Министерство образования РФ
ВОРОНЕЖСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ

Кафедра теоретической механики

КИНЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

для студентов-заочников
инженерно-строительных специальностей

Воронеж 2000

Составители $\boxed{\text{В.П.Беломытцев}}$, М.Н.Кирсанов, В.Д.Коробкин

УДК 531.8

Кинематика: Методические указания и контрольные задания по курсу теоретической механики /Воронеж.гос.арх.-строит.акад Воронеж. 2000: - 30с.

Приведены варианты четырех задач по теоретической механике по разделу "Кинематика". Даны примеры решений.

Методические указания предназначены для студентов-заочников специальности АД, СДМ, ПГС, ГСХ, ТВ, ВВ.

Ил.6. Табл.42. Библиогр.:4 назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Воронежской государственной архитектурно-строительной академии

Рецензент – д.т.н., проф. Сафронов В.С.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ. ВЫБОР ВАРИАНТОВ

Задание по кинематике состоит из четырех задач – К1. К2. К3. К4. Как и в заданиях по статике, условие работы выбирается в соответствии с индивидуальным шифром студента – двум последним цифрам номера зачетной книжки.

Условие задачи К1 определяется по табл. К1.1.

В задачах К1, К2, К3 дается по 10 рисунков и таблиц. Номер рисунка соответствует предпоследней цифре шифра, номер условия из таблицы — последней цифре. Например, для решения задачи К2 студент, шифр которого (номер зачетной книжки) оканчивается цифрами 73, берет рис.К2.7 и числовые данные из табл. К2.1 на строке под номером 3.

Задание выполняется в отдельной тетради. На обложке указывается: номер задания, фамилия и инициалы студента, шифр, адрес, год издания контрольных заданий.

Условие задачи переписывать дословно не следует. Решение предваряет краткое содержание задачи с условием выбранного варианта (не общее условие!), рисунок – в масштабе с числовыми данными и вопрос задачи. Не нужно подробно переписывать и методические указания. Они даны для студента, а не для рецензента.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (иначе трудно проверять). Страницы тетради нумеруются, оставляются поля для замечаний рецензента.

По ходу решения необходимо давать пояснения со ссылкой на используемые теоремы и уравнения.

Рисунки должны быть аккуратными и наглядными. Все вектора подписываются, отдельные величины можно выделить цветом (кроме красного). Там, где это требуется, следует изобразить систему координат.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут.

К работе, высылаемой на повторную проверку, должна быть приложена незачтенная работа.

Работу над ошибками (если таковые обнаружены рецензентом) можно проводить в той же тетради на оставшихся чистых листах.

Для ускорения исправления ошибок следует обратиться для консультаций на кафедру.

Общие замечания по содержанию задач следующие.

Рисунки к задачам, в основном, даны схематично без соблюдения масштаба. При простановке конкретных размеров из таблицы условий рисунок может немного изменить форму. В задаче К3 рисунок существенно зависит от угла α. Решение этой задачи начинается с геометрического построения механизма с использованием циркуля и линейки. Положение точки М на рисунке к задаче К4 также дано условно. Истинное положение вычисляется в процессе решения задачи.

Перед решением задачи рекомендуется ознакомиться с примером решения, приведенным в данных методических указаниях[1], и прочитать соответствующие разделы учебников, на которые даны библиографические ссылки.

[1]На пример решения задачи К2 в тексте указаний дана ссылка на учебник

ЗАДАЧА К1

Точка М движется в плоскости xy. Закон движения задан уравнениями $x = f_1(t), y = f_2(t)$ (табл. К1.1), где x, y выражены в см, t в секундах.

Найти координатную форму уравнения траектории: для момента времени $t = 1$с определить скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Построить в выбранном масштабе траекторию, указать на ней точку М при $t = 1$с, вектор скорости и ускорения.

Таблица К1.1

Предпоследняя цифра шифра	$x(t)$	Последняя цифра шифра	$y(t)$
0	$12\cos(\frac{\pi t}{6})$	0	$3t^2$
1	$-4-6\cos(\frac{\pi t}{3})$	1	$6t-2$
2	$-3\sin^2(\frac{\pi t}{6})$	2	$-4t$
3	$9\sin(\frac{\pi t}{6})-4$	3	$3\sin(\frac{\pi t}{6})$
4	$3\cos(\frac{\pi t}{3})-2$	4	$2t^2$
5	$-10\sin(\frac{\pi t}{6})$	5	$t+1$
6	$2-6\sin^2(\frac{\pi t}{6})$	6	$3t$
7	$2\sin(\frac{\pi t}{6})-2$	7	$3\sin(\frac{\pi t}{6})$
8	$9\cos(\frac{\pi t}{3})+5$	8	$2\cos(\frac{\pi t}{6})$
9	$3-8\sin(\frac{\pi t}{6})$	9	$\sin^2(\frac{\pi t}{6})$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Точка движется по закону

$$x = 3\sin 2t, \quad y = 2\cos 4t. \tag{1}$$

При $t = t_1 = \pi/12$ найти скорость, ускорение и радиус кривизны траектории. Построить траекторию при $0 < t < 0.4$. (x, y – в см, время – в секундах).

Решение.

1. *Траектория.* Есть два способа нахождения траектории движения точки. Самый простой и естественный – это проследить все движение, отмечая последовательные положения точки в координатах x, y. Соединяя полученные точки плавной кривой, получим траекторию. Такое построение является приближенным. Чтобы кривая была ближе к истинной, необходимо брать большее число точек. В нашем случае ограничимся 9 последовательными положениями, включая в их число и расчетное время $t = \pi/12$. Для наглядного представления о

движении точки желательно использовать равноотстоящие по времени положения. Составим табл.К1.2.

Таблица К1.2

N	t	x	y
1	0	0	2.000
2	0.05	0.299	1.961
3	0.1	0.596	1.842
4	0.15	0.886	1.651
5	0.2	1.168	1.393
6	$\pi/12 = 0.26$	1.500	1.000
7	0.3	1.694	0.725
8	0.35	1.933	0.340
9	0.4	2.152	-0.058

По форме траектория похожа на параболу. В том, что это действительно квадратная парабола убедимся, построив траекторию другим способом. Найдем координатную форму уравнения движения точки, исключив из закона движения (1) время $\sin 2t = x/3$:

$$y = 2 - 4\sin^2 2t = 2 - \frac{4}{9}x^2. \qquad (2)$$

Построить график функции $y(x)$ не составляет труда (рис.К1.1).

Для того, чтобы окончательно получить ответ на вопрос о траектории, необходимо еще выделить область определения функции (2). Не все точки кривой, определяемой этой функцией, являются точками траектории. Из условия $x = 3\sin 2t$. Следовательно, при $\pi/4 \geq t \geq 0$ имеем

$$0 \leq x \leq 3. \qquad (3)$$

Уравнение (2) при условии (3) описывает траекторию движения точки в координатной форме. Параметрическим представлением траектории является сам закон движения (1).

