Доклады Академии наук СССР
1956. Том 111, № 2

ФИЗИКА

А. А. СОКОЛОВ, Д. Д. ИВАНЕНКО и И. М. ТЕРНОВ

О ВОЗБУЖДЕНИИ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КВАНТОВЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 5 VI 1956)

1. Энергия релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле H, равна [1-4]

$$E_n = \sqrt{2eHc\hbar n + m^2c^4}, \tag{1}$$

где $n = l + s$ — главное, l — азимутальное и s — радиальное квантовые числа.

Эту энергию мы можем представить в виде суммы энергии вращательного движения электрона (энергия E_l) и энергии колебательного движения по радиусу (энергия E_s):

$$E_l \cong \sqrt{2eHc\hbar l + m^2c^4}, \quad E_s \cong \hbar\omega s = \frac{E\omega^2a^2}{2c^2}, \tag{2}$$

где a — амплитуда радиальных колебаний.

При переходе электрона из состояния n в состояние $n' = n - \nu$ ($\nu = \nu' + \nu''$, $\nu'' = l - l'$, $\nu' = s - s'$) энергии вращательного и колебательного движения изменяются по закону:

$$\frac{dE_l}{dt} = -\sum_{n',s'} \hbar\omega\left(\nu'' + \frac{\nu^2}{4l}\right) w_{nn'ss'} = -W_0\left[1 - \frac{275\sqrt{3}}{96}\frac{\hbar\omega}{mc^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right], \tag{3}$$

$$\frac{dE_s}{dt} = -\sum_{n',s'} \hbar\omega\nu' w_{nn'ss'} = \frac{55\sqrt{3}}{96} W_0 \frac{\hbar\omega}{mc^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \tag{4}$$

где $w_{nn'ss'}$ — вероятность спонтанного перехода в единицу времени, определяемая формулой (56) работы [2], а W_0 — полная энергия излучения светящегося электрона в классическом приближении. Сумма выражений (3) и (4) дает общую потерю энергии на излучение с учетом квантовых поправок с точностью до $\hbar$, найденную в [5,6].

2. Из формулы (3) мы видим, что квантовые поправки к вращательному движению могут сказываться лишь при весьма высоких энергиях $E \sim E_\mu$ ($\mu = 1/2$), где

$$E_\mu = mc^2\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^\mu. \tag{5}$$

При $\hbar \to 0$ изменения энергии радиальных колебаний вообще не будет, т. е. в классическом случае величина s будет оставаться постоянной даже с учетом излучения.

Лишь в квантовом случае ($\hbar \neq 0$) будет иметь место своеобразная перекачка энергии, когда вращательная энергия будет расходоваться не только на излучение, но и на возбуждение радиальных колебаний

($s \neq \mathrm{const}$), вследствие этого квадрат амплитуды радиальных колебаний будет возрастать по закону [2,3,7,8]

$$a^2 = a_0^2 \frac{H(0)}{H(t)} + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^2 tR}{mE(1-q)^2} \int\limits_0^t \left(\frac{E}{mc^2}\right)^6 \frac{dt}{R^2}, \tag{6}$$

где a_0 — начальная амплитуда радиальных колебаний; q — показатель спадания магнитного поля в зависимости от r.

3. Выясним механизм возбуждения квантовых радиальных колебаний. Для этого рассмотрим случай $q \neq 0$, когда наряду с радиальными колебаниями могут возникнуть также и аксиальные. Тогда

$$x = r - R = a\cos(\sqrt{1-q}\,\omega t + \varphi), \quad z = b\cos(\sqrt{q}\,\omega t + \varphi_1), \tag{7}$$

где R — радиус равновесной орбиты. Амплитуды a и b можно связать с соответствующими квантовыми числами (s — радиальное, k — аксиальное) с помощью соотношений (см., например, [7,8])

$$a^2 = \frac{2c\hbar s}{eH\sqrt{1-q}}, \quad b^2 = \frac{2c\hbar k}{eH\sqrt{q}}.$$

Отсюда видно, что квантовая теория допускает следующее значение для минимального изменения квадрата амплитуды колебаний ($\Delta s = 1$)

$$\Delta(a^2) = \frac{2c\hbar}{eH\sqrt{1-q}}. \tag{8}$$

Возбуждение радиальных колебаний будет происходить следующим образом: вращающийся релятивистский электрон по направлению касательной испускает фотон с энергией $\Delta E \sim \hbar \frac{c}{R} \nu_m$, где $\nu_m \sim \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3$ является номером наиболее вероятной излучаемой гармоники. Изменение же энергии должно повлечь за собой и изменение радиуса стационарной орбиты на величину

$$\Delta R = \frac{1}{1-q} \frac{\Delta E}{E} R. \tag{9}$$

Вычисления, проведенные по строгой квантовой теории в работе [8] (см. формулу (29)), приводят к следующему значению для квадрата амплитуды радиальных колебаний при излучении одного фотона с энергией ΔE:

$$\Delta(a^2)_{\text{кв}} = \frac{R^2}{(1-q)^2}\left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2; \quad (\Delta R)^2 > \Delta(x_0^2) \quad (s \neq 0); \tag{10}$$

$$\Delta(a^2)_{\text{кв}} = 0; \qquad (\Delta R)^2 < \Delta(x_0^2) \quad (s = 0). \tag{11}$$

Из условия (10) мы находим, что радиальные возбуждения будут происходить при энергиях $E > E_{1/5}$ $(\mu = 1/5)$.

