbf{r}_3 = h\mathbf{n}(x'),$$

$$\mathbf{r}^3 = h^{-1}\mathbf{n}(x'), \quad \mathbf{r}^{\hat{P}} = g_M^{\hat{P}}\mathbf{r}^M, \quad \mathbf{r}^{\hat{3}} = \mathbf{r}^3 - g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}}\mathbf{r}^M,$$

$$g_{\hat{I}}^J = g_I^J - z(x', x^3)b_I^J, \quad g_{\hat{I}J} = g_{IJ} - z(x', x^3)b_{IJ}, \quad \underline{g_{\hat{I}}^3 = h^{-1}\partial_I z(x', x^3)},$$

$$\underline{g_{\hat{I}3} = h\partial_I z(x', x^3)}, \quad g_{\hat{3}}^J = g_{3J} = 0, \quad g_{\hat{3}}^3 = 1, \quad g_{\hat{3}3} = g_{33} = h^2,$$

$$\underline{g_L^{\hat{I}} = \hat{\vartheta}^{-1}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}g_J^K}, \quad g^{\hat{I}L} = g_M^{\hat{I}}g^{ML}, \quad g_3^{\hat{I}} = 0, \quad g^{\hat{I}3} = 0, \quad g_L^{\hat{3}} = -g_{\hat{I}}^3 g_L^{\hat{I}},$$

$$\underline{g^{\hat{3}L} = g_M^{\hat{3}}g^{ML} = -g_{\hat{I}}^3 g_M^{\hat{I}}g^{ML}}, \quad g_3^{\hat{3}} = 1, \quad g^{\hat{3}3} = g^{33} = h^{-2},$$

$$\underline{\hat{\vartheta} = \sqrt{\hat{g}g^{-1}} = \det(g_{\hat{I}}^J) = 1 - z(x', x^3)I_1(\mathbf{b}) + z^2(x', x^3)\det(\mathbf{b})}.$$

2. Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей и дифф. операторов относительно этих систем полиномов

2.1. Система полиномов Лежандра. Рекуррентные соотношения

$$P_m(x) = \frac{1}{m!2^m} [(x^2 - 1)^m]^{(m)}, \quad \|P_m(x)\| = \sqrt{J_{mm}} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}, \quad P_m(1) = 1,$$

$$P_m(-1) = (-1)^m, \quad J_{mn} = \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, \quad < m >, \quad J_{mn}^* = \frac{1}{2}J_{mn},$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = 1/2(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = 1/8(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

$$(2k+1)xP_k(x) = kP_{k-1}(x) + (k+1)P_{k+1}(x), \quad xP'_k(x) = kP_k(x) + P'_{k-1}(x),$$

$$P'_k(x) = (2k-1)P_{k-1}(x) + (2k-5)P_{k-3}(x) + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\left(P'_n(x) = \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} [2n - (4p+1)] P_{n-(2p+1)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=a}^{n-1} (2p+1) [1 - (-1)^{n+p}] P_p(x) \right),$$

$$a = n - 1 - 2 \left[(n-1)/2 \right] = 1/2(1 + (-1)^n);$$

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{r=0}^m \frac{A_{m-r}A_rA_{n-r}}{A_{n+m-r}} \left(\frac{2n+2m-4r+1}{2n+2m-2r+1} \right) P_{n+m-2r}(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$A_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{m!} = \frac{(2m-1)!!}{m!}, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad m \leq n.$$

Рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Лежандра

$$\begin{aligned}
 tP_n^*(t) &= \frac{1}{2}P_n^*(t) + \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}^*(t) + \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}^*(t), \\
 t^2P_n^*(t) &= \frac{1}{4}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}^*(t) + \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}^*(t) + \\
 &+ \frac{3n^2+3n-2}{2(2n-1)(2n+3)}P_n^*(t) + \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}^*(t) + \frac{1}{4}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}^*(t), \\
 t^3P_n^*(t) &= \frac{(n-2)(n-1)n}{8(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-3}^*(t) + \frac{3(n-1)n}{8(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}^*(t) + \\
 &+ \frac{3n(5n^2-11)}{8(2n-3)(2n+1)(2n+3)}P_{n-1}^*(t) + \frac{5n^2+5n-3}{4(2n-1)(2n+3)}P_n^*(t) + \\
 &+ \frac{3(n+1)(5n^2+10n-6)}{8(2n-1)(2n+1)(2n+5)}P_{n+1}^*(t) + \frac{3(n+1)(n+2)}{8(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}^*(t) + \\
 &+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8(2n+1)(2n+3)(2n+5)}P_{n+3}^*(t), \\
 t^4P_n^*(t) &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{16(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-4}^* + \frac{(n-2)(n-1)n}{4(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-3}^* + \\
 &+ \frac{(n-1)n(7n^2-7n-26)}{4(2n-5)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_{n-2}^* + \frac{n(23n^2+29n-17)}{16(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_{n-1}^* + \\
 &+ \frac{35n^4+70n^3-115n^2-150n+72}{8(2n-3)(2n-1)(2n+3)(2n+5)}P_n^* + \frac{(n+1)(7n^2+14n-8)}{4(2n-1)(2n+1)(2n+5)}P_{n+1}^* +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(n+1)(n+2)(7n^2+21n-12)}{4(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+7)} P_{n+2}^* + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4(2n+1)(2n+3)(2n+5)} P_{n+3}^* + \\
& + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{16(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)} P_{n+4}^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1,
\end{aligned}$$

2.2. Система ортогональных полиномов Чебышева первого рода.

Рекуррентные соотношения

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots,$$

$$J_{nm} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad J_{nm}^* = \frac{1}{2} J_{nm},$$

$$\hat{T}_n(x) = \frac{1}{\|T_n\|} T_n(x), \quad \hat{T}_n^*(t) = \frac{1}{\|T_n^*\|} T_n^*(t), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

$$2xT_n(x) = T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$2xT'_n(x) = \frac{n}{n-1} T'_{n-1}(x) + \frac{n}{n+1} T'_{n+1}(x), \quad n > 1,$$

$$T'_n(x) = 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2} T'_{n-2}(x), \quad n > 2,$$

$$2^s x^s T_n(x) = \sum_{p=0}^s C_s^p T_{n-s+2p}(x), \quad n \geq s, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$4tT_n^*(t) = T_{n-1}^*(t) + 2T_n^*(t) + T_{n+1}^*(t), \quad n \geq 1,$$

$$4tT_n^{*'}(t) = \frac{n}{n-1} T_{n-1}^*(t) + 2T_n^{*'}(t) + \frac{n}{n+1} T_{n+1}^*(t), \quad n > 1,$$

$$T_n^{*'}(t) = 4nT_{n-1}^*(t) + \frac{n}{n-2} T_{n-2}^{*'}(t), \quad n > 2,$$

$$2^{2s} t^s T_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p T_{n+p-s}^*(t), \quad n-s \geq 0,$$

$$T_{2m}^{*'}(t) = 4(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k-1}^*(t) = 4(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2k+1}^*(t),$$

$$T_{2m+1}^{*'}(t) = 4(2m+1) \left[\frac{1}{2} T_0^*(t) + \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k}^*(t) \right], \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2.3. Полиномы Чебышева второго рода. Рекуррентные соотношения

$$\left(U_n(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad U_n(-1) = (-1)^n(n+1), \quad U_n(1) = n+1 \right),$$

$$2x\hat{U}_k(x) = \hat{U}_{k-1}(x) + \hat{U}_{k+1}(x),$$

$$\hat{U}'_k(x) = 2[k\hat{U}_{k-1}(x) + (k-2)\hat{U}_{k-3}(x) + \dots],$$

$$x\hat{U}'_k(x) = k\hat{U}_k + \hat{U}'_{k-1}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \left(\hat{U}_n(-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n(n+1), \quad \hat{U}_n(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(n+1) \right),$$

$$\left(\hat{U}'_k(x) = 2 \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} (n-2p) \hat{U}_{n-(2p+1)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=a}^{n-1} (p+1) [1 - (-1)^{n+p}] \hat{U}_p(x) \right),$$

$$a = n - 1 - 2 \left[(n-1)/2 \right] = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n);$$

$$4tU_n^*(t) = U_{n-1}^*(t) + 2U_n^*(t) + U_{n+1}^*(t), \quad n \geq 1,$$

$$2tU_n^{*'}(t) = 2nU_n^*(t) + U_{n-1}^{*'}(t) + U_n^{*'}(t), \quad n \geq 1,$$

$$U_n^{*'}(t) = 4nU_{n-1}^*(t) + U_{n-2}^{*'}(t), \quad n \geq 2,$$

$$(U_{-m}^*(t) = -U_{m-2}^*(t), \quad m \in \mathbb{N}_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$J_{nm}^* = \int_0^1 U_n^*(t) U_m^*(t) h^*(t) dt = \|U_n^*\|^2 \delta_{mn} = \frac{1}{2} \|U_n\|^2 \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{4} & n = m, \end{cases}$$

$$2^{2s} t^s U_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p U_{n-s+p}^*(t), \quad s, n \in \mathbb{N}_0; \quad (4)$$

$$2^{2s}t^s U_m^*(t)U_n^*(t) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q U_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n, m, s \in \mathbb{N}_0; \quad (5)$$

$$U_n^{*'}(t) = 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (n-2k) U_{n-(2k+1)}^*(t) = 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k+1+a) U_{2k+a}^*(t), \quad n \geq 1;$$

$$2^{2s}t^s U_n^{*'}(t) = 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{p=0}^{2s} (n-2k) C_{2s}^p U_{n-(s+2k+1)+p}^*(t) =$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k+1+a) U_{2k+a-s+p}^*, \quad n \geq 1, \quad s \geq 0; \quad (6)$$

$$U_n^{*''}(t) = 2^4 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (k+1)(n-k)[n-(2k+1)] U_{n-(2k+2)}^*(t) =$$

$$= 2^2 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (2k+2-a)[(n+1)^2 - (2k+2-a)^2] U_{2k+1-a}^*(t), \quad n \geq 2; \quad (7)$$

$$2^{2s}t^s U_n^{*''}(t) = 2^4 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} \sum_{p=0}^{2s} (k+1)(n-k)[n-(2k+1)] C_{2s}^p U_{n-(s+2k+2)+p}^*, \quad n \geq 2, \quad s \geq 0.$$

Здесь $a = (1/2)(1 + (-1)^n)$, а C_m^n — биномиальные коэффициенты.

$$2^{2s}t^s \hat{U}_m^*(t) \hat{U}_n^*(t) = \hat{U}_0^* \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q \hat{U}_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n-m-s \geq 0. \quad (8)$$

2.4. К теории моментов относительно системы ортогональных полиномов

2.4.1. К теории моментов относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода для теории тонких тел с одним малым размером.

Разложение по одной координате. Некоторые соотношения

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad x' \in S^{(-)}, \quad x^3 \in [0, 1]. \quad (9)$$

Определение. Моментом k -го порядка какого-нибудь тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$

относительно системы полиномов $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, обозначаемым через $\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad h^*(x^3) = 2\sqrt{x^3(1-x^3)}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (10)$$

Утверждения:

$$\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) = \int \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \mathbb{F}^{(k)}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \mathbb{F}) &= g_i^K \partial_K \mathbb{F}^{(k)}(x') + g_i^3 \mathbb{F}^{(k)'}(x'), \\ \mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \partial_j \mathbb{F}) &= g_i^L g_j^M \partial_L \partial_M \mathbb{F}^{(k)}(x') + (g_i^L g_j^3 + g_i^3 g_j^L) \partial_L \mathbb{F}^{(k)'}(x') + g_i^3 g_j^3 \mathbb{F}^{(k)''}(x'); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}'^{(k)}(x') &= 2^2(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+1)}(x') = 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{F}^{(p)}(x') = \\
&= 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbb{F}^{(p)}(x') + \mathbb{F}^{(+)}{}'(x') - (-1)^k \mathbb{F}^{(-)}{}'(x') \right], \\
\mathbb{F}''^{(k)}(x') &= (\mathbb{F}'^{(k)})' = 2^4(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2) \mathbb{F}^{(k+2p+2)}(x') = 2(k+1) \times \\
&\times \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(k+p+2)(1 + (-1)^{k+p}) \mathbb{F}^{(p)}(x') + \mathbb{F}^{(+)}{}''(x') + (-1)^k \mathbb{F}^{(-)}{}''(x') \right], \\
\mathbb{F}'^{(+)}(x') &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad \mathbb{F}''^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (p-k)(k+p+2) \mathbb{F}^{(p)}(x'), \\
\mathbb{F}'^{(-)}(x') &= \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad \mathbb{F}''^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p (p-k)(k+p+2) \mathbb{F}^{(p)}(x').
\end{aligned}$$

Обобщениями являются следующие соотношения:

$$\mathbb{M}^{(k)}[P_N(x^3)\partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}] = \begin{cases} \partial_I^p\partial_J^q\mathbb{M}^{(k)}[P_N(x^3)\mathbb{F}], & i = I, j = J, \\ \partial_I\{\mathbb{M}^{(k)}[P_N(x^3)\mathbb{F}]\}^{(q)}, & i = I, j = 3, \\ \{\mathbb{M}^{(k)}[P_N(x^3)\mathbb{F}]\}^{(p+q)}, & i = j = 3; \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathbb{M}^{(n)}[(x^3)^s\partial_3^m\mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)}(m), \quad n-s \geq 0, \quad s, m \in \mathbb{N}_0,$$

$$\mathbb{M}^{(n)}[(x^3)^s\partial_3^m\mathbb{F}] = \sum_{p=1}^{2n+2} 2^{-2(n+1)} C_{2n+2}^p \mathbb{F}^{(p-1)}(m), \quad s = n+1, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (14)$$

$$\mathbb{M}^{(n)}[(x^3)^s\partial_3^m\mathbb{F}] = -\sum_{q=2}^{s-n} 2^{-2s} C_{2s}^{q-2} \mathbb{F}^{(s-n-q)}(m) + \sum_{p=s-n}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)}(m), \quad s \geq n+2, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

(Если $\hat{U}_{-m}^*(t) = -\hat{U}_{m-2}^*(t)$, $m \in \mathbb{N}_0$, то верно (14)₁ при $s, n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq t \leq 1$),

2.4.2. Момент k -го порядка произведения двух функций относительно системы полиномов Чебышева второго рода