2. *Скорость* [1, §36-46]. Проекции скорости точки на оси x, y найдем, дифференцируя (1) по времени

$$v_x = \dot{x} = 6\cos 2t, \;\; v_y = \dot{y} = -4 \cdot 2 \cdot \sin 4t = -8\sin 4t. \qquad (4)$$

При $t = \pi/12$ имеем численные значения компонент скорости

$$v_x = 6\cos(\pi/6) = 3\sqrt{3} = 5.196 \text{ см/с},$$
$$v_y = -8\sin(\pi/3) = -4\sqrt{3} = -6.928 \text{ см/с}.$$

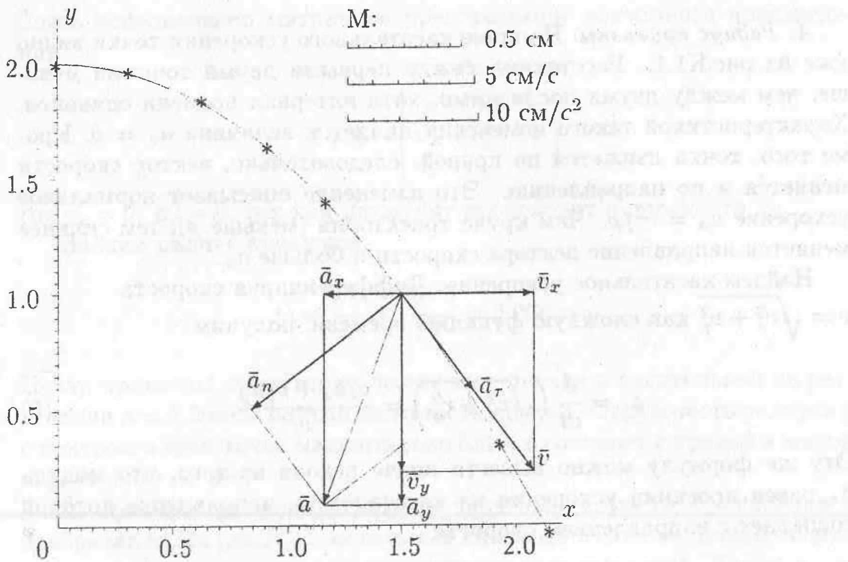


Рис.К1.1

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{3} = 8.66 \text{ см/с}. \qquad (5)$$

Вектор скорости $\bar{v}$ строится в масштабе по компонентам v_x и v_y. Если в вычислениях нет ошибок, то вектор скорости будет направлен по касательной к траектории.

3. *Ускорение.* Найдем сначала ускорение в декартовых координатах. Дифференцируя (4) по времени, найдем проекции вектора ускорения на оси координат

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -12\sin 2t,$$
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -32\cos 4t.$$

При $t = \pi/12$

$$a_x = -12\sin\pi/6 = -6 \text{ см/с}^2,$$
$$a_y = -32\cos\pi/3 = -16 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{292} = 17.088 \text{ см/с}^2.$$

Вектор ускорения строим на чертеже в своем масштабе (не обязательно совпадающим с масштабом скоростей). Направление вектора ускорения – внутрь вогнутости кривой.

4. *Радиус кривизны.* Наличие касательного ускорения точки видно уже из рис.К1.1. Расстояние между первыми двумя точками меньше, чем между двумя последними, хотя интервал времени одинаков. Характеристикой такого изменения является величина $a_\tau = \dot{v}$. Кроме того, точка движется по кривой, следовательно, вектор скорости меняется и по направлению. Это изменение описывает нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$. Чем круче траектория (меньше ρ), тем сильнее меняется направление вектора скорости и больше a_n.

Найдем касательное ускорение. Дифференцируя скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ как сложную функцию времени, получим

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right) = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (6)$$

Эту же формулу можно вывести иначе исходя из того, что модуль $\bar{a}_\tau$ равен проекции ускорения на касательную, направление которой совпадает с направлением скорости

$$|a_\tau| = \frac{\bar{a}\bar{v}}{v} = \frac{|v_x a_x + v_y a_y|}{v}.$$

Таким образом, a_τ, определяемое по (6), является *алгебраическим значением* касательного ускорения, или модулем касательного ускорения со знаком, выбранным по условному правилу. Здесь правило знаков получается естественно: если скорость и касательное ускорение направлены в одну сторону, то $a_\tau > 0$, а если в разные, то $a_\tau < 0$.

Вычислим

$$a_\tau = \frac{3\sqrt{3}(-6) + (-4\sqrt{3})(-16)}{5\sqrt{3}} = \frac{46}{5} = 9.2 \text{ см/с}^2$$

Найдем нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{292 - (46/5)^2} = \frac{72}{5} = 14.4 \text{ см/с}^2.$$

Есть другой способ вычисления нормального ускорения. Формулу для ускорения в естественных координатах $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$ умножим векторно на $\bar{v}$: $\bar{v}\times\bar{a} = \bar{v}\times\bar{a}_\tau + \bar{v}\times\bar{a}_n$. Учитывая, что $\bar{v}\times\bar{a}_\tau = 0$ и $|\bar{v}\times\bar{a}_n| = va_n$, найдем

$$a_n = \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{v} = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}.$$

Здесь использовано матричное представление векторного произведения

$$\bar{v}\times\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где $v_z = 0$, $a_z = 0$, так как движение происходит в плоскости xy.

Найдем радиус кривизны

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{75\cdot 5}{72} = 5.208 \text{ см}.$$

Центр кривизны траектории лежит на нормали к касательной на расстоянии $\rho = 5.208$ см внутри вогнутости кривой. Окружность радиуса ρ с центром в этой точке максимально близко совпадет с кривой в малой окрестности от нее.

5. *Проверка решения.* Получив значения скорости и ускорения и изобразив их на рис.К1.1, остальные кинематические величины можно найти графически для проверки сделанных вычислений. Таких величин всего две – a_n и a_τ. Раскладывая $\bar{a}$ по направлению касательной (это направление уже задано вектором скорости) и на нормаль к ней, найдем приближенные значения a_τ и a_n.

6. Для решения задачи К1 весьма эффективны математические пакеты для ЭВМ *Maple V R4.R5*, *Mathematica 3*, *MathCAD 8*, *MATLAB* и др. В Прил. на с. 29 приведено выполнение задания в системе *Maple V R4*. Строки, начинающиеся со значка >, содержат операторы и набираются пользователем. Комментарии набраны на русском языке (без значка >). Результаты, выдаваемые программой, напечатаны в центре строки. После оператора **plot([x,y,t=0..Pi/4])** должен быть рисунок траектории движения (для краткости опущен). Для решения другой задачи достаточно отредактировать первую строку, содержащую закон движения (**x:=..; y:=..**), и предпоследнюю, где указано время. Можно также уточнить пределы, в которых строится график в операторе **plot**. Продифференцирует и вычислит результаты сама программа *Maple*. Эта же программа является основой символьных вычислений пакетов *MathCAD 8*, *MATLAB*.

ЗАДАЧА К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 2-4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, рейки или груза, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис.К2.0–К2.9, табл.К2.1).

