

## Zur Theorie des magnetischen Elektrons. I.

Von D. Iwanenko und L. Landau in Leningrad.

(Eingegangen am 8. März 1928.)

An Stelle der gewöhnlichen Schrödingerschen Wellenfunktion wird eine Reihe von antisymmetrischen Tensoren verschiedenen Ranges  $\psi_{ikl\dots}$  eingeführt. Es gelingt auf diese Weise ohne jede Annahme über Rotation relativistisch invariante Gleichungen aufzustellen, welche die geforderten Effekte von selbst ergeben. Zum Schluß wird gezeigt, wie eine Verallgemeinerung auf den Fall beliebig vieler Freiheitsgrade erhalten werden kann.

1. Einleitung. Viele experimentelle Tatsachen, vorwiegend aus dem Gebiet der Spektroskopie, führen, wie bekannt, mit Notwendigkeit zu dem Resultat, daß dem Elektron ein zusätzliches magnetisches Moment angehört. Goudsmit und Uhlenbeck versuchten diese eigenartige Erscheinung mittels der Abänderung des gewöhnlichen Elektronenmodells zu erklären; sie glaubten nämlich, daß wir es mit einer Rotation des Elektrons zu tun haben. Da die entsprechende Quantenzahl zwei Werte annehmen kann, so ist ersichtlich, daß diese Rotation halbzählig quantelt werden muß. Das steht aber im entschiedenen Widerspruch mit der Wellenmechanik, welche für alle rotierenden Körper unbedingt eine ganzzahlige, den Ruhezustand einschließende Quantelung ergibt. Auch die weitere Entwicklung der Quantentheorie der Elektronenrotation führte zu Widersprüchen. Um zum richtigen Werte der Term aufspaltung zu gelangen, mußte an Stelle der magnetischen Kraft nicht der entsprechende relativistische Ausdruck  $\mathfrak{H} + \frac{1}{c} [\mathfrak{E}v]$ , sondern  $\mathfrak{H} + \frac{1}{2c} [\mathfrak{E}v]$  gesetzt werden, was vom Standpunkt der Rotationsvorstellungen wohl unverständlich erscheint. Die Versuche von Frenkel\* und Thomas\*\*, diese Hälfte auf Grund einer Zeitmittelung abzuleiten, können nicht als genügend angesehen werden, da die Hälfte im Energieausdruck nicht auftritt. Es gelang zwar Darwin\*\*\*, mittels Einführung außer eines Skalars noch eines  $\psi$ -Vektors die richtigen Gleichungen aufzustellen, doch blieben auch bei ihm die Koeffizienten unbegründet, und die relativistische Invarianz wurde nicht erreicht. Dasselbe betrifft, natürlich, auch die Quaternionenmethode von Jordan\*\*\*\*.

\* J. Frenkel, ZS. f. Phys. 37, 243, 1926.

\*\* L. H. Thomas, Phil. Mag. 3, 1, 1927.

\*\*\* C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. (A) 116, 227, 1927.

\*\*\*\* P. Jordan, ZS. f. Phys. 41, 1, 1927.

Es scheint daher, daß das magnetische Moment des Elektrons nichts mit einer Rotation zu tun hat, sondern eine Erscheinung darstellt, welche ihren Ursprung viel tiefer im Wesen der Dinge findet. Wir hoffen gezeigt zu haben, daß dieser „*R*-Effekt“ wirklich aus sehr allgemeinen wellenmechanischen Vorstellungen abgeleitet werden kann und keineswegs eine spezielle Eigenschaft des Elektrons bildet. Das Verhalten des magnetischen Moments des Elektrons zum mechanischen hat keinen elektrodynamischen, sondern einen quantenhaften Charakter.

Zuletzt möchten wir noch erwähnen, daß auch Dirac\* in einer jüngst erschienenen Arbeit das Problem von demselben Ausgangspunkt aus behandelt. Beide Theorien scheinen, abgesehen von der völligen Verschiedenheit der Methoden und Gleichungen, äquivalent zu sein. Ihr genauerer Zusammenhang ist jedoch für uns unklar. Die Diracsche Theorie ist im Gegensatz zur unsrigen wohl schwer auf Mehrelektronenprobleme anwendbar.

