ТРУДЫ СИБИРСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Verhandlungen des Sibirischen Physikalisch-Technischen Instituts in Tomsk
том 5 1937 вып. 1

ЗАМЕЧАНИЯ О ВТОРИЧНОМ КВАНТОВАНИИ В ТЕОРИИ ДЫРОК

Д. Иваненко и А. Соколов

(Теоретический отдел)

Применение квантованных плоских волн позволяет просто сформулировать основные положения теории электронов и позитронов, не вводя явно отрицательных энергий.

1. Введение

Аналогия де Бройля между светом и частицами лежит в основе квантовой механики, описывающей поведение волн материи. В области ядерной физики, или, если угодно, в области релятивистской квантовой механики, возникает новая аналогия между фотонами и материальными частицами, ввиду возможности рождения и уничтожения электронов и позитронов подобно фотонам. Описание экспериментальных фактов рождения и уничтожения пар и явлений естественной и искусственной радиоактивности отличается, однако, от толкования испускания и поглощения света в том смысле, что фотоны рождаются из нулевого состояния, тогда как электроны появляются из состояний отрицательной энергии. Необходимость введения заполненных состояний отрицательной энергии в качестве резервуара нерожденных частиц вместо одного состояния нулевой энергии для нерожденных фотонов вызвана требованиями принципа Паули и статистики Ферми для электронов. Как известно, система нерожденных пар электронов и позитронов—дираковский вакуум—дает себя знать в виде специфических эффектов поляризации и т. д., приводя в формализме теории к разнообразным бесконечностям.

Как было показано Паули и Вейскопфом[1]), вторичное квантование скалярного релятивистского уравнения непосредственно дает рождение и уничтожение пар частиц, подчиняющихся статистике Бозе, без введения уровней отрицательной энергии. Вероятности этих процессов совпадают по порядку величины с результатами теории Дирака. В связи с этим, в частности, возникает важный вопрос о более тесной обусловленности той или иной статистики данным уравнением.

Теорию электронов и позитронов можно было бы, конечно, сформулировать в конфигурационном пространстве координат частиц, но тогда пришлось бы брать пространство переменного числа измерений. Поэтому наиболее пригодным оказывается метод вторичного квантования, позволяющий непосредственно учесть рождение и уничтожение как частиц, так и фотонов. Так как трактовка одного изолированного электрона становится невозможной, начиная с энергий $\sim mc^2$ или длин волн $\sim h/mc$, ввиду появления пар, то, начиная с этой критической длины вступает в силу метод вторичного квантования; можно сказать, что для фотона, ввиду равенства нулю покоящейся массы, критическое расстояние равно бесконечности, а критическая энергия равна нулю, так что описание отдельного фотона вообще не имеет смысла. Таким образом, для фотонов

---

[1]) W. Pauli und V. Weisskopf, Helvetica Phys. Acta 7, 709, 1934.

всегда естественно применять метод вторичного квантования. Весьма простая формулировка известных основных положений теории дырок может быть достигнута применением волновых функций, разложенных в ряды Фурье. Идя этим путем мы вообще избегаем введения в теорию уровней отрицательной энергии для частиц.

Для систематического изложения теории желательно прежде всего выписать в удобном для дальнейшего анализа виде решение уравнения Дирака для свободной частицы и ряд вспомогательных формул.

Гамильтонова функция системы в отсутствии поля имеет вид

$$H = -\int d\tau\, hc\, \psi^*\left(\sum_s \frac{\alpha_s}{i}\frac{\partial}{\partial x_s} + \beta k_0\right)\psi, \quad s = 1, 2, 3. \tag{1}$$

где h = постоянной Планка, деленной на 2π, $k_0 = mc/h$,

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_s \\ \sigma_s & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Применяя уравнение движения

$$\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = [H\psi], \tag{2}$$

и подчиняя ψ статистике Бозе или Ферми, мы получаем уравнение Дирака

$$(E/c + (\alpha p) + \beta h k_0)\psi = 0,$$

где

$$p_s = {}^h/_i \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad E = -{}^h/_i \frac{\partial}{\partial t}.$$

Будем искать решение уравнения Дирака в виде ряда Фурье:

$$\psi_\rho = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \psi_\rho^k e^{i(kr)} = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k a'^k_\rho e^{-icKt + i(kr)}, \tag{3}$$

где $\rho = 1, 2, 3, 4$ дает номер компоненты и L^3 — основной объем периодичности.