В столбцах "Дано" табл.К2.1 заданы радиусы r_2, r_3, r_4 в см, указан закон движения или закон изменения скорости одного из звеньев механизма, где $S_1(t)$ – закон движения рейки или груза, $\varphi_2(t)$ – закон вращения колеса 2, $v_1(t)$ – закон изменения скорости рейки или груза, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2. Угол φ выражен в радианах, S – в см, t – в секундах. Положительное направление для φ и ω – против хода часовой стрелки, для S_1 и v_1 направление оси x указано на рис.К2.0–К2.9. Определить в момент $t_1 = 2$с скорость и ускорение точки М и величины, указанные в столбце "Найти". Скорость и ускорение точки М изобразить на рисунке.

Таблица К2.1

Последняя цифра шифра	Дано				Найти
	$S(t), v(t), \varphi(t), \omega(t)$	r_2	r_3	r_4	
0	$S_1 = 4(7t + t^2)$	2	3	4	ω_3, ε_3
1	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	2	4	5	v_1, a_1
2	$\varphi_2 = 2t^2 - 9$	4	5	8	v_1, a_1
3	$v_1 = 2(t^2 + 3)$	3	4	6	ω_3, ε_3
4	$\varphi_4 = 3t - t^2$	3	5	6	v_1, a_1
5	$S_1 = 2t^2 + 5$	5	7	11	ω_3, ε_3
6	$\varphi_4 = 2(t^2 - 3t)$	3	5	7	v_1, a_1
7	$\omega_2 = 8t - 3t^2$	5	6	10	v_1, a_1
8	$v_1 = 3t^2 + 8$	6	7	9	ω_3, ε_3
9	$\omega_4 = 5t - 2t^2$	4	5	6	v_1, a_1

Указания

1. Необходимо изучить главу X учебника [1], в которой излагается поступательное и вращательное движение твердого тела.

2. При внешнем или внутреннем зацеплении колес скорости и касательные ускорения соприкасающихся точек совпадают: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, $\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2$.

3. Два колеса, имеющие общую ось вращения, жестко связаны между собой, имеют одинаковые углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения.

Варианты механизмов к задаче К2

Рис. К2.0

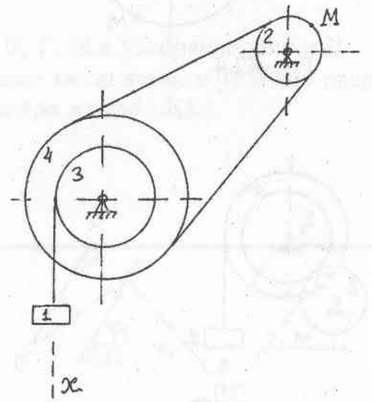


Рис. К2.1

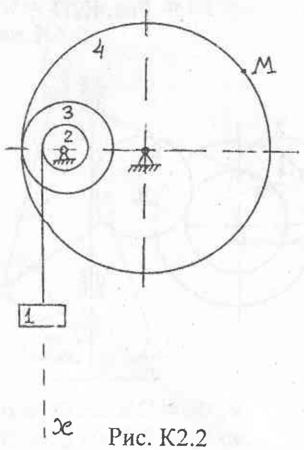


Рис. К2.2

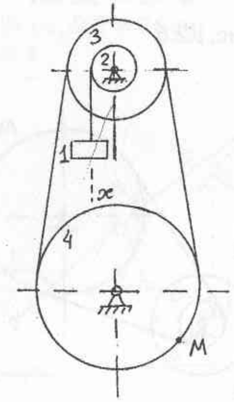


Рис. К2.3

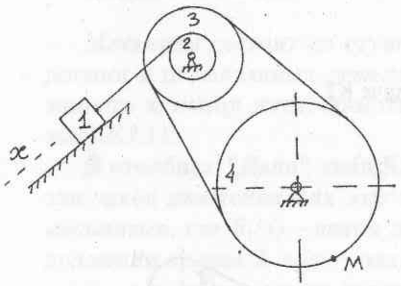


Рис. К2.4

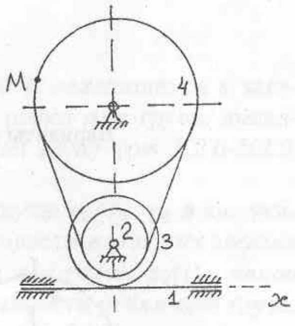


Рис. К2.5

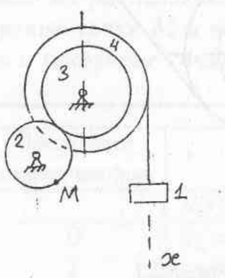


Рис. К2.6

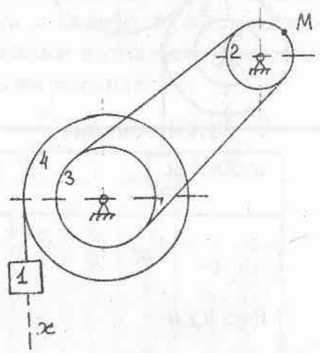


Рис. К2.7

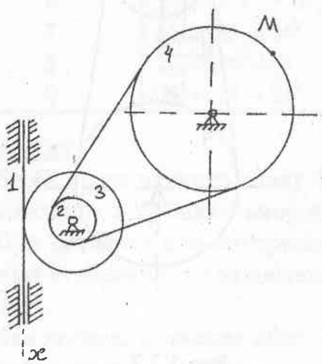


Рис. К2.8

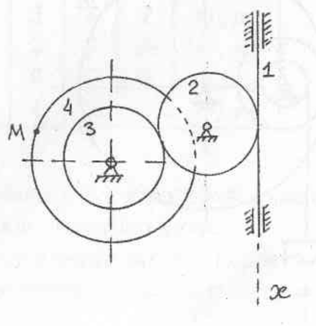


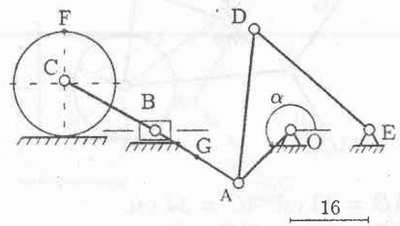
Рис. К2.9

ЗАДАЧА К3

Механизм состоит из 5 стержней, ползуна B (вертикальная или горизонтальная подвижность) и цилиндра C, катящегося по неподвижной поверхности без проскальзывания (рис.К3.0-К3.9). Механизм приводится в движение кривошипом OA=15 см, равномерно вращающимся против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Радиус цилиндра – 10 см. Точка G находится на середине звена AB или AC. Горизонтальные и вертикальные размеры на рис.К3.0-К3.9 относятся к неподвижным объектам: шарнирам, опорным плоскостям и линиям движения ползунов.

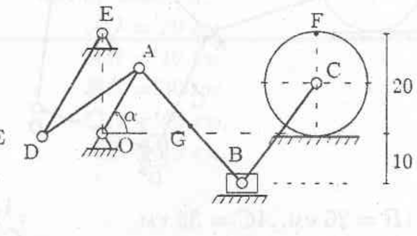
Найти скорости точек A, B, C, D, F, G и ускорение точки B.

