Д. Д. Иваненко,
Г. А. Сарданашвили

ГРАВИТАЦИЯ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
П. И. Фомин

Издание пятое

URSS
МОСКВА

ББК 22.145 22.311 22.312 22.315

Иваненко Дмитрий Дмитриевич,
Сарданашвили Геннадий Александрович

Гравитация / Отв. ред. П. И. Фомин. Изд. 5-е. — М.: Издательство ЛКИ, 2012. — 200 с.

В настоящей книге изложена современная точка зрения на теорию гравитации, ее успехи и трудности, перспективы ее включения на базе калибровочных и обобщенных моделей в объединенную теорию элементарных частиц. Освещена предыстория создания общей теории относительности, изложены ее основы. Рассмотрены проблемы систем отсчета, энергии гравитационного поля, гравитационных сингулярностей, квантования гравитации.

Книга адресована физикам — научным работникам, студентам и аспирантам физико-математических специальностей, а также широкому кругу лиц, интересующихся современным состоянием теории гравитации.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук *В. Г. Писаренко*;
д-р физ.-мат. наук *Б. И. Спасский*

Издательство ЛКИ. 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×84/16. Печ. л. 12,5. Зак. № ЖМ-12.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-01360-2

© Издательство ЛКИ, 2008, 2012

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс (многоканальный):
+ 7 (499) 724-25-45
URSS

12015 ID 160928
9 785382 013602

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Посвящается 100-летию со дня рождения Дмитрия Дмитриевича Иваненко

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Хотя наша книга «Гравитация» была написана двадцать лет назад, почти все рассматривавшиеся в ней проблемы теории гравитации продолжают оставаться актуальными. В первую очередь это проблемы систем отсчета, энергии гравитационного поля, гравитационных сингулярностей, квантовой гравитации, объединения гравитации и других фундаментальных взаимодействий. Более того, нет заметного продвижения в решении этих проблем, хотя применяемая математическая техника и теоретические модели становятся все изощреннее. Сегодня в теории гравитации доминируют так называемые струны и мембраны. Однако все новые модели так или иначе исходят из главного постулата ОТО, что гравитация — это пространственно-временная метрика. При этом фундаментальные трудности самой ОТО, которым была посвящена «Гравитация», остаются. Поэтому наша книга в целом сохранила свою актуальность и переиздается без изменений. Она может быть полезной для начинающих гравитационистов и всех тех, кто интересуется основами теории гравитации. Хотя список цитируемых публикаций, конечно, устарел, интересующийся читатель может легко приобщиться к современной литературе, используя общедоступную библиотеку электронных препринтов http://xxx.lanl.gov.

Главной причиной своеобразного застоя в теории гравитации является скудость новых экспериментальных данных. Гравитационные эксперименты на лабораторных расстояниях и в масштабе Солнечной системы ничего неожиданного не дали, за исключением так называемого феномена «Пионера», подвергавшегося аномальному постоянному ускорению. Хотя астрофизические и космологические наблюдения привели к ряду важных открытий, их интерпретация часто сталкивается с трудностями. Например, она может зависеть от выбора той или иной шкалы расстояний до космических объектов. Об экспериментах по квантовой гравитации и говорить не приходится.

Более значительный успех достигнут в физике высоких энергий. Кварк-лептонное объединение и существование хиггсовского вакуума в модели Вейнберга—Салама стали фактом. Их теоретической основой является калибровочная теория со спонтанным нарушением симметрий. Однако все предложенные варианты единого мультиплета гравитона с другими элементарными частицами остаются пока чисто гипотетическими. При этом теория гравитации тоже может быть представлена как калибровочная теория со спонтанным нарушением пространственно-временных симметрий. Хиггсовским полем, ответственным за это нарушение пространственно-временных симметрий, служит псевдоримановa метрика, его физической первопричиной является существование дираковской фермионной материи с лоренцевской группой симметрий на геометрической арене с группой общих ковариантных преобразований. Таким образом, гравитация, отождествляемая согласно ОТО с метрикой, по своей физической природе является хиггсовским полем. В этой связи описание хиггсовского вакуума как в объединенных моделях элементарных частиц, так и в теории гравитации становится сейчас одной из наиболее актуальных теоретических задач.

Геннадий Сарданашвили

ВВЕДЕНИЕ
ИСТОРИЯ И ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Физика XX в. пережила один за другим несколько периодов, каждый из которых приводил к кардинальному изменению физической картины мира. Это — теория релятивизма и гравитации, модель атома и квантовая теория, физика ядра и элементарных частиц.

В настоящее время на первый план фундаментальных физических исследований вышла задача построения единой теории (так называемого Большого объединения) элементарных частиц и их взаимодействий. Впечатляющим достижением в этом направлении стало экспериментальное подтверждение объединенной модели электромагнитного и слабого взаимодействий Вейнберга — Салама. В принципиальном плане не вызывает сомнения и кварк-глюонная модель сильного взаимодействия. На повестке дня стоит создание объединенной картины кварков и лептонов, сильного и электрослабого взаимодействий (см. разд. 3.2).

Какое место на этом фоне занимает сегодня теория гравитации? Далеко не последнее.

Во-первых, она имеет непреходящее значение, поскольку решаемые ею проблемы касаются не просто одного из физических полей, но самой концепции пространства-времени, поэтому они лежат в основе всей физической картины мира. Во-вторых, теория гравитации очень интенсивно развивается. Возникнув в начале XX в. вслед за специальной теорией относительности (СТО) и всколыхнув весь физический (и не только физический) мир, теория гравитации — эйнштейновская общая теория относительности (ОТО) — затем, в период построения квантовой механики и ядерной физики, отошла на второй план. Немалую роль в этом сыграло и то, что ОТО выглядела в то время настолько законченной теорией, что все попытки ее ревизии, расширения, обобщения, в том числе в лице единых теорий 20-х годов, оказались несостоятельными. Понадобились десятилетия, чтобы стало ясно: в ОТО

при всех ее огромных успехах имеются нерешенные проблемы, сравнимые по значению с проблемами квантовой теории поля и физики элементарных частиц.

Интерес к теории гравитации вновь стал возрастать в 60-е годы. В немалой степени этому способствовали новые космологические и астрофизические открытия (реликтовое излучение, квазары, пульсары), поиски гравитационных волн, необходимость учета общерелятивистских эффектов при полетах космических аппаратов в Солнечной системе. Сейчас по глубине намечающихся преобразований гравитационные исследования приближаются к ситуации, возникшей в период создания ОТО. Так, проводимые и планируемые в ближайшем будущем гравитационные эксперименты, в том числе с использованием космических аппаратов, по прецизионности, масштабу и стоимости скоро сравняются со строительством современных ускорителей элементарных частиц.

По-видимому, речь может идти о третьем (вслед за ньютоновским и эйнштейновским) этапе развития теории гравитации. Он характеризуется выходом за рамки ОТО в виде широкого применения новых методов, квантования и обобщения теории гравитации и имеет в виду как преодоление серьезных внутренних трудностей эйнштейновской ОТО, так и установление связи теории гравитации с теорией элементарных частиц. Поиски такой связи, ставшие одной из актуальных задач обеих теорий, являются еще одним фактором, определяющим место гравитации как важной составной части программы объединения всех взаимодействий.

Для того чтобы яснее представить себе современную ситуацию в теории гравитации, дадим краткий ретроспективный обзор гравитационных исследований, остановившись на главных узловых пунктах и отсылая за подробностями к обширной литературе [20, 68, 122, 130].

Как известно, в конце XVII в. И. Ньютон, опираясь на труды своих великих предшественников — Г. Галилея, И. Кеплера, Х. Гюйгенса, Р. Декарта,— установил основы классической картины мира, базирующейся на представлении о трехмерном евклидовом пространстве, независимом от материи, и абсолютном времени, на классической механике и феноменологически введенном законе тяготения.

Ньютонова система мира отнюдь не была незамедлительно и безоговорочно принята. Буквально все ее положения подверглись сомнениям, а дискуссии по некоторым из них в модернизированной форме идут до сих пор, стимулируя развитие науки.

Картезианцы возражали против неконтактного действия на расстоянии: распространение гравитации со скоростью

света предполагалось позднее в вариантах Г. Лоренца и других ученых, а реально было введено А. Пуанкаре в первых же его работах 1905 г., в которых он сформулировал параллельно с А. Эйнштейном основные принципы СТО.

Далее, Дж. Беркли и Г. Лейбниц возражали против абсолютного пространства как физического объекта, по отношению к которому определяется движение по инерции. Они требовали построения «релятивной» механики, использующей взаимные расстояния, скорости и ускорения тел и, в частности, не видели смысла в задаче одного тела. В XIX в. Э. Мах подчеркивал, что инерция индуцируется всей материей космоса. Совсем недавно «релятивная» механика вновь стала развиваться [80]. Она обобщает обычные галилеевские преобразования классической механики, но еще не преобразования СТО.

Как известно, идеи Э. Маха влияли на А. Эйнштейна при построении ОТО, которая оказалась, однако, немахианской. В ней возможна постановка задачи одного тела, пространство может быть искривлено и в отсутствии «обычной» материи. Вместе с тем эти идеи в модернизированной форме вновь возрождались как на базе ОТО [80], так и при попытках связывать космологию и микромир [95].

Подчеркнем также, что ньютоновский закон тяготения отражает трехмерность пространства: например, в четырех измерениях мы имели бы зависимость гравитационного потенциала от расстояния r^{-2}, а не r^{-1}. Влияние трехмерности на физические законы многократно анализировалось [29, 78]. Ныне не исключается изменение числа измерений на сверхмалых расстояниях и в сверхэкстремальных условиях, например, ранней Вселенной в духе допущения динамического характера топологических характеристик.

Огромные конкретные успехи в предсказании физических явлений в лабораторных условиях, планетарных и астрономических областях и вся грандиозность ньютоновской системы мира надолго отодвинули в сторону упомянутые возражения Г. Лейбница и картезианцев. Во второй половине XVIII в. ее победа была практически общепризнанной.

Сейчас стало ясно, что абсолютное плоское пространство и вся ньютоновская гравитация являются с точки зрения релятивистских СТО и ОТО законным приближением в механике для слабого гравитационного поля и медленно движущихся тел. Любопытно, что результаты недавних проверок закона Ньютона на лабораторных расстояниях вновь подтвердили его правильность.

Единственным эмпирическим «пятном» на ньютоновской картине мира явилась открытая У. Леверье в середине

XIX в. аномалия — сдвиг перигелия Меркурия (43″ в столетие). Неудачные попытки объяснить эту аномалию предпринимались в XIX в. путем модификации ньютоновского потенциала. Интерес представляли потенциалы Вебера — Римана, добавлявшие к ньютоновскому потенциалу r^{-1} скоростные поправки $-\beta r^{-1}(\dot{r})^2$ и давшие для сдвига перигелия 14″. Кинематика СТО объяснила часть аномалии (7″), а полное объяснение она получила позднее на базе ОТО.

Вместе с тем реальный удар по ньютоновской системе мира был сразу же нанесен в ее космологической части, поскольку допущение статического распределения звезд в бесконечной Вселенной приводит к бесконечной светимости (парадокс Шезо — Ольберса), что отчасти понимал И. Ньютон. Для устранения этого парадокса был предложен ряд модификаций: замкнутые Вселенные Целльнера, Шварцшильда; Г. Зеелигер, К. Нейман (1894) ввели ослабляющий фактор, перейдя к потенциалу $r^{-1}\exp(-k_0 r)$ «юкавского» типа, как скажет современный физик.

Интересным образом вариант Зеелигера — Неймана все же возродился в современной, уже постэйнштейновской теории гравитации, в ее применении к миру элементарных частиц, а именно в «сильной» гравитации А. Салама (70-е годы) [172]. Кванты поля «сильной» гравитации обладают спином 2 (подобно гравитонам ОТО), но имеют массу покоя (т. е. описываются в линейном приближении уравнением юкавского типа) и взаимодействуют с частицами с константой связи, примерно в 10^{40} раз превышающей гравитационную.

Наконец, важный вариант устранения парадоксов ньютоновой космологии был предложен И. Ламбертом еще в конце XVIII в. и неоднократно возрождался вплоть до последнего времени. Речь идет об иерархической модели Вселенной, согласно которой наша наблюдаемая Вселенная (Метагалактика) имеет партнеров, рассматриваемых с точки зрения следующей иерархической ступени как «молекулы». Далее идут еще более высокие ступени, масштабы и другие характеристики которых подобраны так, чтобы обеспечить общее конечное значение светимости. Возрождаемые идеи иерархии смыкаются со взглядами приверженцев модернизированного махианства и идеей «сильной» гравитации. Сейчас есть тенденция продолжать ступени иерархии не только «вверх», но и «вниз», переходя к элементарным частицам (а далее — к кваркам). Возникает вопрос о наинизших ступенях, которыми (в рамках еще предварительных моделей), по-видимому, могут оказаться объекты и процессы планковской области, т. е. размеров $\sim 10^{-33}$ см (вместо размеров протона $\sim 10^{-13}$ см) и значений энергии $\sim 10^{19}$ Гэв [49а, 73].

На самом деле первопричина парадоксов ньютоновской космологии заключалась в том, что она была статической, т. е. средняя светимость единицы объема предполагалась постоянной, а значит, плотность энергии во Вселенной — бесконечной. Она была устранена в динамической модели А. А. Фридмана на базе ОТО.

Кардинальное изменение в картине мира принесло в XIX в. открытие электромагнетизма и его описание с помощью уравнений Максвелла. Окончательную формулировку это изменение нашло в СТО, установленной одновременно в работах А. Пуанкаре и А. Эйнштейна (1905), развивавших главным образом исследования Г. Лоренца и завершенных, в свою очередь, Г. Минковским (1908). Как известно, в СТО пространство и время оказались объединенными в единое четырехмерное пространство-время с сохраняющимся при переходах между инерциальными системами отсчета релятивистским интервалом

$$s^2 = -c^2 (t - t')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Галилеевские преобразования ньютоновского пространства были заменены лоренцевскими. Уравнения электродинамики уже оказались инвариантными относительно этих преобразований, а уравнения механики и закон сложения скоростей подверглись существенной релятивистской реформе, запрещавшей сверхсветовые скорости (впрочем, ряд авторов указывают на формальную возможность сверхсветовых частиц — тахионов [95, 112]).

Следующим естественным шагом были попытки построения релятивистской теории гравитации.

Еще в своих первых работах по СТО (1905—1906) А. Пуанкаре подчеркивал универсальность принципа относительности и распространял его на гравитацию, сделав через 200 с лишним лет после создания ньютоновской теории гравитации первый обоснованный шаг по ее обобщению (в противоположность «подгоночным» потенциалам Римана, Вебера, Гербера и др.). Он предпринял попытку установить релятивистские поправки к закону Ньютона, но еще не было речи о новых уравнениях гравитационного поля. С современной точки зрения Пуанкаре рассмотрел прямое запаздывающее гравитационное взаимодействие, предсказав, что скорость распространения гравитации равна скорости света. Гравитационные идеи А. Пуанкаре получили в то время незначительное продолжение у Г. Минковского, А. Зоммерфельда, Г. Лоренца, В. де Ситтера [87].

Релятивистские уравнения гравитационного поля в рамках СТО попытались установить М. Абрагам и Г. Нордстрем

(1911) путем перехода от классического трехмерного уравнения Лапласа — Пуассона для ньютоновского скалярного гравитационного потенциала к четырехмерному уравнению в различных вариантах. Но СТО позволяла объяснить, как уже отмечалось, лишь часть меркурианской аномалии.