Подставив ряд Фурье в уравнение Дирака, мы найдем для каждой четверки коэфициентов Фурье $a'^k_s = 1, 2, 3, 4$ систему 4-х однородных уравнений.

$$\begin{aligned} (K + k_0)\,a'_1 + k_{12}\,a'_4 + k_3\,a'_3 &= 0 \\ (K + k_0)\,a'_2 + k^*_{12}\,a_3' - k_3\,a_4' &= 0 \\ (K - k_0)\,a'_3 + k_{12}\,a_2' + k_3\,a_1' &= 0 \\ (K - k_0)\,a'_4 + k^*_{12}\,a'_1 - k_3\,a'_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где для краткости опущен значек k у всех a'_ρ и положено $k_{12} = k_1 + i k_2$ и т. д. Условие разрешимости системы (4) дает нам два значения $K : K = \pm\sqrt{k^2 + k_0^2}$. В дальнейшем под K мы будем всегда понимать модуль $K \equiv |K| = +\sqrt{k^2 + k_0^2}$. Мы получим таким образом две системы значений a'^k_ρ, которые мы будем обозначать через a^k_ρ и b^{*k}_ρ (целесообразность введения сопряженных b^* выяснится ниже)

$$\begin{aligned} a_1 &= -\gamma(k_{12}A_2 + k_3 A_1) & b^*_1 &= \gamma(K + k_0)B_1^* \\ a_2 &= -\gamma(k^*_{12}A_1 - k_3 A_2) & b^*_2 &= \gamma(K + k_0)B_2^* \\ a_3 &= +\gamma(K + k_0)A_1 & b^*_3 &= \gamma(k_{12}B^*_2 + k_3 B^*_1) \\ a_4 &= +\gamma(K + k_0)A_2 & b^*_4 &= \gamma(k^*_{12}B^*_1 - k_3 B^*_2)) \end{aligned} \tag{5}$$

где нормировочный коэффициент $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2K(K+k_0)}}$, и у всех величин a, A, B, γ отброшен вверху значек k, так что точнее следовало бы писать $a_1{}^k = -\gamma^k(k_{12}A^k{}_2 + k_3A^k{}_1)$ и т. д.

Независимые произвольные амплитуды A^k, B^k можно объединить в двухкомпонентные матричные вектора, полагая:

$$A^k = (A_\sigma) = \begin{vmatrix} A^k{}_1 \\ A^k{}_2 \end{vmatrix}, \quad A^{*k} = |A_1{}^{*k}, \ A_2{}^{*k}|, \quad \sigma = 1, 2$$

$$B^{*k} = (B^{*k}_\sigma), \quad B^k = |B_1{}^k, \ B_2{}^k|, \quad B^{*k} = \begin{vmatrix} B_1{}^{*k} \\ B_2{}^{*k} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Удобно также ввести вспомогательный четырехмерный вектор Q^{kl} с компонентами

$$Q_0^{kl} = (K + k_0)(L + k_0) + (kl), \quad Q^{kl}_{1,2,3} = i[kl]$$

$$Q_0^{kk} = (K + k_0)^2 + k^2 = 2K(K + k_0), \quad Q^{kk}_{1,2,3} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, мы получаем окончательно полное решение уравнения Дирака в виде следующего ряда Фурье.

$$\psi_\rho = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k (a_\rho^k e^{-icKt + i(kr)} + b_\rho^{*k} e^{+icKt + i(kr)}), \tag{8.1}$$

где коэфициенты a_ρ^k, b^{*k}_ρ вполне определены предыдущими формулами и зависят от двух произвольных амплитуд A^k, B^{*k}. Решение сопряженного уравнения имеет вид

$$\psi_\rho{}^* = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k (a_\rho^{*k} e^{+icKt - i(kr)} + b_\rho^k e^{-icKt - i(kr)}). \tag{8.2}$$