Угол α, определяющий положение механизма, и угловая скорость ω задаются по последней цифре шифра из табл.К3.1.



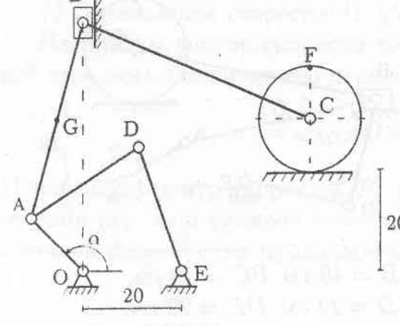
$AB = 20$ см, $BC = 21$ см,
$AD = 31$ см, $DE = 31$ см.

Рис.К3.0



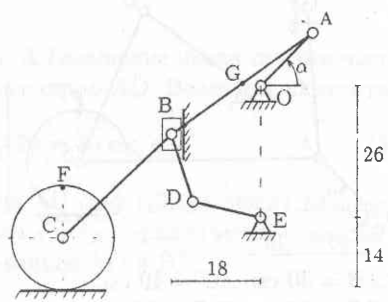
$AB = 31$ см, $BC = 25$ см,
$AD = 24$ см, $DE = 24$ см.

Рис.К3.1



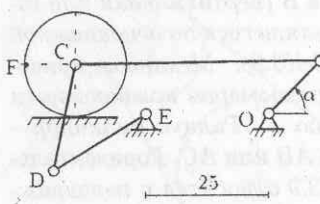
$AB = 40$ см, $BC = 50$ см,
$AD = 26$ см, $DE = 26$ см.

Рис.К3.2



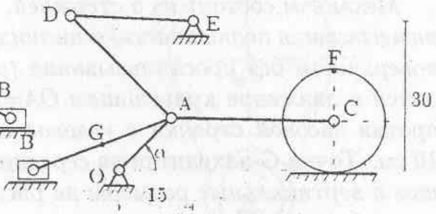
$AB = 35$ см, $BC = 30$ см,
$BD = 14$ см, $DE = 14$ см.

Рис.К3.3



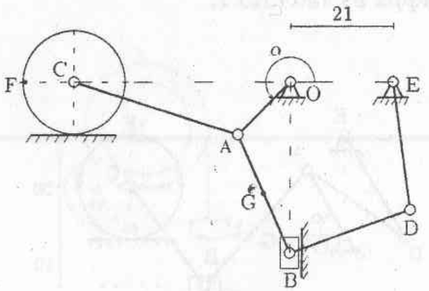
$AB = 22$ см, $AC = 50$ см,
$CD = 22$ см, $DE = 22$ см.

Рис.К3.4



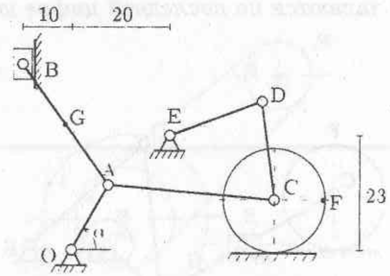
$AB = 30$ см, $AC = 33$ см,
$AD = 29$ см, $DE = 25$ см.

Рис.К3.5



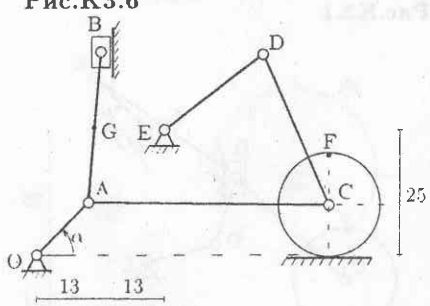
$AB = 26$ см, $AC = 35$ см,
$BD = 26$ см, $DE = 26$ см.

Рис.К3.6



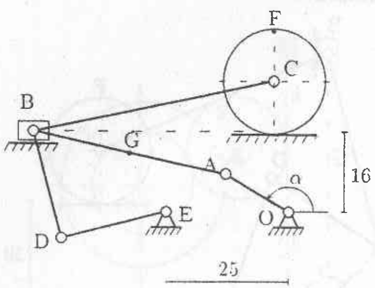
$AB = 30$ см, $AC = 34$ см,
$CD = 20$ см, $DE = 20$ см.

Рис.К3.7



$AB = 30$ см, $AC = 49$ см,
$CD = 33$ см, $DE = 25$ см.

Рис.К3.8



$AB = 40$ см, $BC = 50$ см,
$BD = 22$ см, $DE = 22$ см.

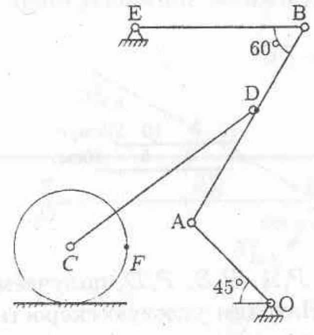
Рис.К3.9

Таблица К3.1

Последняя цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	210°	225°	240°
ω, $1/c$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Дано:



$\omega_{AO} = 2\,\frac{1}{c}$,

$R = 10$ см,
$AO = 20$ см,
$AB = 40$ см,
$BE = 30$ см,
$CD = 43$ см,
$AD = 23$ см.

Рис.К3.10

Найти скорость точек A, B, C, D, F и ускорение точки B.

Задачу решим графически.

1) Определение скорости [1, §54]

Изобразим вектор скорости точки A (вращение звена против часовой стрелки), направив его перпендикулярно AO. Величина скорости

$$v_A = \omega_{AO} AO = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с}. \quad (3)$$

Мгновенный центр скоростей P_1 звена AB (рис.К3.11) лежит на пересечении перпендикуляров к векторам $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ – фактически совпадает с точкой пересечения продолжений звеньев AO и BE.

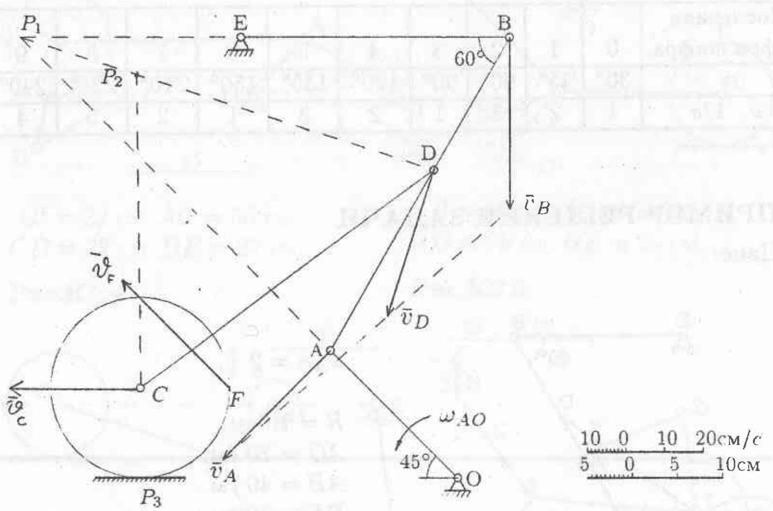


Рис.К3.11

Измеряя в выбранном масштабе длины P_1A, P_1B, P_1D, получаем $P_1A = 49$см, $P_1B = 54.7$см, $P_1D = 48.4$см. Находим угловую скорость звена АВ, а затем скорости точек, которые на нем располагаются

$$\omega_{AB} = v_A/P_1A = 40/49 = 0.816\text{рад/с}.$$
$$v_B = \omega_{AB}P_1B = 0.816 \cdot 54.7 = 44.61\text{см/с},$$
$$v_D = \omega_{AB}P_1D = 0.816 \cdot 48.4 = 39.54\text{см/с}.$$

Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен P_1D. Если изобразить найденный вектор на рис.К3.11 в масштабе скоростей, то его конец должен попасть на отрезок, соединяющий концы векторов скоростей точек А и В этого же звена (пунктир на рис.К3.11), и поделить его на части, пропорциональные расстояниям AD и DB, т.е. в отношении 23/17.

Заметим, что для уточнения расчета расстояния P_1A и P_1B можно найти аналитически по теореме синусов из треугольника ABP_1, а P_1D — по теореме косинусов из треугольника P_1BD.

Аналогично находим скорость центра цилиндра С. Мгновенный центр скоростей P_2 звена CD лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек C и D. Расстояния до него — $P_2C = 37$см, $P_2D = 35$см. Угловая скорость

$$\omega_{CD} = v_D/P_2D = 39.54/35 = 1.12\text{рад/с}.$$

Скорость центра цилиндра

$$v_C = \omega_{CD}P_2C = 1.12 \cdot 37 = 41\text{см/с}.$$

Так как цилиндр катится без проскальзывания, то его мгновенный центр скоростей лежит в точке касания P_3. Учитывая, что скорости точек пропорциональны их расстояниям до МЦС, получаем $v_F = v_C\frac{R\sqrt{2}}{R} = 41 \cdot 1.414 = 57.98$ см/с.

2) Определение ускорения [1,§58]

Найдем ускорение точки В (рис.К3.12). Выразим $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$ через ускорение полюса А.

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^{ц} + \bar{a}_{AB}^{в}. \tag{6}$$

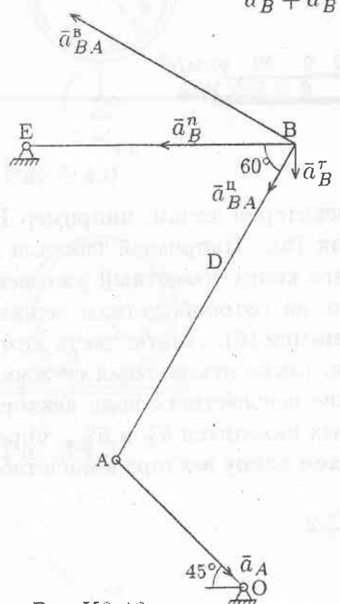


Рис.К3.12

Ускорение точки А складывается в общем случае из нормальной компоненты $\bar{a}^n$ и касательной $\bar{a}^\tau$. Так как по условию ω =const, то $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$ и $a^\tau = \varepsilon OA = 0$. Поэтому

$$a_A = a_A^n = \omega^2 OA = 4 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}^2. \tag{7}$$

Вектор $\bar{a}_A$ направлен по радиусу АО к центру вращения О. Нормальная компонента ускорения точки В

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{BE} = \frac{44.61^2}{30} = 66.34 \text{ см/с}^2. \tag{8}$$

Вектор $\bar{a}_{AB}^{ц}$ направлен по звену АВ к полюсу А, а вектор $\bar{a}_{AB}^{в}$ ему перпендикулярен (рис.К3.12). Векторное уравнение (6) относительно неизвестных $\bar{a}_B^\tau$ и $\bar{a}_{BA}^{в}$ решим графически. (рис.К3.13).

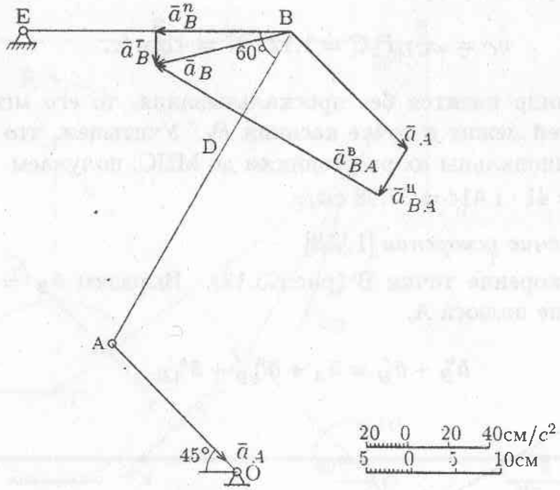


Рис.К3.13

Для этого поочередно отложим от некоторой точки, например B, вектора левой и правой части уравнения (6). Например, сначала к точке B приложим вектор $\bar{a}_A$, затем к его концу известный уже вектор $\bar{a}^{ц}_{AB}$ и перпендикулярно ему прямую, на которой должен лежать последний вектор $\bar{a}^{в}_{AB}$ правой части уравнения (6). Левую часть этого уравнения будем изображать графически, также откладывая от точки B $\bar{a}^{n}_{B}$ и перпендикулярно ему направление неизвестного пока вектора $\bar{a}^{\tau}_{B}$. Точка пересечения прямых, на которых находятся $\bar{a}^{\tau}_{B}$ и $\bar{a}^{в}_{BA}$, определяет конец вектора суммы - $\bar{a}_B$. Измеряем длину вектора в масштабе $a_B = 68.75 см/c^2$.

Результаты расчета занесем в табл.К3.2

Таблица К3.2

v_A	v_B	v_C	v_D	v_F	a_A	a_B
см/с					см/c^2	
40	44.61	41	39.54	57.98	80	68.75

ЗАДАЧА К4

Геометрическая фигура вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости (рис.К4.0; К4.1; К4.4; К4.5; К4.6) или вокруг оси, лежащей в ее плоскости (рис.К4.2;К4.3;К4.7-К4.9). По каналу, расположенному на фигуре, движется точка M по известному закону $AM = S(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при $t = 1$ с. Функция $S(t)$, размер h и закон вращения фигуры $\varphi_п(t)$ даны в табл.К4.1. На рис. К4.0 - К4.3 радиус $R = 60$ см.

