Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Косов Егор Дмитриевич

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОБРАЗЫ И СДВИГИ МЕР НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Богачев

Москва, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке функционального анализа, теории меры, теории вероятностей и выпуклой геометрии. Рассмотренные задачи важны не только для указанных областей, но и для бесконечномерного анализа и математической физики (см. обзор А.И. Кириллова [18]). Главным объектом исследования данной работы выступает счетно-аддитивная мера, заданная на сигма-алгебре борелевских множеств некоторого локально выпуклого пространства. Основные результаты работы относятся к области теории меры, хотя из-за специфики задач иногда и бывает более удобно использование вероятностной терминологии. Работу можно разделить на три основных части, соответствующие трем основным главам (помимо вспомогательной первой главы), причем эти части связаны идейно и технически.

Во второй главе исследуются вопросы, связанные с носителями мер на банаховых пространствах. Подобные вопросы изучались в работах многих авторов, в том числе В.В. Булдыгина [12], Е.И. Островского [23], Дж. Квелбса [54], Х. Сато [66], В.И. Богачева [4], [36], [6], [10]. В последних двух книгах приведена обширная библиография по современным исследованиям данных вопросов. В работе [36] было показано, что для меры, обладающей сильным моментом некоторого фиксированного порядка $r > 0$, т. е. такой меры, для которой норма пространства интегрируема в степени r, можно найти компактно вложенное сепарабельное рефлексивное банахово пространство (уже с некоторой другой нормой) полной меры, сужение исходной меры на которое также будет обладать сильным моментом того же порядка r. Нетрудно построить пример меры на сепарабельном банаховом пространстве, не обладающей сильным моментом, для которой каждый непрерывный линейный функционал будет интегрируем в некоторой фиксированной степени. Меры с указанным свойством называются мерами со слабым моментом. Таким образов, возникает вопрос об обобщении приведенного выше результата на меры со слабым моментом. Оказывается, что без дополнительных предположений аналог приведенного выше свойства для мер, обладающих слабым моментом, может не выполняться, в связи с чем во второй главе диссертации приводятся необходимые и достаточные условия для мер со слабым моментом фиксированного порядка, гарантирующие наличие компактно вложенного сепарабельного рефлексивного подпространства полной меры, для которого данная мера будет также обладать слабым моментом исходного порядка. В частности, в случае гильбертова пространства H и меры μ со слабым моментом второго порядка, наличие компактно вложенного гильбертова пространства L полной меры, на котором сужение исходной меры также будет обладать слабым моментом второго порядка, равносильно компактности ковариационного оператора K_μ меры μ, определяемого равенством

$$(K_\mu u, v) = \int_H (u, x)(x, v)\mu(dx), \quad u, v \in H.$$

Третья глава посвящена исследованию свойств множеств допустимых сдвигов мер (т. е. множеств таких векторов, сдвиги меры на которые не сингулярны или эквивалентны исходной мере). Такие множества относительно хорошо изучены в случае продакт-мер (см. работы Л. Шеппа [67], Дж. Фельдмана [46], С. Какутани [51], С.Д. Чаттержи и В. Мандрекара [44], С.Г. Бобкова [34], Р. Дадли [45]). В частности, в первых двух указанных работах получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сдвиг на всякий вектор из ℓ^2 был эквивалентен исходной мере. В диссертации получены обобщения этого результата: приведены просто формулируемые необходимые и достаточные условия эквивалентности сдвига на всякий вектор из ℓ^q, заключающиеся в принадлежности корня из плотности сомножителя пространству Никольского $B^{q/2}_{2,\infty}$ функций дробной дифференцируемости. Также хорошо известно, что пространство сдвигов в случае гауссовской меры совпадает с пространством Камерона – Мартина этой меры. Так как гауссовские меры являются подклассом логарифмически вогнутых мер, то представляет интерес исследование множеств допустимых сдвигов и таких мер. Класс логарифмически вогнутых мер (которые также называют выпуклыми) был введен и впервые рассмотрен в работах А. Прекопы [64], Л. Лейндлера [56] и К. Борелля [37], [38] и затем исследовался в работах многих авторов, в том числе Е.П. Круговой [19], [20], Д. Фейеля и А.С. Устюнеля [47], В.И. Богачева и А.В. Колесникова [8], Л. Амброзио, Дж. Да Прато, Б. Голдиса и Д. Паллары [31], [32]. Основными примерами логарифмически вогнутых мер служат равномерные распределения на выпуклых компактах в $\mathbb{R}^n$, а также гауссовские меры (необязательно на конечномерном пространстве). Поэтому исследование логарифмически вогнутых мер тесно связано как с геометрическими и аналитическими вопросами, так и с вопросами теории вероятностей. Для логарифмически вогнутых мер в диссертации доказано, что множество их несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством. Отметим, что последнее свойство может не выполняться в случае продакт-мер.

В четвертой главе основным объектом исследования выступают измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами. В отношении геометрических вопросов подобные исследования проводились Ж. Бургеном [41], Б. Клартагом [53], Г. Паоурисом [63]. В этих работах рассматривались линейные функционалы или квадрат евклидовой нормы, а также исследовалась так называемая гипотеза гиперплоскости (hyperplane conjecture, см. [58], [33] и [49]). В вопросах стохастического анализа и теории вероятностей измеримые многочлены появляются как кратные стохастические интегралы по винеровскому процессу, а их изучение на пространствах с гауссовскими мерами началось с классических работ Н. Винера [68], Р. Камерона и У. Мартина [42], К. Ито [50]. Позже, в более абстрактном виде, они изучались во многих работах различных авторов, в том числе А.М. Вершика [14], О.Г. Смолянова [28], А.В. Скорохода [16], [27], Ю.А. Давыдова [17], В.И. Богачева [5]. В последние годы одним из основных направлений исследования измеримых многочленов на пространствах с вероятностными мерами стало изучение связи различных норм и метрик как на пространстве самих многочленов фиксированной степени, так и на пространстве распределений, полученных как образы мер при полиномиальных отображениях. В работах Ю.В. Прохорова, В.И. Хохлова [24], [25], [26], С.Г. Бобкова [35], [3] исследовались неравенства типа Хинчина об эквивалентности различных L^p-норм на пространстве многочленов фиксированной степени на $\mathbb{R}^n$ с заданной логарифмически вогнутой мерой. Одним из интересных первых результатов в данном направлении было утверждение об эквивалентности среднего геометрического и среднего арифметического для логарифмически вогнутой меры, которое получил Р. Латала [55]. Вопросы о связи различных метрик на пространстве распределений многочленов фиксированной степени изучались И. Нурдиным, Д. Нуалартом, Г. Поли и Дж. Пеккати (см. [59], [60], [61], [62]). Эти вопросы тесно связаны с различными предельными теоремами для элементов винеровского хаоса фиксированного порядка. Отметим также работу Ф. Гётце, Ю.В. Прохорова, В.В. Ульянова [15] о поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях.

Важные вопросы о свойствах многочленов и их распределений связаны с оценками меры больших и малых значений. В случае отрезка оценка сверху меры малых значений многочлена следует из классического неравенства Ремеза [65] (см. также [40]):

$$\max_{[0,1]}|f| \leqslant \left(\frac{4}{|J|}\right)^d \sup_J |f|,$$

где f — многочлен степени d, а $J \subset [0,1]$. Взяв в данном неравенстве $J = \{x \in [0,1] \colon |f(x)| \leqslant \varepsilon\}$, получаем оценку

$$(\max_{[0,1]}|f|)^{1/d} \cdot |\{x \colon |f(x)| \leqslant \varepsilon\}| \leqslant 4\varepsilon^{1/d}.$$

Многомерное обобщение неравенства Ремеза и оценки малых значений в случае выпуклого компакта в $\mathbb{R}^n$ были исследованы в работе [11]. Для многочленов на пространстве с логарифмически вогнутыми мерами (которые обобщают ограничение меры Лебега на выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$)

подобные оценки меры малых значений изучались в работах Ф.Л. Назарова, М.Л. Содина и А.Л. Вольберга [22], а также А. Карбери и Дж. Райта [43]. Данные результаты в частности дают независящую от размерности пространства оценку меры малых значений многочлена фиксированной степени, что позволяет использовать их и в бесконечномерной ситуации. В диссертации доказываются нижние оценки на меру уклонения многочлена от его среднего значения (интеграла), что является в некотором смысле обратным неравенством к неравенству Карбери – Райта. В частности для многочлена второй степени на $\mathbb{R}^n$ и произвольной логарифмически вогнутой меры μ при достаточно малых ε получено неравенство

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}^n} |f - m_f| d\mu\Bigr) \cdot \mu(|f - m_f| \leqslant \varepsilon) \geqslant C\varepsilon,$$

где f — многочлен второй степени, $m_f = \displaystyle\int f\,d\mu$ — среднее значение функции f.

Цель работы.

• Для ограниченной борелевской меры на сепарабельном банаховом пространстве, обладающей слабым моментом порядка p, исследовать вопросы существования компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, на котором данная мера также обладает слабым моментом порядка p.

• Исследовать свойства множеств допустимых сдвигов для различных классов мер на локально выпуклых пространствах.

• Исследовать нижние оценки меры уклонения многочленов фиксированной степени от их средних на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Для сепарабельного банахова пространства и ограниченной борелевской меры на нем со слабым моментом порядка p получены необходимые и достаточные условия существования компактно вложенного в это

пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, сужение исходной меры на которое также обладает слабым моментом порядка p.

2. Для продакт-мер получены обобщения классического результата Шеппа на случай сдвигов на вектора из пространства ℓ^q.

3. Для логарифмически вогнутых мер установлено, что множество несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством.

4. Для гауссовских мер получены нижние оценки мер уклонений многочленов произвольной степени от их средних. Для логарифмически вогнутых мер такие оценки получены для многочленов второй степени.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете и Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях.

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2012, 2015 г.),

2. Международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия»

(Москва, МГУ, 2014 г.),

3. 3-я международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия» (Германия, Ульм, 2015 г.),

4. Международная конференция “Infinite-dimensional analysis (the 19th ISE)”, Казальмаджоре, Италия (2016 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, С.В. Шапошникова и Н.А. Толмачева (МГУ, многократно, 2012–2016 г.),

2. Научно-исследовательский семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б.С. Кашина и академика РАН С.В. Конягина (МГУ, 2015 г.)

3. Международный научно-исследовательский семинар “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия (многократно, 2014–2017 г.),

4. Научно-исследовательский семинар в Пекинском Нормальном университете, Китай (2014, 2015 г.),

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (см. [69], [70], [73], [72], [71], последние три из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объем диссертации составляет 64 страницы.

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Первая глава данной работы является вводной. Она содержит необходимые определения, обозначения и уже известные результаты, которые используются в остальных трех главах работы. Вопросы, обсуждаемые во второй и третьей главе, имеют бесконечномерную природу, в то время как результаты последней главы нетривиальны уже в конечномерном случае.

Во второй главе исследуются свойства борелевских мер со слабыми моментами на банаховых пространствах. А именно: для ограниченной борелевской меры на сепарабельном банаховом пространстве, обладающей слабым моментом порядка p, доказываются необходимые и достаточные условия наличия компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, на котором данная мера также обладает слабым моментом порядка p. Для меры со слабым моментом порядка два это свойство связано с компактностью ковариационного оператора (определение будет дано во второй главе). Основные результаты этой главы заключены в следующих трех теоремах.

Теорема 2.1.1. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X, причем $X^* \subset L^1(\mu)$. Тогда следующие условия равносильны*:

(i) *существует компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры с $E^* \subset L^1(\mu)$,*

(ii) *для всякого μ-измеримого множества A найдется такой элемент $h_A \in X$, что*

$$\int_A f d\mu = f(h_A) \quad \text{для всех } f \in X^*.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E полной меры с $E^* \subset L^2(\mu)$ равносильно тому, что ковариационный оператор меры μ компактен.*

Теорема 2.3.1. *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Если ковариационный оператор меры μ компактен, то существует компактно вложенное в X гильбертово пространство E полной меры, для которого $E^* \subset L^2(\mu)$. Обратно, из существования такого пространства следует компактность ковариационного оператора.*

Разумеется, эти утверждения остаются в силе для ограниченных неотрицательных мер (необязательно вероятностных).

В **третьей главе** исследуются свойства множеств допустимых сдвигов продакт-мер и логарифмически вогнутых мер. Для борелевской меры μ на локально выпуклом пространстве X символом μ_h обозначим сдвиг меры μ: $\mu_h(A) := \mu(A-h)$. Через $\widetilde{M}(\mu)$ обозначим множество всех несингулярных сдвигов меры μ (векторов h, для которых меры μ_h и μ не взаимно сингулярны), а через $M(\mu)$ — множество всех эквивалентных сдвигов меры μ (векторов h, для которых меры μ_h и μ эквивалентны).

В первом параграфе третьей главы обобщаются классические результаты Шеппа [67] о необходимом и достаточном условии включения ℓ^2 в $M(\mu)$ на случай ℓ^q вместо ℓ^2. Ответ дается в терминах принадлежности корня из плотности сомножителя определенному классу Никольского.

Теорема 3.1.3. *Пусть $\nu = f(x)dx$ — вероятностная мера на прямой, где $f > 0$ п.в., $\mu = \nu^\infty$. Тогда если $1 \leqslant q < 2$, то условие*

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{f(x+s)} - \sqrt{f(x)} \right|^2 dx \leqslant C s^q$$

равносильно тому, что $\ell^q \subset M(\mu)$.

В случае логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве доказано, что множество $M(\mu)$ является линейным пространством, а множество $\widetilde{M}(\mu)$ является выпуклым множеством.

Теорема 3.2.2. *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X. Тогда множество векторов $M(\mu)$ является линейным подпространством в X.*

Напомним, что интегралом Хеллингера вероятностных мер μ и ν называется величина

$$H(\mu, \nu) = \int \sqrt{\varrho_\mu \varrho_\nu}\, d\lambda$$

для какой-либо меры λ, относительно которой данные меры заданы плотностями ϱ_μ и ϱ_ν соответственно (например, можно взять $\lambda = (\mu + \nu)/2$; от выбора λ это число не зависит).