Для вычисления общего заряда, тока, импульса и энергии системы частиц, зависящих от билинейных выражений типа $\psi^*\alpha\psi$, образуем вспомогательные смешанные плотности и токи от коэфициентов Фурье

$$\rho(A^{*k}A^l) = a_\rho^{*k} a_\rho^l = \gamma^k\gamma^l Q_\rho^{kl}(A^{*k}\sigma_\rho A^l), \quad \rho(A^{*k}A^k) = A_1{}^{*k}A_1{}^k + A_2{}^{*k}A_2{}^k$$

$$\rho(B^kA^l) = b_\rho^k a_\rho^l = \gamma^k\gamma^l \sum_s ((L + k_0)k_s - (K + k_0)l_s)\ (B^k\sigma_s\ A^l) \tag{9}$$

$$\rho(B^kA^k) = 0.$$

Для соответствующих смешанных токов получаем

$$\vec{J}(A^{*k}A^l) = -a_\rho^{*k}\vec{\alpha}\, a_\rho^l = \gamma^k\gamma^l \{A^{*k}A^l[\vec{k}(L + k_0) +$$

$$+ \vec{l}(K + k_0)] - i[(A^{*k}\vec{\sigma}A^l)((L + k_0)\vec{k} - (K + k_0)\vec{l})]\},$$

$$\vec{J}(A^{*k}A^k) = \frac{\vec{k}}{K}(A^{*k}A^k), \quad \vec{J}(A^{*k}B^{*l}) = -a^{*k}_\rho\vec{\alpha}\, b^{*k}_\rho = -\gamma^k\gamma^l\{(A^{*k}\vec{\sigma}B^{*k})Q_0 + \tag{10}$$

$$+ \vec{Q}^{kl}A^{*k}B^{*l} - \vec{k}(\vec{l}\ (A^*\vec{\sigma}\ B^*)) - \vec{l}\ (\vec{k}(A^*\sigma\vec{B}^*))\},$$

$$\vec{J}(A^{*k}B^{*k}) = -(A^{*k}\vec{\sigma}B^{*k}) + \frac{\vec{k}}{K(K + k_0)}(\vec{k}(A^{*k}\vec{\sigma}B^{*k})) \quad \text{и т. д.}$$

где

$$(A^{*k}\sigma_s A^l)=|A_1^{*k},\ A_2^{*k}|\ \sigma_s \begin{vmatrix} A^l{}_1 \\ A^l{}_2 \end{vmatrix}$$

Аналогичные соотношения имеют место для $\rho(B^k B^{*l})$, $\vec{J}(B^k B^{*l})$ и т. д. с переменой местами A и B и заменой сопряженных A, B несопряженными. Наконец, может встретиться также выражение $a^{*k}_\rho \beta a^l_\rho$, приводящееся к виду

$$\rho(A^{*k}A^l) \cdot 2\gamma^k\gamma^l(A^{*k}A^l)(K+k_0)(L+k_0)$$

2. Квантование волновых функций в отсутствии поля

Переход от классических коэфициентов Фурье a^k, b^k, выраженных через произвольные амплитуды A^k, B^k к квантованным величинам мы сможем осуществить, находя сопряженные импульсы и координаты и устанавливая между ними перестановочные соотношения. Последние можно получить или при помощи гамильтоновой функции и квантовых уравнений движения, или при помощи общей формулы для импульсов через функцию Лагранжа. Мы воспользуемся простым методом уравнений движения, имеющих вид

$$\frac{h}{i}\frac{\partial F}{\partial t}=[HF]=HF-FH. \tag{11}$$

Выражение гамильтоновой функции H через амплитуды A, B, мы получим подставляя в (1) волновые функции ψ, разложенные согласно (8) в ряд Фурье, и выполняя интегрирование по объему при помощи дираковской δ-функции

$$H=hc\sum_k K(A_1{}^{*k}A_1{}^k+A_2{}^{*k}A_2{}^k-B_1{}^kB_1{}^{*k}-B_2{}^kB_2{}^{*k}). \tag{12}$$

Уравнения движения для амплитуд будут иметь вид

$$-icK'A_1{}^{k'}=i/h\,\Sigma\, hcK(A_1{}^{*k}A_1{}^kA_1{}^{k'}-A_1{}^{k'}A_1{}^{*k}A_1{}^k+A_2{}^{*k}A_2{}^kA_1{}^{k'}-A_1{}^{k'}A_2{}^{*k}A_2{}^k-$$
$$-B_1{}^kB_1{}^{*k}A_1{}^{k'}+A_1{}^{k'}B_1{}^kB_1{}^{*k}-B_2{}^kB_2{}^{*k}A_1{}^{k'}+A_1{}^{k'}B_2{}^kB_2{}^{*k}). \tag{11a}$$

Отсюда, прибавляя и вычитая справа выражения вида $A^{*k}A^{k'}A^k$, и т. д., мы получим из сравнения коэфициентов в левой и правой частях уравнения (11a) в случае статистики Ферми следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} A_\sigma^{*k}A_{\sigma'}^{k'}+A_{\sigma'}^{k'}A_\sigma^{*k}&=\delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'} \\ B_\sigma^{*k}B_{\sigma'}^{k'}+B_{\sigma'}^{k'}B_\sigma^{*k}&=\delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}, \end{aligned} \tag{13}$$

где спиновый значек σ принимает значения 1, 2. Все остальные A, B антикоммутируют между собой.

