ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ СФЕРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ

М. Н. Кирсанов, И.В. Меркурьев

Национальный исследовательский университет МЭИ
Москва, Россия

Механические системы, подверженные внешним нагрузкам (силам, крутящим моментам), часто крепятся на массивных нелинейно-упругих резиноподобных основаниях. Такие основания призваны не только гасить возникающую вибрацию, но и страховать систему на случай перегрузок. Одним из возможных решений является стойка, закрепленная в жестком шаре, погруженным в пластмассовую или эпоксидную среду, допускающую некоторое вращение шара. По экватору шара выполняется мелкая насечка. С одной стороны это обеспечивает сцепление со средой, с другой – насечка выполняет роль резца, инициирующего трещину и высвобождающего опору при перегрузках. Так, жертвуя опорой можно спасти прибор от разрушения. Наиболее интересной для практического инженера является напряженное состояние среды в экваториальной области вокруг шара. Традиционными в таких задачах особенностями вблизи полюсов в этом случае можно пренебречь.

Постановка задачи

С большой степенью точности напряженное состояние в среде можно считать осесимметричным.

Рассмотрим упругое пространство, деформация которого инициирована заданным перемещением, а поле перемещений задано специальным образом, имитирующим вращение сферы, сцепленной со средой на экваторе. Координаты точек в деформированном и недеформированном состоянии выразим в сферических координатах

$$
\begin{aligned}
y^1 &= r\sin\psi\cos\varphi,\\
y^2 &= r\sin\psi\sin\varphi,\\
y^3 &= r\cos\psi,\\
x^1 &= r\sin\psi\cos(\varphi-u),\\
x^2 &= r\sin\psi\sin(\varphi-u),\\
x^3 &= r\cos\psi,
\end{aligned}
$$

где угловое смещение $u=u(r,\psi)$ зависит от зенитного угла ψ и радиуса r и не зависит от азимутального угла φ.

Метрические тензоры

Введем обозначения для криволинейных координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \psi$, $\theta^3 = \varphi$. Метрические тензоры [1]

$$G_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial \theta^i}\frac{\partial y^k}{\partial \theta^j},\; g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i}\frac{\partial x^k}{\partial \theta^j}$$

в деформированном и недеформированном теле имеют вид

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\psi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + r^2u_r^2\sin^2\psi & u_ru_\psi r^2\sin^2\psi & -u_r r^2\sin^2\psi \\ u_ru_\psi r^2\sin^2\psi & r^2(1+u_\psi^2\sin^2\psi) & -u_\psi r^2\sin^2\psi \\ -u_r r^2\sin^2\psi & -u_\psi r^2\sin^2\psi & r^2\sin^2\psi \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Контрвариантные метрические тензоры находим из условий $g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j$, $G^{ik}G_{jk} = \delta^i_j$, обращая матрицы (1) и (2)

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\psi) \end{pmatrix},$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_r \\ 0 & 1/r^2 & u_\psi / r^2 \\ u_r & u_\psi / r^2 & 1/(r^2\sin^2\psi) + u_\psi^2 / r^2 + u_r^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Напряжения. Решение

Предположим, материал несжимаемый ($I_3 = 1$), а энергия упругой деформаций линейно зависит от инвариантов $I_1 = g^{mn}G_{mn}$, $I_2 = G^{mn}g_{mn}$ тензора деформаций в форме, предложенной Муни

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3).$$

В этом случае известно [1] выражение для напряжений

$$\tau^{ij} = \alpha g^{ij} + \beta B^{ij} + pG^{ij}, \tag{4}$$

где $\alpha = 2\partial W / \partial I_1$, $\beta = 2\partial W / \partial I_2$, $p = p(r,\psi)$ — неизвестное гидростатическое давление и

$$B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ik} g^{js} G_{ks},$$

Из (1) и (3) легко получить

$$I_1 = g^{mn} G_{mn} = 3 + (r^2 u_r^2 + u_\psi^2)\sin^2\psi,$$

$$B^{ij} = \begin{pmatrix} 2 + u_\psi^2 \sin^2\psi & -u_r u_\psi \sin^2\psi & u_r \\ -u_r u_\psi \sin^2\psi & (2 + u_r^2 \sin^2\psi)/r^2 & u_\psi / r^2 \\ u_r & u_\psi / r^2 & 2/(r^2 \sin^2\psi) + u_\psi^2 / r^2 + u_r^2 \end{pmatrix}.$$

Из (4) следует

$$\tau^{ij} = \begin{pmatrix} \zeta + \beta u_\psi^2 \sin^2\psi + p & -u_r u_\psi \beta \sin^2\psi & u_r \gamma \\ -u_r u_\psi \beta \sin^2\psi & \dfrac{\zeta + \beta u_r^2 r^2 \sin^2\psi + p}{r^2} & \dfrac{u_\psi \gamma}{r^2} \\ u_r \gamma & \dfrac{u_\psi \gamma}{r^2} & \dfrac{\zeta (u_r^2 r^2 + u_\psi^2)}{r^2} + \dfrac{\zeta + p}{r^2 \sin^2\psi} \end{pmatrix},$$