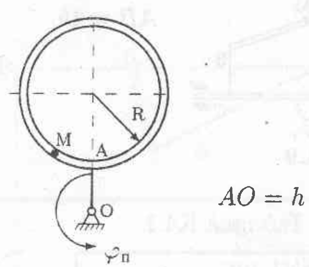


Рис.К4.0

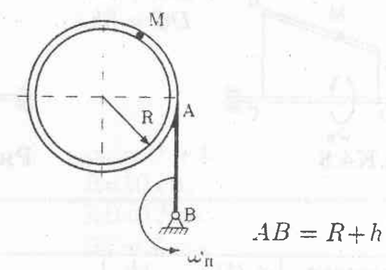


Рис.К4.1

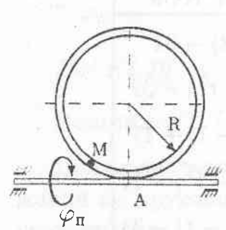


Рис.К4.2

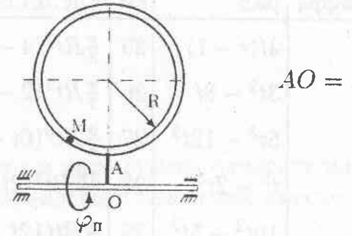


Рис.К4.3

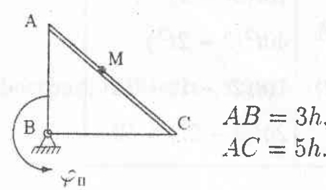


Рис.К4.4

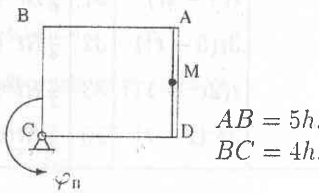
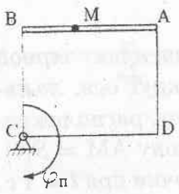
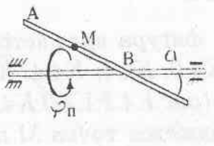


Рис.К4.5



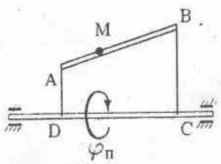
$AB = 5h$,
$BC = 4h$.

Рис.К4.6



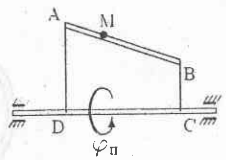
AB=2h,
$\alpha = \pi/3$.

Рис.К4.7



$AD = h$,
$BC = 2h$,
$DC = 3h$.

Рис.К4.8



$AD = 3h$,
$BC = 2h$,
$AB = 4h$.

Рис.К4.9

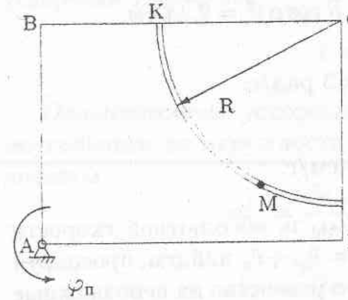
Таблица К4.1

Последняя цифра шифра	$\varphi_{\text{п}}(t)$ рад	h см	$S(t)$, см Рис.К4.0–К4.3	$S(t)$, см Рис.К4.4–К4.9
0	$4t(t-1)$	25	$\frac{\pi}{3}Rt^2(4-2t)$	$50t(3-t)-64$
1	$3t^2-8t$	26	$\frac{\pi}{2}Rt^2(2-t)$	$40t^2(3-t^2)-32$
2	$6t^3-12t^2$	27	$\frac{\pi}{4}Rt^3(6t-1)$	$40(2t(t-1)+1)$
3	t^2-2t^3	28	$\frac{2\pi}{3}Rt^2(2t-t)$	$12(5t(2-t^2)-1)$
4	$10t^2-5t^3$	29	$\frac{\pi}{6}Rt(12t-1)$	$16(5t^2(2-t)-3)$
5	$2t(t-1)$	30	$\frac{\pi}{2}Rt(1-4t)$	$40t^2+t$
6	$t(5-4t)$	31	$\frac{\pi}{6}Rt^3(3-t)$	$10t(5t-2)$
7	$3t(5-t^2)$	32	$\frac{\pi}{4}Rt^2(1-2t)$	$40t^2(3-2t^2)$
8	$t(2t^2-11)$	33	$\frac{\pi}{2}Rt^2(5t^2-2)$	$10t(2t-1)+20$
9	$3t^2(2-t)$	20	$\frac{\pi}{3}Rt(6t-1)$	$20t(1-2t)+50$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пример №1

Прямоугольник ABCD вращается вокруг оси, проходящей через вершину A (рис.К4.10). Ось перпендикулярна плоскости прямоугольника. По круговому каналу (центр в точке C), расположенному на прямоугольнике, движется точка M по закону $KM = 5\pi t^3/3$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при $t_1 = 1$ с.



$\varphi_{\text{п}} = t^2 + t$,
R=10 см,
AB=12 см,
BC=15 см.

Рис.К4.10

Решение [1, Гл.XIII].

Движение точки M представим в виде суммы относительного движения по круговому каналу и переносного вращения вместе с прямоугольником.

1. Положение точки

За время t_1 точка проходит путь по дуге окружности

$$KM = 5\pi/3 \text{ см}.$$

Центральный угол, соответствующий этой дуге, равен

$$\alpha = \frac{KM}{R} = \frac{5\pi}{3 \cdot 10} = \frac{\pi}{6}.$$

Изобразим точку в этом положении (рис.К4.11).

2. Определение скорости

Относительная скорость точки M направлена по касательной к окружности (под углом α к вертикали) и при $t = 1$ с равна

$$v_{\text{от}} = \frac{d}{dt} KM(t) = 5\pi t^2 = 15.71 \text{ см/с}.$$

Переносной скоростью точки является скорость точки прямоугольника, совпадающей в данный момент с M [1]:

$$v_{\text{п}} = \omega_{\text{п}} R_{\text{п}}.$$

Найдем радиус $R_{\text{п}}$ траектории переносного движения и угловую скорость фигуры $\omega_{\text{п}}$ при $t = 1$ с:

$$R_{\text{п}} = \sqrt{(AB - R\sin\alpha)^2 + (BC - R\cos\alpha)^2} = 9.44 \text{ см}.$$

$$\omega_{\text{п}} = \frac{d\varphi_{\text{п}}(t)}{dt} = 2t + 1 = 3 \text{ рад/с}.$$

Отсюда

$$v_{\text{п}} = 3 \cdot 9.44 = 28.33 \text{ см/с}.$$

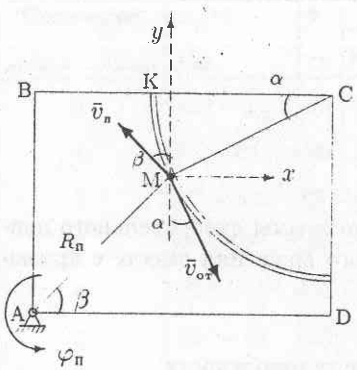


Рис.К4.11

Модуль абсолютной скорости $\bar v = \bar v_{\text{от}} + \bar v_{\text{п}}$ найдем, проецируя это равенство на неподвижные оси координат x, y (можно воспользоваться также теоремой косинусов)

$$v_x = v_{\text{от}} \sin\alpha - v_{\text{п}} \sin\beta,$$

$$v_y = -v_{\text{от}} \cos\alpha + v_{\text{п}} \cos\beta.$$

Вычислим тригонометрические функции угла β:

$$\sin\beta = \frac{AB - R\sin\alpha}{R_{\text{п}}} = \frac{12 - 10 \cdot 0.5}{9.44} = 0.741,$$

$$\cos\beta = \frac{BC - R\cos\alpha}{R_{\text{п}}} = \frac{15 - 10 \cdot 0.866}{9.44} = 0.671.$$

[1]Иногда переносная скорость обозначается v_e (от франц. слова *emporter*), реже v_{tr} (от англ. слова *transport*), а относительная — v_r (от англ. слова *relativ*). Эти же индексы используются и для других компонент сложного движения.