Конечно, уравнение (11a) допускает также решение, соответствующее статистике Бозе, рассмотрение которой мы проведем позже.

Мы удовлетворим уравнению (13) положив

$$\begin{aligned} A_\sigma^{*k}&=\sqrt{N^k_{\sigma-}}\,\Delta^k_{\sigma-}V^k_{\sigma-}, & A_\sigma^k&=V^k_{\sigma-}\Delta^k_{\sigma-}\sqrt{N^k_{\sigma-}} \\ B_\sigma^{*k}&=\sqrt{N^k_{\sigma+}}\,\Delta^k_{\sigma+}V^k_{\sigma+}, & B_\sigma^k&=V^k_{\sigma+}\Delta^k_{\sigma+}\sqrt{N^k_{\sigma+}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\Delta^k_{\sigma-}\varphi(N^k_{\sigma-},\ N^k_{\sigma+})=\varphi(1-N^k_{\sigma-},\ N^k_{\sigma+})\ \text{ и т. д.;}\quad V^k_{1-}=\prod_{i\leqslant k}(1-2N^i_{1-}),$$

и аналогичные определения для V^k_{2-}, $V^k_{\sigma+}$, где произведения будут взяты по всем $(1-N^i_{1-})$, $(1-N^i_{2-})$, $(1-N^i_{\sigma+})$, расположенным в некотором определенном порядке, начиная от первого до данного $k^{\text{того}}$. Отсюда мы видим, что

$$A^{*k}_{\sigma} A^k_{\sigma} = N^k_{\sigma-}, \qquad B^{*k}_{\sigma} B^k_{\sigma} = N^k_{\sigma+},$$
$$A^k_{\sigma} A^{*k}_{\sigma} = 1 - N^k_{\sigma-}, \quad B^k_{\sigma} B^{*k}_{\sigma} = 1 - N^k_{\sigma+}. \qquad (15)$$

Как известно, определенные подобным образом $N^k_{\sigma+}$ и $N^k_{\sigma-}$ могут принимать при данном σ лишь значения 0,1, согласно принципу Паули. Это позволяет нам интерпретировать $N^k_{\sigma-}$, $N^k_{\sigma+}$, как числа частиц двух сортов $(-)$ и $(+)$ в состоянии k со спином σ. В следующем параграфе мы покажем, что частицы N_- и N_+ имеют различные заряды, ввиду чего можно считать $N^k_{\sigma-}$ за число электронов, имеющих спин σ в состоянии k и, соответственно, $N^k_{\sigma+}$ за число позитронов.

Заменяя члены $(-BB^*)$ через (B^*B-1) согласно (13), мы получим следующее выражение гамильтоновой функции:

$$H = hc\sum_k \sum_\sigma K(N^k_{\sigma-} + N^k_{\sigma+} - 1) = hc\sum_k K(N^k_{1-} + N^k_{2-} + N^k_{1+} + N^k_{2+} - 2) \quad (16)$$

Мы видим, что энергия системы дираковских частиц, подчиняющихся статистике Ферми будет равна сумме положительных энергий электронов и позитронов, если отбросить член с бесконечно большой отрицательной энергией. Этот бесконечный вакуумный член равный $(-2hc\sum_k K)$ не будет зависеть от распределения числа электронов и позитронов и будет аналогичен известному выражению так называемой „нулевой энергии“ электромагнитного поля, равной: $hc\sum_k |k|$.