Момент k -го порядка произведения нескольких функций (тензорных полей) относительно какой-нибудь системы полиномов определяется аналогично (10). В частности, для системы полиномов Чебышева будем иметь

$$M(fg) \stackrel{def}{=} \int_0^1 f(x', x^3) g(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h_k^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (15)$$

$$M^{(k)}(fg) = \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k \binom{n+p}{f} (x') \binom{n+k-p}{g} (x'), \quad (16)$$

$$M^{(k)}[2^{2s}(x^3)^s fg] = \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2s} \sum_{p=0}^{k-s+q} C_{2s}^q \binom{n+p}{f} \binom{n+k-s-p+q}{g}, \quad k-s \geq 0, \quad s \geq 0,$$

$$\begin{aligned} M^{(p)'}(fg) &= \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \left(\binom{n+q}{f}' \binom{n+k-q}{g} + \binom{n+k-q}{f} \binom{n+q}{g}' \right) = \\ &= \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \left(\binom{n}{f}' \binom{n+k-2q}{g} + \binom{n+k-2q}{f} \binom{n}{g}' \right). \end{aligned} \quad (17)$$

2.4.3. Моменты производных и повторных производных скалярной функции относительно системы смещенных полиномов Лежандра

Теорема 2.1.

$$M_L^{(k)*}(\partial_i f) = (2k+1) \int_0^1 \partial_i f(x', x^3) P_k^*(x^3) dx^3 = g_i^J \partial_J f^{(k)*}(x') + g_i^3 \underline{f}^{(k)*'}(x') = \quad (18)$$

$$= g_i^J \partial_J f^{(k)*}(x') + g_i^3 \{ (2k+1) [\underline{f}^{(+)*} - (-1)^k \underline{f}^{(-)*}] - \underline{f}^{(k)*'} \};$$

$$\underline{f}^{(k)*'}(x') = 2(2k+1) \left(\underline{f}^{(k+1)*} + \underline{f}^{(k+3)*} + \dots \right) = 2(2k+1) \sum_{m=0}^{\infty} \underline{f}^{(k+2m+1)*}, \quad (19)$$

$$\underline{f}^{(k)*'}(x') = 2(2k+1) \left[\underline{f}^{(k-1)*}(x') + \underline{f}^{(k-3)*}(x') + \underline{f}^{(k-5)*}(x') + \dots \right].$$

Теорема 2.2.

$$\begin{aligned}
 M_L^{(k)}(\partial_i \partial_j f) &= (2k+1) \int_0^1 \partial_i \partial_j f(x', x^3) P_k^*(x^3) dx^3 = \\
 &= g_i^K g_j^L \partial_K \partial_L \underline{f}^{(k)*}(x') + (g_i^K g_j^3 + g_i^3 g_j^K) \partial_K \underline{f}^{(k)*'}(x') + g_i^3 g_j^3 \underline{f}^{(k)*''}(x') =
 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 &= g_i^K g_j^L \partial_K \partial_L \underline{f}^{(k)*} + (g_i^K g_j^3 + g_i^3 g_j^K) \{ (2k+1) \partial_K [\underline{f}^{(+)*} - (-1)^k \underline{f}^{(-)*}] - \partial_K \underline{f}^{(k)*'} \} + \\
 &+ g_i^3 g_j^3 \{ (2k+1) [(\partial_3 \underline{f}^{(+)*} - (-1)^k \partial_3 \underline{f}^{(-)*}) - k(k+1) (\underline{f}^{(+)*} + (-1)^k \underline{f}^{(-)*})] + \underline{f}^{(k)*''} \};
 \end{aligned}$$

$$\underline{f}^{(k)*''}(x') = 4(2k+1) [(2k+3) \underline{f}^{(k+2)*} + 2(2k+5) \underline{f}^{(k+4)*} + 3(2k+7) \underline{f}^{(k+6)*} + \dots], \quad (21)$$

$$\underline{f}^{(k)*''} = 4(2k+1) [(2k-1) \underline{f}^{(k-2)*} + 2(2k-3) \underline{f}^{(k-4)*} + 3(2k-5) \underline{f}^{(k-6)*} + \dots]; \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\mathbb{F}^{(n)}(2m) \right)(x') &= (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n+2k+2s-1) \mathbb{F}^{(n+2k+2m-2)}, \\
 \underline{\mathbb{F}}^{(n)}(2m)(x') &= (2n+1) \sum_{k=1}^{[n/2-m+1]} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n-2k-2s+3) \mathbb{F}^{(n-2k-2m+2)}, \quad n \geq 2m.
 \end{aligned} \quad (23)$$

3. Представление градиентов и повторных градиентов в теории тонких тел

3.1. Представление градиентов и повторных градиентов в теории тонких тел (ТТТ) с одним малым размером (при произвольной базовой поверхности)

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} &= \mathbf{r}^M g_M^{\hat{P}} N_P + \mathbf{r}^3 \partial_3, \quad N_P = \partial_P - \overline{g_P^3 \partial_3}, \quad (g_P^3 = h^{-1}(\partial_P \bar{h} + x^3 \partial_P h)) \\ \hat{\nabla} \hat{\nabla} &= \mathbf{r}^M \mathbf{r}^N g_M^{\hat{P}} g_N^{\hat{Q}} N_P N_Q + \mathbf{r}^M \mathbf{r}^3 g_M^{\hat{P}} N_P \partial_3 + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^N g_N^{\hat{Q}} \nabla_3 N_Q + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^3 \partial_3^2;\end{aligned}\quad (24)$$

3.2. Представление градиентов и повторных градиентов в ТТТ с одним малым размером при НП

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3, \quad N_P = \partial_P - \overline{g_P^{\bar{3}} \partial_3}, \quad (g_P^{\bar{3}} = x^3 g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = x^3 \frac{1}{h} \partial_P h), \\ \nabla \nabla &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} N_P N_Q + \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} N_P \partial_3 + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} \nabla_3 N_Q + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2;\end{aligned}\quad (25)$$

4. Представления основных уравнений и определяющих соотношений (ОС) в ТТТ. Граничные и начальные условия. Постановки задач

4.1. Представления уравнений движения и притока тепла приближения порядка r для микрополярной теории тонких тел (МТТТ) с одним малым размером при новой параметризации

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{\tilde{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{\tilde{\mu}} + \mathbf{\tilde{C}} \otimes \mathbf{\tilde{P}} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{\tilde{J}} \partial_t^2 \varphi \right).$$

$$\begin{aligned} g_{(r)M}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u} \quad \left(g_{(r)M}^P = \sum_{k=0}^r A_{(k)M}^{\bar{P}} (x^3)^k \right), \\ g_{(r)M}^P N_P \mathbf{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{\tilde{C}} \otimes \mathbf{\tilde{P}} + \rho \mathbf{m} &= \mathbf{\tilde{J}} \cdot \partial_t^2 \varphi \quad (N_P = \partial_P - g_P^{\bar{3}} \partial_3), \quad (26) \\ -g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{\tilde{a}} \otimes \mathbf{\tilde{P}} + \mathbf{\tilde{d}} \otimes \mathbf{\tilde{\mu}}) + W^* &= \rho c_p \partial_t T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1/(\sqrt{g^{(-)}}) \partial_P (\sqrt{g^{(-)}} \vartheta^{(-)} \mathbf{P}^P) + \partial_3 (\vartheta^{(-)} \mathbf{P}^3) + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{F} = \rho \vartheta^{(-)} \partial_t^2 \mathbf{u}, \right. \\ &\left. 1/(\sqrt{g^{(-)}}) \partial_P (\sqrt{g^{(-)}} \vartheta^{(-)} \mathbf{\mu}^P) + \partial_3 (\vartheta^{(-)} \mathbf{\mu}^3) + \mathbf{\tilde{C}} \otimes (\vartheta^{(-)} \mathbf{\tilde{P}}) + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{m} = \vartheta^{(-)} \mathbf{\tilde{J}} \cdot \partial_t^2 \varphi \right). \end{aligned}$$

4.2. Представления законов Гука и теплопроводности в ТТТ

В линейной микрополярной теории упругости закон Гука при неизотермических процессах в силу обобщенного принципа Дюгамеля–Неймана можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{(T)} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{(T)}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{(T)} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{(T)}, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{(T)} &= \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} - \underline{\underline{\mathbf{a}}} \vartheta, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{(T)} = \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}} \vartheta, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad \vartheta = T - T_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Введем тензорно-блочную матрицу и тензорные столбцы

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{A}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\mathbb{M}}}^T = \underline{\underline{\mathbb{M}}}), \quad \underline{\underline{\mathbb{X}}}^{(T)} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^{(T)} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^{(T)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Тогда из ((27) и (28)) $\Rightarrow \left(\underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \underline{\underline{\mathbb{M}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{X}}}^{(T)} \right)$, а отсюда или (27) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{d}}}, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \nabla \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} \vartheta, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{d}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

4.3. ОС физического и теплового содержаний в ТТТ при различных параметризациях можно записать в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \tilde{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \tilde{\nabla} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \quad \sim \in \{\wedge, \emptyset\} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \tilde{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \tilde{\nabla} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta, \quad \mathbf{q} = -\underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \tilde{\nabla} T.\end{aligned}\quad (30)$$

4.4. Законы Гука и теплопроводности Фурье приближения порядка s в ТТТ с одним малым размером при НП

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(s)} &= \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \nabla_{(s)} \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \nabla_{(s)} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(s)} &= \underline{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \nabla_{(s)} \mathbf{u} + \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \nabla_{(s)} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta, \\ \mathbf{q}_{(s)} &= -\underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \nabla_{(s)} T, \quad (\nabla_{(s)} = g_{(s)M}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3).\end{aligned}\quad (31)$$

ОС в ТТТ в краткой форме можно записать в виде

$$\underline{\mathbb{Y}}_{(s)} = \underline{\mathbb{M}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbb{X}}_{(s)}^{(T)}, \quad \underline{\mathbb{X}}_{(s)}^{(T)} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{(s)}^{(T)} \\ \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_{(s)}^{(T)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbb{Y}}_{(s)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{(s)} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(s)} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\underline{\gamma}_{(s)}^{(T)} = \underline{\gamma}_{(s)} - \underline{\mathfrak{a}}\vartheta, \quad \underline{\mathfrak{x}}_{(s)}^{(T)} = \underline{\mathfrak{x}}_{(s)} - \underline{\mathfrak{d}}\vartheta, \quad \underline{\gamma}_{(s)} = \nabla_{(s)} \mathbf{u} - \underline{\mathbb{C}} \cdot \underline{\varphi}, \quad \underline{\mathfrak{x}}_{(s)} = \nabla_{(s)} \underline{\varphi}.$$

В компонентах будем иметь

$$\begin{aligned} P_{(s)M}^{ij} &= g_{(s)M}^P C^{ij\bar{M}l} N_P u_l + C^{ij\bar{3}l} \partial_3 u_l + g_{(s)M}^P A^{ij\bar{M}l} N_P \varphi_l + \\ &\quad + A^{ij\bar{3}l} \partial_3 \varphi_l - C^{ijkl} C_{klm} \varphi^m - b^{ij} \vartheta, \\ \mu_{(s)M}^{ij} &= g_{(s)M}^P B^{ij\bar{M}l} N_P u_l + B^{ij\bar{3}l} \partial_3 u_l + g_{(s)M}^P D^{ij\bar{M}l} N_P \varphi_l + \\ &\quad + D^{ij\bar{3}l} \partial_3 \varphi_l - B^{ijkl} C_{klm} \varphi^m - \beta^{ij} \vartheta, \\ q_{(s)M}^i &= -g_{(s)M}^P \Lambda^{i\bar{M}} N_P T - \Lambda^{i\bar{3}} \partial_3 T. \end{aligned}$$

5. О представлениях тензоров модулей упругости в мкрополярной теории

5.1. Мкрополярный изотропный материал

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{C}}} &= \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \mu (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) + \alpha (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) \\ (C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})), \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= \gamma \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \delta (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) + \beta (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}), \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} &= \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}_j, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \mathbf{r}_i \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i.\end{aligned}\quad (33)$$

5.2. Мкрополярный трансверсально-изотропный материал в общем случае имеет 19 независимых компонент

$$\begin{aligned}C_{ijkl} &= C_1 I_{ij} I_{kl} + C_2 I_{ik} I_{jl} + C_3 I_{il} I_{jk} + C_4 I_{ij} \epsilon_{kl} + C_5 I_{ik} \epsilon_{jl} + C_6 \epsilon_{il} I_{jk} + C_7 I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ &+ C_8 \epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + C_9 \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl} + C_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl} + C_{11} I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{12} \epsilon_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{13} I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \\ &+ C_{14} \epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + C_{15} \gamma_{il}^{(3)} I_{jk} + C_{16} \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk} + C_{17} \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + C_{18} \gamma_{ik}^{(3)} \epsilon_{jl} + C_{19} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}.\end{aligned}$$

Если компоненты C_{ijkl} обладают симметрией $C_{ijkl} = C_{klij}$, то

$$\begin{aligned}C_{ijkl} &= a_1 I_{ij} I_{kl} + a_2 I_{ik} I_{jl} + a_3 I_{il} I_{jk} + a_4 (I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl}) + a_5 (\epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl}) + \\ &+ a_6 I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + a_7 (I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} I_{jk}) + a_8 (\epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} - \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk}) + a_9 \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + a_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)},\end{aligned}$$

$$I_{ij} = \delta_{Mi} \delta_{Mj}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{MN} \delta_{Mi} \delta_{Nj} = -\epsilon_{ji}, \quad \gamma_{ij}^{(3)} = \delta_{3i} \delta_{3j}.$$

5.3. Мкрополярный ортотропный материал (в общем случае имеет 21 независимую компоненту)

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} = & C_{1111}\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)} + C_{1122}\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(2)} + C_{1133}\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(3)} + C_{2211}\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(1)} + \\
 & + C_{2222}\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(2)} + C_{2233}\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(3)} + C_{3311}\gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(1)} + C_{3322}\gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333}\gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(3)} + \\
 & + C_{1212}\gamma_{ik}^{(1)}\gamma_{jl}^{(2)} + C_{1221}\gamma_{il}^{(1)}\gamma_{jk}^{(2)} + C_{2112}\gamma_{il}^{(2)}\gamma_{jk}^{(1)} + C_{2121}\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(1)} + C_{1313}\gamma_{ik}^{(1)}\gamma_{jl}^{(3)} + \\
 & + C_{1331}\gamma_{il}^{(1)}\gamma_{jk}^{(3)} + C_{3113}\gamma_{il}^{(3)}\gamma_{jk}^{(1)} + C_{3131}\gamma_{ik}^{(3)}\gamma_{jl}^{(1)} + C_{2323}\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(3)} + C_{2332}\gamma_{il}^{(2)}\gamma_{jk}^{(3)} + \\
 & + C_{3223}\gamma_{il}^{(3)}\gamma_{jk}^{(2)} + C_{3232}\gamma_{ik}^{(3)}\gamma_{jl}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Если $C_{ijkl} = C_{klij}$, то (имеет 15 независимых компонент)