Получим численные значения проекций абсолютной скорости

$$v_x = -13.15 \text{ см/с}, \quad v_y = 5.41 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{13.15^2 + 5.41^2} = 14.22 \text{ см/с}.$$

3. Определение ускорения

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений *Кориолиса* [2]

$$\bar a = \bar a_{\text{от}} + \bar a_{\text{п}} + \bar a_{\text{к}}. \quad (1)$$

Относительное ускорение точки, движущейся относительно прямоугольника по окружности, имеет нормальную и касательную компоненты

$$a^{\tau}_{\text{от}} = \frac{dv_{\text{от}}}{dt} = 10\pi t = 31.42 \text{ см/с}^2,$$

$$a^{n}_{\text{от}} = \frac{v^2_{\text{от}}}{R} = \frac{15.71^2}{10} = 24.67 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\bar a^n_{\text{от}}$ направим по радиусу окружности к точке C, $\bar a^{\tau}_{\text{от}}$ – по касательной, в сторону увеличения дуги KM, т.к. $a^{\tau}_{\text{от}} > 0$ (рис.К4.12).

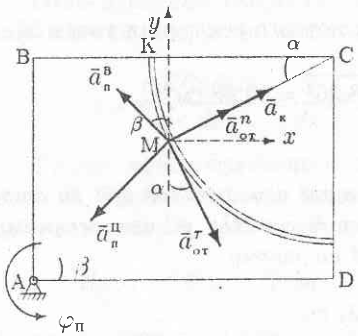


Рис.К4.12

Траектория *переносного* движения точки – окружность радиуса $R_{\text{п}}$ с центром A. Прямоугольник вращается с угловой скоростью $\omega_{\text{п}} = 2t+1$ и угловым ускорением

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{d\omega_{\text{п}}}{dt} = \frac{d(2t+1)}{dt} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Вычислим соответствующие компоненты переносного ускорения

$$a^{\text{ц}}_{\text{п}} = \omega^2_{\text{п}} R_{\text{п}} = 3^2 \cdot 9.44 = 85 \text{ см/с}^2.$$

[2]*Gaspard Gustave de Coriolis* (1792–1843) французский механик и математик.

$$a_{\text{п}}^{\text{в}} = \varepsilon_{\text{п}} R_{\text{п}} = 2 \cdot 9.44 = 18.89 \text{ см}/c^2.$$

Вектор $\bar{a}_{\text{п}}^{\text{в}}$ направлен против часовой стрелки перпендикулярно радиусу $R_{\text{п}}$. Вектор $\bar{a}_{\text{п}}^{\text{ц}}$ – к центру A.

Величина ускорения *Кориолиса* [3] определяется по формуле

$$a_{\text{к}} = 2|\omega_{\text{п}}||v_{\text{от}}|\sin\gamma.$$

Вектор $\bar{\omega}_{\text{п}}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, угол γ между $\bar{v}_{\text{от}}$ и $\bar{\omega}_{\text{п}}$ равен 90°. Имеем

$$a_{\text{к}} = 2 \cdot 3 \cdot 15.71 = 94.26 \text{ см}/c^2.$$

Направление вектора ускорения Кориолиса получим по правилу *Жуковского*[4] поворотом вектора относительной скорости по направлению переносного вращения, т.е. против часовой стрелки.

Найдем абсолютное ускорение. Спроецируем (1) на неподвижные оси координат

$$\begin{aligned} a_x &= a_{\text{от}}^{\tau}\sin\alpha + a_{\text{от}}^{n}\cos\alpha - a_{\text{п}}^{\text{ц}}\cos\beta - a_{\text{п}}^{\text{в}}\sin\beta + a_{\text{к}}\cos\alpha = \\ &= 31.42 \cdot 0.5 + 24.67 \cdot 0.866 - 85 \cdot 0.671 - \\ &- 18.89 \cdot 0.741 + 94.26 \cdot 0.866 = 47.65 \text{ см}/c^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= -a_{\text{от}}^{\tau}\cos\alpha + a_{\text{от}}^{n}\sin\alpha - a_{\text{п}}^{\text{ц}}\sin\beta + a_{\text{п}}^{\text{в}}\cos\beta + a_{\text{к}}\sin\alpha = \\ &= -31.42 \cdot 0.866 + 24.67 \cdot 0.5 - 85 \cdot 0.741 + \\ &+ 18.89 \cdot 0.671 + 94.26 \cdot 0.5 = -18.06 \text{ см}/c^2. \end{aligned}$$

Окончательно найдем величину абсолютного ускорения точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{47.65^2 + 18.06^2} = 50.96 \text{ см}/c^2.$$

Пример №2

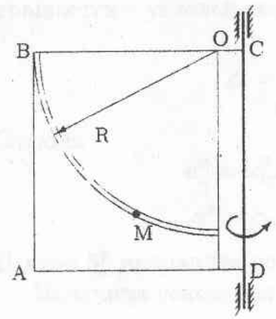
Прямоугольник ABCD вращается вокруг оси, проходящей по стороне DC. По круговому каналу (центр в точке O), расположенному на прямоугольнике, движется точка M по закону

$$BM = \pi t(2t - 3) \text{ см}.$$

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при $t = t_1$.

[3] Это ускорение называют иногда поворотным, а в англоязычной литературе – *supplementary acceleration* (дополнительным)

[4] Жуковский Николай Егорович (1847 – 1921) — русский ученый, основоположник гидроаэродинамики. Преподавал теоретическую механику в МГУ.



$\varphi_{\text{п}} = 0.2t^2$,
R=12 см,
BC=15 см,
$t_1 = 2$ с.

Рис.К4.13

Решение

1. Положение точки

Найдем центральный угол, соответствующий дуге BM при $t = t_1$,

$$\alpha = \frac{BM}{R} = \frac{\pi}{6}.$$

Изобразим точку в этом положении (рис.К4.14).

2. Определение скорости

Относительная скорость точки M направлена по касательной к окружности (под углом α к оси z) и при $t = 2$ c равна

$$v_{\text{от}} = \frac{dBM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\pi t(2t - 3) = \pi(4t - 3) = 15.71 \text{ см}/c.$$

Траекторией переносного движения является окружность с центром N. Эта окружность лежит в плоскости xy, перпендикулярной к оси вращения DC (ось z). Радиус окружности

$$MN = R\cos\alpha + OC = R\cos\alpha + BC - R = 12 \cdot 0.866 + 15 - 12 = 13.39 \text{ см}.$$

Угловая скорость вращения прямоугольника ABCD

$$\omega_{\text{п}} = \frac{d\varphi_{\text{п}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}0.2t^2 = 0.4t = 0.8 \text{ рад}/c.$$

Отсюда переносная скорость $v_{\text{п}} = \omega_{\text{п}} MN = 0.8 \cdot 13.39 = 10.71$ см/c. Вектор $\bar{v}_{\text{от}}$ лежит в плоскости zy, а $\bar{v}_{\text{п}}$ направлен по оси x, следовательно, они перпендикулярны.