В случае статистики Бозе уравнение (11а) приводит к следующим правилам перестановки:

$$A^{k'}_{\sigma'} A^{*k}_{\sigma} - A^{*k}_{\sigma} A^{k'}_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{kk'}$$
$$B^{*k}_{\sigma} B^{k'}_{\sigma'} - B^{k'}_{\sigma'} B^{*k}_{\sigma} = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{kk'}. \qquad (17)$$

Мы удовлетворим правилам (17) положив:

$$A^{*k}_{\sigma} A^k_{\sigma} = N^k_{\sigma-}$$
$$B^k_{\sigma} B^{*k}_{\sigma} = -N^k_{\sigma+}. \qquad (18)$$

Отсюда мы получим для функции Гамильтона следующее выражение:

$$H = hc\sum_{k,\sigma} K(N^k_{\sigma-} - N^k_{\sigma+}), \qquad (19)$$

т. е. энергия позитронов $(N^k_{\sigma+})$ в данном случае всегда будет отрицательна.

Интересно сравнить полученные формулы с аналогичными выражениями для скалярного релятивистского уравнения второго порядка, исследованного Паули и Вейскопфом.

Из соответствующего выражения функции Гамильтона

$$H = \int\left\{h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + h^2c^2\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_s}\frac{\partial\psi}{\partial x_s} + m^2c^4\psi^*\psi\right\}d\tau \qquad (20)$$

и разложений ψ в ряд Фурье:

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2hcK}} \left[a^k\, e^{-icKt + i(k\,r)} - b^{*k} e^{icKt - i(k\,r)}\right]$$
$$\psi^* = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \frac{-i}{\sqrt{2hcK}} \left[a^{*k} e^{icKt - i(k\,r)} - b^k e^{-icKt + i(k\,r)}\right], \tag{21}$$

мы получаем следующее выражение энергии через независимые произвольные коэфициенты Фурье:

$$H = hc \sum_k K\,(a^{*k}\,a^k + b^k\,b^{*k}). \tag{22}$$

подставляя это значение H в уравнение движения (11) мы получаем два рода правил перестановки для коэфициентов a и b.

Для статистики Ферми:

$$a^{*k}\,a^{k'} + a^{k'}\,a^{*k} = \delta_{kk'}$$
$$b^{*k}\,b^{k'} + b^{k'}\,b^{*k} = -\delta_{kk'} \tag{23}$$

и для статистики Бозе:

$$a^{k'}\,a^{*k} - a^{*k}\,a^{k'} = \delta_{kk'}$$
$$b^{k'}\,b^{*k} - b^{*k}\,b^{k'} = \delta_{kk'}\,. \tag{23.1}$$

Трактуя попрежнему

$$a^{*k}\,a^k = N^k_-$$
$$b^{*k}\,b^k = N^k_+ \tag{24}$$

как числа электронов и позитронов в состоянии k мы получим для частиц, подчиняющихся статистике Бозе полную энергию, как сумму положительных энергий отдельных частиц с добавочной бесконечной нулевой энергией:

$$H = hc \sum_k K(N^k_- + N^k_+ + 1). \tag{25}$$

В случае статистики Ферми мы приходим к нелепым правилам перестановки, как видно из второй формулы (23).

В данном изложении мы с самого начала принимаем амплитуды a и b некоммутативными, что и определяет их порядок в гамильтоновой функции, и следовательно, правила перестановки. Если бы a, b были обычными классическими величинами, мы могли бы по произволу выбрать их порядок в гамильтоновой функции. Тогда в случае статистики Бозе мы получили бы прежние результаты с не очень существенным изменением значения постоянной нулевой энергии. Известно, что фиксируя определенный порядок коэффициентов Фурье в разложении потенциалов, мы можем устранить нулевую энергию электромагнитного поля. В случае статистики Ферми изменение порядка операторных коэффициентов существенно: в частности, мы могли бы добиться „нормальных" правил перестановки для коэфициентов b, так же как для a в формуле (23), т. е. при некотором определенном порядке с точки зрения правил перестановки не было бы возражений против применения статистики Ферми для скалярного релятивистского уравнения 2-го порядка. Однако Паули и Вейскопф на основании иных соображений все равно заключают о непригодности антисимметрической статистики для скалярного релятивистского уравнения.

Таким образом, *при вторичном квантовании волновых функций для уравнения Дирака оказывается естественной статистика Ферми, а для скалярного релятивистского уравнения 2-го порядка статистика Бозе.*

В случае нерелятивистского волнового уравнения Шредингера, в виду наличия только одного рода коэфициентов, обе статистики оказываются одинаково пригодными.