Теорема 3.2.3. *Пусть* μ *логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве* X. *Тогда функция* $H(h) = H(\mu, \mu_h)$ (*интеграл Хеллингера мер* μ *и* μ_h) *является логарифмически вогнутой, т. е.*

$$H(th + (1-t)q) \geqslant H^t(h)H^{1-t}(q) \ \forall \ t \in [0,1].$$

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.2.4. *Пусть* μ — *логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве* X. *Тогда множество* $\widetilde{M}(\mu)$ *выпукло.*

В четвертой главе рассматриваются измеримые многочлены на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами. В этой главе исследуется поведение многочлена в окрестности его среднего (интеграла или математического ожидания по вероятностной терминологии). Оценку сверху на меру множества, на котором многочлен близок к своему среднему, можно получить из неравенства Карбери – Райта из работы [43], поэтому нас будут интересовать нижние оценки меры данного множества. В четвертой главе оценки такого типа получены в случае гауссовской меры и многочлена произвольной степени, а также в случае произвольной логарифмически вогнутой меры, но многочлена степени два. В силу независимости полученных оценок от размерности они также остаются верными и для случая меры на бесконечномерном пространстве.

В формулировках нижеследующих результатов через m_f и σ_f^2 обозначены математическое ожидание и дисперсия случайной величины f соответственно. В случае гауссовской меры получена следующая теорема.

Теорема 4.1.3. *Пусть* γ — *стандартная гауссовская мера на* $\mathbb{R}^n$. *Для всякого натурального числа* d *найдется такое число* $L(d) > 0$, *что для всякого многочлена* f *степени* d *верна оценка*

$$\gamma(x\colon |f(x) - m_f| \leqslant \sigma_f s) \geqslant L(d)s|\ln s|^{-d/2} \quad \text{\textit{при} } 0 \leqslant s \leqslant 1/2.$$

Для произвольной логарифмически вогнутой меры получен следующий результат.

Теорема 4.2.3. *Существует такая положительная абсолютная постоянная* C_1, *что для всякого полинома* f *второй степени на* $\mathbb{R}^n$ *и всякой* *логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\varepsilon\mu(x\colon f(x)\leqslant -\varepsilon)\mu(x\colon f(x)\geqslant \varepsilon)\leqslant C_1\mu(x\colon |f(x)|<\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n}|f|d\mu.$$

Из этой теоремы вытекает следующая оценка на меру уклонения многочлена.

Следствие 4.2.4. *Существует такая положительная абсолютная постоянная C_2, что для всякого полинома f второй степени на $\mathbb{R}^n$ и всякой логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\mu(x\colon |f(x)-m_f|<\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n}|f-m_f|d\mu\geqslant C_2\varepsilon,\ \text{если } \varepsilon\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f-m_f|d\mu.$$

В последнем параграфе четвертой главы в связи с вопросом об условиях существования совместной плотности распределения нескольких измеримых многочленов второго порядка строится пример, показывающий, что теорема 2.1 из работы [71] точна. Приведем здесь саму эту теорему.

Теорема 4.3.1. *Пусть $A_1,\ldots,A_k$ — линейно независимые измеримые линейные операторы на пространстве с гауссовской мерой, действующие в пространство Камерона–Мартина этой меры. Тогда либо векторы $\widehat{A}_1x,\ldots,\widehat{A}_kx$ линейно независимы почти всюду, либо существует конечномерный ограниченный линейный оператор D ранга не выше $k-1$, являющийся нетривиальной линейной комбинацией операторов $A_1,\ldots,A_k$.*

Предложение 4.3.3. *В приведенной теореме нельзя добиться меньшего ранга оператора D.*

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Глава 1

Определения, обозначения и вспомогательные сведения

В этой главе даются основные определения и обозначения, используемые в работе, а также приводятся известные результаты, применяемые при доказательствах основных теорем работы.

1.1 Определения и обозначения

Основным объектом, рассматриваемым в данной работе, является пара (X, μ), где X — банахово (или более общее локально выпуклое) пространство, а μ — борелевская радоновская вероятностная мера на X. Напомним, что борелевская вероятностная мера μ называется радоновской, если для всякого борелевского множества A и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset A$, что $\mu\big(A \setminus K_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon$. Отметим, что на полном сепарабельном пространстве любая борелевская мера является радоновской. Через X^* будем обозначать сопряженное к X пространство, т. е. пространство всех непрерывных линейных функционалов на X.

Напомним, что образ меры μ на пространстве X под действием измеримого отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ задается равенством

$$\mu \circ f^{-1}(A) = \mu(x:\, f(x) \in A) \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. Через μ_h обозначим сдвиг меры μ на вектор h, т. е. $\mu_h(A) = \mu(A - h)$ для всех борелевских множеств A.

Пусть μ и ν — две вероятностные меры на некотором измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$. Мера μ называется абсолютно непрерывной относительно меры ν, если $\mu(A) = 0$ для всякого множества $A \in \mathcal{A}$ с $\nu(A) = 0$. Обозначение: $\mu \ll \nu$. Меры μ и ν называются эквивалентными, если $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$. Обозначение: $\mu \sim \nu$. Меры μ и ν называются сингулярными, если существует такое множество $\Omega \in \mathcal{A}$, что $\mu(\Omega) = 0$ и $\nu(X \setminus \Omega) = 0$. Обозначение: $\mu \perp \nu$. Пусть также $\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}$ обозначает расстояние по вариации между мерами μ и ν, т. е.

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} := 2 \sup\{|\mu(A) - \nu(A)|, A \in \mathcal{A}\}.$$

В третьей и четвертой главах мы будем иметь дело с более конкретными классами мер на локально выпуклых пространствах. Пусть даны вероятностные пространства $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, тогда на произведении этих пространств $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, наделенном σ-алгеброй $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, можно задать меру $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$, называемую произведением мер μ_i или продакт-мерой (см. [6, §3.5] и [7, §4.1]). Мы в основном будем рассматривать продакт-меры μ с $X_i = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_i = \nu$ для всех i, где ν — некоторая фиксированная борелевская мера на вещественной прямой. Для краткости такие меры мы будем обозначать через $\mu = \nu^{\infty}$, так как в данном случае мера μ является счетной степенью одной конкретной меры. Такие меры соответствуют распределению, заданному последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин.

Вторым основным классом мер, рассматриваемым в данной работе, являются логарифмически вогнутые (иногда еще называемые выпуклыми) и гауссовские меры. Мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если существует такое аффинное подпространство, что мера μ задается плотностью вида e^{-G} относительно лебеговской меры на этом аффинном подпространстве, а функция G является выпуклой (возможно с бесконечными значениями). Борелевская радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется логарифмически вогнутой, если ее образ под действием всякого конечномерного непрерывного линейного оператора является логарифмически вогнутой мерой в конечномерном пространстве. Есть также другое эквивалентное определение: борелевская радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется логарифмически вогнутой если для каждой пары борелевских множеств A, B выполнено неравенство

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t},$$

для каждого числа $t \in [0, 1]$ (см. [37], [38], [7]).

Одним из примеров логарифмически вогнутых мер может служить равномерное распределение на выпуклом компакте в $\mathbb{R}^n$. Другим важным подклассом класса логарифмически вогнутых мер являются гауссовские меры. Напомним, что мера γ на банаховом пространстве X называется гауссовской, если для всякого элемента $f \in X^*$ мера $\gamma \circ f^{-1}$ является гауссовской мерой на прямой, т. е. либо является дираковской мерой в некоторой точке, либо имеет плотность вида

$$(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-|x-a|^2/2\sigma^2\right)$$

для некоторых чисел a и σ (см. [5]). Гауссовская мера называется центрированной, если число a в формуле выше равно нулю для любого линейного функционала $f \in X^*$. Стандартной гауссовской мерой на $\mathbb{R}^n$ будем называть меру, задаваемую плотностью $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, где $|\cdot|$ — стандартная евклидова норма.

Также нам понадобится пространство $\mathcal{P}_d(\mu)$ измеримых многочленов степени d. В этой работе мы будем использовать следующее определение данного пространства. Измеримая по мере μ функция f принадлежит классу $\mathcal{P}_d(\mu)$ если найдутся такая последовательность конечных наборов непрерывных линейных функционалов $\{\ell_{1,1}, \ldots, \ell_{k_n,n}\}$ и такая последовательность многочленов $\{f_n\}$ степени не выше d на $\mathbb{R}^{k_n}$, что последовательность функций $f_n(\ell_{1,1}(\cdot), \ldots, \ell_{k_n,n}(\cdot))$ сходится к функции f в $L^2(\mu)$. Отметим, что в силу теоремы 1.2.5, приводимой далее, для логарифмически вогнутых мер неважно, в каком L^p брать замыкание в предыдущем определении.

Для нормы функции f в пространстве $L^p(\mu)$, равной

$$\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

мы будем использовать обозначение $\|f\|_{L^p(\mu)}$ или $\|f\|_p$ для сокращения записи, если из контекста понятно о какой мере идет речь. Через $\|f\|_0$ обозначим величину

$$\exp\left(\int \ln|f|d\mu\right) = \lim_{r\to 0}\|f\|_r.$$

Отметим, что в силу теоремы 1.2.6 для логарифмически вогнутой меры всякий многочлен лежит во всех пространствах L^p (см. также [37]). Для μ-измеримой функции f положим (если эти величины существуют)

$$m_f := \int f d\mu \quad \text{— математическое ожидание случайной величины } f,$$

$$\sigma_f^2 := \int (f - m_f)^2 d\mu \quad \text{— дисперсия случайной величины } f,$$

$$\alpha_f := \int |f - m_f| d\mu.$$

Для множества V в линейном пространстве X через $\langle V\rangle$ обозначим линейное подпространство, порожденное этим подмножеством (его линейную оболочку). Если V — выпуклое центрально-симметричное множество, то зададим функционал Минковского этого множества равенством

$$\|x\|_V := \inf\{t > 0\colon\ x \in tV\}.$$

Отметим, что функционал Минковского выпуклого центрально-симметричного множества V является полунормой на пространстве $\langle V\rangle$ (см. [9, теорема 6.3.6]). Обозначим через E_V пространство $\langle V\rangle$ с нормой $\|\cdot\|_V$.

Для множества A через I_A обозначим индикатор этого множества, т. е. $I_A(x) = 0$, при $x \notin A$ и $I_A(x) = 1$, при $x \in A$.

Напомним, что функция называется полунепрерывной снизу, если

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Функция называется полунепрерывной сверху, если $\limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$. Таким образом, индикатор открытого множества — полунепрерывная снизу функция, а индикатор замкнутого — сверху.

Символами типа C, C_1, C_2 и c, c_1, c_2 обозначаются числовые абсолютные константы, а символами типа $C(d), C_1(d), C_2(d)$ и $c(d), c_1(d), c_2(d)$ обозначаются константы, зависящие только от числового параметра d.

1.2 Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы приведем результаты, которыми мы будем пользоваться при доказательстве основных результатов работы.

В первой главе нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. *Пусть X — банахово пространство и K — компакт в X. Тогда найдется такой выпуклый центрально-симметричный компакт V, содержащий K, что банахово пространство E_V сепарабельно и рефлексивно, а K компактно в нем.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [9, с. 485].

Теорема 1.2.2. *Пусть μ – вероятностная мера, а последовательность μ-интегрируемых функций f_n такова, что $f_n \to f$ п.в. и для всякого μ-измеримого множества A существует конечный предел интегралов от f_n по A. Тогда $f \in L^1(\mu)$ и $f_n \to f$ в $L^1(\mu)$.*

Это утверждение является следствием теоремы 4.5.6 и теоремы 4.5.4 из книги [6].

Теорема 1.2.3. *Пусть E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, компактно вложенное в локально выпуклое пространство X, f — непрерывный линейный функционал на E. Тогда существует последовательность непрерывных линейных функционалов на X, поточечно сходящаяся к f на E.*

Доказательство этого факта можно найти в [9, предложение 8.6.26]. В работе [30] рассмотрено усиление данного утверждения на случай непрерывных линейных операторов.

Одним из основных методов, используемых в последней главе, является следующая так называемая локализационная лемма.

Теорема 1.2.4 (см. [57], [52], [48]). *Пусть f_1, f_2 — две полунепрерывные сверху неотрицательные функции на $\mathbb{R}^n$, f_3, f_4 — две полунепрерывные снизу неотрицательные функции на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $f_1^\alpha f_2^\beta \leqslant f_3^\alpha f_4^\beta$ и для всякого отрезка $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ и всякой меры ν с плотностью $\exp \ell$ относительно меры Лебега на отрезке Δ, где ℓ — аффинная функция на Δ, выполнено неравенство*

$$\left(\int_\Delta f_1 d\nu\right)^\alpha \left(\int_\Delta f_2 d\nu\right)^\beta \leqslant \left(\int_\Delta f_3 d\nu\right)^\alpha \left(\int_\Delta f_4 d\nu\right)^\beta.$$

Тогда для всякой логарифмически вогнутой радоновской меры μ на $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\mu\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\mu\right)^\beta \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_3 d\mu\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_4 d\mu\right)^\beta.$$

Также нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 1.2.5 ([35], [3]). *Существуют такие абсолютные постоянные c и c_0, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для всякого многочлена f степени d справедливы оценки*

$$\|f\|_q \leqslant (cqd)^d \|f\|_0, \quad \|f\|_q \leqslant (c_0 q)^d \|f\|_1.$$

Константу c можно взять равной $32e$, а константу c_0 — равной $4e^{12}$.

Теорема 1.2.6 ([22]). *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$, f — многочлен степени d, $k(f) = \inf\{k : \ \mu(|f| \geqslant k) \leqslant 1/e\}$. Тогда для всякого $\lambda \geqslant 1$ выполнена оценка*

$$\mu(x\colon \ |f(x)| \geqslant (4\lambda)^d k(f)) \leqslant e^{-\lambda}.$$

Теорема 1.2.7 ([1], [2]). *Существует такая абсолютная постоянная C, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для всякого μ-измеримого множества U и для всякого многочлена f степени d справедлива оценка*

$$\mu(U)^{d+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu \leqslant (Cd)^{2d} \int_U |f| d\mu.$$

Постоянную C можно взять равной $512e$.