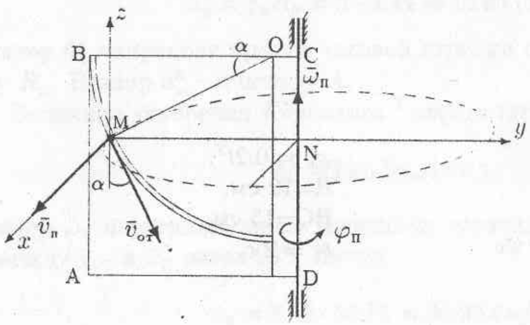


Рис.К4.14

Модуль абсолютной скорости равен в этом случае

$$v = \sqrt{v_{п}^2 + v_{от}^2} = \sqrt{10.71^2 + 15.71^2} = 19.01 \text{ см/с}.$$

3. Определение ускорения

Абсолютное ускорение точки определяется по формуле $\bar{a} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{п} + \bar{a}_{к}$. Найдем *относительное* ускорение точки, движущейся по окружности радиуса R. Нормальная составляющая

$$a^n_{от} = \frac{v_{от}^2}{R} = \frac{15.71^2}{12} = 20.56 \text{ см/с}^2.$$

Касательная составляющая

$$a^\tau_{от} = \frac{dv_{от}}{dt} = \frac{d}{dt}\pi(4t-3) = 4\pi = 12.57 \text{ см/с}^2.$$

Оба вектора лежат в плоскости zy (рис.К4.15).

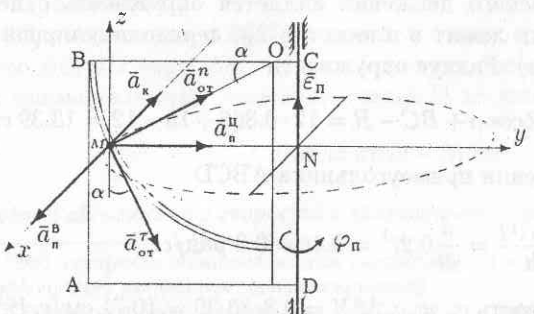


Рис.К4.15

Вычислим компоненты *переносного* ускорения. Прямоугольник вращается с угловой скоростью $\omega_{п} = 0.4t$ рад/с и угловым ускорением

$$\varepsilon_{п} = \frac{d\omega_{п}}{dt} = \frac{d}{dt}0.4t = 0.4 \text{ рад/с}^2.$$

Отсюда

$$a^{ц}_{п} = \omega_{п}^2 MN = 0.8^2 \cdot 13.39 = 8.57 \text{ см/с}^2,$$

$$a^{в}_{п} = \varepsilon_{п} MN = 0.4 \cdot 13.39 = 5.36 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}^{в}_{п}$ направлен по оси x, вектор $\bar{a}^{ц}_{п}$ – к оси вращения вдоль y.

Величина ускорения *Кориолиса* определяется по формуле

$$a_{к} = 2|\omega_{п}||v_{от}|\sin\gamma.$$

Вектор $\bar{\omega}_{п}$ всегда направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки. В нашем случае – вверх.

Угол γ между $\bar{v}_{от}$ и $\bar{\omega}_{п}$ равен 150°.

Имеем

$$a_{к} = 2 \cdot 0.8 \cdot 15.71 \cdot 0.5 = 12.57 \text{ см/с}^2.$$

Для того, чтобы найти направление вектора ускорения Кориолиса, воспользуемся правилом Жуковского (рис.К4.16).

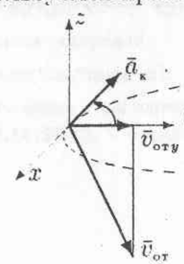


Рис.К4.16

Спроецируем вектор относительной скорости $\bar{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения, т.е. на на плоскость xy. Повернув проекцию $v_{отy}$ по направлению переносного вращения на 90°, получим направление вектора ускорения Кориолиса. Вектор $\bar{a}_{к}$ лежит на оси x и направлен в сторону отрицательных значений.

Вычислим абсолютное ускорение. Проекции векторной суммы всех найденных ускорений

$$a_x = a^{в}_{п} - a_{к} = 5.36 - 12.57 = -7.21 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a^{ц}_{п} + a^{\tau}_{от}\sin\alpha + a^n_{от}\cos\alpha = 8.57 + 12.57 \cdot 0.5 + 20.56 \cdot 0.866 = 32.66 \text{ см/с}^2.$$

$$a_z = a^n_{\text{от}} \sin\alpha - a^\tau_{\text{от}} \cos\alpha = 20.56 \cdot 0.5 - 12.57 \cdot 0.866 = -0.6 \text{ см}/c^2.$$

Окончательно абсолютное ускорение точки М

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{7.21^2 + 32.66^2 + 0.6^2} = 33.45 \text{ см}/c^2.$$

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебн. для вузов. - М.: Высшая школа, 1995.- 416 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики.Ч.1.Статика. Кинематика. – М.: Высш. шк., 1984. – 342 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособ. для тех.вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.: Под ред. А.А.Яблонского.- 4-е изд - М.:Высшая школа, 1985 - 367 с.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.Т.1. – М.: Наука, 1984. – 560 с.

Приложение. Выполнение задания К1 в системе MAPLE V Release 4

Закон движения в координатной форме

```
> x:=3*sin(2*t);y:=2*cos(4*t);
```

Траектория

```
> plot([x,y, t=0..Pi/4]);

                    x := 3 sin(2 t)
                    y := 2 cos(4 t)
```

Скорости и ускорения в проекциях на оси x,y

```
> vx:=diff(x,t);ax:=diff(vx,t);
> vy:=diff(y,t);ay:=diff(vy,t);

                    vx := 6 cos(2 t)
                   ax := -12 sin(2 t)
                    vy := -8 sin(4 t)
                   ay := -32 cos(4 t)
```

Модуль скорости

```
> v:=sqrt(vx*vx+vy*vy):
```

Касательное ускорение

```
> at:=(vx*ax+vy*ay)/v:
```

Модуль ускорения

```
> aa:=sqrt(ax*ax+ay*ay):
```

Нормальное ускорение

```
> an:=sqrt(aa*aa-at*at):
```

Заданное время и численные результаты

```
> t:=3.14159/12; V=v;At=at; A=aa; An=an;

                    t := .2617991667
                    V=8.660252006
                    At=9.200017070
                    A=17.08802882
                    An=14.40001440
```

Радиус кривизны

```
> ro:=v*v/an;

                    ro := 5.208325681
```