В отличие от попыток непосредственной релятивизации ньютоновского закона тяготения, А. Эйнштейн поставил во главу угла принцип эквивалентности (1907—1911), опиравшийся на факт равенств инертной и гравитационной масс, известный уже Г. Галилею, И. Ньютону, Ф. Бесселю и экспериментально вновь с большой точностью подтвержденный Р. Этвешем в конце XIX в. Отсюда последовало фундаментальное признание движения в поле тяжести как движения по инерции в кривом пространстве, а в дальнейшем — геометрического характера гравитационного поля.

Решающий шаг был сделан А. Эйнштейном в сотрудничестве с математиком М. Гроссманом в 1912—1913 гг. Они отождествили гравитационный потенциал с компонентами метрики $g_{\alpha\beta}$ четырехмерного искривленного пространства-времени. Это позволило сделать уже реальный набросок общей формы уравнений поля тяготения.

Окончательно уравнения гравитации были установлены в ноябре 1915 г. Д. Гильбертом, воспринявщим программу А. Эйнштейна и применившим вариационный принцип, а также самим Эйнштейном, который шаг за шагом отбрасывал ограничения на допустимые преобразования координат и пришел к общековариантным уравнениям путем учета члена $g_{\alpha\beta}R/2$ (см. разд. 1.4).

Приближенные расчеты движения планет, основанные на ОТО, позволили полностью объяснить меркурианскую аномалию еще до получения полного решения для центрально-симметричного поля, данного К. Шварцшильдом в 1916 г.

Объяснение сдвига перигелия Меркурия стало эмпирической базой ОТО. Затем последовало подтверждение предсказания отклонения света в поле тяготения. Отклонение луча от звезды в поле Солнца, определенное А. Эддингтоном во время солнечного затмения 1919 г., оказалось решающим в признании ОТО и вывело дискуссию о ее концепциях на первый план не только среди физиков, но и математиков, астрономов, философов.

Позже были подтверждены еще два так называемых классических эффекта ОТО: сдвиг частот в поле тяготения как в спектре звезд (белые карлики, Солнце), так и в лабораторных условиях, а также запаздывание радиосигнала в поле тяготения. Все четыре эффекта установлены с точностью мень-

ше 1%, убедительной по сравнению с другими конкурирующими вариантами теории гравитации.

Огромный шаг был сделан на базе ОТО в построении современной космологии, приведший к признанию модели расширяющейся Вселенной. Она была предложена советским механиком А. А. Фридманом в 1922—1924 гг. в развитие моделей Эйнштейна статической и де Ситтера расширяющейся, но лишенной материи Вселенной. Расширение Вселенной было окончательно подтверждено в 1929 г. Э. Хабблом, который установил закономерное разбегание галактик.

Следующей ступенью в космологии стала гипотеза Дж. Гамова о своеобразном Большом взрыве Вселенной из сверхгорячего и сверхплотного состояния, подтвержденная в 1965 г. открытием предсказанного им изотропного электромагнитного излучения, заполняющего Вселенную и имеющего температуру около 3 К.

Экспериментальные подтверждения ОТО, основанная на ней космология, ряд других астрономических открытий вместе с множеством глубоких физических идей и развитых новых математических методов выдвинули релятивистскую теорию гравитации в первый ряд современных разделов физики.

В развитии ОТО следует особо выделить направление, имевшее целью вслед за геометризацией гравитации интерпретировать геометрически также электромагнитное поле и построить геометрическую картину всех известных тогда физических взаимодействий [3].

Первый вариант такой единой теории предложил Г. Вейль в 1918 г. Дополнив общековариантные преобразования конформной симметрией, он пришел к геометрии, в которой длина вектора изменяется при параллельном переносе. А. Эддингтон рассмотрел более общие, не риман-эйнштейновские, связности и квадратичные по кривизне лагранжианы, обобщая гильбертов лагранжиан ОТО в виде скаляра кривизны R. Э. Картан в 1922 г. ввел пространство с несимметричной связностью ($\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \neq \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$) — кручением. Т. Калуца в 1921 г. впервые предложил перейти к пятимерному пространству, получая при известных условиях уравнения Эйнштейна — Максвелла гравитации и электромагнетизма.

А. Эйнштейн, относившийся сначала к варианту Вейля отрицательно, затем принял участие в разработке всех указанных вариантов единых теорий, предложив в 1928 г. теорию телепараллелизма. Позднее он (параллельно с Э. Шредингером) начал разработку моделей пространств с несимметричной метрикой $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ и все последние годы своей деятельности посвятил построению единых геометризованных теорий [130].

Все главные варианты единых теорий 20-х годов, несмотря на множество работ самых авторитетных в свое время физиков и математиков, не достигли поставленной цели — геометризации электромагнетизма, и их неудача на долгие годы дискредитировала эту идею. Однако замечательным образом почти все они ныне вновь возродились с новых точек зрения (см. разд. 3.4, 3.6).

Чем характеризуется сегодняшнее состояние теории гравитации?

Эйнштейновская теория гравитации и сейчас, спустя семьдесят лет после своего создания, продолжает оставаться наиболее удовлетворительным вариантом классической теории тяготения. Предсказания ОТО согласуются со всеми проведенными до сих пор гравитационными экспериментами, включая радиолокацию планет и лазерную локацию Луны, которая позволила отвергнуть ряд альтернативных моделей (Бранса — Дикке и др.).

Вместе с тем эйнштейновская теория гравитации столкнулась с рядом коренных трудностей [51, 150]. Понимание их пришло не сразу, а лишь в 60-е годы. Сначала они казались частными вопросами, но по мере получения новых решений и исследования все большего числа гравитационных моделей оказалось, что эти трудности носят коренной характер, и интенсивные попытки их преодолеть хотя и продвинули дело, но окончательным успехом пока не увенчались.

Прежде всего отметим не имеющий прецедентов пример с непрекращающимися предложениями изменить авторское наименование теории «общая теория относительности» как отражающее общую ковариантность в противоположность более узкой лоренцевской инвариантности СТО. В этой связи указывалось на тривиальность условия ковариантности относительно координатных преобразований и отсутствие четкого разграничения их от имеющих физический смысл преобразований систем отсчета. В. А. Фок и П. Хавас отказывались видеть «всеобщий релятивизм» в ОТО, возобновляя дискуссии периода становления ОТО. В. А. Фок, отвергая также значение принципа эквивалентности, предлагал назвать теорию, согласно А. Фоккеру, «хроногеометрией»; Г. Тредер говорит о «геохронометрической» гравитации; Дж. Уилер и некоторые другие — о «геометродинамике» (хотя этот термин относился ранее к варианту Райнича). Быстро привились не претендующие на замену названия ОТО термины «гравидинамика», «граводинамика», или «гравитодинамика», в противовес «гравистатике». В геометрическом аспекте можно говорить о «гравигеометрии». Однако, по-видимому, навсегда останется название «общая теория относительности», которое А. Эйнштейн

применил и в своей последней работе в 1955 г. Вместе с тем дискуссия о названиях отражает отсутствие до сих пор ясности даже в основах ОТО: принципах относительности и эквивалентности, процедуре перехода от СТО к ОТО, симметриях в ОТО.

К коренным трудностям ОТО относится проблема систем отсчета. Наиболее глубокий анализ она получила в рамках тетрадной формулировки ОТО, в которой тетрады (четверки ортогональных векторов), восстанавливаемые в каждой точке пространства-времени, рассматриваются как определяющие локальные системы отсчета [97]. Однако проблема их реализации физическими приборами далека от общего решения.

Неясность с принципом эквивалентности, применяемым к самому гравитационному полю (см. разд. 2.2), в свою очередь, ставит вопрос о том, в какой мере можно говорить о спецрелятивистских характеристиках гравитационного поля, таких, как энергия-импульс. Есть мнение, что именно в этом заключаются истоки известной проблемы энергии гравитационного поля, вызвавшей обширную дискуссию, начиная с работ Эйнштейна — Гроссмана еще до создания ОТО, и демонстрирующей широкий диапазон мнений (см. разд. 2.3).

Наиболее очевидной, широко обсуждаемой трудностью ОТО является также проблема сингулярностей. Она состоит в том, что для решений уравнений Эйнштейна с сильным энергетическим условием, которому удовлетворяют почти все материальные источники, оказываются несовместимыми требования причинности пространства-времени и отсутствия гравитационных сингулярностей. Это ставит под сомнение применимость ОТО для описания экстремальных гравитационных полей. Правда, еще не окончательно решен вопрос о самом критерии гравитационных сингулярностей (см. разд. 2.4).

До сих пор не объяснены удивительные соотношения между атомными, гравитационными и космологическими характеристиками — «большими числами» Эддингтона — Дирака: отношение кулоновского и гравитационного потенциалов для элементарных частиц порядка 10^{40}; размеры Метагалактики $\sim 10^{28}$ см, что примерно в 10^{40} раз превышает размеры частиц; число барионов в известной части Вселенной $(10^{40})^2$ и т. д. [76].

Серьезные проблемы привносит и квантовая гравитация (см. разд. 3.5).

Все эти трудности стимулировали поиск новых методов в теории гравитации, а также различные попытки ревизии, расширения, обобщения ОТО. В настоящее время приходится говорить не о теории, а о теориях гравитации, даже для клас-

сификации которых требуется не один, а несколько каталогов, составленных по разным принципам («прагматический», «космологический», «геометрический» и т. д.) [49].

Важным мотивом для развития и обобщения теории гравитации всегда было стремление установить связь гравитации с физикой микромира; примером являются упоминавшиеся единые теории 20-х годов. Сейчас эта задача, стимулируемая всей современной программой объединения элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий, вышла на первый план. И первым необходимым шагом на пути к ее решению является построение калибровочной теории гравитации.

Теория калибровочных полей составляет базу всех современных моделей Большого объединения. В теории поля введение калибровочных полей стало универсальным способом описания самых разных взаимодействий. Более того, калибровочная теория в формализме расслоенных пространств фактически реализовала идею геометризации взаимодействий, положенную в основу единых теорий 20-х годов, неудача которых, как теперь стало ясно, состояла в том, что взаимодействия с непространственно-временными (так называемыми внутренними) симметриями они пытались описывать, как и гравитацию, в терминах пространственно-временной геометрии.

Большинство современных обобщений теории гравитации и моделей, претендующих на объединение гравитации и микромира, являются следствием калибровочной теории. Примером может служить уже получившее широкое признание ближайшее обобщение ОТО — теория гравитации с кручением, учитывающая в качестве источника геометрического поля кручения спин материи (см. разд. 3.4).

Своего рода квинтэссенцией идей объединения является гипотеза о том, что в экстремальных условиях периода Большого взрыва, вблизи астрофизических сингулярностей, а возможно, и на уровне субчастиц и физического вакуума в результате квантовых флуктуаций метрики, изменений топологии и трансмутаций между гравитонами и частицами могут исчезнуть различия между «обычной» материей и геометрической ареной, т. е. будет иметь место объединение «праматерии» с «прагеометрией» (см. разд. 3.6).

В этой книге, рассматривая современное состояние и проблематику теории гравитации, мы сосредоточили главное внимание на ее ключевых пунктах, не обходя спорных и дискуссионных моментов, поскольку именно они являются, что называется, «точками роста» живой развивающейся теории.

В первой главе излагаются математические и физические основы теории гравитации, заложенные эйнштейновской ОТО,

и обсуждаются новейшие гравитационные эксперименты по ее проверке.

Вторая глава посвящена современной проблематике и некоторым новым подходам в теории гравитации, направленным на преодоление ее главных трудностей, но в целом не выходящим за рамки эйнштейновской теории.

В третьей главе рассматриваются различные варианты обобщения теории гравитации, ее квантования и сближения с теорией элементарных частиц, что потребовало краткого обзора ситуации в физике элементарных частиц (см. разд. 3.1) и изложения основ теории калибровочных полей (см. разд. 3.2).

Мы пытались сделать книгу доступной для широкого круга читателей, но не стали отказываться от языка современной теории гравитации, хотя и стремились, по возможности, адаптировать его. Ведь язык теории не складывается произвольно, он отражает уровень решаемых проблем. Язык сегодняшней теории гравитации во многом отличен от того, на котором первоначально формулировалась ОТО. Поэтому необходимо к нему привыкать. Мы постарались объяснить все основные понятия теории гравитации, прибегая, по возможности, к наглядности, чтобы не заставлять читателя лишний раз обращаться к специальной литературе. Вместе с тем имеются ссылки на работы, с которых можно начать изучение той или иной проблемы на более глубоком уровне.

В книге использованы система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице, а также следующие обозначения:

для частных производных $\partial_\mu f$ и $f_{,\mu}$;
для ковариантных производных $D_\mu f$ и $f_{;\mu}$;
для производной по времени $\dot{f}$;
для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
для оператора Д'Аламбера $\Box = -\frac{\partial}{\partial t^2} + \Delta$.

Глава 1
РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

1. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ МИНКОВСКОГО

Согласно СТО, физическое пространство-время является пространством Минковского [114]. Что же это за пространство? Чем оно отличается от пространства Ньютона дорелятивистской физики?

Прежде всего пространство Минковского существенно четырехмерно. Мир Ньютона тоже четырехмерен, но время в нем играет роль скорее не координаты, а всеобщего параметра. Время и пространственные координаты в нем неравноправны. В мире Ньютона есть преобразования, при которых новые пространственные координаты x' выражаются через старые координаты x и время t. Например,

$$x^{1'} = x^1 - Vt,\ x^{2',3'} = x^{2,3},\ t' = t, \tag{1.1}$$

при переходе к системе отсчета O', движущейся относительно первоначальной вдоль x^1 с постоянной скоростью V (рис. 1). В нем есть преобразования времени как параметра $t' = at + b$, где a и b — константы. Но пространство Ньютона не допускает преобразований времени $t' = t'(x, t)$, в которые входили бы пространственные координаты.

В мире Минковского такие преобразования имеются. Это преобразования Лоренца

$$x^{1'} = \frac{x^1 - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\ x^{2,3} = x^{2,3'},\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{1.2}$$

которые заменяют преобразования Галилея (1.1) перехода к движущейся системе отсчета (рис. 2). Они низводят время t до положения такой же координаты $ct = x^0$, как и пространственные x^i, $i = 1, 2, 3$.

Причиной, вызывающей к жизни преобразования (1.2), которые перемешивают пространственные и временные координаты, является ограниченность скорости распространения всякого сигнала некоторой максимальной скоростью c.

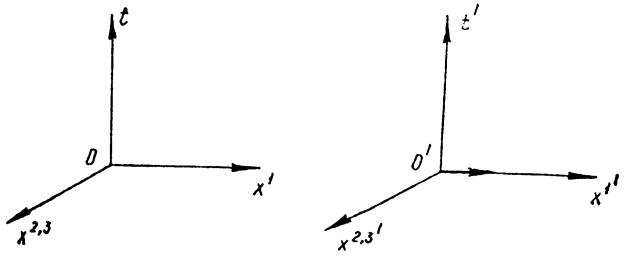


Рис. 1.

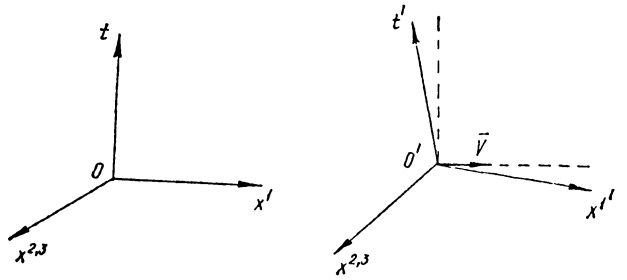


Рис. 2.