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} = & C_{1111}\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)} + C_{2222}\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333}\gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(3)} + C_{1122}(\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(1)}) + \\
 & + C_{1133}(\gamma_{ij}^{(1)}\gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(1)}) + C_{2233}(\gamma_{ij}^{(2)}\gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)}\gamma_{kl}^{(2)}) + C_{1212}\gamma_{ik}^{(1)}\gamma_{jl}^{(2)} + \\
 & + C_{1221}(\gamma_{il}^{(1)}\gamma_{jk}^{(2)} + \gamma_{il}^{(2)}\gamma_{jk}^{(1)}) + C_{2121}\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(1)} + C_{1313}\gamma_{ik}^{(1)}\gamma_{jl}^{(3)} + \\
 & + C_{1331}(\gamma_{il}^{(1)}\gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)}\gamma_{jk}^{(1)}) + C_{3131}\gamma_{ik}^{(3)}\gamma_{jl}^{(1)} + C_{2323}\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(3)} + \\
 & + C_{2332}(\gamma_{il}^{(2)}\gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)}\gamma_{jk}^{(2)}) + C_{3232}\gamma_{ik}^{(3)}\gamma_{jl}^{(2)}, \\
 \gamma_{ij}^{(\alpha)} = & \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j} \quad (\underline{\gamma}^{(\alpha)} = \gamma_{ij}^{(\alpha)}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_\alpha\mathbf{r}_\alpha), \quad < \alpha = 1, 2, 3 >.
 \end{aligned}$$

6. Момент k-ого порядка основного выражения, градиента, повторного градиента и лапласиана

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}^{(k)}(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F}) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} \{ \nabla_P \mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^3 \mathbb{M}'^{(k)}[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] \} = \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P^{(p-u)} \mathbb{F} - g_{\bar{P}}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p \mathbb{F}^{(p-v)}, \quad (34) \\
 u &= s - k, \quad v = u + 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{M}}^{(k)}(\nabla \mathbb{F}) &= \mathbf{r}^3 \mathbb{F}'^{(k)}(x') + \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P^{(p-u)} \mathbb{F} - \right. \\
 &\quad \left. - g_{\bar{P}}^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p \mathbb{F}^{(p-v)} \right], \quad u = s - k, \quad v = u + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(g_{\bar{M}}^P = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s, \quad g_{(r)\bar{M}}^P = \sum_{s=0}^r A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s, \right. \\
 \mathbb{F}'^{(k)}(x') = 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbb{F}^{(p)}(x') + \mathbb{F}'^{(+)}(x') - (-1)^k \mathbb{F}'^{(-)}(x') \right], \\
 \left. \mathbb{F}'^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad \mathbb{F}'^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{F}^{(p)}(x'), \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{M}}^{(k)}(\nabla \nabla \mathbb{F}) = & \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} B_{(s) \bar{M} \bar{N}}^{\bar{P} \bar{Q}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}^{(p-u)} - \right. \\
 & \left. - \sum_{p=0}^{2s+2} B_{(s) \bar{M} \bar{N}}^{\bar{P} \bar{Q}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P) \mathbb{F}^{(p-v)} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2s+4} B_{(s) \bar{M} \bar{N}}^{\bar{P} \bar{Q}} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \mathbb{F}^{(p-w)} \right] + \\
 & + (\mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \mathbb{F}^{(p-u)} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2s+2} A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}^{(p-v)} \right] + \\
 & + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbb{F}^{(k)}, \quad u = s - k, \quad v = u + 1 = s + 1 - k, \quad w = u + 2 = s + 2 - k, \quad k \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}^{(k)}(\Delta \mathbb{F}) = & g^{\bar{M} \bar{Q}} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} (s+1) 2^{-2s} A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}^{(p-u)} - \right. \\
 & - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2s+2} (s+1) 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_Q \mathbb{F}^{(p-v)} + \\
 & \left. + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2s+4} (s+1) A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \mathbb{F}^{(p-w)} \right] + g^{\bar{3} \bar{3}} \mathbb{F}^{(k)},
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$u = s - k, \quad v = u + 1 = s + 1 - k, \quad w = u + 1 = s + 2 - k, \quad k \geq 0;$$

$$\begin{aligned}
 \left(\mathbb{F}^{(k)} \right)''(x') = & 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(k+p+2)(1+(-1)^{k+p}) \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}^{(+)} \right]'' + (-1)^k \mathbb{F}^{(-)}'', \\
 \mathbb{F}^{(+)}''(x') = & \sum_{p=N+1}^{\infty} (p-k)(k+p+2) \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad \mathbb{F}^{(-)}''(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p (p-k)(k+p+2) \mathbb{F}^{(p)}(x').
 \end{aligned}$$

7. Уравнений движения (УД) и притока тепла и ОС в моментах в ТТТ

7.1. УД и притока тепла и ОС в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода МТТТ с одним малым размером при НП

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(g_{(r)M}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} - \rho \partial_t^2 \mathbf{u} \right) \hat{U}_k^* &= 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} - \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi} \right) \hat{U}_k^* &= 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(-g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d}^2 \otimes \boldsymbol{\mu}) + W^* - \rho c_p \partial_t T \right) \hat{U}_k^* &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

7.2. Бесконечные системы УД и притока тепла в моментах в ТТТ с одним малым размером приближения (r, N)

Утверждение: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x') \hat{U}_k^*(x^3) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x') = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \right).$

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(g_{(r)M}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} - \rho \partial_t^2 \mathbf{u} \right) &= 0, \\ \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} - \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi} \right) &= 0, \\ \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(-g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d}^2 \otimes \boldsymbol{\mu}) + W^* - \rho c_p \partial_t T \right) &= 0, \\ k \in \mathbb{N}_0; \quad \underline{(k = \overline{0, N})}. \end{aligned} \quad (38)$$

7.3. Бесконечные системы УД и притока тепла в моментах в МТТТ с одним малым размером (нулевого приближения и приближения $(0, N)$)

$$\begin{aligned}
& \nabla_I \mathbf{\bar{P}}^{(k)} - g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{\bar{P}}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{\bar{P}}^{(p)} - \mathbf{\bar{P}}^{(k)} \right) \right] + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left(1 - (-1)^{k+p} \right) \mathbf{\bar{P}}^{(p)} + \\
& + 2(k+1) \left[(\mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{\bar{r}}^{\bar{I}}) \cdot \mathbf{\bar{P}}^{(+)} - (-1)^k \mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{\bar{P}}^{(-)} \right] + \rho \mathbf{\bar{F}}^{(k)} = \rho \partial_t^2 \mathbf{\bar{u}}^{(k)}, \\
& \nabla_I \mathbf{\bar{\mu}}^{(k)} - g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{\bar{\mu}}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{\bar{\mu}}^{(p)} - \mathbf{\bar{\mu}}^{(k)} \right) \right] + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left(1 - (-1)^{k+p} \right) \mathbf{\bar{\mu}}^{(p)} + \\
& + 2(k+1) \left[(\mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{\bar{r}}^{\bar{I}}) \cdot \mathbf{\bar{\mu}}^{(+)} - (-1)^k \mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{\bar{\mu}}^{(-)} \right] + \mathbf{\bar{C}}^{\otimes 2} \mathbf{\bar{P}}^T + \rho \mathbf{\bar{m}}^{(k)} = \mathbf{\bar{J}} \cdot \partial_t^2 \mathbf{\bar{\varphi}}^{(k)}, \\
& -\nabla_I \mathbf{\bar{q}}^{(k)} + g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{\bar{q}}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{\bar{q}}^{(p)} - \mathbf{\bar{q}}^{(k)} \right) \right] - 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left(1 - (-1)^{k+p} \right) \mathbf{\bar{q}}^{(p)} + \\
& + \rho \mathbf{\bar{q}}^{(k)} - 2(k+1) \left[(\mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{\bar{r}}^{\bar{I}}) \cdot \mathbf{\bar{q}}^{(+)} - (-1)^k \mathbf{\bar{r}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{\bar{q}}^{(-)} \right] - \\
& - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{\bar{a}}^{\otimes 2} \mathbf{\bar{P}}^T + \mathbf{\bar{d}}^{\otimes 2} \mathbf{\bar{\mu}}^{(k)T}) + \mathbf{\bar{W}}^* = \rho c_p \partial_t T^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad \underline{(k = 0, N)}.
\end{aligned} \tag{39}$$

7.4. Закон Гука и закон теплопроводности Фурье в моментах в МТТТ с одним малым размером при НП (приближения (r, N))

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{(r)}^{(k)} &= \mathbf{M} \left[\underset{(r)M}{\mathbb{C}}^2 \otimes (g^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{(r)M}{\mathbb{A}}^2 \otimes (g^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{(r)M}{\mathbb{C}}^2 \otimes \underline{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{b} \vartheta \right], \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}^{(k)} &= \mathbf{M} \left[\underset{(r)M}{\mathbb{B}}^2 \otimes (g^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{(r)M}{\mathbb{D}}^2 \otimes (g^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{(r)M}{\mathbb{B}}^2 \otimes \underline{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\beta} \vartheta \right], \\ \tilde{\mathbf{q}}_{(r)}^{(k)} &= \mathbf{M} \left(-g^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{\Lambda}^M N_P T - \mathbf{\Lambda}^{\bar{3}} \partial_3 T \right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (k = \overline{0, N});\end{aligned}$$

7.5. Закон Гука и закон теплопроводности Фурье в моментах нулевого приближения (приближения $(0, N)$) МТТТ с одним малым размером

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)} &= \tilde{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{(k)} + \underset{(0,k)}{\mathbb{C}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{u}^{(+)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{C}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{u}^{(-)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{A}}^{\bar{3}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(+)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{A}}^{\bar{3}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(-)\prime}, \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)} &= \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{(k)} + \underset{(0,k)}{\mathbb{B}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{u}^{(+)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{B}}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{u}^{(-)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{D}}^{\bar{3}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(+)\prime} + \underset{(0,k)}{\mathbb{D}}^{\bar{3}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(-)\prime}, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{(0)}^{(k)} &= \mathbf{q}_{(0,N)}^{(k)} + \mathbf{\Lambda}_{(0,k)}^{\bar{3}} T^{(+)\prime} + \mathbf{\Lambda}_{(k)}^{\bar{3}} T^{(-)\prime}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (k = \overline{0, N}); \\ \tilde{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{(k)} &= \underset{(0,N)}{\mathbb{C}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \mathbf{u} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{u}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underset{(0,N)}{\mathbb{C}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \mathbf{u}^{(p)} + \\ &\quad + \underset{(0,N)}{\mathbb{A}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \boldsymbol{\varphi} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \boldsymbol{\varphi}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\varphi}^{(p)} - \boldsymbol{\varphi}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underset{(0,N)}{\mathbb{A}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \boldsymbol{\varphi}^{(p)} - \underset{(0,N)}{\mathbb{C}}^2 \otimes \underline{\mathbb{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(k)} - \mathbf{b} \vartheta^{(k)};\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mu}_{(0,N)}^{(k)} = & \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\mathbf{u}} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\mathbf{u}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
 & + 2(k+1) \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + \\
 & + \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\boldsymbol{\varphi}} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\boldsymbol{\varphi}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
 & + 2(k+1) \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)} - \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}}^{\cdot(k)} \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\beta}^{(k)} \underline{\vartheta}; \\
 \underline{\mathbf{q}}_{(0,N)}^{(k)} = & -\underline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\bar{M}} \left\{ \partial_M^{(k)} \underline{T} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{T} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{T}^{(p)} - \underline{T}^{(k)} \right) \right] \right\} - \\
 & - 2(k+1) \underline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{T}^{(p)}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (k = \overline{0, N});
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{u}}^{(+)}(x') &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x'), \quad \underline{\mathbf{u}}^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x'), \quad \underline{T}^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \underline{T}^{(p)}(x'), \\
 \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)}(x') &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x'), \quad \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x'), \quad \underline{T}^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \underline{T}^{(p)}(x'); \\
 \underline{\mathbf{C}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{C}} \otimes (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} = 2(k+1)(-1)^{k+1} \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\
 \underline{\mathbf{A}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{A}} \otimes (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} = 2(k+1)(-1)^{k+1} \underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}},
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\underline{\cong}(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1)\mathbf{D}_{\underline{\cong}}^2 \otimes (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \mathbf{E}, & \mathbf{D}_{\underline{\cong}(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1)(-1)^{k+1} \mathbf{D}_{\underline{\cong}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{E}, \\
\mathbf{B}_{\underline{\cong}(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1)\mathbf{B}_{\underline{\cong}}^2 \otimes (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \mathbf{E}, & \mathbf{B}_{\underline{\cong}(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1)(-1)^{k+1} \mathbf{A}_{\underline{\cong}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{E}, \\
\mathbf{\Lambda}_{(0,k)}^{\bar{3}} &= -2(k+1)\mathbf{\Lambda}_{\cdot}(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}), & \mathbf{\Lambda}_{(k)}^{\bar{3}} &= 2(k+1)(-1)^k \mathbf{\Lambda}_{\cdot} \mathbf{r}^{\bar{3}}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad \underline{(k = 0, N)}.
\end{aligned}$$

8. Уравнения движения в векторах перемещений и вращений и притока тепла для упругого материала с центром симметрии

Для линейно-упругого неоднородного анизотропного материала с центром симметрии уравнения движения в векторах перемещений и вращений можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{A}}^{(1)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{A}}^{(3)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{(4)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad (43)$$

где для введенных дифференциальных тензоров-операторов $\underline{\mathbf{A}}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, имеем следующие выражения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}^{(1)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (C^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i C^{ijkl} \nabla_k) - \rho \partial_t^2, \\ \underline{\mathbf{A}}^{(2)} &= -\mathbf{r}_j \mathbf{r}^m C_{mkl} (C^{kl ij} \nabla_i + \nabla_i C^{kl ij}), \quad \underline{\mathbf{A}}^{(3)} = \mathbf{r}^m \mathbf{r}_j C_{mkl} C^{kl ij} \nabla_i, \\ \underline{\mathbf{A}}^{(4)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (D^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i D^{ijkl} \nabla_k) - \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}}^2 - \underline{\mathbf{J}} \partial_t^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Если введем в рассмотрение матричный дифф. тензор-оператор и векторы столбцы

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}^{(1)} & \underline{\mathbf{A}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{A}}^{(3)} & \underline{\mathbf{A}}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{F} \\ \rho \mathbf{m} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

то уравнения (43) можно коротко представить в следующем виде:

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{X} = 0. \quad (46)$$

8.1. Система уравнений термомеханики упругого твердого тонкого тела с одним малым размером в рамках классической теории упругости для несвязанной задачи