Глава 2

Носители мер со слабыми моментами

Хорошо известно, что всякая вероятностная борелевская мера μ на сепарабельном банаховом пространстве X сосредоточена на компактно вложенном в X рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве E, причем если μ на X имеет сильный момент порядка p, то и E можно выбрать с этим свойством (см. [6, т. 2, с. 192]). В этой главе аналогичное свойство исследуется для мер со слабыми моментами. Без дополнительных условий упомянутое утверждение для мер со слабыми моментами оказывается неверным, но имеются простые необходимые и достаточные условия его справедливости. Для мер со слабым моментом первого порядка на пространствах, не содержащих c_0, дополнительных условий не требуется. Для мер со слабым моментом второго порядка необходимое и достаточное условие формулируется в терминах компактности ковариационного оператора.

Пусть X — банахово с сопряженным X^*, μ — вероятностная борелевская мера на X со слабым моментом порядка $p \geqslant 1$, т. е. $X^* \subset L^p(\mu)$. Компактно вложенным в X рефлексивным сепарабельным банаховым пространством называется линейное подпространство E в X, обладающее нормой $\|\cdot\|_E$, относительно которой оно полно, сепарабельно и рефлексивно, а его шар предкомпактен в X (в силу рефлексивности E замкнутый шар из E будет даже компактным в X). Нас интересует существование компактно вложенного в X рефлексивного сепарабельного банахова пространства полной μ-меры (т. е. $\mu(E) = 1$), для которого $E^* \subset L^p(\mu)$. Легко привести пример, в котором компактно вложенное пространство E не имеет последнего свойства. Ниже приведены примеры, в которых таких пространств нет вообще.

В этой главе для $p > 1$ положим $q = p/(p-1)$. Пусть μ – вероятностная борелевская мера на локально выпуклом пространстве X, $X^* \subset L^p(\mu)$, $p \geqslant 1$. Для $g \in L^q(\mu)$ через F_g обозначим функционал на X^*, задаваемый равенством

$$F_g(f) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx).$$

Если $g = I_A$ – индикатор некоторого измеримого множества A, то вместо F_{I_A} будем писать F_A.

Говорят, что мера μ имеет среднее $m \in X$, если

$$f(m) = \int_X f(x)\,\mu(dx), \quad \forall f \in X^*.$$

2.1 Случай меры со слабым моментом первого порядка

Сначала рассмотрим случай меры со слабым моментом первого порядка.

Теорема 2.1.1. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, μ – вероятностная борелевская мера на X, $X^* \subset L^1(\mu)$. Тогда следующие условия равносильны*:

(i) *существует компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры с $E^* \subset L^1(\mu)$,*

(ii) *для всякого μ-измеримого множества A найдется такой элемент $h_A \in X$, что $F_A(f) = f(h_A)$ для всех $f \in X^*$, т. е. функционал F_A на X^* задается вектором $h_A \in X$.*

Доказательство. ((ii)⇒(i)) Пусть B^* — единичный шар в X^*. Покажем, что B^* — компактное подмножество пространства $L^1(\mu)$. Рассмотрим последовательность $\{f_n\} \subset B^*$. Тогда, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $f_n(x) \to f(x)$ для всякого элемента $x \in X$, следовательно, для всякого измеримого множества A верно равенство

$$\int_A f_n(x)\mu(dx) = f_n(h_A) \to f(h_A).$$

По теореме 1.2.2 имеет место сходимость $f_n \to f$ в $L_1(\mu)$, что и означает компактность B^* в $L^1(\mu)$.

Теперь докажем, что множество $\{h_A\}$, индексируемое всеми измеримыми множествами $A \subset X$, предкомпактно в X. Пусть $g_n = I_{A_n}$ — последовательность индикаторов некоторых измеримых множеств. Покажем, что из последовательности $\{h_{A_n}\}$ можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по норме $\|\cdot\|_X$ в пространстве X. По доказанному ранее, B^* — компакт в $L^1(\mu)$. Функции g_n задают непрерывные по норме функционалы F_{g_n} на $L^1(\mu)$ с равномерно ограниченными нормами. В силу сепарабельности $L^1(\mu)$ есть поточечно сходящаяся подпоследовательность этих функционалов. На компакте B^* эта последовательность сходится равномерно, что дает сходимость по соответствующей подпоследовательности в $\{h_{A_n}\}$ по норме $\|\cdot\|_X$, ибо

$$\|h_{A_n} - h_{A_m}\|_X = \sup_{f\in B^*} f(h_{A_n} - h_{A_m}) = \sup_{f\in B^*} F_{g_n}(f) - F_{g_n}(f).$$

Итак, множество $\{h_A\}$ лежит в некотором компакте K_0. Увеличив его, можно считать, что $\mu(\langle K_0\rangle) = 1$. Тогда по теореме 1.2.1 найдется содержащий K_0 выпуклый центрально-симметричный компакт K, для которого E_K — сепарабельное рефлексивное банахово пространство.

Пусть $f \in E_K^*$. Из теоремы 1.2.3 следует, что существует такая последовательность функционалов $f_n \in X^*$, что $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in E_K$. Тогда

$$\int_A f_n(x)\mu(dx) = f_n(h_A) \to f(h_A)$$

для всякого μ-измеримого множества A. Поэтому $f \in L^1(\mu)$, значит, E_K и есть искомое подпространство.

((i)⇒(ii)) Пусть E – компактно вложенное в X рефлексивное сепарабельное банахово пространство, причем $E^* \subset L^1(\mu)$. Тогда для всякого μ-измеримого множества A функционал

$$F_A(f) = \int_A f(x)\mu(\,dx),\ f \in E^*$$

непрерывен (по лемме Фату) и линеен на пространстве E^*, т. е. $F_A \in E^{**}$. Так как E рефлексивно, то $F_A(f) = f(h_A)$ для некоторого $h_A \in E$. Поскольку $X^* \subset E^*$, то $F_A(f) = f(h_A)$ при всех $f \in X^*$, что завершает доказательство. $\square$

Пример 2.1.2. Рассмотрим пространство $X = c_0$ с вероятностной мерой $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\delta_{2^n e_n}$, где e_n — стандартный базис c_0, а δ_x — мера Дирака в точке x. Проверим, что $X^* \subset L^1(\mu)$. Действительно, любой элемент $f \in X^*$ задается некоторым элементом $y_f \in \ell^1$ и

$$\|f\|_{L_1(\mu)} = \int_X |f(x)|\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(y_f)_n| = \|y_f\|_{l_1} = \|f\|.$$

Легко проверить, что мера μ не имеет среднего (иначе таким средним был бы элемент $(1, 1, \ldots)$). Тем самым нет и пространства E с указанными в теореме свойствами.

Замечание 2.1.3. Если банахово пространство X не имеет подпространств, линейно гомеоморфных c_0 (например рефлексивно), то каждая радоновская мера на X, имеющая слабый первый момент, имеет и среднее (см. [13]). Поэтому в этом случае для всякой вероятностной борелевской меры μ со слабым первым моментом каждая мера $I_A\mu$ имеет среднее, значит, выполнены условия теоремы 2.1.1 и существует компактно вложенное банахово рефлексивное сепарабельное пространство E полной меры с $E^* \subset L^1(\mu)$.

Предложение 2.1.4. *Если вероятностная мера μ на слабо секвенциально полном сепарабельном банаховом пространстве имеет слабый первый момент, то для всякого измеримого множества A найдется такой элемент h_A, что $f(h_A) = F_A(f)$, значит, по теореме 2.1.1 существует компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, для которого $E^* \subset L^1(\mu)$.*

Доказательство. Для всякого измеримого множества A найдется последовательность таких компактов $K_n \subset A$, что $\mu(A \setminus K_n) < n^{-1}$. Так как любая вероятностная мера с компактным носителем на банаховом пространстве имеет среднее (см. [9, с. 487]), то мера $I_{K_n}\mu$ имеет среднее $x_n = h_{K_n}$, причем для всякого $f \in X^*$ верно соотношение

$$f(x_n) = \int_{K_n} f(x)\mu(dx) \to \int_A f(x)\mu(dx).$$

В силу предположения о слабой секвенциальной полноте X найдется элемент $h_A \in X$ с $f(x_n) \to f(h_A)$ для всех $f \in X^*$. Это и дает совпадение $f(h_A)$ с интегралом от $I_A f$. Предложение доказано. $\square$

2.2 Случай меры со слабым моментом порядка $p > 1$

Пусть μ — вероятностная борелевская мера слабого порядка $p > 1$ на сепарабельном банаховом пространстве X. Тогда оператор вложения X^* в $L^p(\mu)$ непрерывен при наделении X^* топологией Макки $\tau(X^*, X)$ (см. [13, теорема 3]). Поэтому корректно определен оператор $h\colon\ L^q(\mu) \to X$, задаваемый равенством $F_g(f) = f(h(g))$.

Теорема 2.2.1. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство с вероятностной борелевской мерой μ слабого порядка $p > 1$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E с $E^* \subset L^p(\mu)$ равносильно тому, что множество*

$$H := \{h(g)\colon\ g \in L^q(\mu),\ \|g\|_{L^q(\mu)} \leqslant 1\}$$

предкомпактно в X, т. е. оператор $h\colon\ L^q(\mu) \to X$ компактен.

Доказательство. Пусть H предкомпактно, V_0 — компакт, линейная оболочка которого имеет полную меру, V — такой выпуклый центрально-симметричный компакт, содержащий $H \bigcup V_0$, что E_V — рефлексивное сепарабельное банахово пространство (существование такого компакта следует из теоремы 1.2.1). Ясно, что $\mu(E_V) = 1$. Пусть $f \in E_V^*$. Тогда по теореме 1.2.3 существует последовательность функционалов $f_n \in X^*$, поточечно на E_V сходящаяся к f. Для всякого $g \in L^q(\mu)$ верно равенство

$$\int_X f_n(x)g(x)\mu(dx) = f_n(h(g)) \to f(h(g)).$$

По теореме Банаха–Штейнгауза последовательность $\{f_n\}$ ограничена в пространстве $L^p(\mu)$. По теореме Фату $f \in L^p(\mu)$.

Пусть теперь E — компактно вложенное рефлексивное сепарабельное банахово пространство, причем $E^* \subset L^p(\mu)$. Тогда формула

$$F_g(f) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx)$$

задает непрерывный линейный функционал на E^*. В силу рефлексивности E имеем $F_g(f) = f(h(g))$, где $h(g) \in E$, а оператор $h\colon\ L^q(\mu) \to E$, $g \mapsto h(g)$ непрерывен. Тогда композиция оператора h и оператора компактного вложения E в X компактна, значит, H предкомпактно в X. $\square$

Замечание 2.2.2. В условиях предыдущей теоремы предкомпактность множества H равносильна компактности оператора вложения X^* в $L^p(\mu)$. Это следует из того, что компактность оператора равносильна компактности его сопряженного.

Пример 2.2.3. Рассмотрим банахово пространство $X = \ell^p$, где $p > 1$, с мерой $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\delta_{2^{n/q}e_n}$, где e_n — стандартный базис в ℓ^p, δ_x — мера Дирака в точке x. Тогда $X^* \subset L^q(\mu)$ и вложение изометрично. В самом деле, любой элемент $f \in X^*$ задается некоторым элементом $y_f \in \ell^q$ и

$$\|f\|^q_{L^q(\mu)} = \int_X |f(x)|^q\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |(y_f)_n|^q = \|y_f\|^q_{l_q} = \|f\|^q.$$

Таким образом, вложение X^* в $L^q(\mu)$ некомпактно. Это означает, что условие предкомпактности H нужно требовать отдельно.

Рассмотрим более подробно случай $p = 2$. Пусть X сепарабельное банахово пространство с вероятностной мерой μ слабого порядка 2. Тогда можно определить ковариационный оператор $K\colon X^* \to X$ меры μ равенством

$$f(Kg) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx) = F_g(f).$$

Теорема 2.2.4. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство, для которого $X^* \subset L^2(\mu)$. Тогда существование компактно вложенного в X сепарабельного рефлексивного банахова пространства E полной меры с $E^* \subset L^2(\mu)$ равносильно тому, что ковариационный оператор меры μ компактен.*

Доказательство. Пусть выполнено последнее условие, т. е. ковариационный оператор K компактен. Покажем, что единичный шар $B^* \subset X^*$ является компактным множеством в $L^2(\mu)$. Пусть $\{f_n\} \subset B^*$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in X$. По условию $K(B^*)$ предкомпактно. Поэтому, перейдя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $Kf_n \to v \in X$. Отметим, что $v = Kf$. Покажем, что $\|f_n - f\|_{L_2(\mu)} \to 0$. Действительно,

$$\|f_n - f\|^2_{L_2(\mu)} = (f_n - f)\big(K(f_n - f)\big) \leqslant 2 \sup_{g \in B^*} |g(Kf_n - Kf)| = 2\|Kf_n - Kf\|_X,$$

что стремится к нулю. Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 2.1.1, показывается, что множество

$$\{h(g)\colon\ g \in L^2(\mu),\ \|g\|_{L^2(\mu)} \le 1\}$$

предкомпактно в X. По теореме 2.2.1 это дает существование интересующего нас подпространства.

Обратное утверждение следует из того, что оператор K есть композиция вложения X^* в $L^2(\mu)$ и оператора $g \mapsto h(g)$ из $L^2(\mu)$ в X, первый из которых ограничен, будучи непрерывным при наделении X^* топологией Макки $\tau(X^*, X)$, а второй по теореме 2.2.1 является компактным оператором. □

2.3 Случай гильбертова пространства

Теорема 2.2.4 отвечает на вопрос о существовании интересующего нас банахова пространства E для меры со вторым слабым моментом, но в том случае, когда пространство X является гильбертовым, хотелось бы иметь возможность выбрать пространство E также гильбертовым. Этому и посвящена наша следующая теорема.