где $\gamma = \alpha + \beta$, $\zeta = \alpha + 2\beta$. Уравнение равновесия при отсутствии массовых сил имеет вид $\tau^{ij} \|_i = 0,$ где двойной вертикальной чертой обозначено ковариантное дифференцирование с помощью метрических тензоров G_{ij} и G^{ij}. В сферической системе координат имеем уравнение в проекции на радиус

$$\tau_r^{11} + \frac{\tau_\psi^{12}}{r} + \frac{\tau_\varphi^{13}}{r \sin\psi} + \frac{2\tau^{11} - \tau^{22} - \tau^{33} + \tau^{12}\psi}{r} = 0$$

откуда следует дифференциальное уравнение в частных производных для перемещения u

$$u_{rr} r^2 + 4 r u_r + u_{\psi\psi} + 3 u_\psi \psi = 0.$$

Разыскивая решение этого уравнения в виде $u = f(r) h(\psi)$, получим

$$f = e^{-r^2} r^{-1/2} (C_1 M_{\lambda,\mu}(2r^2) + C_2 W_{\lambda,\mu}(2r^2))$$

где $M_{\lambda,\mu}(2r^2)$, $W_{\lambda,\mu}(2r^2)$ — функции Уиттекера [2], и $\lambda = -1/4$, $\mu = \sqrt{1-4C}/4$.

Решение для $h(\psi)$ выражается через гипергеометрические функции

$$h = C_3 F(a_1, b_1, 1/2, \cos^2\psi) + C_4 F(a_2, b_2, 3/2, \cos^2\psi), \tag{5}$$

где $a_1 = (3 + \sqrt{9+4C})/4$, $b_1 = (3 - \sqrt{9+4C})/4$, $a_2 = (5 + \sqrt{9+4C})/4$, $b_2 = (5 - \sqrt{9+4C})/4$. При $C = 0$ имеем

$$u = (c_1 + c_2 erf(r\sqrt{2}))(c_3 + c_4(\cos\psi / \sin^2\psi - \ln((\psi/2)))), \tag{6}$$

где $\mathrm{erf}(r) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^r e^{-t^2}dt$ – функция ошибок. Заметим, что и решение (5) и (6) в полюсах сферы $\psi = 0$, $\psi = \pi$ расходятся так как функция $F(a,b,c,z)$ при $a+b-c=1$ и $z=1$ представляет собой расходящийся ряд [2]. Рассмотрим решение (6). Из условия недеформируемости среды на бесконечности $r \to \infty$, $u \to 0$ приравниваем нулю первую скобку в (6). Используя ассимптотическое свойство функции ошибок, получаем $c_1 = -c_2$. Из граничных условий, заданных на экваторе $u(R,\pi/2) = u_0$, $u_\psi(R,\pi/2) = u'$, находим константы интегрирования и получаем решение

$$u = \frac{erf(\sqrt{2}r)-1}{erf(\sqrt{2}R)-1}\left(u_0 - \frac{u'}{2}\left(\frac{\cos\psi}{\sin^2\psi} - \ln\frac{1-\cos\psi}{\sin\psi}\right)\right). \quad (7)$$

На рисунке 1 зависимость (7) представлена кривыми при $u=1$, $u'=1$ (все линейные величины отнесены к радиусу R) для различных зенитных углов. Заметен существенный эффект затухания. Можно условно считать, что на расстояниях порядка радиуса сферы материал остается недеформируемым.