2. Wir wollen nun zur Aufstellung der invarianten Wellengleichungen für den *R*-Effekt übergehen. Es entsteht die Grundfrage, was für Größen als Wellenfunktionen zu wählen sind. Wie ersichtlich, genügt ein einziger Skalar  $\psi$  gewiß nicht, da wir dann keine Termaufspaltung erhalten. Daher müssen noch andere tensorielle Größen eingeführt werden. Es scheint natürlich (daran erinnert auch das Beispiel des elektromagnetischen Feldes), nur antisymmetrische Tensoren zu gebrauchen. (Die Antisymmetrie soll sich dabei auf jedes Paar von Indizes beziehen.) Es wäre aber nicht sachgemäß, uns auf eine bestimmte Ordnung zu beschränken; wie weitere Überlegungen zeigen, müssen vielmehr alle möglichen antisymmetrischen Tensoren konstruiert werden. Für unsere vier Dimensionen ist offenbar die höchstmögliche Ordnung eines antisymmetrischen Tensors gleich vier.

Um die gewünschten Gleichungen aufzustellen, greifen wir zu den Methoden der gewöhnlichen Wellenmechanik. Von diesen wählen wir die Methode der Lagrangeschen Funktion, weil diese am einfachsten auch die Grundgrößen der Theorie, wie z. B. den „Stromvektor“, „Energietensor“ u. a., ergibt. Die fundamentale Rolle spielt dabei der dem

Geschwindigkeitsvektor  $u_k = \frac{1}{mc} \left( p_k - \frac{e}{c} \varphi_k \right)$  entsprechende Operator

$$u_k = \frac{1}{mc} \left( \frac{\hbar}{c} \nabla_k - \frac{e}{c} \varphi_k \right)^{**} \quad (\varphi_k = \text{Viererpotential des äußeren elektro-})$$

\* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 117, 610, 1928.

\*\*  $\hbar$  bezeichnet die durch  $2\pi$  dividierte Plancksche Konstante.

magnetischen Feldes). Er genügt, wie bekannt, allein ohne Heranziehen anderer Operatoren zur Aufstellung der Gleichungen.

Denken wir uns die Größe  $u_k$  nicht als Operator, sondern als einen einfachen Vektor, so darf die Lagrangesche Funktion als einfache Funktion der  $\psi_{ikl\dots}, \bar{\psi}_{ikl\dots}$ \* und  $u_k$  konstruiert werden. Um bei Variationen lineare Gleichungen zu erhalten, müssen wir von einem (in  $\psi$  und  $\bar{\psi}$ ) bilinearen Ausdruck ausgehen. Aus  $\psi, \bar{\psi}$  und  $u$  wollen wir nur folgende Skalare bilden\*\*:

$$\psi_{abc\dots}^{(N)} \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N)}$$

$$u_a \psi_{abc\dots}^{(N+1)} \bar{\psi}_{bc\dots}^{(N)}$$

und konjugiert komplex:

$$u_a \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N+1)} \psi_{bc\dots}^{(N)}$$

[( $N$ ) bezeichnet die Ordnung des Tensors  $\psi$ . Die Summation wird nur auf wesentlich verschiedene Glieder erstreckt; d. h. die Kombinationen, welche durch Vertauschung der Indizes entstehen, werden nicht mitgerechnet. Z. B. ist  $\psi_{ab}^{(2)} \bar{\psi}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \psi_{ab}^{(2)} \bar{\psi}_{ab}^{(2)}$ .] Die Forderung, beim Grenzübergang die Relation der klassischen Mechanik

$$u^2 + 1 = 0$$

zu bekommen, führt uns, wenn wir noch die Realität berücksichtigen, mit Notwendigkeit zu folgenden Werten der Koeffizienten:

$$L = \sum_N (-1)^N \{ \psi_{abc\dots}^{(N)} \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N)} + u_a \psi_{abc\dots}^{(N+1)} \bar{\psi}_{bc\dots}^{(N)} + u_a \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N+1)} \psi_{bc\dots}^{(N)} \}.$$