Пусть теперь X — сепарабельное гильбертово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Тогда можно определить ковариационный оператор $K\colon\ X \to X$ равенством

$$(Ku, v) = \int_X (u, x)(x, v)\mu(dx), \quad u, v \in X.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, μ — вероятностная борелевская мера на X и $X^* \subset L^2(\mu)$. Если ковариационный оператор меры μ компактен, то существует компактно вложенное в X гильбертово пространство E полной меры, для которого $E^* \subset L^2(\mu)$. Обратно, из существования такого пространства следует компактность ковариационного оператора.*

Доказательство. Так как оператор K компактен и самосопряжен, то по теореме Гильберта–Шмидта существует такой ортонормированный базис $\{e_i\}$, что $Ke_i = \lambda_i e_i$ и $\lambda_i \to 0$. Можно считать, что $X = \ell^2$ и $\{e_i\}$ — стандартный базис. Пусть V — такой компакт, что $\langle V \rangle$ имеет меру 1. Найдется (см. [9, задача 5.6.38]) такая последовательность чисел $n_i \geqslant 0$, что $n_i \to \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} n_i x_i^2 \leq 1$ для всех $x \in V$. Пусть $k_i = \min\{n_i, \lambda_i^{-1}\}$; заметим, что $k_i \to \infty$. Рассмотрим множество

$$S = \Big\{x \in X\colon\ \sum_{i=1}^{\infty} k_i x_i^2 \leq 1\Big\}$$

и подпространство $E = \langle S \rangle$ со скалярным произведением

$$(u, v)_0 = \sum_{i=1}^{\infty} k_i u_i v_i.$$

Так как $V \subset S$, то $\mu(E) = 1$; E — компактно вложенное в X гильбертово пространство. Пусть $f \in E^*$. Тогда $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i x_i y_i$ для некоторого $y \in E$, $\forall x \in E$. Положим $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i y_i$. Так как

$$\lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i (e_i, e_j) = (Ke_i, e_j) = \int_X (e_i, x)(x, e_j)\mu(dx),$$

то
$$\int_X f_n^2(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i^2 y_i^2 \le \sum_{i=1}^n k_i y_i^2 \le \|y\|_0^2.$$
По теореме Фату $f \in L^2(\mu)$, ибо $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in E$.

Обратно, пусть такое E существует. Можно считать, что оно имеет вид $E = \bigl\{x = \sum_{i=1}^\infty x_i e_i \colon\ \sum_{i=1}^\infty k_i x_i^2 < \infty\bigr\}$, где $\{e_i\}$ — некоторый ортонормированный базис, $\{k_i\}$ — последовательность стремящихся к бесконечности положительных чисел. Скалярное произведение в E задано формулой $(x,y)_E = \sum_{i=1}^\infty k_i x_i y_i$. Определим оператор J равенством $J\bigl(\sum u_i e_i\bigr) = \sum u_i k_i^{-1} e_i$. Так как $\{e_i/\sqrt{k_i}\}$ — ортонормированный базис в E, то оператор J компактен как оператор из X в E. Зададим оператор T в E равенством
$$(Tf, g)_E = \int_X (f,x)_E (x,g)_E \mu(dx), \quad f, g \in E.$$
Покажем, что $Ku = T(Ju)$. Действительно,
$$\begin{aligned} T(Ju) &= \sum k_j^{-1/2} (T(Ju), e_j/\sqrt{k_j})_E\, e_j \\ &= \sum k_j^{-1/2} \int_X (Ju, x)_E (x, e_j/\sqrt{k_j})_E \mu(dx)\, e_j \\ &= \sum k_j^{-1/2} \int_X (u,x)(x, e_j\sqrt{k_j})\mu(dx)\, e_j = Ku. \end{aligned}$$
Заметим, что T — непрерывный оператор из E в X. Поэтому K — компактный оператор. $\square$

Глава 3

Пространства допустимых сдвигов мер

Пусть μ — борелевская мера на локально выпуклом пространстве X. Обозначим через $\widetilde{M}(\mu)$ множество всех несингулярных сдвигов μ, а через $M(\mu)$ — множество всех эквивалентных сдвигов μ, т. е.

$$\widetilde{M}(\mu) = \{h : \mu \not\perp \mu_h\},$$

$$M(\mu) = \{h : \mu \sim \mu_h\}.$$

Напомним, что $\mu_h(A) := \mu(A - h)$ — сдвиг меры μ. Очевидно, что имеет место вложение $M(\mu) \subset \widetilde{M}(\mu)$.

В данной главе исследуются свойства множеств $\widetilde{M}(\mu)$ и $M(\mu)$ для двух классов мер на локально выпуклых пространствах. В первом параграфе рассматривается класс продакт-мер, т. е. мер, являющихся счетной степенью одной фиксированной меры на прямой, а во втором параграфе будут рассмотрены логарифмически вогнутые меры.

Одним из наиболее удобных средств описания взаимной сингулярности двух мер является так называемый интеграл Хеллингера. Напомним его определение. Пусть μ и ν — две вероятностные меры абсолютно непрерывные относительно меры λ, т. е. $d\mu = \varphi d\lambda, d\nu = \psi d\lambda$. Определим интеграл Хеллингера этих мер равенством

$$H(\mu, \nu) := \int (\varphi\psi)^{1/2}\, d\lambda.$$

Легко проверить, что интеграл Хеллингера не зависит от меры λ, причем верна следующая оценка:

$$2(1 - H(\mu,\nu)) \leqslant \int |\varphi - \psi|\, d\lambda = \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2\sqrt{1 - H^2(\mu,\nu)},$$

где $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ — вариация меры. Эта оценка показывает, что меры взаимно сингулярны тогда и только тогда, когда $H(\mu,\nu) = 0$, ведь сингулярность мер $\mu\perp\nu$ равносильна равенству $\|\mu-\nu\|_{\mathrm{TV}} = 2$. Более подробно про интеграл Хеллингера см., например, [6, т. 1, с. 365].

3.1 Обобщение теоремы Шеппа

Классические результаты Шеппа (см. [67]) и Фельдмана (см. [46]) дают необходимое и достаточное условие того, чтобы продакт-мера, являющаяся счетной степенью меры на прямой с положительной плотностью, была эквивалентна ее сдвигу на вектор h из ℓ^2. В данном параграфе исследуется аналогичный вопрос для сдвигов меры на векторы h из $\ell^q, (1 \leqslant q < 2)$. Отметим, что случай $q > 2$ охватывается приводимой ниже теоремой Шеппа: при $h \in \ell^q \backslash \ell^2$ нет эквивалентности.

Доказательство следующей теоремы см. в [51].

Теорема (Какутани). Пусть μ_n и ν_n — вероятностные меры на прямой, причем $\mu_n \sim \nu_n$, положим $\mu = \bigotimes \mu_n$, $\nu = \bigotimes \nu_n$. Тогда либо $\mu \sim \nu$, либо $\mu\perp\nu$, причем

$$H(\mu,\nu) = \prod H(\mu_n,\nu_n).$$

Из теоремы Какутани следует, что для вероятностной меры $\mu = \nu^\infty$, являющейся счетной степенью меры $\nu(dx) = f(x)dx$ с плотностью $f > 0$ п.в., справедливо равенство $\widetilde{M}(\mu) = M(\mu)$.

Пусть f — почти всюду положительная вероятностная плотность на прямой. Определим величину $I_q(f)$ посредством равенства

$$I_q(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f'(x)|^q}{f^{q-1}(x)}\, dx.$$

Условие $I_q(f) < \infty$ равносильно тому, что $f^{1/q} \in W^{q,1}$.

Теорема (Шепп). Пусть $f(x) > 0$ п.в. и $\nu(dx) = f(x)dx$ — вероятностная мера на прямой, $\mu = \nu^\infty$. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если h не лежит в ℓ^2, то $\mu \perp \mu_h$,
2. $I_2(f) < \infty \Leftrightarrow \forall h \in \ell^2 : \mu \sim \mu_h$.

Как мы увидим далее, при $I_q(f) < \infty$ верно, что $\mu \sim \mu_h$ для всех $h \in \ell^q$, однако это условие при $q < 2$ уже не является необходимым.

Для $r \in (0, 1)$ определим пространство

$$E^r = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \exists C\colon \|f(\cdot + s) - f\|_{L^2} \leqslant Cs^r\}$$

с нормой

$$\|f\|_r := \inf\{C : \|f(\cdot + s) - f\|_{L^2} \leqslant Cs^r\} + \|f\|_{L^2}.$$

Это пространство Бесова $B^r_{2,+\infty}$ или пространство Никольского H^r_2, подробнее см. [21].

Лемма 3.1.1. *Пусть $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $\sum F(s_n) < \infty$ для всякой последовательности s_n таких положительных чисел, что $\sum s_n < \infty$. Тогда для некоторых $s_0 > 0$ и C при всех $s \in (0; s_0)$ будет выполняться оценка $F(s) \leqslant Cs$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда для всякого n найдется такое $s_n < 2^{-n}$, что $F(s_n) > 2^n s_n$. Пусть c_n такое натуральное число, что $2^{-n} \leqslant c_n s_n < 2^{-n+1}$. Рассмотрим последовательность a_n, в которой сначала c_1 раз стоит число s_1, затем c_2 раз число s_2 и так далее, число s_n встречается c_n раз. Ясно, что $\sum a_n = \sum c_n s_n < \infty$, но $\sum c_n F(s_n) > \sum 2^n s_n c_n \geq \sum 1 = \infty$, противоречие. □

Следствие 3.1.2. *Пусть $q > 0$, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и $\sum F(s_n) < \infty$, если $\sum s_n^q < \infty$. Тогда для некоторых $s_0 > 0$ и C при всех $s \in (0; s_0)$ верна оценка $F(s) \leqslant C|s|^q$.*

Доказательство. Рассмотрим при $t \geq 0$ функцию $G_1(t) = F(t^{1/q})$, для нее выполняются условия леммы 1, поэтому $G_1(t) < Ct$. При $s \geq 0$ имеем $F(s) = G_1(s^q) < Cs^q$. Для доказательства при $s < 0$ нужно рассмотреть $G_2(t) = F(-t^{1/q})$. □

Теорема 3.1.3. *Пусть* $f > 0$ *п.в.,* $\nu(dx) = f(x)dx$ *— вероятностная мера на прямой,* $\mu = \nu^\infty$*. Тогда если* $1 \leqslant q < 2$*, то условие* $\sqrt{f} \in E^{q/2}$ *равносильно тому, что* $\mu \sim \mu_h$ *для всякого* $h \in \ell^q$*. Более того, найдется такая постоянная* $C = C(\nu)$*, что*

$$\|\mu - \mu_{th}\| \ \leqslant 2\sqrt{1 - \bigl(1 - \tfrac{1}{2}C\|h\|^q_{\ell^q}t^q\bigr)^2}.$$

Доказательство. Пусть $\sqrt{f} \in E^{q/2}$ и $h \in \ell^q$. Заметим, что

$$H(\mu, \mu_h) \ = \ \prod H(\nu, \nu_{h_n}),$$

где $h = (h_n)$, поскольку $\mu_h = \otimes_{n=1}^\infty \nu_{h_n}$. Сходимость этого произведения равносильна сходимости ряда $\sum\bigl(1 - H(\nu, \nu_{h_n})\bigr)$. В силу определения пространства E^r имеет место оценка

$$1 - H(\nu, \nu_s) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)})^2\, dx \leqslant \tfrac{1}{2}Cs^q,$$

а значит

$$\sum\bigl(1 - H(\nu, \nu_{h_n})\bigr) \leqslant \tfrac{1}{2}C\sum|h_n|^q < \infty.$$

Последнее неравенства в формулировке теоремы следует из оценки

$$\begin{aligned} H(\mu, \mu_{th}) = \prod\bigl(1 - \bigl(1 - H(\nu, \nu_{th_n})\bigr)\bigr) \\ \geqslant 1 - \sum\bigl(1 - H(\nu, \nu_{th_n})\bigr) \geqslant 1 - \tfrac{1}{2}Ct^q\sum|h_n|^q \end{aligned}$$

и того, что вариация оценивается через интеграл Хеллингера следующим образом:

$$\|\mu - \mu_{th}\| \leqslant 2\sqrt{1 - H^2(\mu, \mu_{th})},$$

т. е.

$$\|\mu - \mu_{th}\| \ \leqslant 2\sqrt{1 - \bigl(1 - \tfrac{1}{2}C\|h\|^q_{\ell^q}t^q\bigr)^2},$$

что и требовалось.

В обратную сторону, пусть для всякого $h \in \ell^q$ имеем $\mu \sim \mu_h$. Поскольку ряд $\sum\bigl(1 - H(\nu, \nu_{h_n})\bigr)$ сходится для всех h_n, если $\sum|h_n|^q < \infty$, то функция $F(s) = (1 - H(\nu, \nu_s))$ удовлетворяет условиям следствия 3.1.2, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)}\bigr)^2\, dx = 2F(s) \leqslant 2C|s|^q$$

для некоторой постоянной C. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1.4. Из того, что $\mu \sim \mu_h$ для $h \in \ell^q$, следует, что ν задается всюду положительной плотностью, поэтому в теореме 3.1.3 для обратной импликации этого можно не требовать. То, что плотность меры ν всюду положительна, следует из того, что для всех $a \in \mathbb{R}$ имеем $\nu \sim \nu_a$ (см. [67]).

Замечание 3.1.5. Пусть $\nu(dx) = f(x)dx$ — вероятностная мера на прямой, $f > 0$ п.в., $\mu = \nu^\infty$. Пусть $1 \leqslant q < 2$ и $I_q(f) < \infty$. Тогда для всякого $h \in \ell^q$ имеем $\mu \sim \mu_h$.

Доказательство. Воспользуемся элементарным неравенством

$$|a^{1/p} - b^{1/p}|^p \leqslant |a^{1/q} - b^{1/q}|^q,$$

при $a, b > 0$, $1 < q < p$. Тогда имеем следующее:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \bigl(\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)}\bigr)^2\,dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f^{1/q}(x) - f^{1/q}(x-s)|^q\,dx \\ = \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\int_0^1 \frac{d}{dt} f^{1/q}(x-ts)\,dt\Bigr|^q\,dx &= \int_{\mathbb{R}} |s|^q \Bigl|\int_0^1 \bigl(f^{1/q}\bigr)'(x-ts)\,dt\Bigr|^q\,dx \\ &\leqslant |s|^q \int_{\mathbb{R}} \Bigl|\frac{d}{dx} f^{1/q}(x)\Bigr|^q\,dx = |s|^q I_q(f).\end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 3.1.3 имеем $\mu \sim \mu_h$ для всякого $h \in \ell^q$. □

Приведем примеры, показывающие, что условие $I_q(f) < \infty$ не является необходимым для включения $\ell^q \subset M(\mu)$. При $q = 1$ достаточно рассмотреть плотность

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} I_{[0;1]}(x-k).$$

Тогда f не является локально абсолютно непрерывной.