3. Полный заряд, ток и импульс

Для получения полного заряда, тока и импульса системы дираковских частиц в случае отсутствия поля, выпишем их обычные выражения через волновые функции

$$e=\int \psi_\rho^* \psi_\rho \, d\tau, \quad \vec{J}=-c\int \psi_\rho^* \vec{\alpha}\, \psi_\rho \, d\tau, \quad G_\alpha=\frac{h}{i}\int \psi_\rho^* \frac{\partial \psi_\rho}{\partial x_\alpha}\, d\tau, \tag{26}$$

причем суммирование по спинам учитывается при интегрировании. Подставляя в (26) разложения ψ и ψ^* из (8) и интегрируя, получим

$$e=\sum_k \left\{ \rho(A^* A)+\rho(BB^*)+\rho(A^* B^*)e^{2icKt}+\rho(BA)e^{-2icKt} \right\} \tag{27.1}$$

$$\vec{J}=\sum_k \left\{ \vec{J}(A^* A)+\vec{J}(BB^*)+\vec{J}(A^* B^*)e^{2icKt}+\vec{J}(BA)e^{-2icKt} \right\} \tag{27.2}$$

$$\vec{G}=h\sum_k \vec{k} \left\{ \rho(A^* A)+\rho(BB^*)+\rho(A^* B^*)e^{2icKt}+\rho(BA)e^{-2icKt} \right\}. \tag{27.3}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (9) и (10) для смешанных плотностей и токов амплитуд Фурье, получим окончательно выражения заряда, тока, импульса, к которым мы добавим еще энергию

$$H=hc\sum_k K(A^*_1 A_1+A^*_2 A_2+B^*_1 B_1+B^*_2 B_2-2) \tag{28.1}$$

$$e=\sum_k (A^*_1 A_1+A^*_2 A_2-B^*_1 B_1-B^*_2 B_2+2) \tag{28.2}$$

$$\vec{J}=\sum_k \left\{ \frac{c\vec{k}}{K}\left[A^*_1 A_1+A^*_2 A_2+B^*_1 B_1+B^*_2 B_2-2\right]+\left[A^* \vec{\sigma} B^* - \frac{\vec{k}(\vec{k}(A^* \vec{\sigma} B^*))}{K(K+k_0)}\right]e^{2icKt}+\left[B\vec{\sigma}A-\frac{\vec{k}(\vec{k}(B\vec{\sigma}A))}{K(K+k_0)}\right]e^{-2icKt} \right\} \tag{28.3}$$

$$\vec{G}=h\sum_k \vec{k}(A^*_1 A_1+A^*_2 A_2-B^*_1 B_1-B^*_2 B_2+2). \tag{28.4}$$

В формулах (27) и (28) все A и B подразумеваются взятыми со значком k. Вид формул (28) наглядно подтверждает интерпретацию выражений $A^{*k}_\sigma A^k_\sigma$ и $B^{*k}_\sigma B^k_\sigma$, как чисел электронов и позитронов в состоянии k со спином σ. Гамильтонова функция равна сумме положительных энергий обоих сортов частиц, заряд равен разности зарядов, ток равен сумме токов, ибо позитронам приписывается обратная скорость; наконец, импульс равен разности импульсов, также ввиду обратной скорости.

Постоянные бесконечно большие вакуумные члены, независящие от распределения частиц, соответствуют энергии, заряду, току и импульсу от частиц отрицательной массы, но с обычным зарядом электрона, заполняющим все состояния. Для устранения этих бесконечно больших членов можно ввести соответствующий „вычитательный" член, как было указано Дираком и Гейзенбергом[2]).

Особый интерес вызывает формула для тока, который даже в отсутствии внешнего поля оказывается зависящим от времени и будет постоянным только лишь в среднем. Эти быстро переменные добавки с частотами $\pm 2cK$ очевидно эквивалентны Шредингеровским „дрожащим" членам. Ввиду наличия коэфициентов вида (A^*B^*) и (BA), эти дрожащие добавки связаны с виртуальным рождением и, соответственно, уничтожением пары частиц.