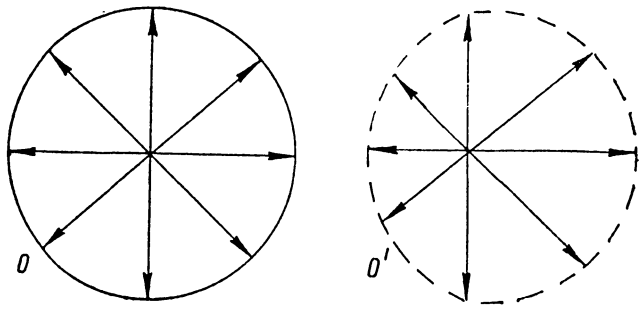


Рис. 3.

Действительно, эта скорость должна быть одинакова во всех направлениях. Однако из галилеевского закона преобразований (1.1) следует, что если максимальная скорость сигнала в первоначальной системе координат была c, то в O' ее величина зависит от направления (рис. 3).

Легко проверить, что изотропность максимальной скорости распространения сигнала сохраняет следующий из (1.2)

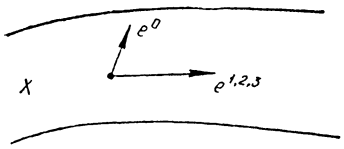


Рис. 4.

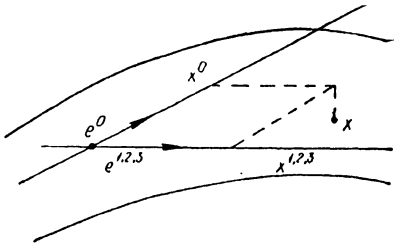


Рис. 5.

лоренцевский закон преобразований скоростей:

$$v^{1'} = \frac{v^1 - V}{1 - \frac{v^1 V}{c^2}}, \quad v^{2,3'} = \frac{v^{2,3}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^1 V}{c^2}}. \qquad (1.3)$$

Опыты А. Майкельсона, Э. Морли и их последующая перепроверка показали, что в движущейся системе координат, связанной с Землей, одинакова во всех направлениях скорость распространения света, которая тем самым является максимальной скоростью распространения сигнала, и ее величина c входит в преобразования Лоренца (1.2), (1.3).

Преобразования Галилея (1.1) являются приближением преобразований Лоренца при скоростях V, много меньших скорости света c.

Конечность скорости света, однако, затрудняет (с физической точки зрения) определение пространственных и временных координат в пространстве Минковского.

Сделаем здесь небольшое отступление и обсудим два важных понятия — системы отсчета и системы координат. Ниже мы дадим их строгие определения, а сейчас прибегнем к наглядным построениям.

Будем говорить, что в точке x четырехмерного пространства-времени X задана система отсчета, если в ней восстановлена тетрада — четверка линейно-независимых векторов e^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$, т. е. не лежащих в одном трехмерном пространстве (рис. 4).

Пусть эти векторы удается продолжить сколь угодно далеко, превратив их в координатные оси, так что на них можно спроектировать любую точку пространства X (рис. 5). Тогда будем говорить, что на X задана система координат. Систему отсчета можно рассматривать как локальную систему координат.

В мире Ньютона система координат может быть задана во всем пространстве. Всякий пространственный вектор некото-

рой системы отсчета, послав в его направлении мгновенно распространяющийся луч света, можно превратить в координатную ось для всего пространства. Время в мире Ньютона во всех точках направлено одинаково и может быть мгновенно синхронизовано во всем пространстве.

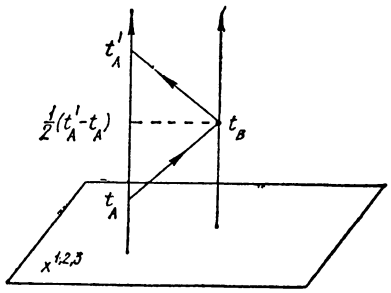


Рис. 6.

В мире Минковского система координат может быть формально задана тоже во всем пространстве, но попытки осуществить такое задание физическим способом сталкиваются с трудностями, поскольку никаким таким способом нельзя задать чисто пространственное направление и провести, например, ось x^1. Это означало бы движение с бесконечно большой скоростью.

Можно, испуская и принимая ответные из других точек пространства световые сигналы (рис. 6), синхронизовать направление и течение времени в некоторой ограниченной области пространства, полагая на примере рис. 6 $t_B = (t'_A - t_A)/2$. Тогда умозрительно можно выделить трехмерное подпространство (гиперповерхность), все точки которого характеризуются одним и тем же значением такого синхронизованного времени, и задать на нем пространственные направления и координатные оси. Но эта система отсчета имеет формальный характер, поскольку, например, события, одновременные в синхронизованном времени, не являются таковыми ни для одного реального наблюдателя. Тем не менее такие системы отсчета и системы координат применяются в СТО и ОТО, хотя они не могут быть реализованы физическими приборами.

Возможность задания системы координат наделяет физическое пространство структурой аффинного пространства, когда всякой точке x из X сопоставляется вектор $\boldsymbol{x}$ с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3) — координатами точки x, а сложение векторов и умножение вектора на число определяются обычным образом как сложение и умножение на число координат векторов.

Конструкция аффинного пространства формализует наши интуитивные представления о точках и векторах физического пространства.

В аффинном пространстве определено понятие интервала между его точками. Пусть на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ задано скаляр-

ное произведение (x, y). Тогда любым двум точкам x, y из аффинного пространства X может быть сопоставлена величина

$$s = |(x-y,\ x-y)|^{1/2},$$

называемая интервалом между x и y. Будучи записанным через координаты точек x и y, интервал s имеет вид

$$s^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu), \qquad (1.4)$$

где $g_{\mu\nu}$ — некоторые постоянные коэффициенты. Они симметричны, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, и их совокупность $(g_{\mu\nu})$ называется метрикой на пространстве X.

В пространстве Ньютона метрика $g_{\mu\nu}$ является евклидовой: $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu; \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

и интервал (1.4) записывается в виде

$$s^2 = (x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2. \quad (1.5)$$

В отличие от пространства Ньютона, закон Лоренца (1.2) преобразований перехода между инерциальными системами координат обусловливает задание на пространстве Минковского структуры псевдоевклидова пространства.

Действительно, согласно специальному принципу относительности, физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований инерциальных систем координат, т. е. преобразований Лоренца. Последние впервые и были введены в рассмотрение как преобразования, оставляющие (в противоположность преобразованиям Галилея) инвариантными уравнения Максвелла.

Евклидов интервал (1.5) не является таким инвариантом. Удовлетворить специальному принципу относительности можно, если только наделить пространство Минковского псевдоевклидовой метрикой — метрикой Минковского η, когда евклидов интервал (1.5) заменяет релятивистский интервал

$$s^2 = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2, \quad (1.6)$$

величина и вид которого сохраняются во всех инерциальных системах координат[1].

[1] Эквивалентным является выбор s^2 со знаками (сигнатурой) $+, -, -, -$.

Здесь надо сделать следующее уточнение. Необходимо различать два понятия — инвариантность и ковариантность. Величина релятивистского интервала (1.6) сохраняется во всех системах координат $s^2 = s'^2$, но при этом он может менять свой вид, когда $\eta'_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$. Такое свойство называется ковариантностью. При лоренцевских преобразованиях релятивистский интервал сохраняет не только свою величину, но и вид, т. е. $\eta'_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, и говорят об его инвариантности относительно этих преобразований.

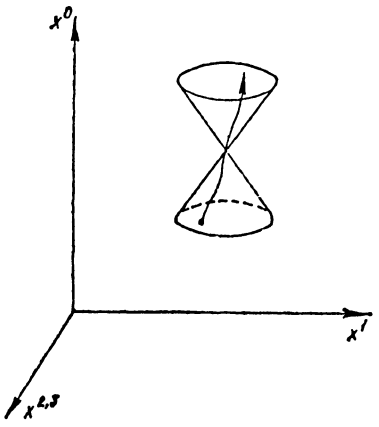


Рис. 7.

Главная особенность метрики Минковского η состоит в том, что она не является положительно определенной, как евклидова метрика, относительно которой квадрат длины вектора всегда положителен. В метрике Минковского квадрат «релятивистской длины» ненулевого вектора v может быть как положительным, так и нулевым, и отрицательным. В зависимости от этого векторы и интервалы в пространстве Минковского разделяются соответственно на пространственноподобные ($v^2 > 0$), светоподобные или изотропные ($v^2 = 0$) и времениподобные ($v^2 < 0$).

В каждой точке пространства Минковского изотропные векторы образуют двухполостной световой конус, направляющими которого являются изотропные линии входящих в эту точку и выходящих из нее лучей света. Траектории частиц, движущихся со скоростью, меньшей скорости света, лежат внутри светового конуса и являются времениподобными (рис. 7). Внутри светового конуса лежат и точки всех причинно связанных с данной точкой событий. Поэтому одну часть светового конуса называют конусом будущего, а другую — конусом прошлого этой точки.

Релятивистский интервал не определяет, однако, отношения близости (т. е. расстояния и топологии) в пространстве Минковского. Близость двух точек в нем оценивается величиной евклидова интервала (1.5), и топологически пространство Минковского является евклидовым (см. разд. 2.4). Но евклидов интервал не инвариантен при преобразованиях Лоренца, откуда и следует известное изменение масштабов длин и

времени при переходах между движущимися относительно друг друга инерциальными системами координат.

Теперь можно дать строгое математическое определение пространства Минсковского как четырехмерного аффинного пространства, снабженного псевдоевклидовой метрикой η и наделенного топологией евклидова пространства.

Важной характеристикой того или иного пространства является его группа движений (см. разд. 3.1), т. е. преобразований, сохраняющих характерную структуру этого пространства. Так, в мире Ньютона такими преобразованиями являются повороты трехмерного пространства и его сдвиги.

Движения (симметрии) пространства Минковского определяются как его координатные преобразования, оставляющие инвариантным интервал (1.6). Они включают в себя сдвиги

$$T_\mu(\alpha^\mu): x^\nu \to x^\nu + \alpha^\mu \delta^\nu_\mu, \tag{1.7}$$

пространственные повороты

$$L_{ik}(\alpha): \begin{pmatrix} x^i \\ x^k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^i \cos\alpha - x^k \sin\alpha \\ x^i \sin\alpha + x^k \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

и лоренцевские повороты

$$L_{i0}(\alpha): \begin{pmatrix} x^0 \\ x^i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^0 \operatorname{ch}\alpha + x^i \operatorname{sh}\alpha \\ x^0 \operatorname{sh}\alpha + x^i \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Преобразования (1.2) приводятся к виду (1.9) подстановкой $\operatorname{th}\alpha = V/c$, чего нельзя сказать про преобразования скоростей (1.3). Дело в том, что обычная скорость $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$ не является лоренцевским вектором. Вместо нее в СТО рассматривают 4-скорость u^μ, которая связана с $\boldsymbol{v}$ следующим образом:

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

и имеет закон лоренцевских преобразований (1.9). Легко проверить, что $u^2 = -1$.

Преобразования (1.8), (1.9) образуют группу Лоренца, а вместе с трансляциями (1.7) — группу Пуанкаре, которая является группой Ли, т. е. (как это видно из выражений (1.7) — (1.9)) всякий ее элемент $g(\alpha)$ характеризуется некоторым параметром — углом поворота α в плоскости $x^\mu - x^\nu$, величиной сдвига α^μ по оси x^μ. Отсюда, как и всякую группу Ли, группу Пуанкаре удобно задавать ее генераторами — производными

$$I_\alpha = \partial g(\alpha)/\partial\alpha$$

в точке $\alpha = 0$ (см. разд. 3.1). В координатном представлении (1.7) — (1.9) они имеют вид

$$T_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu,\ L_{ik}\begin{pmatrix} x^i \\ x^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^k \\ x^i \end{pmatrix},\ L_{i0}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ x^0 \end{pmatrix},$$

или могут быть записаны с помощью дифференциальных операторов

$$T_\mu = \partial_\mu,\ L_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} x^\sigma \partial_\nu - \eta_{\nu\sigma} x^\sigma \partial_\mu. \tag{1.10}$$

Здесь $L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}\,(\mu, \nu = 0, \ldots, 3) - 6$ генераторов группы Лоренца, а $T_\mu - 4$ генератора трансляций, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [L_{\mu\nu}, L_{\alpha\beta}] = \eta_{\mu\beta} L_{\nu\alpha} + \eta_{\nu\alpha} L_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} - \eta_{\nu\beta} L_{\mu\alpha}, \\ [L_{\mu\nu}, T_\alpha] = \eta_{\mu\alpha} T_\nu - \eta_{\nu\alpha} T_\mu,\ [T_\mu, T_\nu] = 0, \end{gathered} \tag{1.11}$$

где скобка $[A, B]$ означает коммутатор $AB - BA$.

Группа Пуанкаре как группа движений пространства Минковского играет фундаментальную роль в релятивистской физике. Специальный принцип относительности часто формулируют именно как условие инвариантности относительно преобразований Пуанкаре, связывая его с однородностью и изотропностью пространства Минковского, в котором перенос и поворот системы как целого не должны сказываться на ее физике. Следствием такой инвариантности является сохранение энергии-импульса и момента системы.

Однако здесь имеется ряд тонких пунктов, к которым мы вернемся позднее при обсуждении проблем теории гравитации, поскольку именно там они дают о себе знать.

2. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА

Основополагающими принципами эйнштейновской ОТО считаются, как известно, принципы относительности и эквивалентности (см. разд. 2,1; 2.2). Вместе с тем решающим конструктивным шагом для построения аппарата ОТО стало сделанное А. Эйнштейном и М. Гроссманом в 1912—1913 гг. предположение о том, что гравитационное поле надо отождествлять с неминковской метрикой пространства-времени. Обычно это предположение выводят из принципа эквивалентности. Однако такой вывод признается не всеми, и ряд авторов считают метризацию гравитации самостоятельным, если не главным принципом ОТО [121].

Здесь налицо обычная ситуация, когда методом построения физической теории служит моделирование, и выбор моде-

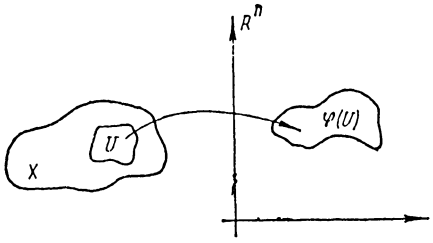


Рис. 8.

ли, хотя и имеет определенные основания, всегда является эвристическим шагом. Так же и в ОТО — говорить о сколь-нибудь строгом в математическом или логическом смысле выводе тождественности гравитационного и метрического полей из принципов относительности и эквивалентности не приходится. Она подсказывается этими принципами, но не сводится к ним.

Если принять метризацию гравитационного поля, то моделью нашего физического пространства должно быть выбрано псевдориманово пространство. Оно характеризуется следующими конструкциями: структурой многообразия, псевдоримановой метрикой, связностью и кривизной. Рассмотрим их [43, 53, 88].

В предыдущем разделе было отмечено, что «аффинность» пространства Минковского позволяет задать на нем систему координат. На произвольном пространстве одной системы координат, покрывающей все пространство, построить не удается. Однако можно разделить его на области (обычно их конечное число), на каждой из которых такую систему координат ввести можно. Только нужно, чтобы на пересечении областей координатные системы на них были бы согласованы. В таком виде пространство выглядит как бы склеенным из координатных лоскутов.

Формализуем эту наглядную конструкцию. Пусть U — некоторая область пространства X и φ — отображение U в некоторую область n-мерного вещественного векторного пространства R^n (рис. 8). Тогда всякой точке x из U сопоставим координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ вектора $\varphi(x)$ в R^n: $\varphi(x) = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, где $\{e_\mu\}$ — базис R^n подобно тому, как это делалось в пространстве Минковского. Такое сопоставление и называется заданием системы координат (координатной карты) (x^μ, U) в U.