Пример 3.1.6. *Пусть $1 < q < 2$. Найдется такая функция f, что для меры $\mu = \nu^\infty$, где $\nu(dt) = f\,dt$, имеем $\mu \sim \mu_h$ при $h \in \ell^q$, но функция f не является даже локально абсолютно непрерывной.*

Доказательство. Рассмотрим такую функцию φ, что $1 \leqslant \varphi \leqslant 2$ и φ лежит в классе Гёльдера с показателем $q/2$, но при этом не является локально абсолютно непрерывной. Рассмотрим функцию

$$f(x) = m e^{-4x^2} \varphi(x), \quad \text{где } m^{-1} = \int e^{-4x^2} \varphi(x)\,dx.$$

Очевидно, что f не является абсолютно непрерывной. Для эквивалентности мер μ и μ_h при $h \in \ell^q$ по теореме 3.1.3 достаточно иметь оценку

$$\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2\, dx < Ch^q.$$

Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\varphi(x+h)}e^{-2(x+h)^2} - \sqrt{\varphi(x)}e^{-2x^2}|^2\, dx$$
$$\leqslant 2\int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\varphi(x+h)}e^{-2(x+h)^2} - \sqrt{\varphi(x+h)}e^{-(x+h)^2-x^2}|^2 +$$
$$+ |\sqrt{\varphi(x+h)}e^{-(x+h)^2-x^2} - \sqrt{\varphi(x)}e^{-2x^2}|^2\, dx.$$

Теперь, пользуясь липшицевостью функции e^{-x^2} и $q/2$-гельдеровостью функции $\sqrt{\varphi(x)}e^{-x^2}$ $\big(|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant |a-b|$ при $a, b \geqslant 1\big)$, получаем оценку

$$\int |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2\, dx$$
$$\leqslant C_1 h^2 \int \sqrt{\varphi(x+h)}e^{-(x+h)^2}\, dx + C_2 h^q \int e^{-x^2}\, dx \leqslant Ch^q,$$

что завершает построение. □

3.2 Структура множеств допустимых сдвигов логарифмически вогнутых мер

В данном параграфе структура множеств $\widetilde{M}(\mu)$ и $M(\mu)$ исследуется для логарифмически вогнутых мер μ. Заметим, что для обсуждавшихся ранее продакт-мер μ множество $M(\mu)$ не всегда является линейным пространством, что показывает следующий пример из работы [44].

Пример 3.2.1. *Пусть* $\varepsilon_m = \varepsilon_{-m}$, $\delta_m = \delta_{-m}$, $b_m = b_{-m}$, $\delta_m = (|m|+1)^{-3/4}$, $\varepsilon_m = \delta_m/2$, $b_m = 3^{-3^{|m|+1}}$. *Пусть*

$$A_m = \bigcup_{i=1}^{(2b_m)^{-1}} [3m + 1 + (2i-1)b_m; 3m + 1 + 2ib_m).$$

Положим $f(x) = \varepsilon_m$ *при* $x \in [3m; 3m+1) \bigcup A_m \bigcup [3m+2; 3m+3)$, $f(x) = \delta_m$ *при* $x \in [3m+1; 3m+2) \setminus A_m$. *Пусть* μ *— продакт-мера, у которой каждый сомножитель имеет плотность* f^2. *Тогда* $(2b_n)_{n \geqslant 0} \in M(\mu)$, *но* $(b_n)_{n \geqslant 0} \notin M(\mu)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x+2b_n))^2 \, dx < \infty,$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x+b_n))^2 \, dx = \infty.$$

Заметим, что $f(x+2b_m) = f(x)$, при $x \in [3m+1; 3m+2-2b_m)$. Проверим сначала первое неравенство:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{3m}^{3m+3} (f(x) - f(x+2b_n))^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \geqslant n} I_1(m,n).$$

Так как при $|m| \geqslant n$ отношение b_n/b_m — целое число, то мы получаем $f(x) - f(x+2b_n) = 0$ при $x \in [3m+1; 3m+2-2b_n)$ и

$$I_1(m,n) \leqslant 2b_n(\delta_m - \varepsilon_m)^2 + 2b_n(\delta_m - \varepsilon_m)^2 + 2b_n(\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})^2.$$

При $|m| < n$ имеем $b_m > b_{n-1}$ и

$$\begin{aligned} I_1(m,n) &\leqslant 2b_n(\delta_m - \varepsilon_m)^2 + (2b_n/b_m)(\delta_m - \varepsilon_m)^2 \\ &\leqslant 2b_n(\delta_m - \varepsilon_m)^2 + (2b_n/b_{n-1})(\delta_m - \varepsilon_m)^2. \end{aligned}$$

Из этих оценок и сходимости рядов $\sum b_n$, $\sum (b_n/b_{n-1})$ и $\sum \delta_m$ следует нужная оценка.

Теперь покажем, что $I_2 = \infty$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{3m}^{3m+3} (f(x) - f(x+b_n))^2 \, dx \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \geqslant n} \int_{3m+1}^{3m+2} (f(x) - f(x+b_n))^2 \, dx \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \geqslant n} (1 - b_n)(\delta_m - \varepsilon_m)^2. \end{aligned}$$

Так как $(1-\delta_n) > 1/2$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|m|\geqslant n} \delta_m^2$ — расходится, имеем $I_2 = \infty$. $\square$

Оказывается, что в случае логарифмически вогнутой меры μ множество $M(\mu)$ уже будет являться линейным пространством, что и будет показано в данном параграфе. Также будет доказано, что множество $\widetilde{M}(\mu)$ выпукло для логарифмически вогнутой меры μ.

Напомним, что всякая меры может быть разложена на условные меры следующим образом. Пусть μ — радоновская мера на локально выпуклом пространстве X, $h \in X$. Пусть $\ell \in X^*$, $\ell(h) = 1$ и $S = \ker \ell$. Тогда каждый вектор x единственным образом представляется в виде $\alpha h + z$, $z \in S$ ($\alpha = \ell(x), z = x - \ell(x)h$). Пусть

$$A^z = \{\alpha \in \mathbb{R}\colon z + \alpha h \in A\};$$

множества A^z можно рассматривать как «сечения» множества A. Через $\mu^{\{z\}}$ обозначим условные меры для меры μ, т. е. такие меры, что

$$\mu(A) = \int\limits_{\pi(A)} \mu^{\{z\}}(A^z)\, \mu \circ \pi^{-1}(dz),$$

где $\pi(x) = x - \ell(x)h$ (подробнее про условные меры см. [6, гл. 10]).

Теорема 3.2.2. *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X. Тогда множество векторов $M(\mu)$ является линейным подпространством в X.*

Доказательство. Пусть $h \in M(\mu)$. Покажем, что для $\mu \circ \pi^{-1}$-п.в. точек z из подпространства S мера $\mu^{\{z\}}$ не дираковская. Предположим противное, пусть найдется множество B такое, что $\mu\circ\pi^{-1}(B) > 0$ и для всякого $z \in B$ имеем $\mu^{\{z\}} = \delta_{t_z}$. Рассмотрим множество

$$A = \{x \mid \exists z \in B,\ x = t_z h + z\}.$$

Заметим, что $\mu(A) > 0$, но $\mu_h(A) = 0$, что противоречит эквивалентности мер μ и μ_h. Известно (см. [37] или [7, §4.3]), что $\mu \circ \pi^{-1}$-п.в. меры

$\mu^{\{z\}}$ являются логарифмически вогнутыми для логарифмически вогнутой меры μ. Таким образом, $\mu \circ \pi^{-1}$-п.в. условные меры $\mu^{\{z\}}$ задаются плотностями относительно меры Лебега и имеют выпуклый носитель. Покажем, что для $\mu \circ \pi^{-1}$-п.в. точек z носитель меры $\mu^{\{z\}}$ есть вся прямая. Предположим противное, т. е. пусть найдется такое множество B, что $\mu \circ \pi^{-1}(B) > 0$ и для всякого $z \in B$ имеем

$$\mu^{\{z\}}([a_z, b_z]) = 1,$$

где $[a_z, b_z]$ — носитель меры $\mu^{\{z\}}$. Тогда найдутся такие множество $B_1 \subset B$ и натуральное число n, что

$$\mu \circ \pi^{-1}(B_1) > 0$$

и для всякого $z \in B_1$ будем иметь

$$\mu^{\{z\}}([b_z - 1, b_z]) > 1/n.$$

Рассмотрим множество

$$A = \{x \, |x = \alpha h + z, z \in B_1, b_z < \alpha < b_z + 1\}.$$

Заметим, что $\mu(A) = 0$, но $\mu_h(A) > 0$, так как $(\mu_h)^{\{z\}} = (\mu^{\{z\}})_1$, что противоречит эквивалентности мер μ и μ_h. Аналогично доказывается, что носитель не ограничен снизу. Таким образом, $\mu \sim \mu_{th}$ для всякого t (так как проекции этих мер на S совпадают и $(\mu_{th})^{\{z\}} = (\mu^{\{z\}})_t$).

Пусть теперь $h, q \in M(\mu)$. Тогда $\mu_{h+q} \sim \mu_h \sim \mu$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Перейдем теперь к свойствам множества $\widetilde{M}(\mu)$.

Теорема 3.2.3. *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X. Тогда функция $H(h) = H(\mu, \mu_h)$ является логарифмически вогнутой, т. е.*

$$H(th + (1-t)q) \geqslant H^t(h) H^{1-t}(q) \; \forall \; t \in [0, 1].$$

Доказательство. Для начала рассмотрим конечномерный случай. В данном случая мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, сосредоточенной на некотором аффинном подпространстве $L+v$, где L — линейное подпространство, а v — некоторый вектор. Если h не лежит в L, то $H(h) = 0$, поэтому неравенство очевидно для произвольного q. Таким образом, мы можем предполагать, что $h \in L$. Переходя к подпространству L, можем считать, что μ обладает плотностью относительно стандартной меры Лебега на всем пространстве, т. е. $\mu(dx) = e^{-V}dx$, где V — некоторая выпуклая функция. В данном случае

$$H(h) = \int e^{-1/2(V(x)+V(x-h))}\,dx.$$

Напомним следующие неравенство Прекопы–Леиндлера (см. [64] или [6, теорема 3.10.21]): если

$$f(tx+(1-t)y) \geqslant (\varphi(x))^t(\psi(y))^{1-t},$$

то

$$\int f(x)\,dx \geqslant \Big(\int \varphi(x)\,dx\Big)^t \Big(\int \psi(x)\,dx\Big)^{1-t}.$$

Применяя данное неравенство к функциям

$$f(x) = e^{-1/2(V(x)+V(x-th-(1-t)q))},$$

$$\varphi(x) = e^{-1/2(V(x)+V(x-h))}, \quad \psi(x) = e^{-1/2(V(x)+V(x-q))},$$

мы сразу же получаем утверждение теоремы в конечномерном случае.

Перейдем теперь к бесконечномерному случаю. Пусть λ — такая радоновская вероятностная мера, что $\mu = \varrho \cdot \lambda$, $\mu_h = \varrho_h \cdot \lambda$. Например $\lambda = (\mu + \mu_h)/2$. Отметим, что функции ϱ и ϱ_h можно выбрать (см. [5, следствие A.3.13]) измеримыми относительно цилиндрической σ-алгебры $\sigma(X)$, т. е. наименьшей σ-алгебры относительно которой измеримы все непрерывные линейные функционалы на X. Таким образом, найдется σ-алгебра, порожденная счетным набором непрерывных линейных функционалов $\{\ell_i\}$, относительно которой измеримы функции ϱ_h и ϱ (см. [5, лемма 2.1.2]). Пусть ϱ^n и ϱ_h^n — условные математические ожидания функций ϱ и ϱ_h соответственно относительно меры λ и σ-алгебры, порожденной функционалами $\{\ell_i\}_{i=1}^n$. Тогда последовательности функций ϱ^n и ϱ_h^n сходятся в $L^1(\lambda)$ к функциям ϱ и ϱ_h соответственно. Значит, имеет место сходимость $\sqrt{\varrho^n} \to \sqrt{\varrho}$, $\sqrt{\varrho_h^n} \to \sqrt{\varrho_h}$ в $L^2(\lambda)$. Определим непрерывные линейные операторы $P_n\colon X \to \mathbb{R}^n$ по формуле $x \mapsto (l_1(x), \ldots, l_n(x))$. Ясно, что

$$H(h) = \lim_{n\to\infty} \int \sqrt{\varrho^n \varrho_h^n}\, d\lambda.$$

С другой стороны,

$$\int \sqrt{\varrho^n \varrho_h^n}\, d\lambda = H(\mu \circ P_n^{-1}, \mu_h \circ P_n^{-1}).$$

Из разобранного выше конечномерного случая следует, что функция

$$H(\mu \circ P_n^{-1}, \mu_h \circ P_n^{-1}) = H\Big(\mu \circ P_n^{-1}, \big(\mu \circ P_n^{-1}\big)_{P_n(h)}\Big)$$

является логарифмически вогнутой. Поэтому то же самое верно и для функции $H(h)$, являющейся пределом логарифмически вогнутых функций. Теорема доказана. $\square$

В качестве следствия предыдущей теоремы получаем выпуклость множества $\widetilde{M}(\mu)$.

Следствие 3.2.4. *Пусть μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве X. Тогда множество $\widetilde{M}(\mu)$ выпуклое.*

Глава 4

Оценки уклонений многочленов от их средних

В данной главе мы обсудим некоторые свойства измеримых многочленов на пространствах с логарифмически вогнутыми и гауссовскими мерами. В первой части этой главы речь в основном будет идти о мерах на конечномерных пространствах, так как в силу независимости всех оценок от размерности и нашего определения пространства $\mathcal{P}_d(\mu)$ все результаты переносятся на бесконечномерный случай простым предельным переходом. В последнем параграфе будут обсуждаться свойства, связанные с линейной независимостью измеримых линейных отображений и многочленов второй степени на пространствах с гауссовской мерой.