In der Operatorform ist offenbar

$$L = \sum_N (-1)^N \{ \psi_{abc\dots}^{(N)} \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N)} + \bar{\psi}_{bc\dots}^{(N)} (u_a \psi_{abc\dots}^{(N+1)} + \psi_{bc\dots}^{(N)} (\bar{u}_a \bar{\psi}_{abc\dots}^{(N+1)})) \}. \quad (1)$$

Diese Funktion wollen wir zuerst für die Gewinnung der Wellengleichungen benutzen. Die Variation nach  $\bar{\psi}^{(N)}$  ergibt:

$$\psi_{ik\dots}^{(N)} + u_a \psi_{aik\dots}^{(N+1)} - (u_\alpha \psi_{\beta\gamma\dots}^{(N-1)})_{ik\dots} = 0. \quad (2)$$

(Die griechischen Indizes  $\alpha\beta\gamma\dots$  bezeichnen, daß aus dem entsprechenden Ausdruck ein antisymmetrischer Tensor gebildet wird. Z. B. ist  $(u_\alpha \psi_{\beta\gamma})_{ikl} = u_i \psi_{kl} + u_k \psi_{li} + u_l \psi_{ik} - (u_\alpha \psi_\beta)_{ik} = u_i \psi_k - u_k \psi_i$ ). Die aufgeschriebenen Gleichungen (2) sollen die gewöhnliche Schrödingersche ersetzen. Wie wir später zeigen werden, enthalten sie in der Tat die Lösung des  $R$ -Problems.

\* Der Strich bezeichnet die konjugiert komplexe Größe.

\*\* Wie auch Dirac gebrauchen wir nicht höhere Potenzen von  $u$ .

Da die Zahl der Gleichungen offenbar zu groß ist, so entsteht die Frage nach der Auswahl der Lösungen. Zu diesem Zwecke müssen sie durch Nebenbedingungen vervollständigt werden. Lineare Nebenbedingungen sind ausgeschlossen, sie haben vielmehr etwa einen quadratischen Charakter. Ihre Ableitung bietet ziemliche Schwierigkeiten und ist uns bisher nicht gelungen.

Nun wollen wir zur Berechnung einiger gebräuchlicher Größen übergehen. Die Variation der Lagrangeschen Funktion nach dem Viererpotential ergibt für den Stromvektor bei geeigneter Normierung

$$s_i = \sum_N (-1)^N \{ \bar{\psi}_{ab}^{(N)} \dots \psi_{iab}^{(N+1)} \dots + \psi_{ab}^{(N)} \dots \bar{\psi}_{iab}^{(N+1)} \dots \}, \quad (3)$$

welcher Ausdruck in unserem Falle anzuwenden ist. In analoger Weise führt die Variation nach der Weltmetrik  $g_{ik}$  zum „Energieimpulstensor“.

Die  $R$ -Gleichungen (2) können noch in anderer Form dargestellt werden. Dazu eliminieren wir aus der  $(N-1)$ ten,  $(N)$ ten und  $(N+1)$ ten Gleichung die Größen  $\psi^{(N+1)}$  und  $\psi^{(N-1)}$ :

$$\begin{aligned} & \psi_{ik}^{(N)} \dots + u_a \{ -u_b \psi_{b\alpha ik}^{(N+2)} \dots + (u_\alpha \psi_{\beta\gamma}^{(N)})_{\alpha ik} \dots \} \\ & + \{ u_\alpha [u_\alpha \psi_{\alpha\beta\gamma}^{(N)} \dots - (u_\lambda \psi_{\lambda\nu}^{(N-2)})_{\beta\gamma} \dots] \}_{ik} \dots = 0 \end{aligned}$$