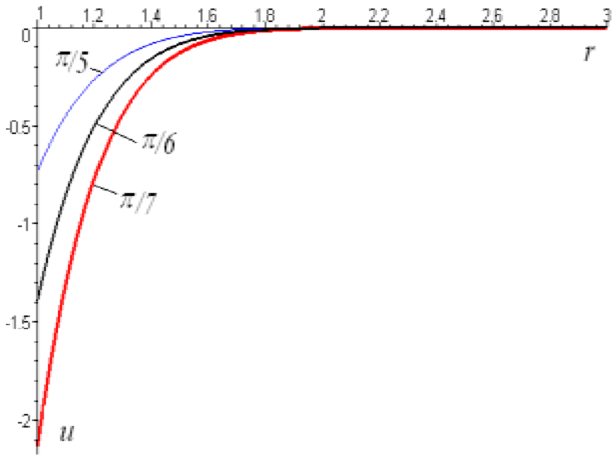

Рис. 1. Зависимость перемещения *u* от радиуса *r*

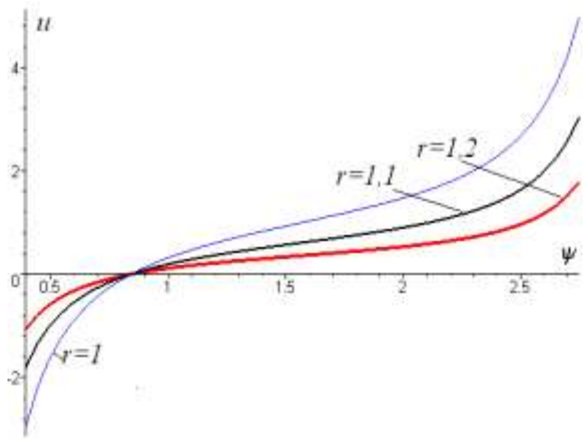

Рис. 2. Зависимость перемещения *u* от угла ψ

Зависимость азимутального углового смещения от зенитного угла ψ дана на рисунке 2 при тех же краевых условиях на различных расстояниях от поверхности сферы.

На рисунке 3 зависимость (7) построена для $r = R$ при различных краевых условиях.

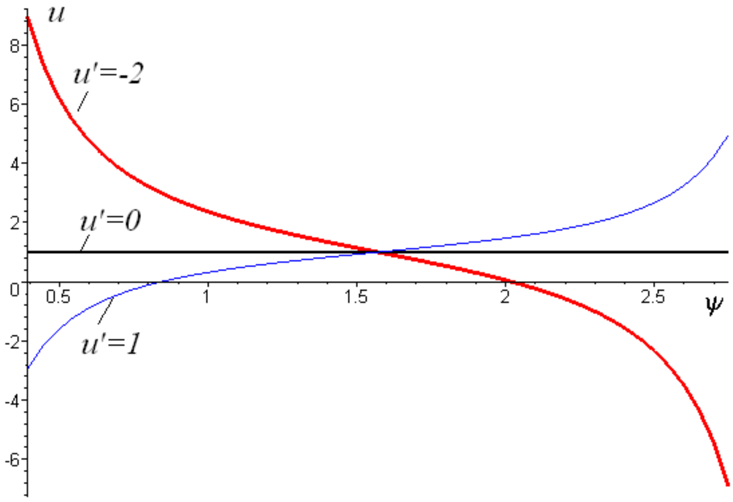

Рис. 3. Влияние краевых условий на решение *u*

Интегрируя моменты касательных напряжений $\sigma_{r\psi}$ относительно оси вращения y_3 по поверхности сферы радиусом R, можно найти значение вращающего момента. Физические компоненты тензора напряжений σ_{ij} определяются по формуле $\sigma_{ij} = \tau^{ij}\sqrt{G_{jj}/G^{ii}}$ (по i и j не суммировать). Отсюда $\sigma_{r\psi} = r\sin(\psi)\tau^{13} = r\sin(\psi)u_r\gamma$. Плечо ρ окружного касательного усилия относительно оси вращения равно $R\sin\psi$. Имеем

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_{r\psi}\,\rho R^2\sin\psi\,d\varphi d\psi = \frac{16\gamma\sqrt{2\pi}e^{-2R^2}R^4u_0}{erf(\sqrt{2}R)-1}.$$

Выводы

Найдено решение о деформации упругой среды возмущением специального вида в сферических координатах. Точное решение в принятой постановке неизбежно дает особенность в полюсах сферы. Избавиться от этой особенности можно, только если условно ограничить область допустимых решений, исключив небольшие зоны вблизи полюсов. Кроме того, наблюдается «эффект обратного вращения» — материал в верхнем (от экватора сферы $0 < \psi < \pi/2$) полупространстве и нижнем ($\pi/2 < \psi < \pi$) деформируется в разных направлениях (рис. 2, 3). Замечено значительное затухание деформаций вглубь среды. Получена формула для момента интегрирующего окружные касательные напряжения на сфере, вызывающие деформацию.

Все тензорные преобразования и аналитическое решение уравнения выполнены в системе компьютерной математики Maple [3].

Литература

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
2. *Абрамовиц М., Стиган И*. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
3. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-08-01255.

УДК 539.3

M.N. Kirsanov, Dr. Sci. Sciences, prof., Merkuryev I.V., Dr. Sci. Sciences, prof., MPEI

AXISYMMETRIC PROBLEM OF NONLINEAR DEFORMATION OF ELASTIC MEDIUM BY SPHERICAL BODY

Determined by the displacement field in a nonlinear elastic medium, consistent with the rotation of the sphere around the axis. Assumed that the three components of the displacement field is nonzero only peripheral component that depends on the radial and zenith coordinate. Potential stress in the form adopted by Mooney.

Key words: exact solution, spherical body, elastic medium, nonlinear deformation

Аннотация

Определяется поле перемещений в нелинейной упругой среде, согласованное с вращением сферы вокруг оси. Принимается, что из трех компонент поля перемещений отлична от нуля только окружная компонента, зависящая от радиальной и зенитной координаты. Потенциал напряжений принят в форме Муни.

Ключевые слова: точное решение, сферические координаты, упругая среда, нелинейные деформации