Одним из важнейших свойств многочленов на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами является следующее неравенство Карбери–Райта, выполненное для всякого многочлена f степени d и всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ (см. [43, теорема 2] и [22]):

$$\|f\|_{L^1(\mu)}^{1/d}\mu(x\colon\ |f(x)|\leqslant s)\leqslant C(d)s^{1/d}.$$

В первой части этой главы мы займемся неравенствами, в некотором смысле обратными к неравенству Карбери–Райта, а именно неравенствами вида

$$\mu(|f-m_f|\leqslant\sigma_f s)\geqslant C(d)\varphi(s),$$

где f – многочлен степени d, m_f и σ_f^2 – математическое ожидание и дисперсия функции f соответственно, а $s \in [0, 1/2]$. Мы докажем неравенства такого типа в двух случаях. В первом случае мера μ будет гауссовской и $\varphi(s) = s|\ln s|^{-d/2}$ (см. теорему 4.1.3). Во втором случае мера μ будет произвольной логарифмически вогнутой мерой, но многочлен f будет иметь степень не выше двух. В этом случае $\varphi(s) = s$ (см. следствие 4.2.4). Основная особенность полученных неравенств заключается в их независимости от размерности пространства и конкретного вида меры μ.

4.1 Случай гауссовской меры

В данном параграфе рассматривается случай стандартной гауссовской меры γ на $\mathbb{R}^n$ и многочлена произвольной степени, но для начала мы докажем следующую вспомогательную лемму, верную и для произвольной логарифмически вогнутой меры, что нам понадобится также и в следующем параграфе.

Лемма 4.1.1. *Для всякого натурального числа d найдутся такие константы $c(d) \in (0, 1)$ и $s(d) > 0$, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для всякого многочлена f степени d с $\alpha_f > 0$ и $m_f = 0$ выполнено неравенство*

$$\mu(f \geqslant \varepsilon\alpha_f) \geqslant c(d) \quad \textit{при } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant s(d).$$

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы $\|f\|_1 = \alpha_f$, так как многочлен f имеет нулевое математическое ожидание. Применяя теорему 1.2.5 и упомянутое выше неравенство Карбери–Райта, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\alpha_f = \int |f| d\mu = \int_{f>0} f d\mu - \int_{f<0} f d\mu = 2\int_{f>0} f d\mu \\ = 2\left(\int_{f\geqslant\varepsilon\alpha_f} f d\mu + \int_{0<f<\varepsilon\alpha_f} f d\mu\right) \leqslant 2\|f\|_2\left(\sqrt{\mu(f \geqslant \varepsilon\alpha_f)} + \sqrt{\mu(|f| < \varepsilon\alpha_f)}\right) \\ \leqslant 2(2c)^d\alpha_f\left(\sqrt{\mu(f \geqslant \varepsilon\alpha_f)} + \sqrt{C(d)\varepsilon^{1/d}}\right),\end{aligned}$$

где в третьем равенстве было использовано то, что $m_f = 0$. Таким образом, мы получили оценку

$$\mu(f \geqslant \varepsilon\alpha_f) \geqslant \left(2^{-1}(2c)^{-d} - \sqrt{C(d)\varepsilon^{1/d}}\right)^2.$$

Отсюда мы получаем утверждение леммы при достаточно малых ε. $\square$

Взяв $\varepsilon = 0$, получаем такое следствие.

Следствие 4.1.2. *Для всякого натурального числа d найдется такая постоянная $c(d) \in (0,1)$, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и всякого многочлена f степени d с $\sigma_f > 0$ выполнены неравенства*

$$1 - c(d) \geqslant \mu(f < m_f) \geqslant c(d).$$

Перейдем теперь к обратному неравенству Карбери–Райта в случае гауссовской меры. При доказательстве основного результата нам понадобится следующая элементарная оценка. Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $D^m f(x)$ производную функции f порядка m, т. е. такую полилинейную функцию, что

$$\frac{d^m}{dt^m} f(x+th)|_{t=0} = D^m f(x)(h,\ldots,h).$$

Пусть теперь f — многочлен степени d на $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$\varphi(t) = f(x + t(y-x)).$$

Тогда имеем

$$f(y) = \varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{d} (m!)^{-1}\varphi^{(m)}(0) \\ = f(x) + \sum_{m=1}^{d} (m!)^{-1} D^m f(x)(y-x,\ldots,y-x).$$

Таким образом,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{d} (m!)^{-1} |D^m f(x)||y-x|^m, \tag{4.1.1}$$

где $|D^m f(x)|^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_m} |\partial_{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}} f(x)|^2$.

Нам также понадобится следующая оценка для стандартной гауссовской меры γ на $\mathbb{R}^n$:

$$\|D^m f\|_2^2 := \int |D^m f|^2 d\gamma \leqslant a(m,d)\sigma_f^2, \tag{4.1.2}$$

где константа $a(m,d)$ зависит только от m и d и не зависит от размерности n. Эта оценка следует из эквивалентности соболевских и L^p-норм на пространстве всех многочленов фиксированной степени (см. [5]).

Напомним изопериметрическое неравенство для гауссовской меры (см. [29], [39], [5]), которое используется при доказательстве следующей теоремы. Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, A — измеримое множество, B — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле. Тогда

$$\gamma(A + \varepsilon B) \geqslant \Phi(a + \varepsilon), \tag{4.1.3}$$

где Φ — функция распределения стандартной гауссовской случайной величины на прямой, число a выбирается из соотношения $\gamma(A) = \Phi(a)$.

Для гауссовской меры справедлива следующая оценка на хвосты многочлена f степени d:

$$\gamma(|f| > \|f\|_2 t^d) \leqslant R\exp\bigl(-rt^2\bigr) \tag{4.1.4}$$

для всякого числа $t > 0$ и некоторых положительных абсолютных постоянных R и r (см. [5, следствие 5.6.4]).

Теорема 4.1.3. *Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Для всякого натурального числа d найдется такое число $L(d) > 0$, что для всякого многочлена f степени d верна оценка*

$$\gamma(|f - m_f| \leqslant \sigma_f s) \geqslant L(d)s|\ln s|^{-d/2} \quad \textit{при } 0 \leqslant s \leqslant 1/2.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $m_f = 0$. Зафиксируем число $t > 1$, которое будет выбрано в дальнейшем. Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

При фиксированном $\varepsilon < 1$ рассмотрим множество

$$A = (\{f < 0\} + \varepsilon B) \bigcap (\{f > 0\} + \varepsilon B) \bigcap \bigcap_{m=1}^{d} \big\{|D^m f(x)| \leqslant t^{d-m} \|D^m f\|_2\big\}.$$

Из неравенства (4.1.1) следует включение

$$A \subset \Big\{|f| \leqslant \sum_{m=1}^{d} (m!)^{-1} t^{d-m} \|D^m f\|_2 \varepsilon^m\Big\}.$$

Так как $t > 1$ и $\varepsilon < 1$, то $\varepsilon^m \leqslant \varepsilon$, $t^{d-m} \leqslant t^d$, поэтому неравенство (4.1.2) влечет оценку

$$\sum_{m=1}^{d} (m!)^{-1} t^{d-m} \|D^m f\|_2 \varepsilon^m \leqslant C(d) \sigma_f t^d \varepsilon,$$

где $C(d)$ — некоторая постоянная, зависящая только от степени многочлена d. Таким образом, мы имеем включение

$$A \subset \{|f| \leqslant C(d) \sigma_f t^d \varepsilon\}.$$

Пусть a_f — такое число, что $\gamma(f < 0) = \Phi(a_f)$. Используя гауссовское изопериметрическое неравенство (4.1.3), мы можем оценить меру множества A следующим образом:

$$\begin{aligned}
\gamma(A) \geqslant 1 - (1 - \gamma(\{f < 0\} + \varepsilon B)) - (1 - \gamma(\{f > 0\} + \varepsilon B)) - \\
- \sum_{m=1}^{d} \gamma\{|D^m f(x)| \geqslant t^{d-m} \|D^m f\|_2\} \\
\geqslant -1 + \Phi(a_f + \varepsilon) + \Phi(-a_f + \varepsilon) - R \sum_{m=1}^{d} e^{-rt^2} \\
= \Phi(a_f + \varepsilon) - \Phi(a_f) + \Phi(-a_f + \varepsilon) - \Phi(-a_f) - Rde^{-rt^2}.
\end{aligned}$$

В предпоследнем переходе была использована оценка (4.1.4).

По следствию 4.1.2 найдется такое число $c(d)$, что

$$1 - c(d) \geqslant \gamma(f < m_f) \geqslant c(d),$$

поэтому найдется такая постоянная $a(d)$, что для всякого полинома f степени d с нулевым математическим ожиданием выполнено неравенство

$|a_f| \leqslant a(d)$. Пусть $q(d)$ — минимальное значение стандартной гауссовской плотности на отрезке $[-a(d)-1, a(d)+1]$. Тогда $\Phi(a+\varepsilon)-\Phi(a) \geqslant q(d)\varepsilon$ и, аналогично $\Phi(-a + \varepsilon) - \Phi(-a) \geqslant q(d)\varepsilon$. Таким образом,

$$\gamma(|f| \leqslant C(d)\sigma_f t^d \varepsilon) \geqslant \gamma(A) \geqslant 2q(d)\varepsilon - Rde^{-rt^2}.$$

Пусть $0 < s < e^{-1}$, $\varepsilon = C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s|\ln s|^{-d/2}$, $t = 2r^{-1/2}|\ln s|^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma(|f| \leqslant \sigma_f s) &\geqslant 2q(d)C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s|\ln s|^{-d/2} - Rde^{-4|\ln s|}\\ &= 2q(d)C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s|\ln s|^{-d/2} - Rds^4.\end{aligned}$$

Найдется такое число $s_0(d) \in (0, e^{-1})$, что при $s \leqslant s_0(d)$ верна оценка

$$\gamma(|f| \leqslant \sigma_f s) \geqslant q(d)C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s|\ln s|^{-d/2}.$$

Для произвольного $s \in (s_0, 1/2]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\gamma(|f| \leqslant \sigma_f s) &\geqslant \gamma(|f| \leqslant \sigma_f s_0) \geqslant q(d)C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s_0|\ln s_0|^{-d/2}\\ &\geqslant q(d)C(d)^{-1}2^{-d}r^{d/2}s_0|\ln s_0|^{-d/2}\Big(\max_{\tau\in[s_0,1/2]} \tau|\ln\tau|^{-d/2}\Big)^{-1}s|\ln s|^{-d/2}.\end{aligned}$$

Поэтому существует такое положительное число $L(d)$, что

$$\gamma(|f| \leqslant \sigma_f s) \geqslant L(d)s|\ln s|^{-d/2},$$

при $0 \leqslant s \leqslant 1/2$. Теорема доказана. □

Следствие 4.1.4. *Для всякого натурального числа d найдется такое число $L(d) > 0$, что для всякой гауссовской меры γ на банаховом пространстве X и для всякой функции $f \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ справедлива оценка*

$$\gamma(|f - m_f| \leqslant \sigma_f s) \geqslant L(d)s|\ln s|^{-d/2} \quad \textit{при } 0 \leqslant s \leqslant 1/2.$$

4.2 Случай логарифмически вогнутой меры и многочлена степени не выше двух

В этом параграфе мы получим более точную оценку по сравнению с оценкой из предыдущего параграфа для произвольной логарифмически вогнутой меры, но для многочлена степени не выше двух. Доказательство в этом случае будет основано на теореме 1.2.4, поэтому мы сначала рассмотрим следующее одномерное утверждение.

Лемма 4.2.1. *Существует такая константа $C_1 > 0$, что для всякого числа $s \geqslant 0$ и всякого многочлена f второй степени на $\mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\varepsilon \int_0^s e^{-t} I_{\{f \leqslant -\varepsilon\}} dt \int_0^s e^{-t} I_{\{f \geqslant \varepsilon\}} dt \leqslant C_1 \int_0^s e^{-t} I_{\{|f| < \varepsilon\}} dt \int_0^s e^{-t} |f(t)| dt. \quad (4.2.1)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем старший коэффициент многочлена f равным 1. Пусть сначала $s \geqslant 1$.

Если левая часть отлична от нуля, то на интервале $(0, s)$ лежит корень многочлена f. Обозначим минимальный из корней, лежащих на интервале $(0, s)$, через τ, а второй корень через σ. Тогда на интервале $(0, \tau)$ многочлен f либо строго положителен, либо строго отрицателен, поэтому

$$\int_0^s e^{-t} I_{\{f \leqslant -\varepsilon\}} dt \int_0^s e^{-t} I_{\{f \geqslant \varepsilon\}} dt \leqslant \int_\tau^\infty e^{-t} dt = e^{-\tau}.$$

Таким образом, нужно доказать оценку

$$\varepsilon e^{-\tau} \leqslant C_1 \int_0^s e^{-t} I_{\{|f| < \varepsilon\}} dt \int_0^s e^{-t} |f(t)| dt$$

По теоремам 1.2.5 и 1.2.7 для всяких полинома g степени d, линейных функций ℓ_1, ℓ_2 и логарифмически вогнутой меры ν справедливы следующие оценки:

$$\|g\|_{L^1(\nu)} \geqslant (2c_0)^{-d} \|g\|_{L^2(\nu)},$$

$$16c^2 \|\ell_1\|^2_{L^2(\nu)} \|\ell_2\|^2_{L^2(\nu)} \geqslant \|\ell_1 \ell_2\|^2_{L^2(\nu)} \geqslant (2c)^{-2} \|\ell_1\|^2_{L^2(\nu)} \|\ell_2\|^2_{L^2(\nu)},$$

$$\int_A |g| d\nu \geqslant (Cd)^{-2d} \nu(A)^{1+d} \int |g| d\nu.$$

Применяя эти неравенства к функциям $g = f$, $\ell_1(t) = t - \tau$, $\ell_2(t) = t - \sigma$ и мере $e^{-t} I_{\{t>0\}} dt$, имеем

$$\int_0^s e^{-t}|f(t)|dt \geqslant (2C)^{-4}(1-e^{-s})^3 \int_0^\infty e^{-t}|f(t)|dt$$
$$\geqslant (2C)^{-4}(2c_0)^{-2}(2c)^{-2}(1-e^{-s})^3 \biggl(\int_0^\infty (t-\sigma)^2 e^{-t}dt \int_0^\infty (t-\tau)^2 e^{-t}dt\biggr)^{1/2}$$
$$\geqslant (2C)^{-4}(2c_0)^{-2}(2c)^{-2}(1-e^{-1})^3\bigl(1+(1-\sigma)^2\bigr)^{1/2}\bigl(1+(1-\tau)^2\bigr)^{1/2},$$

в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $1 - e^{-s} > 1 - e^{-1}$ при $s \geqslant 1$. Пусть точка u выбрана так, что $\tau \in [u, u+1] \subset [0, s]$. Тогда $|t-\sigma| \leqslant |\tau - \sigma| + 1$ при $t \in [u, u+1]$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\varepsilon < \frac{1}{2}(1 + |\tau - \sigma|)$. В этом случае

$$\int_0^s e^{-t} I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \geqslant e^{-\tau-1} \int_u^{u+1} I_{\{|t-\tau|<\varepsilon(|\tau-\sigma|+1)^{-1}\}} dt \geqslant e^{-\tau-1}\varepsilon(|\tau-\sigma|+1)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\inf_{\tau,\sigma} \frac{\bigl(1+(1-\tau)^2\bigr)^{1/2}\bigl(1+(1-\sigma)^2\bigr)^{1/2}}{|\tau-\sigma|+1} \geqslant \bigl(\sqrt{3}\bigr)^{-1} > 0.$$

Поэтому в случае $\varepsilon < \frac{1}{2}(1 + |\tau - \sigma|)$ оценка доказана.