oder, unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$(u_\alpha \psi_{\beta\gamma} \dots)_{\alpha ik} \dots = u_\alpha \psi_{ik} \dots - (u_\alpha \psi_{\alpha\beta\gamma} \dots)_{ik} \dots, \quad (a)$$

$$\{ u_\alpha (u_\lambda \psi_{\lambda\nu} \dots)_{\beta\gamma} \dots \}_{ik} \dots = (u_\alpha u_\beta \psi_{\gamma\delta} \dots)_{ik} \dots \quad (b)$$

und der Antisymmetrie der  $\psi$

$$\begin{aligned} & (u^2 + 1) \psi_{ik}^{(N)} \dots + (u_\alpha u_b - u_b u_\alpha) \psi_{abik}^{(N+2)} \dots + \{ (u_\alpha u_\alpha - u_\alpha u_\alpha) \psi_{\alpha\beta\lambda}^{(N)} \dots \}_{ik} \\ & - \{ (u_\alpha u_\beta - u_\beta u_\alpha) \psi_{\gamma\delta}^{(N-2)} \dots \}_{ik} \dots = 0^*. \end{aligned}$$

Da noch

$$u_\alpha u_b - u_b u_\alpha = \frac{h}{i} \frac{e}{m^2 c^3} F_{ba},$$

wo  $F$  das elektromagnetische Feld bezeichnet, so erhalten wir endgültig:

$$\begin{aligned} D \psi_{ik}^{(N)} \dots - \frac{he}{2imc} \{ F_{ab} \psi_{abik}^{(N+2)} \dots - (F_{\alpha\alpha} \psi_{\alpha\beta\gamma}^{(N)} \dots)_{ik} \dots \\ - (F_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\delta}^{(N-2)} \dots)_{ik} \dots \} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

\* Das Nichtrechnen identischer Glieder soll nicht vergessen werden. Z. B. ist

$$\begin{aligned} & (F_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\delta}^{(2)})_{iklm} \\ & = F_{ik} \psi_{lm}^{(2)} + F_{il} \psi_{mk}^{(2)} + F_{im} \psi_{kl}^{(2)} + F_{lm} \psi_{ik}^{(2)} + F_{mk} \psi_{il}^{(2)} + F_{kl} \psi_{im}^{(2)}. \end{aligned}$$

Hier ist  $D = \frac{1}{2m} \left( \frac{h}{i} \nabla_a - \frac{e}{c} \varphi_a \right)^2 + \frac{mc^2}{2}$  der gewöhnliche Hamilton-Schrödingersche Operator.

Die Gleichungen (2), (3), (4) lösen den  $R$ -Effekt für den Fall des relativistischen Einkörperproblems. Wir sehen, daß keine speziellen Eigenschaften des Elektrons in Betracht gezogen wurden, so daß unsere Überlegungen für alle analogen Probleme gelten, wenn nur die äußeren Kräfte ein Potential haben. Hier von einer Rotation zu sprechen, ist völlig sinnlos, da die Gleichungen streng nur für einen Punkt gelten. Der Begriff eines rotierenden Punktes wäre wohl sonderbar!

Wir können aber das Problem noch allgemeiner fassen und auf den Gebrauch des gewöhnlichen vierdimensionalen Raumes verzichten. Wie auch in der klassischen Wellenmechanik kann die Vorstellung eines Koordinatenraumes beliebig vieler Dimensionen eingeführt werden. Dieser Weg sollte uns zur Lösung des  $R$ -Effekts im Mehrkörperproblem bringen. Der invariante Ausbau unserer Gleichungen gestattet ja ihre Anwendung im Falle der beliebigen Koordinatenzahlen mit der einzigen Bedingung, daß ein in den Momenten quadratischer Hamilton-Schrödingerscher Ausdruck vorhanden ist. Da aber diese letzte Bedingung im relativistischen Mehrkörperproblem leider nicht befriedigt wird, so müssen wir, um die gewünschte Verallgemeinerung zu schaffen, einen Umweg wählen. Wir wollen nämlich die Gleichungen in gespalteter Form schreiben, d. h. Raum und Zeit unabhängig voneinander betrachten. Es zerfällt dabei jeder Tensor  $\psi^{(N)}$  in zwei Teile: den Raumanteil  $X^{(N)}$  derselben Ordnung und den Zeitanteil  $\Theta^{(N+1)}$ , dessen Ordnung um Eins kleiner ist. So erhalten wir:

$$D X_{ik\dots}^{(N)} = \frac{eh}{2imc} \{ \mathfrak{H}_{ab} X_{abik\dots}^{(N+2)} - (\mathfrak{H}_{aa} X_{a\beta\gamma\dots}^{(N)})_{ik\dots} - (\mathfrak{H}_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta\dots}^{(N-2)})_{ik\dots} - \mathfrak{E}_a \Theta_{aik\dots}^{(N+1)} + (\mathfrak{E}_a \Theta_{\beta\gamma\dots}^{(N-1)})_{ik\dots} \}, \quad (5a)$$

$$D \Theta_{ik\dots}^{(N)} = \frac{eh}{2imc} \{ \mathfrak{H}_{ab} \Theta_{abik\dots}^{(N+2)} - (\mathfrak{H}_{aa} \Theta_{a\beta\gamma\dots}^{(N)})_{ik\dots} - (\mathfrak{H}_{\alpha\beta} \Theta_{\gamma\delta\dots}^{(N-2)})_{ik\dots} + \mathfrak{E}_a X_{aik\dots}^{(N+1)} - (\mathfrak{E}_a X_{\beta\gamma\dots}^{(N-1)})_{ik\dots} \}. \quad (5b)$$

( $\mathfrak{H}_{ik}$  bezeichnet das magnetische und  $\mathfrak{E}_i$  das elektrische Feld.)

Interessieren wir uns nur für die vom  $R$ -Effekt herrührenden Erscheinungen und nicht für die relativistischen Korrekturen, so entsteht die fundamentale Frage nach der Größenordnung aller eingehenden Größen. Eine nähere Untersuchung der Grundgleichungen (2) zeigt, daß  $\Theta^{(N)}$  und  $X^{(N)}$  von derselben Größenordnung sind; was die relative Größenordnung

der  $X$  bzw.  $\Theta$  untereinander betrifft, so ist sie bei Tensoren von gerader Ordnung ( $N = 0, 2, 4 \dots$ ), von der der ungeraden ( $N = 1, 3, 5 \dots$ ) um den Faktor  $\frac{v}{c}$  verschieden\*. Eine tiefergehende Betrachtung läßt vermuten, daß hier die geraden Ordnungen maßgebend sind.

Nun wollen wir die Methode der sukzessiven Annäherung anwenden. Als nullte Annäherung wählen wir die klassische Wellengleichung:

$$D X_{ik\dots}^{(2N)} = \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + e\varphi \right\} X_{ik\dots}^{(2N)} = 0. \quad (6)**$$

Für  $\Theta^{(2N-1)}$  mit derselben relativen Genauigkeit:

$$D \Theta_{ik\dots}^{(2N-1)} = \frac{e\hbar}{2imc} \{ \mathfrak{E}_a X_{aik\dots}^{(2N)} - (\mathfrak{E}_\alpha X_{\beta\gamma\dots}^{(2N-2)})_{ik\dots} \} \quad (7)$$

und eine analoge Gleichung für  $\Theta^{(2N+1)}$ . Differenzieren wir (6), so ergibt sich:

$$D \nabla_a X_{aik\dots}^{(2N)} = e \mathfrak{E}_a X_{aik\dots}^{(2N)},$$

$$D (\nabla_\alpha X_{\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots} = e (\mathfrak{E}_\alpha X_{\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots},$$

weil unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\mathfrak{E}_a = -\nabla_a \varphi$$

ist. Daraus folgt

$$\Theta_{ik\dots}^{(2N-1)} = \frac{\hbar}{2imc} \{ \nabla_a X_{aik\dots}^{(2N)} - (\nabla_\alpha X_{\beta\gamma\dots}^{(2N-2)})_{ik\dots} \}. \quad (8)$$

