

## Bemerkungen über Quantenstatistik.

Von **D. Iwanenko** und **L. Landau** in Leningrad.

(Eingegangen am 12. Februar 1927.)

Es wird gezeigt, daß es keine hinreichenden Gründe für die Aufstellung der Diracschen Statistik gibt. Der Ansatz von Planck ist vielleicht der einzige, der bei konsequenter Anwendung die richtige Strahlungsformel ergibt.

§ 1. Für ein System, das aus zwei gleichartigen, beliebig stark gekoppelten Teilen (z. B. zwei Elektronen im Heliumatom) besteht, ist die Schrödingersche Gleichung symmetrisch in bezug auf die Koordinaten der beiden Teile. Im Bereich des diskreten Termspektrums entspricht jedem Eigenwert im allgemeinen nur eine einzige Eigenfunktion (die Entartung nehmen wir als aufgehoben an). Wegen der Symmetrie der Wellengleichung ergibt die Vertauschung der Koordinaten beider Teilsysteme wieder eine Lösung. In Anbetracht der Linearität der Gleichung können wir behaupten:

$$v(1:2) = a v(2:1) \quad (1)$$

(1, 2 bezeichnen die Koordinaten des ersten bzw. zweiten Systems,  $a$  ist eine noch unbestimmte Konstante).

Setzen wir „2“ anstatt „1“ und umgekehrt, so folgt:

$$v(2:1) = a v(1:2) = a^2 v(2:1); \quad (2)$$

$$a^2 = 1; \quad a = \pm 1.$$

Es gibt also zwei Arten von Eigenfunktionen, symmetrische ( $a = +1$ ) und antisymmetrische ( $a = -1$ ). Da jede physikalische Größe (Funktion „ $F_{\text{sym}}$ “) in den Koordinaten der beiden Systeme symmetrisch sein muß, so interkombinieren die ihnen entsprechenden Eigenwerte nicht:

$$\left( \int F_{\text{sym}} v_{\text{sym}} \bar{v}_{\text{ant}} d\tau = 0 \right).$$

Diese Resultate wurden von Heisenberg<sup>1)</sup> als erste Annäherung gefunden: wir sehen jedoch, daß sie auch in beliebiger Annäherung gelten. Die Verallgemeinerung auf mehrere Systeme ergibt eine Reihe nicht interkombinierender Eigenfunktionen, darunter symmetrische und antisymmetrische und andere, welche entarteten Eigenwerten entsprechen.

§ 2. In seiner unlängst erschienenen Arbeit<sup>2)</sup> schlägt Dirac vor, aus allen Lösungen der Schrödingerschen Gleichung nur antisymmetrische

<sup>1)</sup> W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **38**, 411, 1926; siehe auch W. Wigner, ZS. f. Phys. **40**, 492, 1927.

<sup>2)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 661, 1926; siehe auch E. Fermi, ZS. f. Phys. **36**, 902, 1926; R. H. Fowler, Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 432, 1926; W. Heisenberg, l. c.; W. Wigner, l. c.

auszuwählen. Die Notwendigkeit dieser Annahme begründet er durch Paulis Verbot äquivalenter Bahnen. Dasselbe besagt aber nur folgendes<sup>1)</sup>: Es gibt im Atom keine zwei Elektronen, für welche alle vier Quantenzahlen gleich sind. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips auf eine andere Gesamtheit der Quantenzahlen erscheint zweifelhaft. Es kann z. B. das Heliumspektrum aus antisymmetrischen Eigenfunktionen (im Sinne von drei Quantenzahlen für jedes Elektron) nicht konstruiert werden, vielmehr ist man genötigt, auch symmetrische zu gebrauchen [Parhelium]<sup>2)</sup>. In allen Fällen, wo das rotierende Elektron nicht berücksichtigt wird, findet das Paulische Prinzip keine Anwendung: es ist daher für die allgemeinen Probleme der Statistik nicht von Bedeutung.

Wir glauben daher, daß die Diracsche Begründung der „antisymmetrischen“ Statistik nicht stichhaltig ist: eine Auswahl der Lösungen steht außerdem im Widerspruch mit den Grundlagen der Wellenmechanik.

§ 3. Für die Aufstellung einer konsequenten Statistik muß berücksichtigt werden, daß wir es in der Wellenmechanik schon mit einer Statistik zu tun haben, denn sie ergibt nur Mittelwerte über eine Menge gleichartiger Systeme (die Einführung stationärer Zustände ist keineswegs notwendig). Das Ziel einer Quantenstatistik soll also die Bestimmung der Größen  $a_n^2$  in  $\psi = \sum a_n \psi_n$  sein.