Из формул (7) и (9) видно, что в классическом случае изменение амплитуды, связанное с изменением центра колебаний, должно зависеть еще и от фазы

$$\Delta(a^2)_{\text{кл}} = \Delta(a^2)_{\text{кв}} - 2a\Delta R\cos(\sqrt{1-q}\,\omega t + \varphi). \tag{12}$$

Если в течение одного периода колебаний будет несколько «случайных» изменений центра колебаний при условии, что фаза φ будет сохранять свое значение (случай классического приближения), то мы получаем исчезающий результат (11). Квантовый же результат (10) может быть получен лишь в результате усреднения выражения (12) по фазе φ.

Таким образом, возбуждение радиальных колебаний будет происходить, когда имеет место статистическая независимость последовательных процессов (цепи Маркова). Как известно, цепи Маркова являются основой теории флуктуаций (см., например, теорию брауновского движения).

Строгий квантовый метод для исследования возбуждения радиальных бетатронных колебаний был использован в ряде наших работ по квантовой теории светящегося электрона, а полуклассический метод с усреднением по фазе — Сандсом ([10]) при исследовании влияния квантовых флуктуаций на радиально-фазовые колебания в синхротроне. Оба метода вычислений приводят к одинаковым результатам. Это обстоятельство напоминает случай со строгим выводом по квантовой теории лэмбовского сдвига и его полуклассической интерпретацией, данной Вельтоном (см., например, ([11-13])). Таким образом, при больших энергиях $E \gg E_{1/5}$ ($s=\mathrm{const}$) будет иметь место весьма интересный случай движения релятивистского электрона, когда его вращение вокруг магнитного поля будет описываться классической теорией, а радиальные колебания с макроскопической амплитудой (образующие своего рода «макроатом») — законами квантовой механики.

Для «макроатома» имеет место своеобразный принцип неопределенности. Амплитуды радиальных колебаний и радиального импульса имеют порядок

$$a \sim \sqrt{\frac{c\hbar s}{eH}}, \quad p_0 \sim \frac{E}{c^2}\,\omega a \sim \sqrt{\frac{eH\hbar s}{c}}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что при возможном изменении s на единицу амплитуду импульса и амплитуду координаты мы будем знать лишь с точностью до величин

$$\Delta p_0 \sim \frac{\partial p_0}{\partial s}\,\Delta s \sim \frac{p_0}{s}, \quad \Delta a \sim \frac{a}{s}. \tag{14}$$

Однако неточности в измерении координаты (Δx) и импульса (Δp) не могут обе одновременно совпадать с неточностями Δa и Δp_0, так как при $s \gg 1$ мы получили бы неравенство

$$\Delta a \cdot \Delta p_0 \sim \frac{\hbar}{s} \ll \hbar,$$

противоречащее принципу неопределенности

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar. \tag{15}$$

Поэтому только одну из неточностей мы можем положить по порядку величины равной приращению соответствующей амплитуды, неточность же второй величины может быть оценена из соотношения неопределенности (15).

Тогда в обоих случаях:

$$\begin{aligned} &1)\quad \Delta p \sim \Delta p_0 \sim \frac{p_0}{s}, \quad \Delta a \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim a; \\ &2)\quad \Delta x \sim \Delta a \sim \frac{a}{s}; \quad \Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim p_0 \end{aligned} \tag{16}$$

мы не можем пользоваться классическим приближением.

Указанные неточности могут возникнуть лишь через промежуток времени $\tau = \frac{1}{w_{s,s+1}}$, где $w_{s,s+1}$ — вероятность перехода с изменением квантового числа s на единицу.

При $E \ll E_{1/5}$ время $\tau \to \infty$, поэтому мы можем пользоваться классическим приближением. При $E \gg E_{1/5}$ время $\tau \sim \frac{137\,mc^2}{\omega E}$, и поэтому указанные переходы могут возникнуть уже на первых же периодах радиальных колебаний, что в конце концов (т. е. в результате многих переходов) должно привести к квантовому характеру радиальных колебаний, хотя сам процесс перехода от классических уравнений к квантовым с помощью существующих теорий проследить было бы затруднительно.

Возбуждение аксиальных колебаний, которое может появиться при энергиях $E > E_{1/3}$ $(\mu = 1/3)$, будет происходить по закону

$$b^2 = b_0^2 \frac{H(0)}{H(t)} + \frac{13}{24\sqrt{3}} \frac{e^2 \hbar R}{qmE} \int_0^t \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \frac{dt}{R^2}. \quad (17)$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, М.—Л., 1951, стр. 288—290. [2] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **25**, 698 (1953). [3] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН, **92**, 537 (1953). [4] А. А. Соколов, А. Н. Матвеев, И. М. Тернов, ДАН, **102**, 65 (1955). [5] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ДАН, **89**, 665 (1953). [6] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **24**, 249 (1953). [7] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН, **97**, 823 (1954). [8] А. А. Соколов, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **28**, 431 (1955). [9] А. А. Соколов, ДАН, **67**, 1013 (1949). [10] M. Sands, Phys. Rev., **97**, 470 (1955); А. Н. Матвеев, ДАН, **109**, 495 (1956). [11] T. Welton, Phys. Rev., **74**, 1157 (1948). [12] R. Feynman, Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948). [13] А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, М.—Л., 1952, стр. 189.