Jetzt können wir die Annäherung einen Grad weiter treiben. Das Einsetzen der Ausdrücke (8) für  $\Theta$  in (5) ergibt:

$$D X_{ik\dots}^{(2N)} = \frac{e\hbar}{2imc} \left\{ H_{ab} X_{abik\dots}^{(2N+2)} - (H_{\alpha\alpha} X_{\alpha\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots} + \frac{\hbar}{2imc} \mathfrak{E}_a \nabla_a X_{ik\dots}^{(2N)} - (H_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta\dots}^{(2N-2)})_{ik\dots} \right\}, \quad (9a)$$

wo

$$H_{ik} = \mathfrak{D}_{ik} + \frac{\hbar}{2imc} (\mathfrak{E}_i \nabla_k - \mathfrak{E}_k \nabla_i). \quad (9b)$$

Für einen Punkt haben wir es nur mit einem Skalar  $X^{(0)}$  und einem Vektor  $X^{(2)}$  (in drei Dimensionen ist, wie bekannt, ein antisymmetrischer

\*  $v$  bezeichnet die Größenordnung der Geschwindigkeit.

\*\*  $\varphi$  bezeichnet das skalare Potential.

Tensor zweiter Ordnung einem Vektor äquivalent) zu tun. Die Gleichungen (9a) und (9b) lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} DX^{(0)} &= \frac{eh}{2imc} \left\{ H_{ab} X_{ab}^{(2)} + \frac{1}{2c} \mathfrak{E}_a v_a X^{(0)} \right\} \\ &= \frac{eh}{2imc} \left\{ H X^{(2)} + \frac{1}{2c} \mathfrak{E} v X^{(0)} \right\}, \\ DX^{(2)} &= \frac{eh}{2imc} \left\{ [X^{(2)} H] + \frac{1}{2c} \mathfrak{E} v \cdot X^{(2)} - H X^{(0)} \right\}, \\ H &= \mathfrak{H} + \frac{1}{2c} [\mathfrak{E} v]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

( $v = \frac{h}{im} \nabla$  bezeichnet den Geschwindigkeitsoperator).

Die Gleichungen (10) sind im wesentlichen den Darwinschen\* äquivalent. Den einzigen Unterschied bilden nur die Glieder mit

$$\frac{eh}{4imc^2} \mathfrak{E} v = \frac{h}{4ic^2} \frac{dv}{dt} v = \frac{h}{8ic^2} \frac{d}{dt} v^2,$$

welche offenbar bei der Mittelung wegfallen. Das Erhalten der experimentell bestätigten Gleichungen kann als Rechtfertigung unserer Grundannahmen gelten. Wir möchten noch einmal betonen, daß alle die so viel diskutierten Koeffizienten sich automatisch ohne jede spezielle Zusatzhypothese ergaben. Die Rotation wird vollständig durch den  $R$ -Effekt ersetzt. Den unseren Gleichungen (9) entsprechenden Dichteaussdruck entnehmen wir aus (3):

$$\varrho = \frac{1}{c} s_0 = \frac{1}{2} \sum_N (-1)^N \{ X_{ab}^{(N)} \bar{\Theta}_{ab}^{(N)} + \bar{X}_{ab}^{(N)} \Theta_{ab}^{(N)} \} \quad (11)$$

oder, da annähernd

$$\begin{aligned} X^{(2N+1)} &= \Theta^{(2N+1)} = 0, \\ X^{(2N)} &= \Theta^{(2N)} \end{aligned}$$

gesetzt werden kann,

$$\varrho = \sum X_{ab}^{(2N)} \bar{X}_{ab}^{(2N)}. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck vertritt die Stelle des gewöhnlichen  $\psi \bar{\psi}$ .