Теперь рассмотрим случай $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}(1 + |\tau - \sigma|)$. Если

$$\varepsilon \leqslant 2(1-e^{-1})^{-1} \int_0^\infty e^{-t}|f(t)|dt,$$

то

$$\int_0^s e^{-t} I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \geqslant e^{-\tau-1} \int_u^{u+1} I_{\{|t-\tau|<\varepsilon(|\tau-\sigma|+1)^{-1}\}} dt$$
$$\geqslant e^{-\tau-1} \int_u^{u+1} I_{\{|t-\tau|<1/2\}} dt \geqslant 2^{-1} e^{-\tau-1}.$$

Используя оценку

$$\int_0^s e^{-t}|f(t)|dt \geqslant (2C)^{-4}(1-e^{-1})^3 \int_0^\infty e^{-t}|f(t)|dt, \tag{4.2.2}$$

получаем, что неравенство верно и в данном случае. Если

$$\varepsilon \geqslant 2(1-e^{-1})^{-1} \int_0^\infty e^{-t}|f(t)|dt,$$

то по неравенству Чебышёва

$$\int_0^s e^{-t} I_{\{|f|\geqslant\varepsilon\}} dt \leqslant \int_0^\infty e^{-t} I_{\{|f|\geqslant\varepsilon\}} dt \leqslant \varepsilon^{-1} \int_0^\infty e^{-t} |f(t)| dt.$$

В то же время

$$\int_0^s e^{-t} I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \geqslant 1 - e^{-1} - \varepsilon^{-1} \int_0^\infty e^{-t} |f(t)| dt \geqslant (1 - e^{-1}) 2^{-1}.$$

Опять использовав неравенство (4.2.2) и оценив один из интегралов в левой части неравенства (4.2.1) единицей, мы получим, что оценка (4.2.1) выполнена и в этом случае.

Пусть теперь $s < 1$. В этом случае $e^{-1} \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ на $[0, s]$, и вместо исходного неравенства можно доказывать следующую оценку:

$$\varepsilon \int_0^s I_{\{f\leqslant-\varepsilon\}} dt \int_0^s I_{\{f\geqslant\varepsilon\}} dt \leqslant C_1 \int_0^s I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \int_0^s |f(t)| dt.$$

Более того, после линейной замены можно считать, что $s = 1$, т. е. интересующее нас неравенство принимает вид

$$\varepsilon \int_0^1 I_{\{f\leqslant-\varepsilon\}} dt \int_0^1 I_{\{f\geqslant\varepsilon\}} dt \leqslant C_1 \int_0^1 I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Легко видеть, что если домножить в каждом из интегралов подынтегральное выражение на e^{-t}, то каждый интеграл будет отличаться от исходного на множитель, который лежит в отрезке $[1, e]$, поэтому данный случай следует из уже доказанного при $s = 1$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.2.2. Для полиномов третьей степени неравенство, аналогичное неравенству из леммы 4.2.1, неверно. Достаточно рассмотреть

$$s = \infty, \quad f(t) = (t+1)^2 (t-a).$$

В самом деле, для $a > 1$ и $\varepsilon < 1$ имеют место следующие соотношения: $f(t) < -a < -1 < -\varepsilon$ при $t \in (0, a-1)$ и $f(t) > (a+2)^2 > 1 > \varepsilon$ при $t > a+1$. Значит,

$$\{f \leqslant -\varepsilon\} \supset (0, a-1), \quad \{f \geqslant \varepsilon\} \supset (a+1, +\infty),$$

$$\{|f| \leqslant \varepsilon\} \cap [0, +\infty) \subset (a-1, a+1).$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} I_{\{f\leqslant -\varepsilon\}} dt \int_0^{+\infty} e^{-t} I_{\{f\geqslant \varepsilon\}} dt$$
$$\geqslant \int_0^{a-1} e^{-t} dt \int_{a+1}^{+\infty} e^{-t} dt = (1-e^{1-a})e^{-a-1};$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \leqslant \int_{a-1}^{a+1} e^{-t} I_{\{(t+1)^2|t-a|<\varepsilon\}} dt$$
$$\leqslant \int_{a-1}^{a+1} e^{-t} I_{\{a^2|t-a|<\varepsilon\}} dt \leqslant e^{1-a} 2\varepsilon a^{-2};$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(t+1)^2|t-a| dt \leqslant \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-t}(t+1)^4 dt\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-t}(t-a)^2 dt\Bigr)^{1/2}$$
$$= \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-t}(t+1)^4 dt\Bigr)^{1/2} \Bigl(1+(a-1)^2\Bigr)^{1/2} \leqslant 2a \Bigl(\int_0^{+\infty} e^{-t}(t+1)^4 dt\Bigr)^{1/2}.$$

Если бы оценка (4.2.1) была верна для таких многочленов f третьей степени с абсолютной постоянной, то для некоторой другой абсолютной постоянной $\widetilde{c}$ имело бы место неравенство

$$\varepsilon(1-e^{1-a})e^{-a-1} \leqslant \widetilde{c} e^{1-a} 2\varepsilon a^{-2} a,$$

которое на самом деле не может быть верным при достаточно большом a.

Теорема 4.2.3. *Существует такая абсолютная постоянная C_1, что для всякого полинома f второй степени на $\mathbb{R}^n$ и всякой логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\varepsilon \int I_{\{f\leqslant -\varepsilon\}} d\mu \int I_{\{f\geqslant \varepsilon\}} d\mu \leqslant C_1 \int I_{\{|f|<\varepsilon\}} d\mu \int |f| d\mu.$$

Доказательство. Функции $f_1 = \varepsilon I_{\{f\leqslant -\varepsilon\}}$, $f_2 = I_{\{f\geqslant \varepsilon\}}$ полунепрерывны сверху, а функции $f_3 = C_1 I_{\{|f|<\varepsilon\}}$ и $f_4 = |f|$ полунепрерывны снизу, поэтому можно применить теорему 1.2.4. Таким образом нам достаточно доказать следующее неравенство:

$$\varepsilon \int_s^r e^{\ell(t)} I_{\{f\leqslant -\varepsilon\}} dt \int_s^r e^{\ell(t)} I_{\{f\geqslant \varepsilon\}} dt \leqslant C_1 \int_s^r e^{\ell(t)} I_{\{|f|<\varepsilon\}} dt \int_s^r e^{\ell(t)} |f| dt,$$

где ℓ — аффинная функция. Линейной заменой эта оценка сводится к неравенству из леммы 4.2.1. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Следствие 4.2.4. *Существует такая абсолютная положительная постоянная C_2, что для всякого полинома f второй степени на $\mathbb{R}^n$ и всякой логарифмически вогнутой меры μ справедливо неравенство*

$$\mu(|f - m_f| < \varepsilon) \int |f - m_f| d\mu \geqslant C_2 \varepsilon \quad \textit{при } \varepsilon \leqslant \alpha_f.$$

Доказательство. Эта оценка следует из теоремы 4.2.3 и леммы 4.1.1. □

Следствие 4.2.5. *Существует такая абсолютная положительная постоянная C_2, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на банаховом пространстве X и для всякой функции $f \in \mathcal{P}_2(\mu)$ справедливо неравенство*

$$\mu(|f - m_f| < \varepsilon) \int |f - m_f| d\mu \geqslant C_2 \varepsilon \quad \textit{при } \varepsilon \leqslant \alpha_f.$$

4.3 Линейная независимость измеримых линейных операторов

Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Пространство Камерона–Мартина меры γ состоит из всех таких векторов $h \in X$, что $|h|_H < \infty$, где

$$|h|_H := \sup\{\ell(h), \ell \in X^*, \|\ell\|_2 \leqslant 1\}.$$

Известно (см. [5, гл. 2]), что всякий вектор $h \in H$ порождает измеримый линейный функционал $\widehat{h}$ на X, для которого

$$\int f(x)\widehat{h}(x)\, \gamma(dx) = f(h), \quad \forall f \in X^*.$$

Пространство Камерона–Мартина H является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle h, q \rangle_H := \int \widehat{h}(x)\widehat{q}(x)\, \gamma(dx).$$

Для заданного ограниченного оператора $A\colon H \to H$ через $\widehat{A}$ обозначим ассоциированный измеримый линейный оператор на X, т. е. такое измеримое линейное отображение из X в X, что $\widehat{h}(\widehat{A}x) = \widehat{A^*h}(x)$ для каждого элемента $h \in H$.

В работе [71] был установлен следующий факт о линейно независимых измеримых линейных операторах на пространстве с гауссовской мерой.

Теорема 4.3.1. *Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — линейно независимые операторы Гильберта–Шмидта на H. Тогда либо векторы $\widehat{A}_1 x, \ldots, \widehat{A}_k x$ линейно независимы почти всюду, либо существует конечномерный ограниченный линейный оператор D ранга не выше $k-1$, являющийся нетривиальной линейной комбинацией операторов $A_1, \ldots, A_k$.*

Пусть $\mathcal{H}_2(\gamma)$ есть ортогональное в $L^2(\gamma)$ дополнение пространства $\mathcal{P}_1(\gamma)$ до пространства $\mathcal{P}_2(\gamma)$. Элементы $\mathcal{H}_2(\gamma)$ допускают следующее представление: для каждого $f \in \mathcal{H}_2(\gamma)$ найдутся такие числа $c_n \in \mathbb{R}$, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi_n^2 - 1),$$

где ξ_n — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин и ряд сходится почти всюду.

Из предыдущей теоремы можно вывести следующее достаточное условие наличия совместной плотности распределения вектора с компонентами из элементов $\mathcal{H}_2(\gamma)$.

Следствие 4.3.2. *Предположим, что функции $f_1, \ldots, f_k$, где $k > 2$, принадлежат $\mathcal{H}_2(\gamma)$ и линейно независимы. Тогда либо они имеют совместную плотность распределения, либо некоторая нетривиальная линейная комбинация $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ является вырожденным элементом $\mathcal{H}_2(\gamma)$ ранга $k-1$, т. е. многочленом второго порядка от $k-1$ измеримого линейного функционала.*

Возникает вопрос, насколько точное утверждение получено в теореме 4.3.1. Следующий пример призван дать ответ на этот вопрос.

Предложение 4.3.3. *Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют такие линейные операторы*

$$A_1, \ldots, A_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d, \quad \text{где } d = k(k-1)/2,$$

что для каждого вектора $x \in \mathbb{R}^k$ *векторы* $A_1 x, \ldots, A_k x$ *линейно зависимы, но для всякого ненулевого вектора* $x = (x_1, \ldots, x_k)$ *оператор* $\sum_{i=1}^k x_i A_i$ *имеет ранг* $k-1$. *В частности, нетривиальная линейная комбинация операторов* $A_1, \ldots, A_k$ *не может иметь ранг менее* $k-1$.

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — операторы из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^d$, которые мы хотим построить. Каждый оператор A_i представляется матрицей $(a_i^{l,j})_{l \leqslant d, j \leqslant k}$ с k столбцами $A_i^1, \ldots, A_i^k$, где

$$A_i^j = (a_i^{1,j}, \ldots, a_i^{d,j}).$$

Наложим на матрицы A_i следующие условия: $A_i^i = 0$ и

$$\sum_{i=1}^k x_i A_i x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^k.$$

Последнее условие равносильно следующей системе векторных уравнений:

$$A_i^j = -A_j^i, \ i \neq j.$$

Таким образом, мы имеем $d = k(k-1)/2$ векторных уравнений для $k(k-1)$ ненулевых столбцов матриц A_i. Следовательно, задав d столбцов (один столбец для каждого уравнения), оставшиеся столбцы мы однозначно определим из нашей системы уравнений.

Рассмотрим два случая: k нечетно или k четно.

Пусть k нечетно, $m = (k-1)/2$. В каждой матрице A_i мы зададим m столбцов (оставшиеся столбцы определяются из уравнений, как сказано выше) следующим образом:

$$A_i^j = e_{(i-1)m+j-i}, \quad j = i+1, \ldots, i+m \mod k,$$

где $e_1, \ldots, e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$ и $j \mod k$ есть наименьшее неотрицательное целое число $r \leqslant k$ с $j = pk + r$. Легко видеть, что для каждого $s \in \{1, \dots, d\}$ существует единственная пара столбцов A_i^j, A_j^i с $a_i^{s,j} \neq 0$; для различных s такие пары будут различны. Теперь зафиксируем ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^k$. Пусть $y \in \operatorname{Ker} \sum_{i=1}^k x_i A_i$. Мы получаем, что $x_i y_j - x_j y_i = 0$ для всех пар i, j, что дает линейную зависимость векторов x и y. Следовательно,

$$\dim\Bigl(\operatorname{Ker} \sum_{i=1}^k x_i A_i\Bigr) = 1,$$

что означает, что ранг оператора $\sum_{i=1}^k x_i A_i$ равен $k-1$.