Эта система уравнений при новой параметризации области тонкого тела с одним малым размером представляется в форме

$$\begin{aligned}
 & [C^{\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot \bar{s}} g_{\bar{M} \bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + g_{\bar{M}}^P (C^{\bar{3} \cdot \bar{M} \cdot \bar{s}} \nabla_3 N_P + C^{\bar{M} \cdot \bar{3} \cdot \bar{s}} N_P \nabla_3) + \\
 & \quad + C^{\bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{s}} \nabla_3 \nabla_3] u_{\bar{s}} - (b^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P + b^{\bar{3}} \partial_3) \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\
 & -[\Lambda^{\bar{M} \bar{N}} g_{\bar{M} \bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \Lambda^{\bar{M} \bar{3}} g_{\bar{M}}^P (\nabla_3 N_P + N_P \nabla_3) + \Lambda^{\bar{3} \bar{3}} \nabla_3 \nabla_3] T + \rho q = \rho c_p \partial_t T \\
 & \left(g_{\bar{M}}^P = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s, \quad N_P = \nabla_P - g_P^{\bar{3}} \partial_3, \quad g_P^{\bar{3}} = x^3 \frac{1}{h} \partial_P h \right).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Вводя обозначения для дифференциальных операторов

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}} &= C^{\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot \bar{s}} g_{\bar{M} \bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + g_{\bar{M}}^P (C^{\bar{3} \cdot \bar{M} \cdot \bar{s}} \nabla_3 N_P + C^{\bar{M} \cdot \bar{3} \cdot \bar{s}} N_P \nabla_3) + C^{\bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{s}} \nabla_3 \nabla_3, \\
 \mathbf{B} &= -(b^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P + b^{\bar{3}} \partial_3), \\
 M &= -[\Lambda^{\bar{M} \bar{N}} g_{\bar{M} \bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \Lambda^{\bar{M} \bar{3}} g_{\bar{M}}^P (\nabla_3 N_P + N_P \nabla_3) + \Lambda^{\bar{3} \bar{3}} \nabla_3 \nabla_3],
 \end{aligned} \tag{48}$$

уравнения (47) можно записать в следующей краткой форме

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B} \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad MT + \rho q = \rho c_p \partial_t T. \tag{49}$$

8.2. Система уравнений термомеханики упругого твердого тонкого тела с одним малым размером приближения порядка r и нулевого приближения в рамках классической теории упругости для несвязанной задачи

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}}_{(r)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B}_{(r)} \vartheta + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad M_{(r)} T + \rho q = \rho c_p \partial_t T; \\
 \underline{\mathbf{L}}_{(0)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B}_{(0)} \vartheta + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad M_{(0)} T + \rho q = \rho c_p \partial_t T; \\
 \mathbf{B}_{(0)} &= -(\mathbf{b}^{\bar{I}} N_I + \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3) \left(N_I = \partial_I - g_I^{\bar{3}} \partial_3, \quad g_I^{\bar{3}} = x^3 \frac{1}{h} \partial_I h \right), \\
 M_{(0)} &= -[\Lambda^{\bar{I} \bar{J}} N_I N_J + \Lambda^{\bar{I} \bar{3}} (\nabla_3 N_I + N_I \nabla_3) + \Lambda^{\bar{3} \bar{3}} \nabla_3 \nabla_3], \\
 \underline{\mathbf{L}}_{(r)} &= \mathbf{C}^{\bar{M} \cdot \bar{N}} \cdot \left[\sum_{s=0}^{2r} B_{(s) \bar{M} \bar{N}}^{\bar{P} \bar{Q}} (x^3)^s \right] N_P N_Q + \\
 &+ \sum_{s=0}^r A_{(s) \bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s (\mathbf{C}^{\bar{3} \cdot \bar{M}} \cdot \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M} \cdot \bar{3}} \cdot N_P \nabla_3) + \mathbf{C}^{\bar{3} \cdot \bar{3}} \cdot \nabla_3 \nabla_3.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Дифференциальные операторы $\mathbf{B}_{(r)}$, $M_{(r)}$ определяются аналогично $\underline{\mathbf{L}}_{(r)}$.

8.3. Система уравнений термомеханики упругого твердого тонкого тела с одним малым размером нулевого приближения в моментах при постоянной толщине в рамках классической теории упругости для несвязанной задачи

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^{\bar{I} \cdot \bar{J}} \cdot \nabla_I \nabla_J \mathbf{u}^{(k)} + (\mathbf{C}^{\bar{3} \cdot \bar{I}} + \mathbf{C}^{\bar{I} \cdot \bar{3}}) \cdot \nabla_I \mathbf{u}'^{(k)} + \mathbf{C}^{\bar{3} \cdot \bar{3}} \cdot \mathbf{u}''^{(k)} - \\
 - (\mathbf{b}^{\bar{I}} \nabla_I T^{(k)} + \mathbf{b}^{\bar{3}} T'^{(k)}) + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(k)}, \\
 -[\Lambda^{\bar{I} \bar{J}} \nabla_I \nabla_J T^{(k)} + 2\Lambda^{\bar{I} \bar{3}} \nabla_I T'^{(k)} + \Lambda^{\bar{3} \bar{3}} T''^{(k)}] + \rho q^{(k)} = \rho c_p \partial_t T^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{51}$$

9. Граничные условия в микрополярной механике ДТТТ (ММДТТТ)

Граничные и начальные условия в ММДТТТ с одним малым размером

9.1. Граничные условия на лицевых поверхностях

9.1.1. Граничные условия физического содержания

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{\tilde{P}}^{(-)} &= -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{P}^{(-)}, & (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{\tilde{P}}^{(+)} &= \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{P}^{(+)}, \\
 \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{\tilde{\mu}}^{(-)} &= -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{\mu}^{(-)}, & (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{\tilde{\mu}}^{(+)} &= \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{\mu}^{(+)}, & x' \in S^{(-)}; \\
 \mathbf{\tilde{P}}^{(-)} &= \mathbf{P} \Big|_{x^3=0}, & \mathbf{\tilde{P}}^{(+)} &= \mathbf{P} \Big|_{x^3=1}, & \mathbf{\tilde{\mu}}^{(-)} &= \mathbf{\mu} \Big|_{x^3=0}, & \mathbf{\tilde{\mu}}^{(+)} &= \mathbf{\mu} \Big|_{x^3=1} \quad \left(\mathbf{\tilde{n}} = \mathbf{r}^{\frac{\bar{3}}{3}} / \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \right).
 \end{aligned} \tag{52}$$

9.1.2. Кинематические граничные условия

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{x^3=0} &= \mathbf{\tilde{u}}_0^{(-)}(x', t), & \mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{x^3=1} &= \mathbf{\tilde{u}}_0^{(+)}(x', t), \\
 \boldsymbol{\varphi}(x', x^3, t) \Big|_{x^3=0} &= \mathbf{\tilde{\varphi}}_0^{(-)}(x', t), & \boldsymbol{\varphi}(x', x^3, t) \Big|_{x^3=1} &= \mathbf{\tilde{\varphi}}_0^{(+)}(x', t), & x' \in S^{(-)}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

9.1.3. Граничные условия теплового содержания первого рода

$$T(x', x^3, t) \Big|_{x^3=0} = T^0_{(-)}(x', t), \quad T(x', x^3, t) \Big|_{x^3=1} = T^0_{(+)}(x', t), \quad x' \in S^{(-)}. \tag{54}$$

9.1.4. Граничные условия теплового содержания второго рода

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}^{(-)} &= -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}} q^{(-)}}, \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\bar{P}} g^{\bar{P}}_{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}^{(+)} = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}} q^{(+)}}, \quad x' \in S^{(-)}; \\ \mathbf{q}^{(-)} &= \mathbf{q} \Big|_{x^3=0}, \quad \mathbf{q}^{(+)} = \mathbf{q} \Big|_{x^3=1}. \end{aligned} \quad (55)$$

9.1.5. Граничные условия теплового содержания третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона)

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}} \beta^{(-)} (T_c^{(-)} - T^{(-)}), \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_{\bar{P}} g^{\bar{P}}_{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}^{(+)} = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}} \beta^{(+)} (T_c^{(+)} - T^{(+)}), \quad x' \in S^{(-)}, \quad (56)$$

где T_c — температура окружающей среды, β — коэффициент теплоотдачи, а

$$\beta^{(-)} = \beta \Big|_{x^3=0}, \quad \beta^{(+)} = \beta \Big|_{x^3=1}, \quad T^{(-)} = T \Big|_{x^3=0}, \quad T^{(+)} = T \Big|_{x^3=1}, \quad T_c^{(-)} = T_c \Big|_{x^3=0}, \quad T_c^{(+)} = T_c \Big|_{x^3=1}.$$

9.2. Граничные условия (ГУ) на боковой грани

9.2.1. Кинематические граничные условия на боковой грани в моментах

$$\mathbf{u}^{(k)}(x', t) = \mathbf{f}^{(k)}(x', t), \quad \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(x', t) = \mathbf{g}^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S^{(-)} \quad (57)$$

9.2.2. Граничные условия физического содержания на боковой грани в моментах

$$\overset{(-)}{m} \underset{I}{-} \overset{(k)}{M} \left(g \underset{(r)J}{I} \mathbf{P}^{\bar{J}} \right) = \overset{(k)}{M} (a_{(r)} \mathbf{P}), \quad \overset{(-)}{m} \underset{I}{-} \overset{(k)}{M} \left(g \underset{(r)J}{I} \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} \right) = \overset{(k)}{M} (a_{(r)} \boldsymbol{\mu}), \quad (58)$$

$$a_{(r)}(x', x^3) = \sum_{s=0}^r A_s(x') (x^3)^s, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S},$$

$$\left(a(x', x^3) = (d\Sigma/d \overset{(-)}{\Sigma}) \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x') (x^3)^s, \quad A_s(x') = \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s a}{\partial (x^3)^s} \right)_{x^3=0} \right);$$

$$\overset{(-)}{m} \underset{I}{-} A \overset{(k)}{\bar{I}} \overset{(k)}{\bar{J}} \mathbf{P}^{\bar{J}} = A_{(s)} \overset{(k)}{\mathbf{P}}, \quad \overset{(-)}{m} \underset{I}{-} A \overset{(k)}{\bar{I}} \overset{(k)}{\bar{J}} \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = A_{(s)} \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}, \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S}. \quad (59)$$

9.2.3. Граничные условия теплового содержания первого рода в моментах

$$\overset{(k)}{T}(x', t) = \overset{(k)}{T}_0(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}. \quad (60)$$

9.2.4. Граничные условия теплового содержания второго рода в моментах

$$\overset{(-)}{m} \underset{I}{-} A \overset{(k)}{\bar{I}} \overset{(k)}{\bar{J}} q^{\bar{J}}(x', t) = A_{(s)} \overset{(k)}{q}_0(x', t), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}. \quad (61)$$

9.2.5. Граничные условия теплового содержания третьего рода в моментах

$$\overset{(-)}{m} \underset{I}{-} A \overset{(k)}{\bar{I}} \overset{(k)}{\bar{J}} q^{\bar{J}}(x', t) = A_{(s)} \beta (T_c - T), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial \overset{(-)}{S}_q \subseteq \partial \overset{(-)}{S}. \quad (62)$$

9.2.6. Начальные условия в моментах

$$\begin{aligned}
\left. {}^{(k)}\mathbf{u}(x', t) \right|_{t=t_0} &= {}^{(k)}\mathbf{u}_0(x'), & \left. \partial_t {}^{(k)}\mathbf{u}(x', t) \right|_{t=t_0} &= {}^{(k)}\mathbf{v}_0(x') \\
\left. {}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}(x', t) \right|_{t=t_0} &= {}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}_0(x'), & \left. \partial_t {}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}(x', t) \right|_{t=t_0} &= {}^{(k)}\boldsymbol{\omega}_0(x'), \\
\left. {}^{(k)}T(x', t) \right|_{t=t_0} &= {}^{(k)}T^0(x'), & k &= \overline{0, N}, \quad x' \in \overline{S}.
\end{aligned} \tag{63}$$

10. Упрощенный метод редукции бесконечной системы к конечной

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{(k)} = & \underset{\sim}{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \mathbf{u} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{u}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
& + 2(k+1) \underset{\sim}{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \mathbf{u}^{(p)} + \\
& + \underset{\sim}{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \boldsymbol{\varphi} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \boldsymbol{\varphi}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\varphi}^{(p)} - \boldsymbol{\varphi}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
& + 2(k+1) \underset{\sim}{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \boldsymbol{\varphi}^{(p)} - \underset{\sim}{\mathbf{C}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(k)} - \mathbf{b} \vartheta^{(k)};
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{(k)} = & \underset{\sim}{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \boldsymbol{\varphi} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \boldsymbol{\varphi}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\varphi}^{(p)} - \boldsymbol{\varphi}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
& + 2(k+1) \underset{\sim}{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \boldsymbol{\varphi}^{(p)} + \\
& + \underset{\sim}{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{M}} \left\{ \nabla_M^{(k)} \mathbf{u} - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{u}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(k)} \right) \right] \right\} + \\
& + 2(k+1) \underset{\sim}{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \mathbf{u}^{(p)} - \underset{\sim}{\mathbf{B}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(k)} - \boldsymbol{\beta} \vartheta^{(k)};
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{q}}_{(0,N)}^{(k)} = & -\Lambda^{\bar{M}} \left\{ \partial_M^{(k)} T - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k T^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N T^{(p)} - T^{(k)} \right) \right] \right\} - \\
& - 2(k+1) \Lambda^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] T^{(p)}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad \underline{(k = \overline{0, N})};
\end{aligned} \tag{66}$$

Решения краевых задач, которые позволяют построить приближенные выражения для искомых полей температуры, векторов перемещений, вращений и потока тепла, а также тензоров напряжений и моментных напряжений в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N {}^{(k)}\mathbf{u}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad \boldsymbol{\varphi}_{(N)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N {}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}(x') \hat{U}_k^*, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}(x') \hat{U}_k^*, \\ T_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N T(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad \mathbf{q}_{(r,N)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \mathbf{q}_{(r,N)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \end{aligned} \quad (67)$$

не согласованы с краевыми условиями на лицевых поверхностях. Конечно, они могут оказаться весьма грубыми вблизи лицевых поверхностей. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли к приближенному решению рассматриваемой краевой задачи добавить корректирующее слагаемое, удовлетворяющее следующим условиям:

1. сумма найденного приближенного решения рассматриваемой краевой задачи и соответствующего корректирующего слагаемого согласована с краевыми условиями на лицевых поверхностях,
2. моменты корректирующего (добавочного) слагаемого обращаются в нуль, если их порядок не превосходит N ,
3. нормы корректирующих слагаемых можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела.

10.1. Способы определения корректирующих слагаемых при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях

В этом случае для задач приближения (r, N) вместо (67) будем иметь следующие приближенные решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N {}^{(k)}\mathbf{u}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \varphi_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N {}^{(k)}\varphi(x') \hat{U}_k^*(x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \underline{\mu}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\mu}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*, \end{aligned} \quad (68)$$

которые удовлетворяют рассматриваемым граничным условиям на боковой грани, но не удовлетворяют условиям на лицевых поверхностях.