Die Betrachtungen Einsteins, in die Wellenmechanik übertragen, zeigen, daß der Plancksche Ansatz

$$a_n^2 : a_m^2 = e^{-\frac{E_n}{kT}} : e^{-\frac{E_m}{kT}} \quad (3)$$

wirklich zur richtigen Strahlungsformel führt. Alle anderen Formen der Quantenstatistik ergeben die Plancksche Strahlungsformel bestenfalls nur bei der Anwendung von speziellen Vorstellungen (Lichtquanten in der Boseschen Statistik), welche in gewissem Sinne der Wellenmechanik widersprechen.

Es sei uns gestattet, an dieser Stelle Herrn Professor V. Bursian für manche wertvollen Bemerkungen und das Durchsehen des Manuskripts herzlich zu danken.

Leningrad, Februar 1927.

Nachtrag bei der Korrektur. Inzwischen ist eine dieselbe Frage berührende Notiz von P. Ehrenfest (Nature und Naturwiss., Februar 1927) erschienen. Herr Ehrenfest meint, die physikalischen Gründe für die Erweiterung des Paulischen Verbots im Prinzip der

<sup>1)</sup> W. Pauli, ZS. f. Phys. **31**, 765, 1925.

<sup>2)</sup> W. Heisenberg, l. c.

Undurchdringlichkeit der Moleküle zu finden. Ehrenfest fordert das Nullwerden von  $\psi$  als Bedingung der Undurchdringlichkeit. Schon das erste Beispiel der Wand des Gefäßes zeigt uns, daß diese Bedingung nicht notwendig ist, und in diesem Falle durch  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  ersetzt werden muß. Es soll nämlich nicht die „Dichte“ ( $\rho = \psi \bar{\psi}$ ), sondern die Normalkomponente der „mittleren“ Geschwindigkeit am Rande verschwinden. Die letzte Forderung ergibt unter Berücksichtigung von

$$\rho v = \frac{h}{2im} (\bar{\psi} \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \bar{\psi})^1$$

$$v = \frac{h}{2im} \left( \frac{\text{grad } \psi}{\psi} - \frac{\text{grad } \bar{\psi}}{\bar{\psi}} \right)^1$$

oder für die Normalkomponente

$$V_n = \frac{h}{2im} \left( \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{\bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \right).$$

woraus die obere Relation folgt. Die „Diagonalforderung“ von Ehrenfest ist also unhaltbar: sie widerspricht vielmehr den elementaren Ausführungen der Wellenmechanik. Zum Beispiel ist im Falle des Wasserstoffatoms  $\psi(0,0,0)$  (Koordinatenursprung!) nicht immer gleich Null. Sind doch die Elektronen und Protonen mehr „durchdringlich“ als Moleküle?

Die Verhältnisse werden noch klarer, wenn wir die Ehrenfest'schen Überlegungen auf den Fall von zwei Molekülen mit verschiedenen Massen anwenden. Die allgemeine Lösung der Schrödingerschen Gleichung ist dann

$$\psi(x_1, x') = \sum_{nm} a_{nm} \chi_n(x) \chi'_m(x') e^{-\frac{i}{\hbar} (\epsilon_n - \epsilon'_m) t},$$

wo  $\chi_n$ ,  $\epsilon_n$  und  $\chi'_m$ ,  $\epsilon'_m$  die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte für die zwei Moleküle darstellen. Hier sind im allgemeinen wegen der Ungleichheit der Massen alle Terme einzig (keine Entartung). Die Bedingung  $\psi(x_1, x) = 0$  führt zu  $a_{nm} = 0$  bei beliebigen  $n$  und  $m$  oder stets  $\psi = 0$ ! Die Moleküle von verschiedenen Massen können also in demselben Gefäß nicht koexistieren! Oder man müßte annehmen, daß die kleinste Massendifferenz die Moleküle für einander durchdringlich macht: das wäre wohl wunderbar! Zum Schluß wollen wir bemerken, daß die Undurchdringlichkeitsbedingung schon wegen der angenommenen Punktförmigkeit der Moleküle identisch erfüllt ist<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **81**, 109, 1926.

<sup>2)</sup> Inzwischen hat Ehrenfest selbst (Naturw., März 1927) seine Betrachtungen zurückgenommen.