Отображение φ и есть та проекция точек пространства X на координатные оси из R^n, о которой мы говорили в предыдущем разделе, давая предварительное определение системы координат.

Склеивание двух пересекающихся карт (U, x^μ) и $(U', x^{\mu'})$ осуществляется функциями перехода $\varphi'\varphi^{-1} = x^{\mu'}(x^\nu)$, $\varphi(\varphi')^{-1} = x^\mu(x^{\nu'})$. Если эти функции дифференцируемые, то координатные карты называют согласованными, а совокупность всех

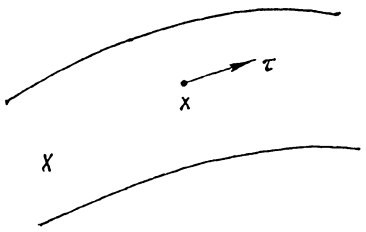


Рис. 9.

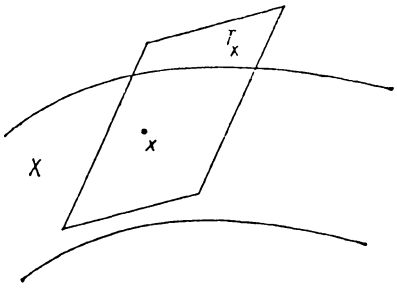


Рис. 10.

покрывающих многообразие карт $\Psi_X = \{(U, x^\mu)\}$ — атласом. Задание атласа и означает задание системы координат на многообразии.

На многообразии могут быть заданы различные системы координат. Два атласа $\Psi_X = \{(U, x^\mu)\}$ и $\Psi'_X = \{U', x^{\mu'})\}$ на многообразии считаются эквивалентными, если любые две пересекающиеся карты (U, x^μ) из атласа Ψ_X и $(U', x^{\mu'})$ из Ψ'_X согласованы. Переход между эквивалентными атласами — это переход от одной системы координат к другой.

Заметим, что в теории гравитации мы, вообще говоря, не знаем всего многообразия, на котором работаем. Дело в том, что уравнения Эйнштейна и их решения можно рассматривать только отдельно на каждой координатной карте, а сшивать эти карты приходится из каких-либо добавочных соображений, например, учитывая симметрии и др. Поэтому здесь, как правило, имеется определенный произвол.

Рассмотрим теперь важные понятия касательного вектора, касательного пространства, касательного расслоения к многообразию. Подчеркнем, что все конструкции, с которыми мы в дальнейшем встретимся — метрика, связность, кривизна,— определены именно в касательных пространствах.

Строгое математическое определение касательного вектора весьма сложно, поэтому мы будем здесь апеллировать к наглядному представлению о нем как вектора τ, восстановленного из данной точки x многообразия X касательно к нему (рис. 9). Касательный вектор можно рассматривать также как генератор сдвигов из точки x в направлении τ и задавать его как оператор дифференцирования ∂_τ в направлении τ.

Множество всех касательных векторов к многообразию в данной точке x образует касательное пространство T_x к X в точке x (рис. 10).

Касательное пространство T_x является векторным пространством, имеющим ту же размерность, что и многообразие

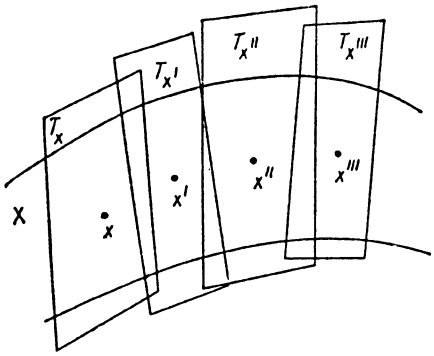


Рис. 11.

X^n. В качестве базисов пространства T_x удобно выбрать операторы частных производных $\{\partial_\mu\}$, которые являются касательными векторами к проходящим через x координатным линиям (вдоль которых меняется только одна какая-либо координата) некоторой системы координат $\{x^\mu\}$. Такой базис называется голономным, согласованным с данной системой координат. Однако базис T_x можно выбрать и произвольно, независимо от системы координат.

Задание базиса T_x интерпретируется как задание локальной системы отсчета в точке x, что согласуется с предварительным определением системы отсчета из предыдущего раздела.

Как связаны система отсчета и система координат? Вообще говоря, никак. Выбор базиса касательного пространства — системы отсчета — и выбор системы координат сами по себе не зависят друг от друга. Но эту зависимость можно установить, что называется, руками, если потребовать, чтобы система отсчета в точке x была голономной $\{l_\mu = \partial_\mu\}$, и эта голономность поддерживалась бы при преобразовании системы координат:

$$x^\mu \to x^{\mu'}, \quad \partial_\mu \to \partial_{\mu'} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\nu. \tag{2.1}$$

Не только локальную систему отсчета можно задать, исходя из данной системы координат, но и систему координат в окрестности точки можно строить, исходя из заданной в ней локальной системы отсчета. Это так называемые нормальные координаты, которые мы опишем в разделе 2.1.

Совокупность всех касательных пространств к многообразию образует касательное расслоение $T(X)$ над X. Чтобы не усложнять изложение, мы не будем давать здесь общего и строгого определения расслоения [47, 53, 60]. Наглядно можно представить себе касательное расслоение как пространство X с приклеенными к нему в каждой его точке касательными пространствами T_x (рис. 11). Касательное пространство T_x называется слоем расслоения над точкой x, а само многообразие X — базой расслоения. Определяются еще также следующие конструкции:

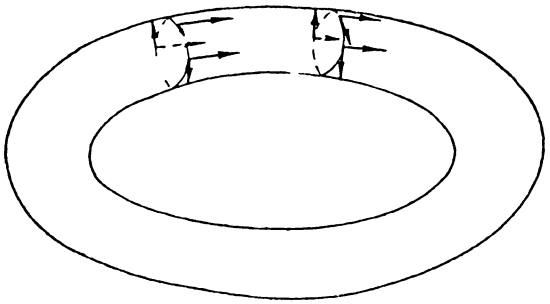


Рис. 12.

сечения расслоения, которые представляют собой дифференцируемые отображения (поднятия) X в $T(X)$, сопоставляющие точке x вектора касательного пространства T_x над x; сечения касательного расслоения $\tau(x)$ — это векторные поля на X;

атлас расслоения $\Psi = \{(U_\iota, \psi_\iota)\}$, который для каждой точки x из области U_ι определяет изоморфизм $\psi_\iota(x)$ слоя T_x на стандартное векторное пространство R^n, называемое типичным слоем расслоения.

Такое отображение в общем случае не может быть задано на всем X, и его приходится покрывать областями U_ι, как для задания системы координат. Если же атлас Ψ может быть выбран состоящим из одной карты $(U = X, \psi)$, расслоение считается тривиальным. Тривиальность или нетривиальность касательного расслоения является топологической характеристикой многообразия. Например, двумерная сфера имеет нетривиальное касательное расслоение, а тор — тривиальное.

Задание атласа касательного расслоения можно рассматривать как задание глобальной системы отсчета, понимаемой как некоторая совокупность локальных систем отсчета, восстановленных в каждой точке многообразия X. Действительно, атласом $\Psi = \{(U_\iota, \psi_\iota)\}$ в каждой точке x из U_ι определяется базис $\{t_\mu(x)\}_\iota = \{\psi_\iota^{-1}(x)\, t_\mu\}$ касательного пространства T_x, где $\{t_\mu\}$ — фиксированный базис типичного слоя R^n. Поле реперов $\{l(x)\}_\iota$ непрерывно на U_ι, а на пересечениях $U_\iota \cap U_\chi$ реперы $\{l(x)\}_\iota$ и $\{l(x)\}_\varkappa$ связаны функциями перехода $\{l(x)\}_\iota = (\psi_\iota^{-1}\psi_\varkappa)\{l(x)\}_\varkappa$.

Если многообразие имеет тривиальное касательное расслоение, то непрерывное поле реперов $\{l(x)\}$ можно задать на всем X, но в общем случае это не так. Например, его легко построить на торе (рис. 12), но никак не удастся это сделать на сфере.

Как и локальная система отсчета, глобальная система отсчета — атлас Ψ касательного расслоения $T(X)$ — не коррелирует с выбором системы координат — атласа Ψ_X многообразия X, если не требовать специально, чтобы атлас Ψ был голономным, т. е. таким, что определяемые им в каждой точке локальные системы отсчета являются голономными $\{t_\mu(x) = \partial_\mu\}$. Это важно подчеркнуть, поскольку различие между системами отсчета и системами координат часто игнорируют.

В этой главе, посвященной стандартной ОТО, мы будем рассматривать только голономные системы отсчета. Поэтому, допуская вольность, вместо слов «преобразования системы отсчета» мы будем порой говорить «преобразования системы координат», подразумевая, что они влекут за собой голономные преобразования системы отсчета (2.1).

Помимо касательного расслоения, над многообразием определено также кокасательное расслоение $T^*(X)$, слоями которого являются приклеенные к X во всех точках кокасательные пространства T_x^*. Пространство T_x^*, дуальное к T_x,— это n-мерное векторное пространство линейных форм (линейных вещественных функций) на T_x. В голономной системе отсчета его базисом является дуальный к $\{\partial_\mu\}$ базис $\{dx^\mu\}$, определяемый соотношением

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu.$$

В частности, в силу этого соотношения и условия линейности для всяких двух элементов $\tau = \tau^\mu \partial_\mu$ из T_x и $\tau^* = \tau^*_\mu dx^\mu$ из T_x^* определено вещественное число — свертка

$$(\tau,\ \tau^*) = \sum_\mu \tau^\mu \tau^*_\mu. \tag{2.2}$$

Заметим, что величины dx^μ могут рассматриваться как обычные дифференциалы координат x^μ.

Обобщением касательного и кокасательного расслоений является так называемое расслоение тензоров, слоями которого служат тензорные произведения m касательных и n кокасательных пространств[2]. Сечениями расслоения тензоров являются тензорные поля $A^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}(x)$, которые по числу верхних и нижних индексов называются m раз контравариантными и n раз ковариантными (см. теорию тензоров в работе [94]).

При изменениях системы координат и соответственно голономной системы отсчета (2.1) тензорные поля $A^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}(x)$

[2] Тензорное произведение двух векторных пространств, элементы которых имеют индексы μ и ν, можно представить себе как пространство элементов $u_{\mu\nu}$, характеризуемых парой индексов $(\mu\nu)$.

преобразуются по линейному закону

$$A'^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}(x') = \sum_{\alpha_1}\ldots\sum_{\beta_n}\frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\ldots\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\nu'_n}}A^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n}(x). \quad (2.3)$$

В ОТО преобразования (2.3) называются общековариантными преобразованиями.

Для тензоров определены, как и для векторов, операции умножения на число

$$A'^{\cdots}_{\cdots} = \lambda A^{\cdots}_{\cdots},$$

суммы тензоров одинакового ранга (числа контравариантных и числа ковариантных индексов)

$$A''^{\cdots}_{\cdots} = A^{\cdots}_{\cdots} + A'^{\cdots}_{\cdots},$$

а также специфические операции тензорного произведения

$$A''^{\mu_1\ldots\mu_m\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\nu_1\ldots\nu_n\beta_1\ldots\beta_q} = A^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}A'^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_q}, \quad (2.4)$$

в результате которых ранги тензоров складываются, и (обобщая (2.2)) свертки индексов

$$A'^{\mu_2\ldots\mu_m}_{\nu_2\ldots\nu_n} = \sum_{\mu} A^{\mu\mu_2\ldots\mu_m}_{\mu\nu_2\ldots\nu_n},$$

понижающие число контравариантных и ковариантных индексов на единицу.

В дальнейшем, следуя общеупотребительной записи, при операции свертки мы будем опускать знак суммы Σ, и само наличие двух одинаково обозначенных верхнего и нижнего индексов будет означать (если специально не оговорено) суммирование по ним.

Все изложенные конструкции являются своего рода необходимым фоном, на котором может быть корректно определена отождествляемая с гравитационным полем псевдориманова метрика и строится гравигеометрия.

3. ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИИ ОТО

Метрику на пространстве-времени можно описать (отсылая за корректным определением к [47, 60]) как два раза ковариантное симметричное тензорное поле $g_{\mu\nu}$, которое задает в касательных пространствах T_x к пространственно-временному многообразию X^4 скалярное произведение

$$(\tau,\ \tau') = g_{\mu\nu}\tau^\mu\tau'^\nu. \quad (3.1)$$

Компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ образуют симметричную матрицу 4×4, детерминант которой $g = \det(g_{\mu\nu})$ предполагается отличным от нуля[3].

Поскольку матрица $g_{\mu\nu}$ симметрична, всегда существует система координат, относительно которой метрика $g_{\mu\nu}(x)$ в данной точке x становится диагональной и скалярное произведение (3.1) приводится к каноническому виду

$$(\tau, \tau') = -\tau^0\tau'^0 - \cdots + \tau^3\tau'^3. \qquad (3.2)$$

Число минусов в разложении (3.2) называют рангом метрики. Он инвариантен относительно преобразований системы отсчета. Метрика называется римановой, если ее ранг равен нулю, а в противном случае — псевдоримановой. В дальнейшем под псевдоримановой мы будем конкретно понимать метрику ранга 1, как у метрики Минковского, описывающую гравитационное поле. Ранг метрики определяет знак ее детерминанта: $g > 0$ для римановой метрики и $g < 0$ для псевдоримановой.

То, что матрица $g_{\mu\nu}$ невырождена ($g \neq 0$), позволяет построить обратную ей матрицу $g^{\mu\nu}$, определяемую условием

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

Компоненты этой матрицы образуют два раза контравариантное симметричное тензорное поле на X, которое тоже называется метрикой и определяет скалярное произведение для ковариантных векторов в кокасательных пространствах к X: $g^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$.

Задание метрики позволяет связать между собой ковариантные и контравариантные тензоры, введя операции опускания и поднятия индексов:

$$A^{\mu\cdots}_{\cdots} = g^{\mu\nu}A^{\cdots}_{\nu\cdots}, \quad A^{\cdots}_{\nu\cdots} = g_{\nu\mu}A^{\mu\cdots}_{\cdots}.$$

В частности, с ее помощью взятие скалярного произведения (3.1) сводится к операции свертки индексов (2.2)

$$g_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu = g^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu = \tau^\mu\tau_\mu.$$

Многообразие X с введенной на нем псевдоримановой (римановой) метрикой называется псевдоримановым (римановым) пространством.

---

[3] Напомним, $\det(g_{\mu\nu}) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\sigma'}g_{\alpha\alpha'}g_{\nu\nu'}g_{\mu\mu'}g_{\sigma\sigma'}$, где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}$ — антисимметричный по всем своим компонентам символ Леви — Чивита с компонентой $\varepsilon^{0123} = 1$. Например, для 2×2 матрицы $\det = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$, для диагональной матрицы det равен произведению ее диагональных элементов.

Здесь следует заметить, что, хотя пространство-время является псевдоримановым, а гравигеометрия — псевдоримановой, в литературе по теории гравитации термин «псевдориманово» почти не употребляется и заменяется термином «риманово». Мы, однако, сохраняем правильные названия «псевдориманово пространство», «псевдориманова геометрия», не столько отдавая дань математической строгости, сколько потому, что в ряде случаев нам придется сопоставлять свойства псевдориманова и риманова пространств и само пространство-время наделено как псевдоримановой, так и римановой структурами (разд. 2.4).