10.1.1. Нахождение корректирующих слагаемых в том случае, когда на лицевых поверхностях заданы векторы перемещений и вращений

Пусть на лицевых поверхностях заданы векторы перемещений и вращений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x', x^3) \Big|_{x^3=0} &= {}^{(-)}\mathbf{u}(x'), & \mathbf{u}(x', x^3) \Big|_{x^3=1} &= {}^{(+)}\mathbf{u}(x'), \\ \varphi(x', x^3) \Big|_{x^3=0} &= {}^{(-)}\varphi(x'), & \varphi(x', x^3) \Big|_{x^3=1} &= {}^{(+)}\varphi(x'). \end{aligned} \quad (69)$$

Так как приближенные решения $\mathbf{u}_{(N)}(x', x^3)$ и $\varphi_{(N)}(x', x^3)$ из (68) не удовлетворяют условиям (69) на лицевых поверхностях, поэтому следует найти поправочные слагаемые $\mathbf{u}_0(x', x^3)$ и $\varphi_0(x', x^3)$, удовлетворяющие условиям:

1. поля перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{u}_0$ и вращений $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_{(N)} + \boldsymbol{\varphi}_0$ согласованы с краевыми условиями (69),
2. моменты $\mathbf{u}_0^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}_0^{(k)}$ векторных полей $\mathbf{u}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ обращаются в нуль, если $k \leq N$,
3. абсолютные значения векторных полей $\mathbf{u}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что выполняются условия

$$|\mathbf{u}_0(x', x^3)| < \varepsilon, \quad |\boldsymbol{\varphi}_0(x', x^3)| < \varepsilon, \quad 0 < \delta < x^3 < 1 - \delta, \quad x' \in \overset{(-)}{S}. \quad (70)$$

Искомые корректирующие слагаемые представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x', x^3) &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+1)} \left\{ [\overset{(+)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] + (-1)^m [\overset{(-)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] \right\} \hat{U}_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+2)} \left\{ [\overset{(+)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] + (-1)^{m+1} [\overset{(-)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] \right\} \hat{U}_{m+1}^*, \\ \mathbf{u} &\rightarrow \boldsymbol{\varphi}, \quad m > N. \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x', x^3) &= \frac{1}{2} \left\{ [\overset{(+)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] + (-1)^m [\overset{(-)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] \right\} P_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ [\overset{(+)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] + (-1)^{m+1} [\overset{(-)}{\mathbf{u}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{(N)}(x')] \right\} P_{m+1}^*(x^3), \\ \mathbf{u} &\rightarrow \boldsymbol{\varphi}, \quad m > N. \end{aligned} \quad (72)$$

Для ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода и стандартизованных смещенных полиномов Лежандра на сегменте $[0, 1]$ имеем

$$2\sqrt{t(1-t)}|\hat{U}_n^*(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{1}{n+1}|\hat{U}_n^*(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad |\hat{U}_n^*(t)| \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)} + \frac{1}{n+1}},$$

$$|P_n^*(t)| \leq 1, \quad \sqrt{\pi n} \sqrt[4]{t(1-t)}|P_n^*(t)| \leq 1, \quad |P_n^*(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi n} \sqrt[4]{t(1-t)} + 1}, \quad t \in [0, 1].$$

10.1.2. Определение корректирующих слагаемых (частного решения) тогда, когда на лицевых поверхностях заданы статические условия

В этом случае нужно определить корректирующие слагаемые $\mathbf{U}_0(x')$ и $\Phi_0(x', x^3)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. поля тензора напряжений $\underline{\mathbf{P}}$ и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, соответствующие полям векторов перемещений $\mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{U}_0$ и вращений $\boldsymbol{\varphi}_{(N)} + \Phi_0$, согласованы с краевыми условиями на лицевых поверхностях,

2. моменты $\mathbf{U}_0^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}_0^{(k)}$ векторных полей $\mathbf{U}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ равны нулю, если $k \leq N$,

3. нормы векторных полей $\mathbf{U}_0$ ($\|\mathbf{U}_0\| = |\mathbf{U}_0|$) и Φ_0 ($\|\Phi_0\| = |\Phi_0|$) и полей тензоров напряжений $\underline{\mathbf{P}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \Phi_0)$ ($\|\underline{\mathbf{P}}_{(r)}\| = \sqrt{(\underline{\mathbf{P}}_{(r)}, \underline{\mathbf{P}}_{(r)})}$) и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \Phi_0)$ ($\|\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}\| = \sqrt{(\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)})}$) приближения порядка r можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\|U_0(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad \|\Phi_0(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad \|\underline{P}_{(r)}(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad \|\underline{\mu}_{(r)}(x', x^3)\| < \varepsilon, \\ \delta < x^3 < 1 - \delta, \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad x^3 \in [0, 1].$$

Следует заметить, что в рассматриваемом случае тензорные поля $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ (решения поставленной задачи) представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x', x^3) &= \mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{U}_0(x', x^3), \quad \boldsymbol{\varphi}(x', x^3) = \boldsymbol{\varphi}_{(N)} + \boldsymbol{\Phi}_0(x', x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}(x', x^3) &= \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)} + \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}(x', x^3), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}(x', x^3) = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)} + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}(x', x^3), \end{aligned} \quad (73)$$

где $\mathbf{u}_{(N)}$, $\boldsymbol{\varphi}_{(N)}$, $\underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}$ даются соотношениями (68), а тензорные поля $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)} \equiv \underline{\mathbf{P}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)} \equiv \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ — формулами

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{0(r)} &= \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \nabla_{(r)} \mathbf{U}_0 + \underline{\mathbf{A}}^2 \otimes \nabla_{(r)} \boldsymbol{\Phi}_0 - \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_0, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)} &= \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \nabla_{(r)} \mathbf{U}_0 + \underline{\mathbf{D}}^2 \otimes \nabla_{(r)} \boldsymbol{\Phi}_0 - \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_0 \quad (\nabla_{(r)} = g_{(r)M}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3). \end{aligned} \quad (74)$$

Итак, нужно найти корректирующие слагаемые $\mathbf{U}_0$ и $\boldsymbol{\Phi}_0$, с помощью которых в свою очередь формулами (74) определяются корректирующие слагаемые $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}$ так, что тензоры $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, представленные двумя последними формулами (73), были согласованы с граничными условиями физического содержания на лицевых поверхностях. При этом должно выполняться все вышеуказанные условия.

В данном случае целесообразно использовать полиномы Лежандра, так как легко доказывается выполнения третьего условия для корректирующего слагаемого. Корректирующие слагаемые $\mathbf{U}_0$ и Φ_0 ищутся в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_0(x', x^3) &= \mathbf{B}_m(x') [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \mathbf{B}_{m+1}(x') [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)], \\ \Phi_0(x', x^3) &= \mathbf{D}_m(x') [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \mathbf{D}_{m+1}(x') [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)],\end{aligned}$$

где $m > N$ — достаточно большое произвольно фиксированное целое число. Вообще говоря,

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x', x^3) &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \{ \mathbf{B}_p(x') [P_{p+2}^*(x^3) - P_p^*(x^3)] + \mathbf{B}_{p+1}(x') [P_{p+3}^*(x^3) - P_{p+1}^*(x^3)] \}, \\ \Phi(x', x^3) &= \sum_{q=N+1}^{\infty} \{ \mathbf{D}_q(x') [P_{q+2}^*(x^3) - P_q^*(x^3)] + \mathbf{D}_{q+1}(x') [P_{q+3}^*(x^3) - P_{q+1}^*(x^3)] \},\end{aligned}$$

являются частными решениями однородной системы уравнений в перемещениях и вращениях в моментах приближения порядка (r, N) .

10.1.3. Если на лицевых поверхностях заданы смешанные граничные условия, то и в этом случае проблема определения корректирующих слагаемых (частных решений) решена. При этом на одной из базовых поверхностей могут быть заданы кинематические граничные условия, а на другой статические.

11. Постановки задач в моментах МТТТ с одним малым размером

11.1. Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) МТТТ с одним малым размером

Включает в себя:

- 1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) ;
- 2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) ;
- 3) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) или систему ОС в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции;
- 4) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, N) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции;
- 5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:
 - 5а) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;
 - 5б) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5с) системы кинематических граничных условий в моментах приближения N на одной части граничного контура и статических в моментах приближения (r, N) на другой (остальной) части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

6) системы начальных условий кинематического и теплового содержаний в моментах приближения N .

11.2. Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) МТТТ с одним малым размером

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) не входят механические характеристики, то отдельно рассматривается нестационарная температурная задача в моментах приближения (r, N) , которая включает в себя:

- 1) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) без механических характеристик;
- 2) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, N) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции;
- 3) какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;
- 4) систему начальных условий теплового содержания в моментах приближения N .

В этом случае динамическая задача в моментах приближения (r, N) делится на две задачи: нестационарную задачу в моментах приближения (r, N) и динамическую задачу в моментах приближения (r, N) с известной температурой.

11.3. Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) МТТТ с одним малым размером

Включает в себя:

- 1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) ;
- 2) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) с известным температурным полем или систему ОС в моментах приближения (r, N) с известным температурным полем при упрощенном методе редукции;
- 3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем ГУ в моментах:
 - 3а) систему кинематических ГУ в моментах приближения N для первой краевой задачи;
 - 3б) систему статических ГУ в моментах приближения (r, N) для второй краевой задачи;
 - 3с) системы кинематических ГУ в моментах приближения N на одной части граничного контура и статических ГУ в моментах приближения (r, N) на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи;
- 4) систему кинематических начальных условий в моментах приближения N .

12. Гипотеза о жесткости в поперечном направлении тонких тел с одним малым размером

Гипотеза: поперечные волокна тонких тел не подвергаются удлинениям (укорачиваниям).

12.1. Гипотеза о жесткости в поперечном направлении классических тонких тел с одним малым размером

В этом случае гипотезу можно сформулировать следующим образом: поперечные волокна классических тонких тел не подвергаются удлинениям (укорачиваниям). Это означает, что поперечные перемещения тонких тел не зависят от скалярной координаты x^3 . Математически эту гипотезу (см. [1–3]) применяя разложения по какой-нибудь системе ортогональных полиномов (Лежандра $\{P_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$, Чебышева первого $\{T_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ и второго $\{U_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ родов), при новой параметризации области тонкого тела можно представить в виде $(u_n, n = 1, 2, 3, \text{ — компоненты вектора перемещений})$

$$\begin{aligned} u_I(x^1, x^2, x^3, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_I^{(k)}(x^1, x^2, t) Q_k(x^3), \quad I = 1, 2, \quad 0 \leq x^3 \leq 1, \\ u_3 &= u_3^{(0)}(x^1, x^2, t). \end{aligned} \quad (75)$$

Видно, что гипотеза о жесткости тонкого тела в поперечном направлении в линейном приближении (одна часть гипотезы Кирхгофа–Лява) в силу (75) математически можно записать в форме

$$\begin{aligned} u_{-I} &= u_{-I}^{(0)}(x^1, x^2, t) + Q_1(x^3) u_{-I}^{(1)}(x^1, x^2, t), \quad I = 1, 2, \quad 0 \leq x^3 \leq 1, \\ u_3 &= u_3^{(0)}(x^1, x^2, t). \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь $Q_1(x^3) = 2x^3 - 1$ в случае смещенных полиномов Лежандра и Чебышева первого рода, а $Q_1(x^3) = 2(2x^3 - 1)$ при смещенных полиномах Чебышева второго рода. При ортонормированных смещенных полиномах Чебышева второго рода $Q_1(x^3) = \hat{U}_1^*(x^3) = 4/\sqrt{\pi}(2x^3 - 1)$. Если используется классическая параметризация или параметризация при произвольной базовой поверхности, то $-1 \leq x^3 \leq 1$ и $Q_1(x^3) = x^3$ в случае полиномов Лежандра и Чебышева первого рода, $Q_1(x^3) = 2x^3$ в случае полиномов Чебышева второго рода, а $Q_1(x^3) = \hat{U}_1(x^3) = 2x^3\sqrt{2/\pi}$ при ортонормированных полиномах Чебышева второго рода (в этом случае знак минус над индексами в (75) и (76) надо убрать). Заметим, что другая часть гипотезы Кирхгофа–Лява, гласящая, что поперечные волокна, не испытывая удлинения (см. допущение (75) в нелинейном приближении, а (76) в линейном приближении), остаются ортогональными деформированной базовой поверхности, не применяется.

12.2. Гипотеза о жесткости в поперечном направлении микрополярных тонких тел с одним малым размером

В микрополярной теории оболочек применяются разные кинематические гипотезы. Например, в работе С.А.Амбарцумяна [4] принята независимость третьих компонент векторов перемещений и вращений от x^3 , в [5,6] сделано допущение о независимости вектора вращений и третьей компоненты вектора перемещений от x^3 , а в работах С.О.Саркисяна и его учеников [7–11, др.]

приведены различные кинематические гипотезы о линейном распределении относительно поперечной координаты векторов перемещений и вращений. См. также работы других авторов по микрополярной теории [12–32].

В данном случае гипотезу можно выказать следующим образом: поперечные волокна микрополярных тонких тел не подвергаются удлинениюм (укорачиваниям). Значит, поперечные компоненты векторов перемещений и вращений в тонких телах не зависят от скалярной координаты x^3 .

Естественно, в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером помимо гипотезы (75) относительно вектора вращений φ можно принять допущение [1–3] (φ_n , $n = 1, 2, 3$, — компоненты вектора вращений)

$$\varphi_I^-(x^1, x^2, x^3, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_I^{(k)}(x^1, x^2, t) Q_k(x^3), \quad I = 1, 2, \quad 0 \leq x^3 \leq 1, \quad (77)$$

$$\varphi_3 = \varphi_3^{(0)}(x^1, x^2, t).$$

Видно, что гипотеза (75) для классической теории тонких тел и гипотезы (75) и (76) для микрополярной теории тонких тел более общие, чем гипотезы, используемые в научной литературе по классической теории оболочек и пластин, а также в указанной выше литературе по микрополярной теории оболочек и пластин. Заметим, что в [1–3] эти гипотезы даны в случае классической параметризации области тонкого тела при применении системы полиномов Лежандра. Здесь $\{Q_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ — какая-нибудь система из полиномов Лежандра и Чебышева. Конечно, используя допущения (75) и (77), для теории жестких тонких тел получим более простые уравнения по сравнению с уравнениями, которые получаются без этих допущений [1–3].