Для примера, рассмотрим случай $k = 3$. Тогда $d = k(k-1)/2 = 3$, $m = (k-1)/2 = 1$. Мы имеем $k(k-1)/2 = 3$ уравнений. Сначала зададим один столбец в каждой матрице, что вместе с равенством $A_i^i = 0$ дает следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & A_1^{13} \\ 0 & 0 & A_1^{23} \\ 0 & 0 & A_1^{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2^{11} & 0 & 0 \\ A_2^{21} & 0 & 1 \\ A_2^{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A_3^{12} & 0 \\ 0 & A_3^{22} & 0 \\ 1 & A_3^{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Из уравнений $A_i^j = -A_j^i,\ i \neq j$, находим

$$A_1^3 = -A_3^1 = (0, 0, -1),\ A_2^1 = -A_1^2 = (-1, 0, 0),\ A_3^2 = -A_2^3 = (0, -1, 0),$$

так что наши матрицы в итоге имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Предположим теперь, что мы имеем нетривиальную линейную комбинацию

$$A = x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор $(a, b, c) \in \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ay + bx \\ yc - zb \\ -xc + za \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит, векторы (a, b, c) и (x, y, z) линейно зависимы, откуда $\dim \mathrm{Ker} A = 1$ и ранг матрицы A равен 2.

В случае четного k построение аналогично. Пусть $k = 2m$. В каждой из матриц $A_1, \ldots, A_{k-1}$ зададим m столбцов следующим образом. Сначала, имея дело с $k-1$ столбцом $A_i^1, \ldots, A_i^{k-1}$ матрицы A_i при $i = 1, \ldots, k-1$ и игнорируя последние $k-1$ строк, мы зададим матричные элементы таким же способом, как для нечетного числа $k-1$. Затем в i-й матрице (кроме последней) в k-м столбце поставим 1 на $(d-(k-1)+i)$-м месте и поставим 0 на остальных местах. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы некоторые свойства вероятностных мер на локально выпуклых пространствах и измеримых многочленов на этих пространствах. Для сепарабельного банахова пространства и вероятностной борелевской меры на нем со слабым моментом порядка p в диссертации получены необходимые и достаточные условия существование компактно вложенного в это пространство рефлексивного сепарабельного банахова подпространства полной меры, сужение исходной меры на которое также обладает слабым моментом того же порядка. Для продакт-мер получены обобщения классического результата Шеппа на случай сдвигов из пространства ℓ^q. Для логарифмически вогнутых мер установлено, что множество несингулярных сдвигов является выпуклым, а множество эквивалентных сдвигов является линейным пространством. Для гауссовских мер в работе получены нижние оценки мер уклонений многочленов произвольной степени от их средних (математических ожиданий). Для логарифмически вогнутых мер такие оценки получены для многочленов второй степени.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях:

1. Исследование наличия несингулярного сдвига у произвольной невырожденной логарифмически вогнутой меры.

2. Получение нижней оценки уклонения от математического ожидания многочлена произвольной степени на пространстве с логарифмически вогнутой мерой. В этом вопросе гипотеза заключается в том, что правильная оценка меры данного уклонения имеет следующий вид:

$$\mu(|f - m_f| < \varepsilon) \int |f - m_f| d\mu \geqslant C(d)\varepsilon.$$

Было бы интересно получить оценку с такой зависимостью от ε даже в случае гауссовской меры.

Литература

[1] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. О многочленах на пространствах с выпуклыми мерами // ДАН. – 2015. – Т. 460. – №5. – С. 503–506.

[2] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. Оценки интегральных норм многочленов на пространствах с выпуклыми мерами // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – №8. – С. 3–22.

[3] Бобков С.Г. Некоторые обобщения результатов Ю.В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов // Теор. вероятн. и ее примен. – 2000. – Т. 45. – №4. – С. 745–748.

[4] Богачев В.И. Локально выпуклые пространства со свойством ЦПТ и носители мер // Вестн. МГУ, мат., мех. – 1986. – Т. 45. – №6. – С. 16–20.

[5] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. – 352 с.

[6] Богачев В.И. Основы теории меры. Т.1, 2, 2-е изд. М. – Ижевск: РХД, 2006.

[7] Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. М. – Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.

[8] Богачев В.И., Колесников А.В. Нелинейные преобразования выпуклых мер // Теория вероятн. и ее примен. – 2005. – Т. 50. – №1. – С. 27–51.

[9] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 2-е изд. М. – Ижевск: РХД, 2011. – 728 с.

[10] Богачев В.И., Смолянов О.Г., Соболев В.И. Топологические векторные пространства и их приложения. М.–Ижевск: РХД, 2012. – 584 с.

[11] Брудный Ю.А., Ганзбург М.И. Об одной экстремальной задаче для многочленов n переменных // Известия АН СССР. Серия матем. – 1973. – Т. 37. – №2. – С. 344–355.

[12] Булдыгин В.В. Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29. – №3. – С. 528–532.

[13] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И. Ковариационные операторы вероятностных мер в локально выпуклых пространствах // Теория вероятн. и ее примен. – 1978. – Т. 23. – С. 3–26.

[14] Вершик А.М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19. – N 1. – С. 210–212.

[15] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях // Теория вероятн. и ее примен. – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

[16] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. М: Наука, 1971. – 664 с.

[17] Давыдов Ю.А. О распределениях кратных интегралов Винера–Ито // Теория вероятн. и ее примен. – 1990. – Т. 35. – С. 51–62.

[18] Кириллов А.И. Бесконечномерный анализ и квантовая теория как исчисления семимартингалов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – №3. – С. 43–92.

[19] Кругова Е.П. Дифференцируемость выпуклых мер // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – №6. – С. 862–871.

[20] Кругова Е.П. О сдвигах выпуклых мер // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – №2. – С. 57–66.

[21] Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. // Итоги науки

и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – 1988. – Т. 26. – С. 5–157.

[22] Назаров Ф.Л., Содин М.Л., Вольберг А.Л. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – №2. – С. 214–234.

[23] Островский Е.И. О носителях вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // ДАН СССР. – 1980. – Т. 225. – №6. – С. 1319–1320.

[24] Прохоров Ю.В. О многочленах от нормально распределенных случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. – 1992. – Т. 37. – №4. – С. 747—750.

[25] Прохоров Ю.В. О многочленах от случайных величин, имеющих гамма-распределение // Теория вероятн. и ее примен. – 1993. – Т. 38. – №1. – С. 198–202.

[26] Прохоров Ю.В., Хохлов В.И. О многочленах от компонент гауссовских случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен. – 2007. – Т. 52. – №4. – С. 810–814.

[27] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975. – 230 с.

[28] Смолянов О.Г. Измеримые полилинейные и степенные функционалы в некоторых линейных пространствах с мерой // ДАН СССР. – 1966. – Т. 170. – С. 526–529.

[29] Судаков В.Н., Цирельсон Б.С. Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Проблемы теории вероятностных распределений. II, Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1974. – Т. 41. – С. 14—24.

[30] Юрова Е.В. О непрерывных сужениях измеримых линейных операторов // ДАН. – 2012. – Т. 443. – №3. – С. 300–303.

[31] Ambrosio L., Savare G., Zambotti L. Existence and stability for Fokker–Planck equations with log-concave reference measure // Probab. Theory Relat. Fields. – 2009. – Vol. 145. – №.3-4. – P. 517–564.

[32] Ambrosio L., Da Prato G., Goldys B., Pallara D. Bounded variation with respect to a log-concave measure // Comm. Partial Differ. Equat. – 2012. – Vol. 37. – №12. – P. 2272–2290.

[33] Ball K. Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$ // Studia Math. – 1988. – Vol. 88. – №1. – P. 69–84.

[34] Bobkov S.G. The size of singular component and shift inequalities // Ann. Probab. – 1999. – Vol. 27. – №1. – P. 416–431.

[35] Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. – 2000. – Vol. 1745. – P. 27–35.

[36] Bogachev V.I. Average approximation and moments of measures // J. Complexity. – 2000. – Vol. 16. – P. 390–410.

[37] Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Math. – 1974. – Vol. 12. – P. 239–252.

[38] Borell C. Convex set functions in d-space // Periodica Math. Hungarica. – 1975. – Vol. 6. – №2. – P. 111–136.

[39] Borell C. The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space // Invent. Math. – 1975. – Vol. 30. – №2. – P. 207–216.

[40] Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and polynomial inequalities. Berlin: Springer, 1995. – 480 pp.

[41] Bourgain J. On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. – 1991. – Vol. 1469. – P. 127–137.

[42] Cameron R.H., Martin W.T. The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier–Hermite polynomials // Ann. Math. – 1947. – Vol. 48. – P. 385–392.

[43] Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ // Math. Research Letters. – 2001. – Vol. 8. – №3. – P. 233–248.

[44] Chatterji S.D., Mandrekar V. Quasi-invariance of measures under translation // Math. Z. – 1977. – Vol. 154. – P. 19–30.

[45] Dudley R. M. Singularity of measures on linear spaces // Probab. Theory Relat. Fields. – 1966. – Vol. 6. – №2. – P. 129–132.

[46] Feldman J. Examples of non-Gaussian quasi-invariant distribution in Hilbert space // Trans. Amer. Soc. – 1961. – Vol. 99. – P. 342–349.

[47] Feyel D., Ustunel S. Solution of the Monge–Ampere equation on Wiener space for general log-concave measures // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 232. – №1. – P. 29–55.

[48] Fradelizi M., Guedon O. The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem // Discrete Comput. Geom. – 2004. – Vol. 31. – №2. – P. 327–335.

[49] Hensley D. Slicing the cube in $\mathbb{R}^n$ and probability // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol. 73. – №1. – P. 95–100.

[50] Itô K. Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Japan. – 1951. – Vol. 3. – P. 157–169.

[51] Kakutani S. On equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1984. – Vol. 49. – P. 214–224.

[52] Kannan R., Lovasz L., Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma // Discrete Comput. Geom. – 1995. – Vol. 13. – P. 541–559.

[53] Klartag B. On convex perturbations with a bounded isotropic constant // Geom. Funct. Anal. GAFA. – 2006. – Vol. 16. – №6. – P. 1274–1290.

[54] Kuelbs J. Some results for probability measures on linear topological vector spaces with an application to Strassen's LogLog law // J. Funct. Anal. – 1973. – Vol. 14. – №1. – P. 28–43.

[55] Latala R. On the equivalence between geometric and arithmetic means for logconcave measures // Convex Geom. Anal. – 1996. – P. 123–127.

[56] Leindler L. On a certain converse of Hölder's inequality // Acta Sci. Math. – 1972. – Vol. 33. – P. 217–223.

[57] Lovasz L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm // Random Structures and Algorithms. – 1993. – Vol. 4. – №4. – P. 359–412.

[58] Milman V. D., Pajor A. Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space // Lecture Notes in Math. – 1989. – Vol. 1376. – P. 64–104.

[59] Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos // Electron. J. Probab. – 2013. – Vol. 18. – №22. – P. 1–19.

[60] Nourdin I., Peccati G. Stein's method on Wiener chaos // Probab. Theory Relat. Fields. – 2009. – Vol. 145. – №1-2. – P. 75–118.

[61] Nourdin I., Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos // Stochastic Processes Appl. – 2013. – Vol. 123. – №2. – P. 651–674.

[62] Nualart D., Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals // Ann. Probab. – 2005. – Vol. 33. – №1. – P. 177–193.

[63] Paouris G. Concentration of mass on convex bodies // Geom. Func. Anal. GAFA. – 2006. – Vol. 16. – №5. – P. 1021–1049.

[64] Prekopa A. Logarithmic concave measures with application to stochastic programming // Acta Sci. Math. – 1971. – Vol. 32. – P. 301–315.

[65] Remez E.J. Sur une propriété extremale des polynômes de Tschebychef // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. – 1936. – Т. 13. – С. 93–95.

[66] Sato H. Banach support of a probability measure in a locally convex space // Lecture Notes in Math. – 1976. – Vol. 526. – P. 221–226.

[67] Shepp L.A. Distinguishing sequence of random variables from a translate to itself // Ann. Math. Statist. – 1965. – Vol. 36. – №4. – P. 1107–1112.

[68] Wiener N. The homogeneous chaos // Amer. J. Math. – 1938. – Vol. 60. – P. 879–936.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[69] Косов Е.Д. Носители мер со слабыми моментами // ДАН. – 2012. – Т. 447. – №3. – С. 254–258.

[70] Косов Е.Д. Нижние оценки мер уклонений многочленов от математических ожиданий // ДАН. – 2015. – Т. 465. – №3. – С. 278–280.

[71] Богачев В.И., Косов Е.Д., Нурдин И., Поли Г. Два свойства векторов из квадратичных форм от гауссовских случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. – 2014. – Т. 59. – №2. – С. 214–232.

[72] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. Пространства квазиинвариантности продакт-мер // Функц. анализ и его прил. – 2015. – Т. 49. – №2. – С. 79–81.

[73] Arutyunyan L.M., Kosov E.D. Sets of admissible shifts of convex measures // Rendiconti Lincei – Matematica e Applicazioni. – 2015. – Vol. 26. – №1. – P. 93–98.

Тезисы докладов на научных конференциях

[74] Kosov E.D. Estimates of integral norms of polynomials on spaces with convex measures // Сборник тезисов докладов международной научной конференции «Probability, Analysis and Geometry». Москва. 2014. – С. 8–8.

[75] Kosov E.D. Estimates of polynomials on spaces with logarithmically concave measures // Сборник тезисов докладов международной научной конференции «3rd Workshop on Analysis, Geometry and Probability». Ulm. 2015. – С. 46–46.

[76] Косов Е.Д. Носители мер со слабыми моментами // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2012». М.: МГУ, 2012. – 2 с.

[77] Косов Е.Д. Оценка L^1 нормы многочлена через L^1 норму его сужения наподмножество положительной меры на пространстве с выпуклой мерой // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2015». М.: МГУ, 2015. – 1 с.