Как и пространство Минковского, псевдориманово пространство на координатных областях является аффинным, но отличается от него метрикой. В пространстве Минковского это псевдоевклидова метрика, постоянная на всем пространстве — по крайней мере существует координатная система, в которой она такова. В псевдоримановом пространстве метрика зависит от точки, и выбором координатной системы ее можно привести к псевдоевклидовой всякий раз только в какой-либо одной точке. Вследствие этого в пространстве Минковского, например, интервал (1.4) определен для любых его точек x, y. В псевдоримановом пространстве он может быть записан только для дифференциалов

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \qquad (3.3)$$

Таким образом, псевдориманово пространство если и может быть приведено к пространству Минковского, то только в бесконечно малой окрестности какой-либо точки.

Хотя в псевдоримановом пространстве нельзя, как в пространстве Минковского, определить конечный интервал между его точками, но можно, используя дифференциальное выражение (3.3), определить «релятивистскую» длину всякой кривой γ, соединяющей эти точки:

$$s(\gamma) = \int_\gamma ds.$$

Причем в псевдоримановом пространстве одни и те же точки могут соединяться кривыми как с положительными, так и отрицательными значениями s.

Кривая, касательный вектор к которой в любой точке времениподобен ($ds^2<0$) (соответственно, пространственноподобен ($ds^2 > 0$), изотропен ($ds^2 = 0$)), называется времениподобной (соответственно, пространственноподобной, изотропной).

Если псевдориманова метрика не позволяет свести пространство-время к пространству Минковского на какой-либо не бесконечно малой области, то его кривизна препятствует

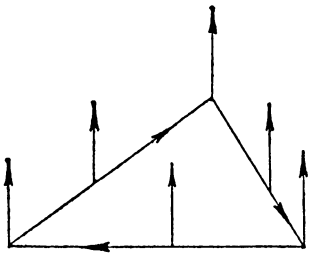


Рис. 13.

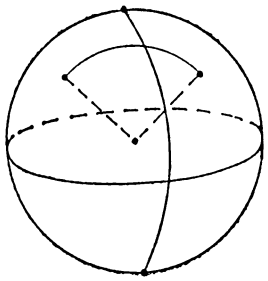


Рис. 14.

такому сведению даже в точке. Кривизна, наглядное представление о которой дает искривленная поверхность, является характеристикой другой геометрической конструкции на многообразии — связности, которая обобщает на искривленные пространства параллельный перенос в плоском пространстве.

Прежде чем давать общее определение связности, приведем ее наглядный двумерный пример. Возьмем плоскость. Параллельным переносом вектора на плоскости называется такой перенос, при котором направление вектора сохраняется (рис. 13). Его можно описать как перенос вдоль прямых так, что угол между вектором и прямой остается неизменным.

На искривленной поверхности (в качестве примера будем рассматривать сферу) роль прямой играет наикратчайшая линия, соединяющая две точки. На сфере это дуга большого круга, получаемая сечением сферы плоскостью, проходящей через ее центр. На глобусе примером таких линий являются меридианы и экватор (рис. 14).

Тогда, обобщая параллельный перенос на плоскости, параллельный перенос касательного вектора на искривленной поверхности можно описать как перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остается неизменным (рис. 15). Сам вектор, однако, при этом поворачивается, что особенно наглядно видно, если перенести его по замкнутому контуру, когда, в отличие от параллельного переноса на плоскости (рис. 13), конечное направление вектора, как это видно из рис. 15, не совпадает с начальным.

Изменение касательного вектора при переносе является главной характеристикой связности на многообразии. В дифференциальной форме его можно описать заданием оператора поворота вектора Γ при переходе из точки x в точку $x + dx$, а именно

$$\Gamma(\tau^\mu) = \tau^\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\tau^\alpha\, dx^\nu. \qquad (3.4)$$

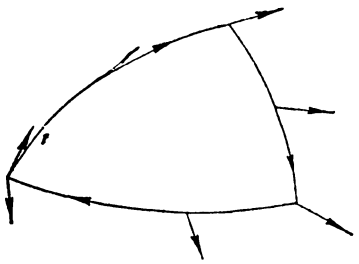


Рис. 15.

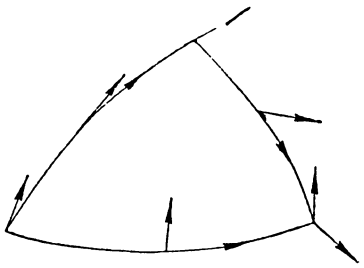


Рис. 16.

Коэффициенты $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ в формуле (3.4) называются компонентами связности. Разбивая теперь кривую, соединяющую две точки пространства, на малые отрезки и описывая на каждом отрезке изменение вектора с помощью оператора (3.4), можно получить изменение вектора при переносе из одной точки в другую. При этом существенно, что результат будет различен для различных кривых, связывающих эти точки (рис. 16).

Таким образом, параллельный перенос в искривленном пространстве зависит от пути, по которому он осуществляется.

Изменение вектора при параллельном переносе сказывается и на операции дифференцирования в искривленном пространстве. Действительно, производная определяется как предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tau(x + \Delta x) - \tau(x)}{\Delta x}.$$

Но векторы $\tau(x + \Delta x)$ и $\tau(x)$ в этом выражении заданы в разных точках, и, чтобы их вычесть один из другого, вектор $\tau(x)$ надо сначала перенести в точку $x + \Delta x$ с помощью оператора (3.4). В результате получим, что выражение для производной векторного поля в искривленном пространстве принимает вид

$$D_\nu \tau^\mu = \partial_\nu \tau^\mu + \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} \tau^\alpha. \tag{3.5}$$

Эта производная называется ковариантной производной, чтобы отличать ее от обычной частной производной ∂_ν.

Ковариантная производная векторного поля (3.5) следующим образом обобщается на ковариантную производную любого тензорного поля

$$D_\nu A^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \partial_\nu A^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} + \tag{3.6}$$
$$+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\nu} A^{\sigma \ldots \mu_m}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} + \cdots - \Gamma^{\sigma}_{\alpha_n \nu} A^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\alpha_1 \ldots \sigma}.$$

Ковариантная производная от скалярной функции, очевидно, сводится к ее частной производной: $D_\mu f = \partial_\mu f$.

Теперь обсудим вопрос, как связность связана с метрикой. Вообще говоря, никак. И здесь особенно важно подчеркнуть, что связность и метрика — две независимые геометрические конструкции на многообразии. Но в эйнштейновской ОТО, поскольку гравитационное поле отождествляется с метрическим, на связность накладывают два дополнительных условия: симметричности

$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \tag{3.7}$$

и метричности

$$D_\nu g_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.8}$$

Эти условия позволяют выразить компоненты такой связности через метрику:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}(g_{\nu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\nu} - g_{\nu\alpha,\sigma}). \tag{3.9}$$

Компоненты (3.9) называются символами Кристоффеля и часто обозначаются $\left\{ {\mu \atop \alpha\nu} \right\}$. В этой главе мы будем под связностью понимать именно символы Кристоффеля.

Для выражения (3.9) связности через метрику есть и геометрическое обоснование. Именно так связность на двумерной искривленной поверхности связана с метрикой, индуцированной на ней евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства [43].

Вместе с тем ограничения (3.7), (3.8) на связность, принятые в ОТО, открывают возможность ее непосредственного расширения на теории с более общей связностью. Это и было сделано в моделях единых теорий 20-х годов, в которых возникающие при таких обобщениях добавочные негравитационные компоненты связности пытались интерпретировать, в частности, как электромагнитный потенциал. В современном варианте к отказу от условия симметричности (3.7) приводит калибровочная теория гравитации, причем во всех ее вариантах, и возникающее при этом поле кручения — антисимметричная часть связности $Q^\mu_{\alpha\nu} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ — оказывается связанным со спином материи (см. разд. 3.4).

Компоненты связности $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ зависят, конечно, от системы координат, в которой они записаны. При изменении системы координат они преобразуются по закону

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\nu} = \Gamma^\sigma_{\beta\varepsilon} x'^\mu_{,\sigma} x^\beta_{,\alpha'} x^\varepsilon_{,\nu'} + x^\sigma_{,\alpha',\nu'} x'^\mu_{,\sigma}. \tag{3.10}$$

Сравнивая его с законом преобразования тензоров (2.3), видим, что он нетензорный. По нетензорному закону преобразуется и частная производная, например, векторного поля

$$\partial_{\nu'}\tau'^{\mu} = x^{\beta}_{,\nu'}x'^{\mu}_{,\alpha}\tau^{\alpha}_{,\beta} + x'^{\mu}_{,\alpha,\beta}x^{\beta}_{,\nu'}\tau^{\alpha}. \qquad (3.11)$$

Это происходит из-за неперестановочности оператора частной производной ∂_ν и зависящей от точки матрицы общековариантных преобразований $(\partial x'^{\mu}/\partial x^{\alpha})$. Однако нетензорность закона (3.10) и закона (3.11) компенсируют друг друга в составе ковариантной производной D_ν так, что ковариантная производная от тензора преобразуется как тензор, например

$$D_{\nu'}\tau'^{\mu} = x^{\beta}_{,\nu'}x'^{\mu}_{,\alpha}D_{\beta}\tau^{\alpha}.$$

Часто ковариантную производную вводят именно из соображений замены оператора частной производной, имеющей нетензорный закон общековариантных преобразований, на обобщенную производную с тензорным законом таких преобразований. Такой способ введения ковариантных производных оказался весьма общим, применимым для любых преобразований, зависящих от координат, и лег в основу всей современной теории калибровочных полей (см. разд. 3.2).

Нетензорный закон преобразований (3.10) позволяет выбором системы координат обратить в нуль компоненты связности $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ в любой наперед выбранной точке x, причем так, что метрика $g_{\mu\nu}(x)$ в этой точке (в силу условия метричности (3.8)) сведется к метрике Минковского и ее первые (но не вторые) производные будут равны нулю. Такая система координат называется локально инерциальной в точке x. Именно эту систему координат мы имели в виду, когда говорили, что псевдоримановo пространство можно привести с некоторой точностью к пространству Минковского в бесконечно малой окрестности какой-либо точки.

Что же препятствует устранению связности во всем пространстве или даже в некоторой малой, но конечной его области? Это — кривизна связности. Кривизна характеризует изменение касательного вектора при его переносе по замкнутому контуру (см. рис. 15).

Как и связность, кривизну удобно задавать в дифференциальной форме. Рассмотрим бесконечно малый замкнутый контур, образованный дифференциалами dx^{ν}, dx^{σ} на координатной поверхности $x^{\nu} - x^{\sigma}$ (рис. 17). Можно показать, что изменение вектора τ при таком переносе с точностью до членов более высокого порядка малости будет

$$\Delta\tau^{\mu} = (D_{\nu}D_{\sigma} - D_{\sigma}D_{\nu})\,\tau^{\mu}\,dx^{\sigma}\,dx^{\nu} = -R^{\mu}_{\alpha\nu\sigma}\tau^{\alpha}\,dx^{\nu}\,dx^{\sigma}, \quad (3.12)$$

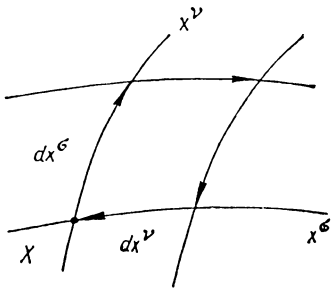


Рис. 17.

где все величины берутся в точке x и суммирование по повторяющимся индексам не производится. Величина $R^\mu_{\alpha\nu\sigma}$ в формуле (3.12) называется тензором кривизны и следующим образом выражается через компоненты связности:

$$R^\mu_{\alpha\nu\sigma} = \Gamma^\mu_{\alpha\sigma,\,\nu} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu,\,\sigma} + \\ + \Gamma^\mu_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}. \quad (3.13)$$

Можно проверить, что тензор кривизны $R^\mu_{\alpha\nu\sigma}$ действительно является тензором относительно общековариантных преобразований. Именно поэтому его и не удается обратить в нуль каким-либо выбором системы координат даже в одной точке. Так, в локально инерциальной системе отсчета, хотя компоненты связности и равны нулю, но отличны от нуля их производные (вторые производные от метрики), входящие в выражение для тензора кривизны.

Тензор кривизны обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{\mu\alpha\nu\sigma} = -R_{\alpha\mu\nu\sigma} = -R_{\mu\alpha\sigma\nu};\ R_{\mu\alpha\nu\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\alpha} + R_{\mu\sigma\alpha\nu} = 0,$$

и выполняется так называемое (второе) тождество Бианки

$$R^\mu_{\alpha\nu\sigma;\,\beta} + R^\mu_{\alpha\sigma\beta;\,\nu} + R^\mu_{\alpha\beta\nu;\,\sigma} \equiv 0. \quad (3.14)$$

Сверткой первого и третьего индексов тензора кривизны можно образовать симметричный тензор второго ранга $R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta}$, который называется тензором Риччи (остальные свертки дают тот же результат с точностью до знака). Свертывая далее тензор Риччи, получаем инвариант $R = R^\mu_\mu$, называемый скалярной кривизной.

То, что введенная величина $R^\mu_{\alpha\nu\sigma}$ действительно описывает кривизну пространства, можно наглядно продемонстрировать на примере двумерных поверхностей. В этом случае скалярная кривизна R совпадает с удвоенной гауссовой (обычной) кривизной поверхности $R = 2K = 2/r_1r_2$, где r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности в данной точке.

На этом мы завершим краткий экскурс по геометрическим основам ОТО. Псевдориманова метрика, связность и кривизна, интерпретируемые соответственно как гравитационное поле, его связность и кривизна, являются основными объектами, которыми оперирует теория гравитации и через которые записаны все ее уравнения.

4. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

При построении уравнений в теории гравитации мы будем исходить, как обычно в теории поля, из лагранжева формализма.

Напомним коротко, что в лагранжевом подходе динамика физической системы описывается заданием лагранжиана — некоторой вещественной функции $L(\varphi;\ \varphi_{,\mu})$ от динамических переменных системы $\{\varphi^a(x)\}$ и их производных. Динамические уравнения ищутся из условия, чтобы вариация так называемого функционала действия

$$S = \int\limits_U L(\varphi;\ \varphi_{,\mu})\, d^4x,$$

взятого по некоторой области U координатного пространства, обращалась в нуль при малых вариациях переменных $\delta\varphi^a$, исчезающих на границе области. Уравнения определены внутри области U и имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^a} = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} = 0 \qquad (4.1)$$

для каждой переменной φ^a. Уравнения (4.1) называются уравнениями Эйлера — Лагранжа, получаемыми вариацией лагранжиана L по переменным φ, а принцип их получения — вариационным принципом.

Лагранжев формализм применим для описания не всех физических систем, но в теории поля он общепринят. Нет твердых правил построения лагранжиана, кроме, пожалуй, одного. Если мы хотим, чтобы описываемая нами система обладала некоторой группой симметрий, ее лагранжиан выбирается инвариантным относительно этой группы, что влечет за собой соответствующую инвариантность уравнений Эйлера — Лагранжа (4.1).

В СТО группа симметрий — группа Лоренца. Приведем примеры функционала действия для свободного точечного тела массы m

$$S = -m \int ds,$$

где ds — релятивистский интеграл, и лагранжианов:

электромагнитного поля

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad (4.2)$$

где тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{E} = (F_{01},\ F_{02},\ F_{03})$ — электрическое поле; $\boldsymbol{H} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12})$ —

магнитное поле) следующим образом выражается через его вектор-потенциал:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\,\mu} - A_{\mu,\,\nu}; \tag{4.3}$$

свободного скалярного поля

$$L = \frac{1}{2}(\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} - m^2\varphi^2); \tag{4.4}$$

дираковского спинорного поля ψ (описывающего, например, электрон)

$$L = \frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] - m\bar{\psi}\psi, \tag{4.5}$$

где γ^μ — матрицы Дирака (см. разд. 3.1).