4. Описание системы при наличии поля

В случае наличия внешнего поля, описываемого скалярным потенциалом Φ_0 и векторным потенциалом $\vec{\Phi}$, функция Гамильтона, как известно, принимает следующий вид:

$$H = -\int d\tau\, \psi^* \left\{ hc\left(\frac{\alpha_s}{i}\, grad_s + k_0\beta\right) + e(\alpha\Phi) + e\Phi_0 \right\}\psi, \tag{29}$$

или:

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \tag{30}$$

где:

$$H_0 = -\int d\tau\, \psi^*\, hc\left(\frac{\alpha_s}{i}\, grad_s + k_0\beta\right)\psi, \tag{31.1}$$

$$H_1 = -e\int d\tau\, \psi^*(\alpha\Phi)\psi, \qquad H_2 = -e\int d\tau\, \psi^*\Phi\psi. \tag{31.2}$$

Подставляя разложение в ряды Фурье (8) для ψ и ψ^* мы получим:

$$H_1 = e\sum \Big\{ \vec{\Phi}^{kl} \cdot \Big[\vec{J}(A^{*k}A^l)\, e^{ic(K-L)t} + \vec{J}(B^kB^{*l})\, e^{-ic(K-L)t} + \vec{J}(A^{*l}B^{*k})\, e^{ic(K+L)t} + \vec{J}(B^kA^l)\, e^{-ic(K+L)t} \Big]\Big\} \tag{32.1}$$

$$H_2 = -e\sum_k\sum_l \Phi_0^{\,kl} \Big[\rho(A^{*k}A^l)\, e^{ic(K-L)t} + \rho(B^kB^{*l})\, e^{-ic(K-L)t} + \rho(A^{*k}B^{*l})\, e^{ic(K+L)t} + \rho(B^kA^l)\, e^{-ic(K+L)t} \Big], \tag{32.2}$$

где матричные элементы векторного и скалярного потенциала определены следующим образом:

$$\Phi_0^{\,kl} = \frac{1}{L^3}\int \Phi_0\, e^{-i(k-l)r}\, d\tau \tag{33.1}$$

$$\vec{\Phi}^{kl} = \frac{1}{L^3}\int \vec{\Phi}\, e^{-i(k-l)r}\, d\tau \tag{33.2}$$

Потенциалы Φ мы можем также представить в виде рядов Фурье, что, однако, для рассматриваемого ниже случая наличия одного лишь постоянного Φ_0 не представляет собой выгоды.

Из выражений (32.1) и (32.2) мы видим, что наличие поля может вызвать следующие процессы: 1) переход электрона или позитрона из одного

[2]) P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. 30. 150, 1934.
W. Heisenberg, Z. Phys. 90. 209, 1934.

состояния (l) в другое (k), что мы можем трактовать, как уничтожение частицы в состоянии „l" и возникновение в состоянии „k" (этот процесс происходит благодаря наличию членов в H, содержащих $A_1^{*k} A^l$ и $B^{*k} B^l$), б) одновременное рождение пары частиц ($A_1^{*k} B^{*l}$), или в) одновременное ее уничтожение ($A^k B^l$).

Простейшее применение полученные формулы находят в случае наличия только статического поля, описываемого скалярным потенциалом Φ_0. Они позволяют тогда определить добавочную плотность ρ', которая прибавляется к основной плотности ρ_0, вызывающей внешнее поле по уравнению Пуассона:

$$\Delta \Phi_0 = -4\pi\rho_0. \tag{33}$$

При наличии статического поля мы получаем из (29) следующее уравнение для ψ:

$$\left(-\frac{h}{ic}\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_s \frac{h}{i}\, grad_s + \beta mc + \frac{e}{c}\Phi_0\right)\psi = 0. \tag{34}$$

Решение уравнения (34) будем искать также в виде разложения ψ в ряд Фурье:

$$\psi_\rho = \sum_k \psi_\rho^k, \tag{35}$$

причем:

$$\psi_\rho^k = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_l \left[c_a^{lk}(t)\, a_\rho^l\, e^{-icLt + i(lr)} + c_b^{lk}(t)\, b_\rho^l\, e^{icLt + i(lr)}\right]. \tag{36}$$

Чтобы при $t = 0$ получить невозмущенную волну нам необходимо положить

$$c_a^{lk}(0) = \delta_{lk} \quad \text{и} \quad c_b^{lk}(0) = \delta_{lk}. \tag{37}$$