12.3. Гипотеза о жесткости в поперечном направлении классических тонких тел с одним малым размером при нелинейных деформациях

В этой связи выпишем компоненты нелинейного тензора деформаций Коши-Грина

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{\hat{I}\hat{J}} &= \frac{1}{2}[\hat{g}_{\hat{I}}^{\circ K} \hat{m}_{\cdot J \dot{K}} + \hat{g}_{\hat{J}}^{\circ L} \hat{m}_{\cdot I \dot{L}} + \hat{m}_{\cdot I}^{\circ K} \hat{m}_{\cdot J \dot{K}} - \hat{h}(\hat{g}_{\hat{I}}^{\circ 3} \hat{\psi}_{\hat{J}} + \hat{g}_{\hat{J}}^{\circ 3} \hat{\psi}_{\hat{I}}) + \hat{\psi}_{\hat{I}} \hat{\psi}_{\hat{J}}], \\ \hat{\varepsilon}_{\hat{I}\hat{3}} &= \frac{1}{2}[(\hat{g}_{\hat{I}}^{\circ J} + \hat{m}_{\cdot I}^{\circ J}) \hat{m}_{\cdot 3 \dot{J}} - \hat{h}(\hat{\psi}_{\hat{I}} + \hat{g}_{\hat{I}}^{\circ 3} \hat{\psi}_{\hat{3}}) + \hat{\psi}_{\hat{I}} \hat{\psi}_{\hat{3}}],\end{aligned}\quad (78)$$

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{\hat{3}\hat{3}} &= \frac{1}{2}(\hat{m}_{\cdot 3}^{\circ J} \hat{m}_{\cdot 3 \dot{J}} - 2\hat{h}\hat{\psi}_{\hat{3}} + \hat{\psi}_{\hat{3}}^2) \quad \underline{[\hat{\varepsilon}_{\hat{3}\hat{3}} \approx \frac{1}{2}\hat{\psi}_{\hat{3}}(\hat{\psi}_{\hat{3}} - 2\hat{h})]}; \\ (\hat{m}_{\cdot i}^{\circ J} &= \hat{\nabla}_i \hat{u}^J - \hat{b}_i^{\circ J} \hat{w}, \quad -\hat{\psi}_i = \partial_i \hat{w} + \hat{b}_i^{\circ J} \hat{u}_J) \Rightarrow (\hat{m}_{\cdot I}^{\circ J} = \hat{\nabla}_I \hat{u}^J - \hat{b}_I^{\circ J} \hat{w}, \\ -\hat{\psi}_I &= \partial_I \hat{w} + \hat{b}_I^{\circ J} \hat{u}_J, \quad \hat{m}_{\cdot 3}^{\circ J} = \hat{\nabla}_3 \hat{u}^J = \partial_3 \hat{u}^J, \quad -\hat{\psi}_3 = \partial_3 \hat{w}), \\ \hat{z} &= \hat{h} + x^3 \hat{h}, \quad \hat{g}_{\hat{I}}^{\circ J} = \hat{g}_I^{\circ J} - \hat{z} \hat{b}_{\hat{I}}^{\circ J}, \quad \hat{g}_{\hat{I}\hat{3}}^{\circ} = \hat{h} \partial_I \hat{z}, \quad \hat{g}_{\hat{I}}^{\circ 3} = \hat{h}^{-1} \partial_I \hat{z}, \\ \hat{g}_{\hat{3}\hat{3}}^{\circ} &= \hat{g}_{33}^{\circ} = \hat{g}_{33} = \hat{h}^2, \quad \hat{g}_{\hat{3}}^{\circ 3} = \hat{g}_{\hat{3}}^{\circ 3} = 1, \quad \hat{\mathbf{r}}_{\hat{3}} = \hat{\mathbf{r}}_3 = \hat{h} \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{r}}^{\hat{3}} = \hat{\mathbf{r}}^3 - \hat{g}_{\hat{I}}^{\circ 3} \hat{g}_{\hat{J}}^{\circ J} \hat{\mathbf{r}}^J.\end{aligned}\quad (79)$$

Гипотеза: $\hat{\varepsilon}_{\hat{3}\hat{3}} = 0$??????!!!!

12.4. Гипотеза о жесткости в поперечном направлении микрополярных тонких тел с одним малым размером при линейных деформациях

Выпишем выражения для линейных тензоров деформаций и изгиба-кручения и их компонент

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{r}}^p (\hat{m}_{p \cdot j} \hat{\mathbf{r}}^j - \hat{h} \hat{\psi}_p \hat{\mathbf{r}}^3) - \hat{h} \hat{C}_{MN} (\hat{\mathbf{r}}^3 \hat{\mathbf{r}}^M - \hat{\mathbf{r}}^M \hat{\mathbf{r}}^3) \hat{\varphi} - \hat{h} \hat{\mathbf{C}} \hat{\varphi}, \\ \hat{\varkappa} &= \hat{\nabla} \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{r}}^p (\hat{n}_{p \cdot j} \hat{\mathbf{r}}^j - \hat{h} \hat{\chi}_p \hat{\mathbf{r}}^3); \end{aligned}$$

$$\hat{\gamma}_{\hat{K}\hat{L}} = \hat{g}_{\hat{L}}^M \hat{m}_{\hat{K}\hat{M}} - \hat{h} \hat{g}_{\hat{L}}^3 \hat{\psi}_{\hat{K}} - \hat{h} \hat{C}_{MN} (\hat{g}_{\hat{K}}^3 \hat{g}_{\hat{L}}^M - \hat{g}_{\hat{K}}^M \hat{g}_{\hat{L}}^3) \hat{\varphi}^N - \hat{g}_{\hat{K}}^M \hat{g}_{\hat{L}}^N \hat{C}_{MN} \hat{\varphi},$$

$$\hat{\gamma}_{\hat{K}\hat{3}} = -\hat{h} \hat{\psi}_{\hat{K}} + \hat{g}_{\hat{K}}^M \hat{C}_{MN} \hat{\varphi}^N, \quad \hat{\gamma}_{\hat{3}\hat{L}} = \hat{g}_{\hat{L}}^M \hat{m}_{\hat{3}\hat{M}} - \hat{h} \hat{g}_{\hat{L}}^3 \hat{\psi}_{\hat{3}} - \hat{g}_{\hat{K}}^M \hat{C}_{MN} \hat{\varphi}^N, \quad \underline{\hat{\gamma}_{\hat{3}\hat{3}} = -\hat{h} \hat{\psi}_{\hat{3}}};$$

$$\hat{\varkappa}_{\hat{K}\hat{L}} = \hat{g}_{\hat{L}}^M \hat{n}_{\hat{K}\hat{M}} - \hat{h} \hat{g}_{\hat{L}}^3 \hat{\chi}_{\hat{K}}, \quad \hat{\varkappa}_{\hat{K}\hat{3}} = -\hat{h} \hat{\chi}_{\hat{K}}, \quad \hat{\varkappa}_{\hat{3}\hat{L}} = \hat{g}_{\hat{L}}^M \hat{n}_{\hat{3}\hat{M}} - \hat{h} \hat{g}_{\hat{L}}^3 \hat{\chi}_{\hat{3}}, \quad \underline{\hat{\varkappa}_{\hat{3}\hat{3}} = -\hat{h} \hat{\chi}_{\hat{3}}};$$

$$\begin{aligned}(\hat{n}_{\hat{i}}^{\cdot J} = \hat{\nabla}_{\hat{i}} \hat{\varphi}^J - \hat{b}_{\hat{i}}^J \hat{\varphi}_{\hat{J}}, \quad -\hat{\chi}_{\hat{i}} = \partial_{\hat{i}} \hat{\varphi} + \hat{b}_{\hat{i}}^J \hat{\varphi}_{\hat{J}}) \Rightarrow (\hat{n}_{\hat{I}}^{\cdot J} = \hat{\nabla}_{\hat{I}} \hat{\varphi}^J - \hat{b}_{\hat{I}}^J \hat{\varphi}_{\hat{J}}, \\ -\hat{\chi}_{\hat{I}} = \partial_{\hat{I}} \hat{\varphi} + \hat{b}_{\hat{I}}^J \hat{\varphi}_{\hat{J}}, \quad \hat{n}_{\hat{3}}^{\cdot J} = \hat{\nabla}_{\hat{3}} \hat{\varphi}^J = \partial_{\hat{3}} \hat{\varphi}^J, \quad -\hat{\chi}_{\hat{3}} = \partial_{\hat{3}} \hat{\varphi}), \end{aligned}$$

$$\text{Гипотеза: } \hat{\gamma}_{\hat{3}\hat{3}} = 0, \quad \hat{\varkappa}_{\hat{3}\hat{3}} = 0.$$

13. Квазистатическая задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях

С целью сокращения письма рассмотрим материал с центром симметрии. Тогда в случае квазистатики будем иметь уравнения

$$Q_1^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{u} + \mathbf{S}^* = 0, \quad Q_3^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* = 0; \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= 2\alpha Q_1^*(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m}) + [\underline{\mathbf{E}} Q_1^* Q_4^* - (d Q_4^* - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}), \\ \mathbf{H}^* &= 2\alpha Q_3^*(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F}) + [\underline{\mathbf{E}} Q_2^* Q_3^* - (m Q_2^* - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}), \\ Q_1^* &= (b + d)\Delta, \quad Q_2^* = b\Delta, \quad Q_3^* = (g + m)\Delta - l, \quad Q_4^* = g\Delta - l, \\ d &= \lambda + \mu - \alpha, \quad l = 4\alpha, \quad b = \mu + \alpha, \quad m = \gamma + \delta - \beta, \quad g = \delta + \beta. \end{aligned} \quad (81)$$

В силу (81) уравнения (80) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\Delta^2[(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta - 4\alpha\mu]\mathbf{u} + \mathbf{S}^* &= 0, \\ \Delta[(\gamma + 2\delta)\Delta - 4\alpha][(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta - 4\alpha\mu]\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* &= 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Отсюда, осуществляя простые выкладки, получим

$$\begin{aligned} [(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta^3 - 4\alpha\mu(\lambda + 2\mu)\Delta^2]\mathbf{u} + \mathbf{S}^* &= 0, \\ \{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta^3 - 4\alpha[\mu(\gamma + 2\delta) + (\mu + \alpha)(\delta + \beta)]\Delta^2 + 16\alpha^2\mu\Delta\}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* &= 0. \end{aligned} \quad (83)$$

При $\alpha = 0$, т.е. в случае редуцированной среды, из (80) (или из (82)) получим

$$\Delta^2 \mathbf{u} + \mathbf{G} = 0, \quad \Delta^2 \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H} = 0; \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} [\underline{\mathbf{E}}(\lambda + 2\mu)\Delta - (\lambda + \mu)\nabla\nabla] \cdot (\rho\mathbf{F}), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{(\delta + \beta)(\gamma + 2\delta)} [\underline{\mathbf{E}}(\gamma + 2\delta)\Delta - (\gamma + \delta - \beta)\nabla\nabla] \cdot (\rho\mathbf{m}). \end{aligned} \quad (85)$$

Заметим, что первое из уравнений (84) — классическое уравнение, а второе уравнение имеет аналогичный ему вид.

13.1. Квазистатическая задача микрополярной теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений.

Рассмотрим призматическое тело постоянной толщины $2h$. В качестве базовой плоскости возьмем срединную плоскость. Тогда в этом случае $g_M^{\hat{P}} = \delta_M^P$, $g_{\hat{P}}^3 = 0$, $g^{33} = h^{-2}$ и набла-оператор и лапласиан представятся в виде

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}\mathbb{F} &= (\mathbf{r}^P \partial_P + \mathbf{r}^3 \partial_3)\mathbb{F} = (\mathbf{r}^P \partial_P + h^{-1}\mathbf{n}\partial_3)\mathbb{F}, \quad -1 \leq x^3 \leq 1 \\ \hat{\Delta}\mathbb{F} &= \hat{\nabla}^2\mathbb{F} = (g^{PQ}\nabla_P\nabla_Q + g^{33}\partial_3^2)\mathbb{F} = (\bar{\Delta} + h^{-2}\partial_3^2)\mathbb{F}, \quad \bar{\Delta} = g^{PQ}\nabla_P\nabla_Q, \end{aligned} \quad (86)$$

а для $\hat{\Delta}^2$ и $\hat{\Delta}^3$ будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^2 &= \bar{\Delta}^2 + 2h^{-2}\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}\partial_3^4, \quad \bar{\Delta} = g^{PQ}\partial_P\partial_Q, \\ \hat{\Delta}^3 &= \bar{\Delta}^3 + 3h^{-2}\bar{\Delta}^2\partial_3^2 + 3h^{-4}\bar{\Delta}\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6. \end{aligned}$$

В силу последних формул и представления лапласиана (см. вторую формулу (86)) уравнения (83) для теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{S}}^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{H}}^{**} &= 0; \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^{**} &= \frac{\hat{\mathbf{S}}^*}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad \hat{\mathbf{H}}^{**} = \frac{\hat{\mathbf{H}}^*}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad A = -\frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \\ B &= -\frac{4\alpha[\mu(\gamma + 2\delta) + (\mu + \alpha)(\delta + \beta)]}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \quad C = \frac{16\alpha^2\mu}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}. \end{aligned}$$

Применяя к уравнениям (87) оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), найдем для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}]\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)IV} + h^{-6}\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)VI} + \hat{\mathbf{H}}^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2]\hat{\mathbf{u}}^{(k)} + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\hat{\mathbf{u}}^{(k)''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\hat{\mathbf{u}}^{(k)IV} + h^{-6}\hat{\mathbf{u}}^{(k)VI} + \hat{\mathbf{S}}^{**} &= 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (88)$$

Имея уравнения (88), легко получить системы уравнений любого приближения. В самом деле, считая, что моменты в (88) рассматриваются относительно

системы полиномов Лежандра, в силу получаемой легко формул

$$\mathbf{u}^{(n)(2m)}(x') = (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n+2k+2s-1) \mathbf{u}^{(n+2k+2m-2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N},$$

получим расщепленную на четыре системы следующую систему уравнений приближения порядка $N = 8$:

$$L^{(\alpha)} \mathbf{U}^{(\alpha)} + \Phi^{(\alpha)} = \mathbf{O}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4; \quad (89)$$