В ОТО преобразованиями симметрий являются общековариантные преобразования (2.1), (2.3). Группа Лоренца является частным случаем этих преобразований, и лагранжианы в теории гравитации могут быть получены непосредственно из лагранжианов СТО формальной заменой в них метрики Минковского на псевдориманову метрику, производных ∂_μ на ковариантные производные D_μ и элемента объема d^4x на $\sqrt{-g}\,d^4x$.

Исключение составляет лагранжиан спинорного поля. Дело в том, что спиноры допускают преобразования только группы Лоренца, но не общековариантные, и их определение в ОТО требует применения так называемого тетрадного формализма (см. разд. 2.1).

Заметим также, что в лагранжиан скалярного поля из соображений конформной симметрии (см. разд. 3.4) добавляют еще член $-\varphi^2R/6$, который в ряде случаев играет важную роль, например для рождения скалярных частиц в гравитационном поле (см. разд. 3.5). Считают, что лагранжиан именно с такой конформной связью является правильным общерелятивистским обобщением лагранжиана (4.4) [31].

Общерелятивистское обобщение функционала действия точечного тела имеет внешний вид тот же, что и в СТО:

$$S = -m\int ds, \tag{4.6}$$

но здесь ds — интервал в искривленном пространстве. Рассмотрим следующие из него уравнения движения. Динамическими переменными, описывающими точечное тело, являются его координаты. Действие S пропорционально релятивистской длине траектории тела, которая времениподобна. Поэтому вариация S по координатам тела обращается в нуль на

траектории, имеющей минимальную релятивистскую длину, уравнение которой

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \qquad (4.7)$$

и есть уравнение Эйлера — Лагранжа движения точечного тела в гравитационном поле.

Уравнение (4.7) называется уравнением геодезической в пространстве со связностью Γ, а его решения — геодезическими линиями. В плоском пространстве, где Γ = 0, уравнение геодезической сводится к уравнению прямой линии. В искривленном пространстве такое сведение всегда можно сделать в какой-либо точке, выбрав локально инерциальную в ней систему координат.

Уравнение геодезической (4.7) можно переписать в виде $D_\nu u^\mu = 0$, где $u^\mu = dx^\mu/ds$ — вектор 4-скорости (1.10), касательный к геодезической. Оно означает, что этот вектор при параллельном переносе вдоль геодезической будет оставаться касательным к ней. Через всякую точку пространства в любом направлении проходит геодезическая. Она однозначно задается самой этой точкой и касательным к ней в этой точке вектором скорости.

Таким образом, точечные тела в гравитационном поле движутся как свободные по времениподобным геодезическим определяемого этим полем псевдориманова пространства. Свет в гравитационном поле распространяется по изотропным геодезическим.

Гораздо более трудной задачей оказалось описание движения в гравитационном поле неточечных тел, причем не только в формально-математическом плане. Мы коснемся ее в конце раздела, а сейчас перейдем к рассмотрению уравнений самого гравитационного поля.

Как уже указывалось, уравнения гравитации были установлены в ноябре 1915 г. Д. Гильбертом, применившим вариационный принцип к функционалу действия

$$S = \int \left(-\frac{1}{2\varkappa} R + L_м\right) \sqrt{-g}\, d^4x, \qquad (4.8)$$

и А. Эйнштейном, исходившим из ряда предположений, из которых условие общей ковариантности стало окончательным критерием выбора уравнений в форме

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta}, \qquad (4.9)$$

где $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи; R — скаляр кривизны гравитационного поля; $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса материи; $\varkappa$ — постоянная.

Уравнения (4.9) получили название уравнений Эйнштейна. Их десять ($R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$) для десяти компонент метрики ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$). Они являются уравнениями второго порядка по метрике — гравитационному полю — и связывают кривизну гравитационного поля, т. е. пространства-времени с тензором энергии-импульса материи $T_{\alpha\beta}$. Постоянная $\varkappa$ в уравнениях (4.9) называется эйнштейновской гравитационной постоянной и выражается через гравитационную постоянную G в законе тяготения Ньютона соотношением $\varkappa = 8\pi G c^{-2}$ (см. конец раздела).

Тензор энергии-импульса характеризует распределение и движение материи. Его компонентами T^{00}, T^{0i}, T^{ij} являются соответственно плотность энергии, плотность импульса (плотность потока энергии) и плотность потока импульса материи. Например, тензор энергии-импульса свободных частиц

$$T^{\alpha\beta} = \mu u^{\alpha} u^{\beta}, \tag{4.10}$$

где μ — плотность массы в системе покоя; тензор энергии-импульса среды (идеальной жидкости)

$$T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon) u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta}, \tag{4.11}$$

где ε — плотность энергии, а p — давление (в системе покоя).

Тензор энергии-импульса является универсальной характеристикой материи, присущей, в отличие от всех других известных характеристик, всем без исключения видам материи. Поэтому то, что именно он является источником гравитационного поля и искривления пространства-времени, делает гравитационное поле универсальным. Однако это не значит, что пустое пространство (без обычной материи) плоское. В пустом пространстве ($T_{\alpha\beta} = 0$) уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям $R_{\alpha\beta} = 0$. Тогда как для плоского пространства требуется выполнение более сильного условия $R^{\nu}_{\alpha\gamma\beta} = 0$.

Построение уравнений, которые самым конкретным образом связывают свойства пространства-времени и материи и согласно которым наше пространство может меняться и эволюционировать, завершило начатый СТО отказ от ньютоновской картины мира и приобрело мировоззренческий характер. Сразу же начались поиски решений этих уравнений. Сейчас их получено довольно много [64] (см. разд. 1.5), но сначала это оказалось весьма трудным делом, и каждое новое решение было событием.

Причиной является то, что уравнения Эйнштейна существенно нелинейны, т. е. в них нельзя выделить линейную часть, описывающую свободное поле. Поэтому, в отличие

от электромагнитных полей, гравитационные поля обязательно взаимодействуют друг с другом, и для них не справедлив принцип суперпозиции. Это характерно для всех неабелевых калибровочных полей (см. разд. 3.2).

Линейными уравнениями гравитации становятся для слабого поля, если метрику $g_{\mu\nu}$ представить как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $h_{\mu\nu}$ — малые поправки к метрике Минковского η. Тогда уравнения для h принимают вид

$$\Box h_{\mu\nu} - h^{\lambda}_{\nu,\,\lambda,\,\mu} - h^{\lambda}_{\mu,\,\lambda,\,\nu} + h^{\lambda}_{\lambda,\,\mu,\,\nu} = -2\varkappa S_{\mu\nu},$$
$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}. \tag{4.12}$$

Важно подчеркнуть, что уравнения Эйнштейна (4.9) не являются независимыми. Используя свернутые по парам индексов $\alpha\nu$ и $\beta\mu$ тождества Бианки (3.14), получаем дифференциальные тождества для левой части уравнений Эйнштейна

$$\left(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu} R\right)_{;\mu} = 0, \tag{4.13}$$

в силу которых аналогичным тождествам должна удовлетворять и правая часть уравнений Эйнштейна

$$T^{\mu}_{\nu;\,\mu} = 0. \tag{4.14}$$

Последние представляют собой обобщение на случай искривленного пространства закона сохранения энергии-импульса материи.

А. Эйнштейн после нескольких лет колебаний взял выполнение тождеств (4.14), связав их с условием общей ковариантности, в качестве одного из основных исходных пунктов для получения уравнений гравитации, подбирая так левую часть, чтобы она удовлетворяла таким же тождествам. В лагранжевом формализме тождества (4.13) и (4.14) являются следствием общей ковариантности лагранжианов гравитационного поля и материи (см. разд. 2.3).

Тождества (4.13) накладывают четыре дополнительных условия на десять уравнений Эйнштейна, в силу которых последние перестают быть независимыми. В результате число уравнений получается меньше числа неизвестных. Это означает, что не все неизвестные являются в действительности динамическими переменными и на них нужно наложить дополнительные условия, например, выбором какой-либо конкретной системы отсчета. Эта ситуация является общей для так называемых теорий со связями, к которым относятся теория гравитации и все калибровочные теории.

Наличие связей существенно усложняет постановку задачи Коши, т. е. выбор начальных данных для уравнений Эйнштейна. Дело в том, что задаваемые на некотором трехмерном подпространстве, отвечающем значению $x^0 = 0$, компоненты метрики, их производные, а также материальные переменные должны удовлетворять на нем уравнениям связи, решить которые можно далеко не всегда. Поэтому на практике задача Коши для уравнений Эйнштейна в том виде, в каком должна, почти никогда не ставится, а их решения фактически подбираются, исходя из тех или иных соображений симметрии, физического смысла правой части уравнений и т. д.

Уравнения Эйнштейна (4.9) остаются признанными уравнениями классической теории гравитации. Однако корректность и однозначность их вывода, а именно их левой части, не бесспорны.

Вслед за Д. Гильбертом большинство авторов предпочитают выводить уравнения (4.9) из вариационного принципа с гильберт-эйнштейновским действием (4.8). Однако такой вывод имеет ряд тонкостей, на что указывал и сам Д. Гильберт [90a].

Дело в том, что, в отличие от других лагранжианов теории поля, гильбертовское действие содержит вторые производные полевых функций — метрики — и линейно по ним. В результате нулевая вариация метрики $\delta g_{\alpha\beta}$ на границе области ∂U уже не гарантирует, как обычно, обращение в нуль вариации действия на границе ∂U. Эту трудность можно обойти, если, опуская в гильбертовском действии полную дивергенцию (от этого уравнения поля не изменятся), перейти к так называемому усеченному действию

$$S = \int g^{\mu\nu} (\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) \sqrt{-g}\, d^4x, \qquad (4.15)$$

которое, однако, не является общековариантным.

Другим путем является применение вариационного принципа Палатини, когда гравитационное действие (4.8) варьируется независимо по метрике и связности. Если лагранжиан материи не зависит от связности и связность симметрична, то, кроме уравнений Эйнштейна, в результате варьирования по связности получим связывающее метрику и связность условие метричности (3.8).

В силу своей особенности — независимого варьирования по метрике и связности — принцип Палатини получил широкое распространение в обобщениях ОТО, в которых связность не сводится к символам Кристоффеля (см. раздел 3.4).

А. Эйнштейн строил левую — геометрическую — часть

гравитационных уравнений (обозначим ее $G_{\alpha\beta}$), исходя из двух условий:

1) она является рациональной функцией метрики, ее первых и вторых производных, причем от последних должна зависеть линейно;

2) она удовлетворяет «закону сохранения» $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. Однако проведенный Э. Картаном анализ показал, что этим условиям удовлетворяет $G_{\alpha\beta}$ более общего вида, чем левая часть уравнений Эйнштейна, а именно

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \Lambda g_{\alpha\beta},$$

где Λ — так называемый космологический член.

Космологический член был включен в уравнения гравитации А. Эйнштейном, так сказать, из феноменологических соображений при построении первых космологических моделей (А. Эйнштейн, В. де Ситтер, 1917) (см. разд. 2.5). Вводя космологический член как энергию отталкивания, противостоящую притяжению, А. Эйнштейн отказался от него после своего присоединения к модели Фридмана, поскольку нестатические космологические модели оказались возможными и без космологического члена. Учет космологического члена до сих пор все же является предметом дискуссий [51, 150]. Если следовать общим принципам, он совершенно необходим. Главное возражение, связанное с его эмпирической малостью ($\Lambda \sim 10^{-56}$ см$^{-2}$) и с его ничтожным влиянием на некосмологические процессы, не является принципиальным. Конечно, есть круг задач, где космологическим членом можно пренебречь. Но в современных космологических моделях он вновь, уже с квантовых позиций как эффективная энергия вакуума, играет ключевую роль, оцениваемый на ранней стадии развития Вселенной значением $\sim 10^{30}$ см$^{-2}$ (см. разд. 2.5; 3.5).

Добавление космологического члена является не единственно возможным обобщением уравнений Эйнштейна (4.9), даже если не выходить за рамки псевдоримановой геометрии. Можно, в частности, отказаться от условия, что вторые производные метрики должны входить в уравнения линейно. Тогда открывается возможность для теорий гравитации с так называемыми квадратичными лагранжианами, включающими, помимо гильбертовского R, различные свертки квадратов тензора кривизны $R \cdot R$, $R_{..}R^{..}$, $R_{....}R^{....}$.

Такие лагранжианы были впервые предложены А. Эддингтоном в 1922 г. [129]. Интерес к ним возрос в 50—60-е годы в связи с надеждами, что в теориях с квадратичными (а также еще более общими неполиномиальными [33]) лагран-

жианами удастся избежать гравитационных сингулярностей. Кроме того, оказалось, что без квадратичных лагранжианов не может совершенно обойтись квантовая гравитация, и все дискуссии о выборе того или иного сочетания различных квадратичных членов в качестве лагранжиана ведутся сейчас с квантовых позиций (см. разд. 3.5).

Квадратичные лагранжианы более приемлемы и для обобщенных теорий гравитации, где они приводят, в отличие от гильбертовского R, к динамическим уравнениям, например, для поля кручения.

Еще одной возможностью модернизации гравитационного действия (4.8) является учет в нем тех или иных граничных членов, т. е. представляемых интегралом не по области U, а по ее границе dU. Их включение может иметь целью как компенсацию граничного члена, возникающего при вариации гильбертовского действия, так и другие задачи [143].

Вернемся теперь к обсуждению уравнений движения и их связи с уравнениями поля. В отличие от уравнений гравитационного поля, которые могут быть выведены почти однозначно, исходя из некоторых принятых предположений, для уравнений движения не удалось сформулировать сколь-нибудь общие правила их построения. Это не только создавало трудности при нахождении уравнений движения, но и подрывало универсализм самой ОТО.

Выход виделся в предположении, что уравнения движения должны быть следствием уравнений поля. Оно опиралось на то, что гравитационное поле является нелинейным и его действие на частицу можно попытаться описать как взаимодействие с собственным гравитационным полем этой частицы.

Первые шаги в этом направлении были сделаны в 1927 г. А. Эйнштейном и Я. Громмером, которые предложили рассматривать массы как особые точки поля, движение которых вытекает из уравнений тяготения. Эта идея затем развивалась в работах А. Эйнштейна, Л. Инфельда, Б. Гофмана [56], но привела лишь к частным, можно сказать, модельного характера результатам.

Гораздо более широкое распространение получило другое направление, активно развивавшееся в нашей стране В. А. Фоком и его школой. Оно основывается на том, что полевыми уравнениями движения является закон сохранения тензора энергии-импульса материи (4.14) [121]. Так ли это? Чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить: во-первых, является ли закон сохранения (4.14) следствием уравнений поля и, во-вторых, может ли он играть роль уравнений движения.

«Уравнения» (4.14) выводят из уравнений Эйнштейна (4.9), применяя к их левой части свернутые тождества Бианки

(4.13). Следовательно, они выполняются для тензора энергии-импульса материи в гравитационном поле, порожденном самой этой материей. Поэтому они как следствие уравнений поля не могут быть, например, уравнениями движения материи во внешнем гравитационном поле.

С другой стороны, в лагранжевом формализме тождества (4.13) возникают из условия общей ковариантности лагранжиана гравитационного поля, т. е. являются выражением определенных свойств симметрии этого поля. Следовательно, «уравнения» (4.14) можно рассматривать как условие на тензор энергии-импульса материи, чтобы порождаемое им гравитационное поле обладало этими симметриями.

Добавляют ли они что-либо к уравнениям движения? Нет, если лагранжиан материи обладает теми же симметриями, что и лагранжиан гравитационного поля. Закон сохранения (4.14) представляет собой тождество на решениях уравнений движения в произвольном гравитационном поле, следующих из условия общей ковариантности лагранжиана материи (см. разд. 2.3). Тем самым он согласован с уравнениями движения. Но именно в силу этого он может заменять их и выполнять роль уравнений движения. Это легко понять на примере задач механики, когда закон сохранения энергии, получаемый интегрированием уравнений движения, часто сам сразу выбирается в качестве одного из них.