Die Verallgemeinerung von (9) auf das Mehrelektronenproblem geschieht nun ohne weiteres. Um den Gleichungen wieder die invariante Form zu verleihen, wollen wir, der relativistischen Behandlungsweise analog, in unserem Koordinatenraum eine neue Metrik einführen. Da

\* Siehe C. G. Darwin, l. c., der bei ihm eingeführte Vektor entspricht  $-iX^{(2)}$ .

wir es, wie schon angedeutet war, mit keiner Elektroneneigenschaft, sondern mit einem eigentümlichen, sich auf alle Freiheitsgrade beziehenden Effekt zu tun haben, so müssen wir von dem Ausdruck für die Hamiltonsche Funktion ausgehen, ohne Rücksicht auf die Frage, was die darin eintretenden Momente bedeuten. In der Mechanik wird gezeigt, daß in den meisten Fällen die Hamiltonsche Funktion in der Form

$$\frac{1}{2} \sum \sum \gamma^{ab} (p_a - f_a) (p_b - f_b) + V \quad (13)$$

dargestellt werden kann ( $V$  und  $f$  hängen nur von den Koordinaten ab). Den Tensor  $\gamma^{ab}$  wählen wir als kontravarianten Grundtensor. Dann schreiben sich die  $R$ -Gleichungen (9) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2} \Delta - \frac{\hbar}{i} f^a \nabla_a + \frac{1}{2} f^a f_a + V \right\} X_{ik\dots}^{(2N)} \\ &= \frac{\hbar}{2i} \left\{ M^{ab} X_{abik\dots}^{(2N+2)} - (M^a_{\alpha} X_{a\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots} - \frac{\hbar}{2ic^2} \nabla^a V \nabla_a X_{ik\dots}^{(2N)} \right. \\ & \quad \left. - (M_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta\dots}^{(2N-1)})_{ik\dots} \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

wobei

$$M_{ik} = \nabla_i f_k - \nabla_k f_i + \frac{\hbar}{2ic^2} (\nabla_k V \nabla_i - \nabla_i V \nabla_k) \quad (14a)$$

ist.  $\Delta$  ist hier nicht als Summe der zweiten Ableitungen, sondern als der tensorielle Laplacesche Operator zu verstehen.

Beim Mehrelektronenproblem ist die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \gamma^{ab} p_a p_b = \frac{1}{2m} \sum_A p_A^2 + \frac{e^2}{m^2 c^2} \sum_A \sum_B p_A p_B \quad (15)$$

( $A, B =$  Elektronennummern,  $\eta =$  Momenten). Es ist für uns, wegen der gebrauchten Annäherung, nur die Änderung der  $\Delta$  wichtig, wenn sie auf einen Tensor  $X^{(2N)}$  wirkt, in bezug auf ihre Wirkung auf den Skalar  $X^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} (\Delta - \Delta_0) X_{ik\dots}^{(2N)} &= 2(\Gamma^a_{\alpha\beta} \nabla^b X_{a\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots} \\ &+ ((\nabla^b \Gamma^a_{\alpha\beta}) X_{a\beta\gamma\dots}^{(2N)})_{ik\dots} \quad (16) \end{aligned}$$

( $\Gamma^i_{kl}$  bezeichnen dabei die Christoffelschen Dreiindizesymbole). Diese Zusatzglieder entsprechen etwa der magnetischen Wechselwirkung der Elektronen.

Wegen der Identität aller Elektronen entsteht noch die Frage nach der Formulierung des Pauliprinzips. Er fordert hier wie gewöhnlich die

„Antisymmetrie“ aller Wellenfunktionen. Es muß aber dabei auch der Wechsel der Indizes in Betracht gezogen werden.

Eine nähere Betrachtung der berührten Fragen hoffen wir in einer weiteren Arbeit mitteilen zu können.

Wir freuen uns, auch an dieser Stelle unserem Freund Prof J. Frenkel für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stetigen fördernden Diskussionen unseren wärmsten Dank aussprechen zu können. Wir möchten ferner Herrn Prof. V. Bursian für manche wertvollen Bemerkungen herzlich danken.

Leningrad, Phys.-Math. Institut der Akademie der Wiss.  
Phys.-Techn. Röntgeninstitut, Februar 1928.

---