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \\ \mathbf{u}^{(6)} \\ \mathbf{u}^{(8)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(5)} \\ \mathbf{u}^{(7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(3)} = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(4)} \\ \varphi^{(6)} \\ \varphi^{(8)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{(4)} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(5)} \\ \varphi^{(7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}^{(1)} = \mathbf{O}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{** (0)} \\ \mathbf{S}^{** (2)} \\ \mathbf{S}^{** (4)} \\ \mathbf{S}^{** (6)} \\ \mathbf{S}^{** (8)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{** (1)} \\ \mathbf{S}^{** (3)} \\ \mathbf{S}^{** (5)} \\ \mathbf{S}^{** (7)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{** (0)} \\ \mathbf{H}^{** (2)} \\ \mathbf{H}^{** (4)} \\ \mathbf{H}^{** (6)} \\ \mathbf{H}^{** (8)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{** (1)} \\ \mathbf{H}^{** (3)} \\ \mathbf{H}^{** (5)} \\ \mathbf{H}^{** (7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}^{(2)} = \mathbf{O}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(1)} & L_{12}^{(1)} & L_{13}^{(1)} & L_{14}^{(1)} & L_{15}^{(1)} \\ 0 & L_{22}^{(1)} & L_{23}^{(1)} & L_{24}^{(1)} & L_{25}^{(1)} \\ 0 & 0 & L_{33}^{(1)} & L_{34}^{(1)} & L_{35}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44}^{(1)} & L_{45}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$(L_{11}^{(1)} = L_{22}^{(1)} = L_{33}^{(1)} = L_{44}^{(1)} = L_{55}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2),$$

$$L_{11}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2, \quad L_{12}^{(1)} = a_{03}\bar{\Delta}^2 + a_{04}\bar{\Delta} \quad L_{13}^{(1)} = a_{05}\bar{\Delta}^2 + a_{06}\bar{\Delta} + a_{07},$$

$$L_{14}^{(1)} = a_{08}\bar{\Delta}^2 + a_{09}\bar{\Delta} + a_{010}, \quad L_{15}^{(1)} = a_{011}\bar{\Delta}^2 + a_{012}\bar{\Delta} + a_{013}, \quad L_{22}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2,$$

$$L_{23}^{(1)} = a_{26}\bar{\Delta}^2 + a_{27}\bar{\Delta}, \quad L_{24}^{(1)} = a_{28}\bar{\Delta}^2 + a_{29}\bar{\Delta} + a_{210}, \quad L_{25}^{(1)} = a_{211}\bar{\Delta}^2 + a_{212}\bar{\Delta} + a_{213},$$

$$L_{33}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2, \quad L_{34}^{(1)} = a_{49}\bar{\Delta}^2 + a_{410}\bar{\Delta}, \quad L_{35}^{(1)} = a_{411}\bar{\Delta}^2 + a_{412}\bar{\Delta} + a_{413},$$

$$L_{44}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2, \quad L_{45}^{(1)} = a_{612}\bar{\Delta}^2 + a_{613}\bar{\Delta}, \quad L_{55}^{(1)} = \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2,$$

$$a_{03} = 9h^{-2}, \quad a_{04} = 6Ah^{-2}, \quad a_{05} = 30h^{-2},$$

$$a_{06} = 20Ah^{-2} + 315h^{-4}, \quad a_{07} = 105Ah^{-4}, \quad a_{08} = 63h^{-2},$$

$$a_{09} = 42Ah^{-2} + 3780h^{-4}, \quad a_{010} = 1260Ah^{-4} + 10395h^{-6},$$

$$a_{011} = 108h^{-2}, \quad a_{012} = 72Ah^{-2} + 20790h^{-4},$$

$$a_{013} = 6930Ah^{-4} + 270270h^{-6}, \quad a_{26} = 105h^{-2}, \quad a_{27} = 70Ah^{-2},$$

$$\begin{aligned}
a_{28} &= 270h^{-2}, \quad a_{29} = 180Ah^{-2} + 10395h^{-4}, \quad a_{210} = 3465Ah^{-4}, \\
a_{211} &= 495h^{-2}, \quad a_{212} = 330Ah^{-2} + 77220h^{-4}, \\
a_{213} &= 25740Ah^{-4} + 675675h^{-6}, \quad a_{49} = 297h^{-2}, \\
a_{410} &= 198Ah^{-2}, \quad a_{411} = 702h^{-2}, \quad a_{412} = 468Ah^{-2} + 57915h^{-4}, \\
a_{413} &= 19305Ah^{-4}, \quad a_{612} = 585h^{-2}, \quad a_{613} = 390Ah^{-2};
\end{aligned}$$

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{13}\bar{\Delta}^2 + a_{14}\bar{\Delta} & a_{15}\bar{\Delta}^2 + a_{16}\bar{\Delta} + a_{17} & a_{18}\bar{\Delta}^2 + a_{19}\bar{\Delta} + a_{110} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{36}\bar{\Delta}^2 + a_{37}\bar{\Delta} & a_{38}\bar{\Delta}^2 + a_{39}\bar{\Delta} + a_{310} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{59}\bar{\Delta}^2 + a_{510}\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 45h^{-2}, \quad a_{14} = 30Ah^{-2}, \quad a_{15} = 126h^{-2}, \quad a_{16} = 84Ah^{-2} + 2835h^{-4}, \\
a_{17} &= 945Ah^{-4}, \quad a_{18} = 243h^{-2}, \quad a_{19} = 162Ah^{-2} + 24948h^{-4}, \\
a_{110} &= 8316Ah^{-4} + 135135h^{-6}, \quad a_{36} = 189h^{-2}, \quad a_{37} = 126Ah^{-2}, \\
a_{38} &= 462h^{-2}, \quad a_{39} = 308Ah^{-2} + 27027h^{-4}, \quad a_{310} = 9009Ah^{-4}, \\
a_{59} &= 429h^{-2}, \quad a_{510} = 286Ah^{-2};
\end{aligned}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(3)} & L_{12}^{(3)} & L_{13}^{(3)} & L_{14}^{(3)} & L_{15}^{(3)} \\ 0 & L_{22}^{(3)} & L_{23}^{(3)} & L_{24}^{(3)} & L_{25}^{(3)} \\ 0 & 0 & L_{33}^{(3)} & L_{34}^{(3)} & L_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44}^{(3)} & L_{45}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$(L_{11}^{(3)} = L_{22}^{(3)} = L_{33}^{(3)} = L_{44}^{(3)} = L_{55}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}),$$

$$L_{11}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}, \quad L_{12}^{(3)} = b_{04}\bar{\Delta}^2 + b_{05}\bar{\Delta} + b_{06} \quad L_{13}^{(3)} = b_{07}\bar{\Delta}^2 + b_{08}\bar{\Delta} + b_{09},$$

$$L_{14}^{(3)} = b_{010}\bar{\Delta}^2 + b_{011}\bar{\Delta} + b_{012}, \quad L_{15}^{(3)} = b_{013}\bar{\Delta}^2 + b_{014}\bar{\Delta} + b_{015}, \quad L_{22}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta},$$

$$L_{23}^{(3)} = b_{27}\bar{\Delta}^2 + b_{28}\bar{\Delta} + b_{29}, \quad L_{24}^{(3)} = b_{210}\bar{\Delta}^2 + b_{211}\bar{\Delta} + b_{212}, \quad L_{25}^{(3)} = b_{213}\bar{\Delta}^2 + b_{214}\bar{\Delta} + b_{215},$$

$$L_{33}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}, \quad L_{34}^{(1)} = b_{410}\bar{\Delta}^2 + b_{411}\bar{\Delta} + b_{412}, \quad L_{35}^{(3)} = b_{413}\bar{\Delta}^2 + b_{414}\bar{\Delta} + b_{415},$$

$$L_{44}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}, \quad L_{45}^{(1)} = b_{613}\bar{\Delta}^2 + b_{614}\bar{\Delta} + b_{615}, \quad L_{55}^{(3)} = \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta},$$

$$b_{04} = 9h^{-2}, \quad b_{05} = 6Bh^{-2}, \quad b_{06} = 3Ch^{-2}, \quad b_{07} = 30h^{-2}, \quad b_{08} = 20Bh^{-2} + 315h^{-4},$$

$$b_{09} = 10Ch^{-2} + 105Bh^{-4}, \quad b_{010} = 63h^{-2}, \quad b_{011} = 42Bh^{-2} + 3780h^{-4},$$

$$b_{012} = 21Ch^{-2} + 1260Bh^{-4}, \quad b_{013} = 108h^{-2}, \quad b_{014} = 72Bh^{-2} + 20790h^{-4},$$

$$b_{015} = 36Ch^{-2} + 6930Bh^{-4} + 270270h^{-6}, \quad b_{27} = 105h^{-2},$$

$$b_{28} = 70Bh^{-2}, \quad b_{29} = 35Ch^{-2}, \quad b_{210} = 270h^{-2}, \quad b_{211} = 180Bh^{-2} + 10395h^{-4},$$

$$\begin{aligned}
b_{212} &= 90Ch^{-2} + 3465Bh^{-4}, \quad b_{213} = 495h^{-2}, \quad b_{214} = 330Bh^{-2} + 77220h^{-4}, \\
b_{215} &= 165Ch^{-2} + 25740Bh^{-4} + 675675h^{-6}, \quad b_{410} = 297h^{-2}, \quad b_{411} = 198Bh^{-2}, \\
b_{412} &= 99Ch^{-2}, \quad b_{413} = 702h^{-2}, \quad b_{414} = 468Bh^{-2} + 57915h^{-4}, \\
b_{415} &= 234Ch^{-2} + 19305Bh^{-4}, \quad b_{613} = 585h^{-2}, \quad b_{614} = 390Bh^{-2}, \quad b_{615} = 195Ch^{-2};
\end{aligned}$$

$$L^{(4)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{14}\bar{\Delta}^2 + b_{15}\bar{\Delta} + b_{16} & b_{17}\bar{\Delta}^2 + b_{18}\bar{\Delta} + b_{19} & b_{110}\bar{\Delta}^2 + b_{111}\bar{\Delta} + b_{112} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{37}\bar{\Delta}^2 + b_{38}\bar{\Delta} + b_{39} & b_{310}\bar{\Delta}^2 + b_{311}\bar{\Delta} + b_{312} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{510}\bar{\Delta}^2 + b_{511}\bar{\Delta} + b_{512} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
b_{14} &= 45h^{-2}, \quad b_{15} = 30Bh^{-2}, \quad b_{16} = 15Ch^{-2}, \quad b_{17} = 126h^{-2}, \quad b_{18} = 84Bh^{-2} + 2835h^{-4}, \\
b_{19} &= 42Ch^{-2} + 945Bh^{-4}, \quad b_{110} = 243h^{-2}, \quad b_{111} = 162Bh^{-2} + 24948h^{-4}, \\
b_{112} &= 81Ch^{-2} + 8316Bh^{-4} + 135135h^{-6}, \quad b_{37} = 189h^{-2}, \quad b_{38} = 126Bh^{-2}, \quad b_{39} = 63Ch^{-2}, \\
b_{310} &= 462h^{-2}, \quad b_{311} = 308Bh^{-2} + 27027h^{-4}, \quad b_{312} = 154Ch^{-2} + 9009Bh^{-4}, \\
b_{510} &= 429h^{-2}, \quad b_{511} = 286Bh^{-2}, \quad b_{512} = 143Ch^{-2},
\end{aligned}$$

а $\mathbf{0}$ — трехкомпонентный нулевой вектор.

Векторы перемещений и вращений имеют соответственно выражения

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\approx \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} P_1(x^3) + \mathbf{u}^{(2)} P_2(x^3) + \mathbf{u}^{(3)} P_3(x^3) + \dots + \mathbf{u}^{(8)} P_8(x^3), \\
\boldsymbol{\varphi} &\approx \boldsymbol{\varphi}^{(0)} + \boldsymbol{\varphi}^{(1)} P_1(x^3) + \boldsymbol{\varphi}^{(2)} P_2(x^3) + \boldsymbol{\varphi}^{(3)} P_3(x^3) + \dots + \boldsymbol{\varphi}^{(8)} P_8(x^3).
\end{aligned}$$

Из выражений для матриц $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, видно, что они — верхние треугольные дифференциальные матричные операторы и для их определителей $|L_{(\alpha)}|$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, будем иметь выражения

$$\begin{aligned} |L^{(1)}| &= \bar{\Delta}^{10}(\bar{\Delta}^2 + A)^5, & |L^{(2)}| &= \bar{\Delta}^8(\bar{\Delta}^2 + A)^4, \\ |L^{(3)}| &= \bar{\Delta}^5(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)^5, & |L^{(4)}| &= \bar{\Delta}^4(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)^4. \end{aligned} \quad (90)$$

Из (90) видно, что $|L^{(\alpha)}|$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, отличны от нуля. Поэтому для каждой матрицы $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, в силу простых выкладок можно найти их алгебраические дополнения $L_*^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Тогда, очевидно, будут верны соотношения

$$L_*^{(\alpha)T} L^{(\alpha)} = L^{(\alpha)} L_*^{(\alpha)T} = E^{(\alpha)} |L^{(\alpha)}|, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (91)$$

где $E^{(1)} = E^{(3)}$ — единичная матрица пятого порядка, а $E^{(2)} = E^{(4)}$ — единичная матрица четвертого порядка.

Применяя оператор $L_*^{(\alpha)T}$ слева к уравнениям (89) и учитывая (91), будем иметь следующие расщепленные системы уравнений:

$$|L^{(\alpha)}| \mathbf{U}^{(\alpha)} + L_*^{(\alpha)T} \Phi^{(\alpha)} = \mathbf{O}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (92)$$

а отсюда для каждого из моментов $\mathbf{u}^{(k)}$ и $\varphi^{(k)}$, $k = \overline{0, 8}$, векторов перемещений и вращений по отдельности получим уравнение эллиптического типа высокого порядка (уравнения с дифференциальными операторами $|L_{(1)}|$ и $|L_{(3)}|$ имеют

30-ый порядок, а уравнения с дифференциальными операторами $|L^{(2)}|$ и $|L^{(4)}|$ имеют 24-ый порядок). Если операторы $|L^{(\alpha)}|$ и $L_*^{(\alpha)}$ имеют общий множитель, то на него уравнение можно сократить и этим порядок уравнения уменьшить. Для каждого из уравнений (92), используя метод Векуа, можно выписать аналитическое решение.

Заметим, что к аналитическому решению в зависимости от заданных граничных условий надо прибавить подходящее корректирующее слагаемое, обеспечивающее выполнение граничных условий на лицевых поверхностях.

Выше о них речь шла, поэтому здесь на них останавливаться не будем.