Обычный метод возмущения Дирака дает нам следующие выражения для коэфициентов c в уравнении (36):

$$\begin{aligned} c_a^{lk}(t) &= \delta_{lk} - \frac{e\Phi_0^{lk}\rho(A^{*l}A^k).\, e^{ic(K-L)t}}{ch(K-L)} + \frac{e\Phi_0^{lk}\rho(A^{*l}B^{*k})\, e^{ic(K+L)t}}{ch(K+L)} \\ c_b^{lk}(t) &= \delta_{lk} - \frac{e\Phi_0^{lk}\rho(B^l A^k)\, e^{ic(K+L)t}}{ch(K+L)} + \frac{e\Phi_0^{lk}\rho(B^l B^{*k})\, e^{ic(K-L)t}}{ch(K-L)}. \end{aligned} \tag{38}$$

Подставляя эти значения коэфициентов c в (36) и принимая во внимание (35) мы окончательно получим:

$$\psi_\rho = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_k \left[(a_\rho^k + \Delta a_\rho^k)\, e^{-icKt + i(kr)} + (b_\rho^{*k} + \Delta b_\rho^{*k})\, e^{icKt + i(kr)}\right], \tag{38.1}$$

причем:

$$\begin{aligned} \Delta a_\rho^k &= -\sum_l e.\Phi_0^{lk} e^{i(l-k)r}\left[\frac{a_\rho^l \rho(A^{*l}A^k)}{ch(K-L)} + \frac{b_\rho^{*l}\rho(B^l A^k)}{ch(K+L)}\right] \\ \Delta b_\rho^{*k} &= \sum_l e.\Phi_0^{lk} e^{i(l-k)r}\left[\frac{a_\rho^l \rho(A^{*l}B^{*k})}{ch(K+L)} + \frac{b_\rho^{*l}\rho(B^l B^{*k})}{ch(K-L)}\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

Из (38.1) мы находим следующее выражение для дополнительной плотности:

$$\rho' = -\frac{e^2}{L^3}\sum_\rho \left(\psi_\rho^*(r,t)\,\psi_\rho(r,t) - \psi_\rho^*(r,o)\,\psi_\rho(r,o)\right).$$

Мы подставляем сюда для a^k_ρ и b^{*k}_ρ и Δa^k_ρ и Δa^k_ρ и Δb^ρ_k их значения из (5) и (39) и оставляем только члены, имеющие коэфициенты $A^k_\delta A^{*k}_\delta$, $B^k_\delta B^{*k}_\delta$. Действительно, число электронов и позитронов у нас равняется нулю, поэтому $A^{*k}_\delta A^k_\delta = N^k_{\delta -} = 0$ $B^{*k}_\sigma B^k_\sigma = N^k_{\sigma +} = 0$ и т. д. Тогда

$$= -\frac{e^2}{L^3}\sum_l \sum_k \frac{\rho(B^k A^l)\rho(A^{*l} B^{*k})}{ch(K+L)}\left[\Phi_0{}^{lk} e^{i(l-k)r} + \Phi_0{}^{lk} e^{-i(l-k)r}\right] \quad (41)$$

Согласно (9)

$$\rho(B^k A^l)\rho(A^{*l} B^{*k}) = (\gamma^k)^2 (\gamma^l)^2 \left\{(L+k_0)\vec{k} - (K+k_0)\vec{l}\right\}^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{(kl)+k_0{}^2}{KL}\right). \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41) и переходя от суммирования к интегрированию, находим:

$$\rho = \frac{-e^2}{hc(2\pi)^6}\int\int\int e^{-i(k-l)(r-r')}\left(1 - \frac{(kl)+k_0{}^2}{KL}\right)\frac{\Phi_0(r')}{K+L}\,dk\,dl\,dr'. \quad (43)$$

Проинтегрировав выражение (43) согласно Гейзенбергу (l. c.), мы окончательно получаем выражение для дополнительной плотности:

$$\rho_1 = -\frac{1}{15\pi}\frac{e^2}{hc}\left(\frac{h}{mc}\right)^2 \Delta\rho_0, \quad (44)$$

которое совпадает с результатом, полученным Гейзенбергом, при помощи дираковской матрицы плотности.

Вычитательный член Гейзенберга S_0 эквивалентный бесконечной постоянной в выражении плотности (28) был нами отброшен с самого начала.

Отметим, что в написанных выше смешанных плотностях и токах (9) и (10) уже произведено суммирование по спинам, которое обычно проделывается при помощи оператора, определяющего знак кинетической энергии. Таким образом, метод вторичного квантования позволяет просто произвести разделение электронных и позитронных функций в решениях уравнения Дирака.

(Поступило 16.II.1937).