Примером, когда из закона сохранения (4.14) можно полностью получить уравнения движения, является движение среды с тензором энергии-импульса (4.11). Для нее уравнениями движения (4.14) служат уравнение непрерывности и закон движения по геодезическим, но в пространстве с метрикой $g' = \omega^2 g$, $\omega = \exp\left[\int dp\,(p + \varepsilon(p))^{-1}\right]$.

В общем случае, однако, закон сохранения (4.14) не может полностью заменить уравнения движения, например, когда число материальных переменных больше 4. Но он оказывается полезным, когда лагранжиан материи в гравитационном поле неизвестен. В этом случае тензор энергии-импульса и уравнения движения можно хотя бы частично восстановить, действуя последовательными приближениями.

Для этого надо взять тензор энергии-импульса в пространстве Минковского (нулевое приближение), подставить его в уравнения Эйнштейна и найти метрику (первое приближение), подставить эту метрику в уравнения (4.14) и попытаться найти тензор энергии-импульса в первом приближении и т. д. В частности, этот метод применяется для получения уравнений движения протяженных тел в гравитационном поле (см. [14, 99, 121]). Эта задача оказалась очень сложной и до сих пор до конца не решена.

В заключение приведем предельный переход от ОТО к нерелятивистской механике и закону тяготения Ньютона, предполагая малые скорости и слабое гравитационное поле. Критерием слабости гравитационного поля является разложение компонент метрики $g_{\mu\nu}$ по степеням c^{-2}. Поэтому мы здесь вернемся к системе единиц, где $c \neq 1$.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле описывается лагранжианом

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi.$$

Его можно получить из общерелятивистского действия (4.6), если положить

$$g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}; \quad g_{0i} = 0; \quad g_{ik} = \delta_{ik} \qquad (4.16)$$

и перейти к приближению малых скоростей

$$-mc\,ds = -mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}\,dt = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi.$$

Подставляя метрику (4.16) в уравнения Эйнштейна и сохраняя тот же порядок малости, получаем для φ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\mu,$$

где μ — плотность массы. Отсюда для точечного источника следует закон тяготения Ньютона

$$\varphi = -GMR^{-1}.$$

Такой предельный переход, в частности, позволяет установить приведенную выше связь эйнштейновской и ньютоновской гравитационных постоянных $\varkappa = 1{,}86 \cdot 10^{-27}$ см $\cdot$ г$^{-1}$ и $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ г$^{-1} \cdot$ см$^3 \cdot$ с$^{-2}$. В универсальной системе единиц $G^{1/2} = 1{,}616 \cdot 10^{-33}$ см $= 5{,}39 \cdot 10^{-44}$ с, т. е. совпадает с планковской длиной $(G\hbar c^{-3})^{1/2}$ и планковским временем $(G\hbar c^{-5})^{1/2}$. Считается, что при интервалах длины и времени, меньших планковских, система должна рассматриваться как сугубо квантовая.

Следующее за ньютоновским так называемое постньютоновское приближение учитывает уже эффекты релятивистской гравитации [77]. Оно широко применяется для расчета эффектов в Солнечной системе, и был предложен даже «прагматический» каталог различных теорий гравитации, оценивающий их по постньютоновскому приближению и тем самым — по их согласию с экспериментом.

5. КАТАЛОГ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

К настоящему времени получено довольно много решений уравнений Эйнштейна, и охватить их без какой-либо классификации трудно. Фактически любое метрическое поле, будучи подставленным в уравнения Эйнштейна, является его решением с некоторой правой частью; вопрос только в физической разумности последней. Поэтому методы классификации решений уравнений Эйнштейна (а их несколько) — это, как правило, классификация гравитационных полей вообще, безотносительно к уравнениям Эйнштейна. Только некоторые из них, например по тензору энергии-импульса, имеют в виду структуру этих уравнений.

В этом разделе мы хотим познакомить читателя с двумя типами классификации гравитационных полей, ссылки на которые можно наиболее часто встретить в литературе. Это — алгебраическая классификация тензора кривизны по Петрову и классификация метрик по группам движений [64, 85].

Начнем с классификации Петрова. Она рассматривает алгебраическую структуру конформного тензора Вейля

$$C^{\mu}_{\alpha\nu\sigma} = R^{\mu}_{\alpha\nu\sigma} + \frac{1}{6} R\,(\delta^{\mu}_{\nu} g_{\alpha\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma} g_{\alpha\nu}) - \\ - \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\nu} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\sigma} R^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma} R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\nu} R^{\mu}_{\sigma}), \qquad (5.1)$$

который назван так, поскольку остается инвариантным относительно конформных преобразований — умножений метрики на нигде не нулевую произвольную скалярную функцию $g_{\mu\nu} \to f^2 g_{\mu\nu}$. Тензор $C_{\mu\nu\alpha\sigma}$ обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор кривизны, и, кроме того, при свертке по любой паре индексов обращается в нуль. Поэтому он имеет всего 10 независимых компонент. Им соответствует 10 вещественных компонент симметричной комплексной бесследовой (сумма диагональных элементов равна нулю) (3 × 3)-матрицы

$$Q_{ac} = -C_{a0c0} - \frac{i}{2}\varepsilon_{c0ef} C^{ef}_{a0},$$

записанной в специальной системе отсчета, где $g_{ab} = \eta_{ab}$ (см. разд. 2.1).

Рассматривается характеристическое уравнение

$$\det(\hat{Q} - \lambda I) = 0$$

на собственные значения λ матрицы $\hat{Q}$ (I — единичная матрица). Его решение определяет алгебраический тип матрицы

Таблица 1

Тип (по Петрову)	Условия на матрицу	Матрица в нормальной форме
I	$(\hat{Q}-\lambda_1 I)(\hat{Q}-\lambda_2 I)(\hat{Q}-\lambda_3 I)=0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$
D	$\left(\hat{Q}+\frac{\lambda}{2}I\right)(\hat{Q}-\lambda I)=0$	$\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$
II	$\left(\hat{Q}+\frac{\lambda}{2}I\right)^2(Q-\lambda I)=0$	$\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2}+1 & -i & 0\\ -i & -\frac{\lambda}{2}-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$
N	$\hat{Q}^2=0$	$\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ -i & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
III	$\hat{Q}^3=0$	$\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 1\\ i & 1 & 0\end{pmatrix}$
0	$\hat{Q}=0$	

$\hat{Q}$, который и берется в качестве характеристики (тип по Петрову) гравитационного поля в данной точке (табл. 1).

Все типы, кроме типа I, называются алгебраически специальными, а типы D (тип I при $\lambda_1=\lambda_2$) и N (тип II при $\lambda=0$) — вырожденными.

Существует ряд теорем, устанавливающих, какие гравитационные поля к какому типу Петрова относятся, например, статические метрики принадлежат типам I, D или 0.

Классификация тензора Вейля не исчерпывает алгебраическую классификацию тензора кривизны. Соотношение (5.1) можно переписать в виде

$$R_{abcd}=C_{abcd}+E_{abcd}+G_{abcd},$$

где E_{abcd} выражается через бесследовую часть тензора Риччи $R_{ab}-\frac{1}{4}g_{ab}R$, а G_{abcd} — через скалярную кривизну R. Поэтому классификация R_{abcd} наряду с классификацией Петрова тензора Вейля включает и классификацию бесследовой части тензора Риччи (типы Плебаньского) [64].

Перейдем к классификации гравитационных полей по группам движений. Необходимые понятия из теории групп читатель может найти в разделе 3.1.

Как мы уже определяли (см. разд. 1.1), группой движения пространства называется группа преобразований, сохраняющая геометрическую структуру пространства. Для псевдоримановых пространства X движением называется диффеоморфизм X (взаимно однозначное дифференцируемое отображение X на себя), сохраняющий данную псевдориманову метрику на X. Будем, как и раньше, задавать группы движений с помощью генераторов.

Генератор группы движений описывается векторным полем τ, которое в каждой точке x пространства указывает направление $\tau(x)$ переноса этой точки при соответствующем групповом преобразовании.

Действие генераторов τ группы движений на тензорные поля имеет вид

$$(\mathcal{L}_\tau A)^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n} = \tau^\sigma \partial_\sigma A^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n} - \\ - A^{\sigma\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}\tau^{\mu_1}_{,\sigma} - \cdots + A^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\sigma}\tau^{\sigma}_{,\nu_n}, \qquad (5.2)$$

и оператор $\mathcal{L}_\tau$ называется производной Ли в направлении τ. На скалярную функцию $\mathcal{L}_\tau$ действует как обычная производная по направлению ∂_τ, если τ — поле вдоль координатной линии, т. е. $\tau = \partial_\mu$, то производная Ли тоже сводится к обычной производной.

Теперь можно записать условие того, что группа движений сохраняет псевдориманову метрику пространства. Это имеет место, когда для всякого ее генератора τ производная Ли метрики равна нулю:

$$(\mathcal{L}_\tau g)_{\mu\nu} = \tau^\sigma g_{\mu\nu,\,\sigma} + g_{\mu\sigma}\tau^\sigma_{,\nu} + g_{\nu\sigma}\tau^\sigma_{,\mu} = 0. \qquad (5.3)$$

Обратно, множество полей τ, удовлетворяющих для данной метрики $g_{\mu\nu}$ уравнению (5.3), образует генераторы некоторой группы движений. Уравнение (5.3) называется уравнением Киллинга, а его решения τ — полями Киллинга.

Используя условие метричности (3.8), уравнение Киллинга (5.3) можно переписать в виде

$$\tau_{\nu;\,\mu} + \tau_{\mu;\,\nu} = 0,$$

и поле Киллинга τ полностью задается 10 значениями $\tau_\mu(x)$ и $\tau_{\mu}(x)_{;\nu}$ в некоторой точке x. В частности, если $\tau_\mu = 0$, $\tau_{\mu;\nu} = 0$ в какой-то точке, то $\tau = 0$ в любой точке.

Важными характеристиками групп движений являются ранг группы — число независимых генераторов (например,

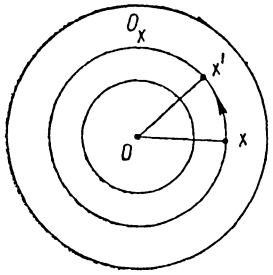


Рис. 18.

группа Лоренца имеет ранг 6) — и наличие орбит.

Орбита действующей в пространстве X группы G, проходящая через точку x, определяется как множество точек O_x, которые могут быть получены из точки x действием на нее всевозможных элементов группы G. Например, пусть X — плоскость и группа движений G — группа поворотов с центром в точке O. Тогда, поскольку эта группа не меняет расстояние, ее орбитой O_x будет окружность с центром в O, проходящая через точку x (рис. 18).

Для любых двух точек орбиты x и x' всегда найдется элемент g группы движений G, что $x' = gx$. Например, любые две точки на окружности O_x (рис. 18) могут быть переведены друг в друга поворотом плоскости на некоторый угол α. Орбита может состоять и из одной точки, например точка 0 на рис. 18, и из самого пространства X.

Что дает знание ранга группы движений и ее орбит? Во-первых, можно перечислить группы движений данного ранга; во-вторых, выписать явный вид генераторов группы (полей Киллинга) в координатах ее орбиты; в-третьих, подставляя эти генераторы в уравнение Киллинга (5.3) и решая их, удается получить общий вид метрик с данной группой движений [85].

Имеется ряд теорем, касающихся ранга групп движений. Упомянем одну из них, утверждающую, что ранг группы движений четырехмерного псевдориманова пространства не может быть больше 7, и только для пространств постоянной кривизны он равен 10 (например, группа Пуанкаре пространства Минковского). Это делает классификацию гравитационных полей по группам движений вполне обозримой.

Можно перечислить все группы ранга 2 и 3. Групп ранга 2 всего две, задаваемых коммутационными соотношениями своих генераторов:

$[\tau_1, \tau_2] = 0$ — коммутативная;

$[\tau_1, \tau_2] = \tau_1$ некоммутативная.

В X^4 они имеют двумерные орбиты.

Группы движений ранга 3 подчиняются классификации Бианки, и про гравитационные поля с этими группами движений тоже говорят, что они относятся к такому-то типу, по Бианки. Генераторы этих групп удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\tau_1, \tau_2] = n_3\tau_3, \quad [\tau_2, \tau_3] = n_1\tau_1 - a\tau_2, \quad [\tau_3, \tau_1] = n_2\tau_2 + a\tau_1,$$

где значения структурных констант a, n_1, n_2, n_3 в зависимости от типа группы приведены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

Тип (по Бианки)	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
III	1	1	−1	0
IV	1	1	0	0
V	1	0	0	0
VI	$0 \leqslant h \neq 1$	1	−1	0
VII	$0 \leqslant h$	1	1	0
VIII	0	1	1	−1
IX	0	1	1	1

Здесь содержатся следующие хорошо известные группы: тип I — группа трехмерных трансляций; тип VIII — группа поворотов и лоренцевских вращений в трехмерном пространстве Минковского; тип IX — группа поворотов в трехмерном евклидовом пространстве.

В X^4 группы ранга 3 могут иметь дву- и трехмерные орбиты. Например, к типу IX, по Бианки, с двумерными пространственно-подобными орбитами постоянной положительной кривизны — сферами — относится известное решение Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} c^2\, dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (5.4)$$

где φ, θ — угловые координаты на сфере, а геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (5.4) длина окружности $r = \text{const}$ равна $2\pi r$. Величина $r_g = 2GMc^{-2}$ называется гравитационным радиусом.

Решение (5.4) описывает статическое центрально-симметричное гравитационное поле, создаваемое в пустом пространстве точечной массой M, находящейся в центре поля $r = 0$ (или центрально-симметричным распределением масс). Более того, согласно теореме Биркгофа, оно является единственным (с точностью до координатных преобразований) статическим решением в пустом пространстве со сферической симметрией [125] и обобщает в ОТО закон Ньютона.

Примерами пространств с группой движения ранга 3, имеющей трехмерные орбиты, служат однородные космологические модели (см. [11, 77]). Этими орбитами являются трехмерные подпространства, все точки которых характеризуются одинаковыми значениями единого в этих моделях «космического» времени. Имеются однородные космологические модели и с группами движений, ранг которых больше 3 (см. ниже модель Фридмана).

Наряду с группами ранга 2 и 3 можно перечислить и группы ранга 4 [85]. Но для групп большего ранга такое перечисление уже теряет смысл, поскольку не все они могут быть

Таблица 3

Тип (по Петрову)	O_4				O_3			O_2
	G_7	G_6	G_5	G_4	G_6	G_4	G_3	G_3
I	—	—	—	+	—	—	+	—
D	—	+	+		—	+	+	+
II	—	—	—		—	—	+	—
N	—	+	+		—		+	—
III	—	—	—	+	+	—	+	—
0	+	+			+	+		

группами движений в четырехмерном псевдоримановом пространстве. Имеются разные способы исследования групп движений ранга больше 4, например, используя то, что всякая группа ранга $3 < n \leqslant 5$ содержит подгруппу ранга $n - 1$. Мы здесь не будем их касаться. Приведем только пример известной космологической модели Фридмана.

Эта модель основывается на предположении однородности и изотропности Вселенной. В силу этого никакие компоненты метрики в такой модели не должны зависеть от пространственных координат, и трехмерное подпространство — пространственноподобная орбита группы движений — должно быть пространством постоянной кривизны k. Если $k > 0$, говорят о закрытой модели Фридмана, если $k < 0$ или $k = 0$ — соответственно об открытой или плоской моделях.