Далее с целью сокращения письма только для матриц $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, выпишем их алгебраические дополнения $L_*^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. Будем иметь

$$L_*^{(1)} = \begin{pmatrix} L_{*11}^{(1)} & L_{*12}^{(1)} & L_{*13}^{(1)} & L_{*14}^{(1)} & L_{*15}^{(1)} \\ 0 & L_{*22}^{(1)} & L_{*23}^{(1)} & L_{*24}^{(1)} & L_{*25}^{(1)} \\ 0 & 0 & L_{*33}^{(1)} & L_{*34}^{(1)} & L_{*35}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & L_{*44}^{(1)} & L_{*45}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{*55}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$L_{*11}^{(1)} = L_{*22}^{(1)} = L_{*33}^{(1)} = L_{*44}^{(1)} = L_{*55}^{(1)} = \Delta^{12} + 4A\Delta^{11} + 6A^2\Delta^{10} + 4A^3\Delta^9 + A^4\Delta^8,$$

$$L_{*12}^{(1)} = -9/h^2\Delta^{11} - 33A/h^2\Delta^{10} - 45A^2/h^2\Delta^9 - 27A^3/h^2\Delta^8 - 6A^4/h^2\Delta^7,$$

$$L_{*13}^{(1)} = -30/h^2\Delta^{11} + a_1/h^4\Delta^{10} + a_2A/h^4\Delta^9 + a_3A^2/h^4\Delta^8 + a_4A^3/h^4\Delta^7 + a_5A^4/h^4\Delta^6,$$

$$\begin{aligned}
L_{*14}^{(1)} &= -63/h^2\Delta^{11} + a_6/h^4\Delta^{10} + a_7/h^6\Delta^9 + a_8A/h^6\Delta^8 + \\
&\quad + a_9A^2/h^6\Delta^7 + a_{10}A^3/h^6\Delta^6 + a_{11}A^4/h^6\Delta^5, \\
L_{*15}^{(1)} &= -108/h^2\Delta^{11} + a_{12}/h^4\Delta^{10} + a_{13}/h^6\Delta^9 + a_{14}/h^8\Delta^8 + \\
&\quad + a_{15}A/h^8\Delta^7 + a_{16}A^2/h^8\Delta^6 + a_{17}A^3/h^8\Delta^5 + a_{18}A^4/h^8\Delta^4, \\
L_{*23}^{(1)} &= -105/h^2\Delta^{11} - 385A/h^2\Delta^{10} - 525A^2/h^2\Delta^9 - 315A^3/h^2\Delta^8 - 70A^4/h^2\Delta^7, \\
L_{*24}^{(1)} &= -270/h^2\Delta^{11} + a_{19}/h^4\Delta^{10} + a_{20}A/h^4\Delta^9 + \\
&\quad + a_{21}/A^2h^4\Delta^8 + a_{22}A^3/h^4\Delta^7 + 10395A^4/h^4\Delta^6, \\
L_{*25}^{(1)} &= -495/h^2\Delta^{11} + a_{23}/h^4\Delta^{10} + a_{24}/h^6\Delta^9 + \\
&\quad + a_{25}A/h^6\Delta^8 + a_{26}A^2/h^6\Delta^7 + a_{27}A^3/h^6\Delta^6 - 2702700A^4/h^6\Delta^5, \\
L_{*34}^{(1)} &= -297/h^2\Delta^{11} - 1089A/h^2\Delta^{10} - 1485A^2/h^2\Delta^9 - \\
&\quad - 891A^3/h^2\Delta^8 - 198A^4/h^2\Delta^7, \\
L_{*35}^{(1)} &= -702/h^2\Delta^{11} + a_{28}/h^4\Delta^{10} + a_{29}A/h^4\Delta^9 + \\
&\quad + a_{30}A^2/h^4\Delta^8 + a_{31}A^3/h^4\Delta^7 + 57915A^4/h^4\Delta^6, \\
L_{*45}^{(1)} &= -585/h^2\Delta^{11} - 2145A/h^2\Delta^{10} - 2925A^2/h^2\Delta^9 - \\
&\quad - 1755A^3/h^2\Delta^8 - 390A^4/h^2\Delta^7; \\
a_1 &= 630 - 110Ah^2, \quad a_2 = -(150A + 105)h^2 + 2205, \quad a_3 = -(90A + 315)h^2 + 2940, \\
a_4 &= -(20A + 315)h^2 + 1785, \quad a_5 = -105h^2 + 420, \quad a_6 = 7560 - 231Ah^2, \\
a_7 &= -315A^2h^4 + 25200Ah^2 - 10395B - 93555,
\end{aligned}$$

$$a_8 = -189A^2h^4 + (31500A + 31185)h^2 - 31185B - 311850,$$

$$a_9 = -42A^2h^4 + (17640A + 83160)h^2 - 31185B - 415800,$$

$$a_{10} = (3780A + 72765)h^2 - 10395B - 259875,$$

$$a_{11} = 20790h^2 - 62370, \quad a_{12} = 41580 - 396Ah^2,$$

$$a_{13} = -540A^2h^4 + 138600Ah^2 - 2702700,$$

$$a_{14} = -324A^3h^6 + (173250A^2 + 73710A)h^4 - \\ - 8181810Ah^2 + 6081075B + 24324300,$$

$$a_{15} = -72A^3h^6 + (97020A^2 + 196560A)h^4 - \\ - (9656010A + 12162150)h^2 + 16216200B + 77026950,$$

$$a_{16} = (20790A^2 + 171990A)h^4 - (5307120A + 28378350)h^2 + \\ + 14189175B + 105405300,$$

$$a_{17} = 49140Ah^4 - (1130220A + 22297275)h^2 + 4054050B + 66891825,$$

$$a_{18} = -6081075h^2 + 16216200, \quad a_{19} = 20790 - 990Ah^2,$$

$$a_{20} = -1350Ah^2 + 69300, \quad a_{21} = -810Ah^2 + 86625, \quad a_{22} = -180Ah^2 + 48510,$$

$$a_{23} = 154440 - 1815Ah^2, \quad a_{24} = -2475A^2h^4 + 514800Ah^2 - 6756750,$$

$$a_{25} = -1485A^2h^4 + 643500Ah^2 - 20270250,$$

$$a_{26} = -330A^2h^4 + 360360Ah^2 - 23648625, \quad a_{27} = 77220Ah^2 - 12837825,$$

$$a_{28} = 115830 - 2574Ah^2, \quad a_{29} = -3510Ah^2 + 386100, \quad a_{30} = -2106Ah^2 + 482625,$$

$$a_{31} = -468Ah^2 + 270270;$$

$$L_*^{(2)} = \begin{pmatrix} L_{*11}^{(2)} & L_{*12}^{(2)} & L_{*13}^{(2)} & L_{*14}^{(2)} \\ 0 & L_{*22}^{(2)} & L_{*23}^{(2)} & L_{*24}^{(2)} \\ 0 & 0 & L_{*33}^{(2)} & L_{*34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & L_{*44}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$L_{*11}^{(2)} = L_{*22}^{(2)} = L_{*33}^{(2)} = L_{*44}^{(2)} = \Delta^9 + 3A\Delta^8 + 3A^2\Delta^7 + A^3\Delta^6,$$

$$L_{*12}^{(2)} = -45/h^2\Delta^8 - 120A/h^2\Delta^7 - 105A^2/h^2\Delta^6 - 30A^3/h^2\Delta^5,$$

$$L_{*13}^{(2)} = -126/h^2\Delta^8 + b_1/h^4\Delta^7 + b_2A/h^4\Delta^6 + b_3A^2/h^4\Delta^5 + 2835A^3/h^4\Delta^4,$$

$$L_{*14}^{(2)} = -243/h^2\Delta^8 + b_4/h^4\Delta^7 + b_5/h^6\Delta^6 + \\ + b_6A/h^6\Delta^5 + b_7A^2/h^6\Delta^4 - 540540A^3/h^6\Delta^3,$$

$$L_{*23}^{(2)} = -189/h^2\Delta^8 - 504A/h^2\Delta^7 - 441A^2/h^2\Delta^6 - 126A^3/h^2\Delta^5,$$

$$L_{*24}^{(2)} = -462/h^2\Delta^8 + b_8/h^4\Delta^7 + b_9A/h^4\Delta^6 + b_{10}A^2/h^4\Delta^5 + 27027A^3/h^4\Delta^4,$$

$$L_{*34}^{(2)} = -429/h^2\Delta^8 - 1144A/h^2\Delta^7 - 1001A^2/h^2\Delta^6 - 286A^3/h^2\Delta^5,$$

$$b_1 = 5670 - 336Ah^2, \quad b_2 = -294Ah^2 + 13230, \quad b_3 = -84Ah^2 + 10395,$$

$$b_4 = 49896 - 648Ah^2, \quad b_5 = -567A^2h^4 + 116424Ah^2 - 1351350,$$

$$b_6 = -162A^2h^4 + 91476Ah^2 - 2702700, \quad b_7 = 24948Ah^2 - 2027025,$$

$$b_8 = 54054 - 1232Ah^2, \quad b_9 = -1078Ah^2 + 126126, \quad b_{10} = -308Ah^2 + 99099.$$

14. Квазистатическая задача микрополярной теории жестких в поперечном направлении призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений

В силу гипотез о жесткости в поперечном направлении (75) и (77) имеем

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(x', x^3) &= \hat{\mathbf{u}}^*(x', x^3) + u_3(x')\mathbf{r}^3, & \hat{\mathbf{u}}^*(x', x^3) &= \hat{u}_I \mathbf{r}^I = \hat{u}^I \mathbf{r}_I, & u_3(x') &= \overset{(0)}{u}_3(x'), \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}(x', x^3) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}^*(x', x^3) + \varphi_3(x')\mathbf{r}^3, & \hat{\boldsymbol{\varphi}}^*(x', x^3) &= \hat{\varphi}_I \mathbf{r}^I = \hat{\varphi}^I \mathbf{r}_I, & \varphi_3(x') &= \overset{(0)}{\varphi}_3(x'),\end{aligned}$$

с учетом которых из систем уравнений (87) и (88) будем иметь соответственно

$$\begin{aligned}[\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\hat{\mathbf{u}}^* + \hat{\mathbf{S}}^* &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\hat{\boldsymbol{\varphi}}^* + \\ + \hat{\mathbf{H}}^* &= 0, \quad \hat{\mathbf{S}}^{**} = \hat{\mathbf{S}}^* + S_3^{**}\mathbf{r}^3, \quad \hat{\mathbf{H}}^{**} = \hat{\mathbf{H}}^* + H_3^{**}\mathbf{r}^3, \quad \hat{\mathbf{S}}^* = \hat{S}_I^{**}\mathbf{r}^I, \quad \hat{\mathbf{H}}^* = \hat{H}_I^{**}\mathbf{r}^I, \\ \underline{\bar{\Delta}^2(\bar{\Delta} + A)u_3(x') + S_3^{**}} &= 0, \quad \underline{\bar{\Delta}(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)\varphi_3(x') + H_3^{**}} = 0;\end{aligned}\tag{93}$$

$$\begin{aligned}[\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^* + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^{*''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^{*IV} + \\ + h^{-6}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}^{*VI} + \overset{(k)}{\mathbf{H}}^* &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2]\overset{(k)}{\mathbf{u}}^* + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\overset{(k)}{\mathbf{u}}^{*''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\overset{(k)}{\mathbf{u}}^{*IV} + \\ + h^{-6}\overset{(k)}{\mathbf{u}}^{*VI} + \overset{(k)}{\mathbf{S}}^* &= 0, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (\underline{S_3^{**}} = \overset{(0)}{S_3^{**}}\delta_0^k, \quad \underline{H_3^{**}} = \overset{(0)}{H_3^{**}}\delta_0^k), \\ \underline{\bar{\Delta}^2(\bar{\Delta} + A)\overset{(0)}{u}_3(x') + S_3^{**}} &= 0, \quad \underline{\bar{\Delta}(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)\overset{(0)}{\varphi}_3(x') + H_3^{**}} = 0.\end{aligned}\tag{94}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предложены различные параметризации для разных областей тонких тел. Создан новый тензорный аппарат для описания предложенных параметризаций и введен аппарат дифф. операторов для теорий тонких тел. Сформулированы фундаментальные теоремы для областей тонких тел;
2. Выведены рекуррентные формулы для полиномов Лежандра и Чебышева;
3. Построена теория моментов относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Получены системы уравнений движения и притока тепла и ОС физического и теплового содержаний в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах. При этом получены системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах как для классической среды (относительно тензора напряжений), так и для микрополярной среды (относительно тензоров напряжений и моментных напряжений) МДТТТ;
4. Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах для тонких тел;
5. Сформулированы гипотезы о жесткости в поперечном направлении тонких тел. Выведены уравнения, определяющие соотношения, граничные условия ТТТ и даны постановки задач с учетом гипотезы.
6. Получены расщепленные уравнения для призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях, а также в моментах векторов перемещений и вращений. Уравнения получены и с учетом гипотезы.

Литература

1. Никабадзе М.У. Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. II// Деп. в ВИНТИ РАН. 20.05.14. №136 – В2014. 218 с.
2. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел// М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ. 2014. 515 с.
3. Никабадзе М.У. Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел// Дисс. на соискание степени доктора физико-математических наук. М.: МАИ. 2014. 384 с.
4. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.
5. Eringen A.C. Theory of micropolar plates // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 25.01.1967. Vol. 18. No. 1, pp. 12–30.
6. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. 1. Foundation and solids. Springer-Verlag. N.Y.: 1999. 341 p.
7. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. №2. С. 84-95.

8. Саркисян С.О., Варданыан С.А. Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. №3. С. 64–76.
9. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. №1. С. 129–147.
10. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С. 309–319.
11. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. №5. С. 41–54.
12. Атоян А. А., Саркисян С. О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. №2. С. 18–33.
13. Дудников В.А., Назаров С.А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. №2. С. 306–309.
14. Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб: СПбГТУ, 1999. 341 с.

15. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 288 с.
16. Жилин П. А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. к 386. С. 29–46.
17. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб: Изд-во политехн. ун-та, 2006. 167 с.
18. Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979. 216 с.
19. Каюк Я. Ф., Жуковский А. П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладн. механика. 1981. Т. XVII. №10. С. 80–85.
20. Шкутин Л. И. Нелинейные модели деформируемых моментных сред // ПМТФ. 1980. №6. С. 111–117.
21. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Н.: Наука, 1988. 127 с.
22. Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37. №3. С. 120–132.
23. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1995. 751 pp.

24. Eremeyev V. A. Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions //J. Elasticity. 2004. Vol. 74. P. 67–86.
25. Eremeyev V. A. Pietraszkiewicz W. Local symmetry group in the general theory of elastic shells // J. Elasticity. 2006. Vol. 85. No. 2. Pp. 125–152.
26. Eremeyev V. A., Zubov L.M. On constitutive inequalities in nonlinear theory of elastic shells// ZAMM. 2007. Vol. 87. No. 2. P. 94–101.
27. Lewinski T. On refined plate models based on kinematical assumptions//Ingenieur-Archiv. 1987. Bd. 57. S.133–146.
28. Lewinski T. On displacement-based theories of sandwich plates with soft core// Mech. Res. Comm. 1990. Vol. 17. No. 6. P.375–382.
29. Makowski J., Pietraszkiewicz W. Thermomechanics of shells with singular curves. Gdansk: Institute of Fluid-Flow Machinery, PAS, 2002. Zesz. Nauk. No 528/1487/2002. 100 p.
30. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A., Konopirnska V. Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions //ZAMM. 2007. Vol. 87. No 2. P. 150–159.
31. Rubin M. B. Cosserat theories: shells, rods and points. (Ser.: Solid Mechanics and its applications. Vol. 79., Ed. G. M. L. Gladwell) Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000. 480 p.
32. Zubov L. M. Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1997. 205 p.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ
20-24 августа 2015 г.