Рассмотрим закрытую модель Фридмана, орбитами в которой являются трехмерные сферы S^3. Она описывается метрикой

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a^2(t)\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\}, \quad (5.5)$$

где χ, θ, φ — угловые координаты на трехмерной сфере, а функция $a(t)$, имеющая смысл радиуса кривизны сферы, определяется уравнениями гравитационного поля с тензором энергии-импульса среды (4.11). Группа движений этой модели, действующая на орбитах S^3, имеет ранг 6.

В заключение этого раздела приведем имеющуюся связь между классификациями гравитационных полей, по Петрову, и по группам движений. Существует ряд теорем, устанавливающих эту связь, но картина не является пока полной. Проиллюстрировать ее может табл. 3 для типов по Петрову и групп движений G_n (n — ранг) с неизотропными k-мерными орбитами O_k, где использованы обозначения «—» (не может существовать), «+» (существует). В частности, решение Шварцшильда имеет тип D, а решение Фридмана — тип 0, по Петрову.

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ ОТО

Известные гравитационные эксперименты, включая планируемые, можно разделить в основном на следующие группы.

1. Проверка закона тяготения Ньютона.

2. Проверка принципа эквивалентности.

Эти эксперименты, если так можно выразиться, относятся к предэйнштейновской гравитации. Но это не значит, что они остались в прошлом. Они проводятся вновь и вновь, причем на самом современном уровне, поскольку на этих законах базируется вся сегодняшняя теория гравитации.

3. Гравитационное красное смещение частоты электромагнитного излучения.

4. Отклонение света, измерения орбит планет и спутников в гравитационном поле Солнца и Земли.

5. Измерение запаздывания радарного эха от планет.

Эти эксперименты направлены на проверку собственно ОТО, причем эксперименты (4), (5) позволяют сравнить ее с альтернативными теориями гравитации. В эту группу входят все три способа проверки ОТО, предложенных Эйнштейном и давшие ее первое подтверждение — прецессия перигелия орбиты Меркурия, отклонение света Солнцем, гравитационное красное смещение.

6. Поиски гравитационных волн.

Это очень обширный в настоящее время круг экспериментов как по размаху, так и по диапазону применяемых эффектов. Они важны и для астрофизики, поскольку речь идет в основном о гравитационных волнах от космических объектов, и в принципиальном плане — несут ли гравитационные волны энергию.

Здесь у нас нет возможности сколько-нибудь детально рассмотреть даже отдельные эксперименты. Мы лишь хотим указать те направления, в которых сейчас ведется экспериментальная работа [116, 127].

Закон тяготения Ньютона. Проверяется зависимость от расстояния силы взаимодействия двух точечных масс

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{6.1}$$

В начале 70-х годов было высказано предположение, что ньютоновский потенциал надо модифицировать учетом юкавского члена

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}(1 + \alpha e^{-r/\lambda}), \tag{6.2}$$

где α и λ — некоторые константы. Эффективно это можно представить как зависимость гравитационной постоянной G от расстояния в законе (6.1).

В 1976 г. Д. Лонг опубликовал результаты своих экспериментов, в которых сравнивались G (30 см) и G (4,5 см). Оказалось, что G (30) $>$ G (4,5) на 0,37 $\pm$ 0,07 %, на основании чего он сделал вывод, что зависимость G от расстояния должна быть логарифмической

$$G(r) = G(1 + \varepsilon \ln r), \quad \varepsilon = (20 \pm 4) \cdot 10^{-4}. \qquad (6.3)$$

Все это стимулировало исследования по проверке ньютоновского закона тяготения и его модификации (6.2) ([148], с. 984, 999).

Мы приведем здесь данные Дж. Хоскинса и Р. Ньюмена, Х. Хиракавы и др. Первые использовали традиционный крутильный балансир и получили в законе (6.3) на расстояниях 5 см — 1 м значение $\varepsilon = (-1 \pm 3) \cdot 10^{-4}$. Вторые применили метод «динамического» гравитационного поля. Измерялось квадрупольное взаимодействие (с силой, пропорциональной r^{-5}) вращающегося (с частотой $\approx$ 30 Гц) цилиндра и массивной квадрупольной резонансной антенны. Было, в частности, получено, что добавка δ в показатели степени ньютоновского потенциала $r^{-(1+\delta)}$ на расстояниях 2,6—10,7 м лежит в пределах $(2{,}1 \pm 6{,}2) \cdot 10^{-3}$. Отсутствие модификаций в законе Ньютона подтвердили и эксперименты, проведенные в нашей стране (В. И. Панов, В. Н. Фронтов и др.) (см. [110], с. 274, 276, 301).

Помимо лабораторных экспериментов, предлагаются и спутниковые эксперименты проверки ньютоновского закона тяготения в диапазоне 200—6000 км.

Не дали положительного результата и измерения зависимости G от времени (на основе радиолокационных наблюдений планет, лазерной локации Луны [116, 127], а также с использованием межпланетных станций «Вояджер»)[4]. Получено $\dot{G}/G \leqslant (0{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-11}$ год$^{-1}$. Само значение G было на порядок уточнено в экспериментах 1975—1978 гг. [100] и составило $G = (6{,}6745 \pm 0{,}0008) \cdot 10^{-8}$ см^3/г $\cdot$ с^2.

Принцип эквивалентности. Сейчас выделяют несколько градаций принципа эквивалентности (см. разд. 2.2). До недавнего времени экспериментально проверялся главным образом только «слабейший» принцип эквивалентности, утверждающий равенство инертной массы и гравитационного заряда,

---

[4] Изменение G по времени (см. разд. 3.4) могло бы привести к целому ряду эффектов [40]; например, уменьшение G имело бы важные геологические следствия, вызвав расширение Земли [52а].

определяющего меру взаимодействия тела с гравитационным полем. Опыты Р. Этвеша, использовавшего крутильный балансир, показали, что отношение инертной и гравитационной массы с высокой точностью $3 \cdot 10^{-9}$ одно и то же для различных тел. Метод Этвеша был улучшен в 60-х годах Р. Дикке, достигшим точности $9 \cdot 10^{-11}$, а позднее В. Б. Брагинским, В. И. Пановым были проведены еще более точные измерения $0{,}9 \cdot 10^{-12}$. Дальнейшие усовершенствования, как предполагают, позволят довести точность метода Этвеша до 10^{-14}.

Эксперименты Р. Этвеша, однако, оставляли открытым целый ряд вопросов: как выполняется отношение инертной и гравитационной массы отдельно для протонов, нейтронов, электронов; играет ли здесь какую-либо роль энергия связи и др. В этом направлении тоже был проведен ряд экспериментов, которые, например, показали (правда, с меньшей точностью $\approx 10^{-5}$), что нейтроны падают в поле Земли с тем же ускорением, что и обычное вещество, и оно не зависит от ориентации их спина; что гравитационная сила взаимодействия электронов в металле та же, что и у свободных электронов, и др.

Были также предложены проверки принципа эквивалентности, не связанные с измерением отношения масс, т. е. выходящие за рамки «слабейшего» принципа эквивалентности. Например, используя интерферометр Майкельсона, проверяли скорость и прямолинейность (см. [110], с. 300) распространения света.

Планируется эксперимент, основанный на том, что в гравитационном поле должен происходить сдвиг энергетических уровней электронов в атоме, а тем самым изменение его спектральных линий. Например, для атома водорода сдвиг n-го уровня составляет

$$\Delta E = \pm 3 \frac{\varepsilon_0 h^2}{e^2} n (n - 1) \varphi,$$

где φ — гравитационный потенциал. Этот сдвиг предлагается наблюдать для сильновозбужденных атомов с $n \approx 100$, заменяя гравитационное поле силой инерции (согласно принципу эквивалентности), создаваемой в высокоскоростной центрифуге (см. [148], с. 1006).

Гравитационное красное смещение. Проверке принципа эквивалентности, но с позиций уже эйнштейновской ОТО служат эксперименты по измерению гравитационного красного смещения частоты электромагнитного излучения.

Принцип эквивалентности говорит, что гравитационное поле не должно влиять на скорость хода часов в локально инерциальной системе отсчета. Отсюда следует, что в систе-

ме отсчета, в которой метрика отлична от метрики Минковского, период колебаний неподвижных часов будет в $g_{00}^{1/2}$ раз меньше периода собственных колебаний [19]. Поэтому, если один и тот же излучатель с собственным периодом колебаний T_0 находится неподвижно в точках x_1 и x_2 со значениями метрики $g_{00}(x_1)$ и $g_{00}(x_2)$ в одной и той же системе отсчета, то периоды колебаний T_1 и T_2 будут относиться как

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{-g_{00}(x_2)\,T_0^2}{-g_{00}(x_1)\,T_0^2}} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}}.$$

Отсюда для случая слабого поля, когда $g_{00} = -1 - 2\varphi$, получается различие частоты излучения $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ в точках с разным гравитационным потенциалом φ_1 и φ_2,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Если, например, $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ (φ отрицателен), то $\nu_1 < \nu_2$ и спектральная линия света, испущенного в точке x_1, окажется сдвинутой в красную часть спектра, в сравнении с той же линией света, испущенного в точке x_2. Этот эффект получил название гравитационного красного смещения.

Гравитационное красное смещение было измерено для Солнца и составило 105 ± 5 % предсказанного ($2{,}12 \cdot 10^{-6}$). Причем возникли трудности из-за плохо учитываемого допплеровского сдвига частоты, обусловленного конвекцией газов в солнечной атмосфере, так что наблюдаемое смещение меняется от места к месту на солнечном диске и может быть даже голубым. Гравитационное красное смещение гораздо больше для звезд типа белых карликов, для которых оно и было впервые измерено. Их масса порядка массы Солнца, но радиус в 10—100 раз меньше солнечного. Это облегчает его отделение от допплеровских эффектов, но трудность возникает с оценкой потенциала φ, при котором происходит излучение.

Более точные данные по гравитационному красному смещению ($\pm$ 1% от предсказанного $2{,}46 \cdot 10^{-15}$) были получены в 60-е годы в лабораторных экспериментах Р. Паунда, Г. Ребки и Дж. Снайдера, когда источник фотонов[5] и мишень разводились на несколько десятков метров друг от друга по вертикали (см. [19, 127]).

Предлагались эксперименты по измерению гравитационного красного смещения излучения, приходящего от спутника Земли в перигее его орбиты.

---

[5] Использовался эффект Мессбауэра.

К экспериментам по гравитационному красному смещению можно отнести сравнение хода часов различной физической природы при изменении потенциала гравитационного поля Солнца за счет суточного и орбитального вращений Земли. Достигнутая точность проверки принципа эквивалентности составила 1 % (см. [148], с. 1009).

Проверялось замедление хода часов в летящем самолете в сравнении с часами на Земле[6]. В разных экспериментах оно составило 10—100 мкс и находилось в согласии порядка 1 % с расчетным [116, 127]. Более точное согласие (10^{-2} %) дали эксперименты Р. Вессота и М. Левина в 1976 г. с часами (водородный мазерный стандарт частоты), помещенными на ракету, которая пролетала по траектории с высотой подъема 10^4 км над поверхностью Земли.

Измерения гравитационного красного смещения подтверждают связь метрики и гравитационного поля, выражаемую формулой (4.16), однако оставляют открытым вопрос, является ли эта метрика решением уравнений Эйнштейна. Ответ на него дают измерения траекторий движения электромагнитных волн, планет, искусственных спутников в поле Солнца и Земли.

Естественно предположить, что гравитационное поле, создаваемое сферически-симметричным телом, подобным Солнцу, должно быть статическим и изотропным. Можно показать, что общим видом метрики, описывающей такое поле в координатах, в которых записано решение Шварцшильда (5.4), является

$$ds^2 = -B(r)\,dt^2 + A(r)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad (6.4)$$

(см. [19, 77]). Уравнения движения в такой метрике имеют вид

$$r^2\dot{\varphi} = \mathcal{J}_0 B(r),\quad A(r)B^{-2}(r)\dot{r}^2 + \mathcal{J}_0^2 r^{-2} - B(r)^{-1} = -E_0,$$

где E_0 — энергия тела ($E_0 > 0$) или фотонов ($E_0 = 0$), а $\mathcal{J}_0$ — их орбитальный момент.

Разлагая $B(r)$ и $A(r)$ по малому параметру MG/r (для поля Солнца он равен $2{,}12 \cdot 10^{-6} R_c/r$), метрику (6.4) можно представить в виде

$$ds^2 = -\left(1 + 2\alpha\frac{MG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\frac{M^2G^2}{r^2} + \cdots\right)dt^2 + \\ + \left(1 - 2\gamma\frac{MG}{r} + \cdots\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \qquad (6.5)$$

[6] Спецрелятивистское замедление, обусловленное скоростью самолета, уменьшалось гравитационным ускорением хода часов из-за высоты.

где α, β, γ — некоторые константы. Для решения Шварцшильда, как легко получить из подобного разложения метрики (5.4), $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Если же определенные из экспериментов константы окажутся отличными от единицы, это будет означать отклонение законов гравитации от ОТО уже в первом постньютоновском приближении.

Заметим, что измерение гравитационного красного смещения позволяет определить только $\alpha = 1$.

Отклонение света Солнцем. Не углубляясь здесь в вычисления, приведем выражение для угла отклонения луча света звезды при прохождении вблизи Солнца

$$\Delta\chi = 1{,}75'' \left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

ОТО дает $\gamma = 1$ и тем самым предсказывает отклонение $\Delta\chi = 1{,}75''$.

Измерения $\Delta\chi$, проведенные в 1919 г. и оказавшиеся в хорошем согласии с эйнштейновским предсказанием[7], стали решающими для признания ОТО. С тех пор было измерено отклонение света для нескольких сотен звезд, а также отклонение радиосигналов от квазаров. В большинстве случаев $\Delta\chi$ оказалось лежащим в интервале $1{,}7''$—$1{,}85''$, что соответствует значениям γ от 0,9 до 1,05.

Прецессия планетарных орбит. Как известно, в центрально-симметричном поле $V(r) \sim r^{-1}$ финитные траектории движущихся тел замкнуты; это эллипсы. Поэтому обнаруженная еще в XIX в. аномальная прецессия ($43''$ за столетие) перигелия орбиты Меркурия указывала на то, что гравитационное поле Солнца отлично от ньютоновского. На самом деле наблюдаемая прецессия для Меркурия составляет $\approx 5557''$, а $43''$ остаются за вычетом из нее вкладов, обусловленных вращением астрономической системы координат, связанной с Землей, и гравитационным возмущением планет. До ОТО все попытки дать объяснение такой величине остатка оказались безрезультатными.

Решение уравнений движения в метрике (6.5) приводит к следующему выражению для прецессии при одном обороте:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi M_c G}{(1-\varepsilon^2)\,a}\left(\frac{2-\beta+2\gamma}{3}\right),$$

где a — большая ось, а ε — эксцентриситет орбиты. Заметим, что, в отличие от отклонения луча света, эта величина чувствительна к коэффициенту β, определяющему первое постньютоновское приближение в компоненте метрики g_{00}.

---

[7] Ньютоновская теория давала вдвое меньшее значение.

Были проведены измерения прецессии орбит Меркурия, Венеры, Земли, астероида Икарус, а также периастра орбит в системах двойных звезд [16, 116]. Наилучшая точность измерений достигнута для Меркурия, результаты которых 43,11 ± ± 0,45″ находятся в очень хорошем согласии с предсказанием ОТО 43,03″.

Выявление точной величины вклада общерелятивистских эффектов в движение планет и спутников очень осложнено возможностью различных неучтенных возмущений. Например, в 1966 г. Р. Дикке и Г. Гольденберг объявили об открытии ими сплюснутости Солнца, т. е. что его полярный диаметр короче экваториального с относительной разностью $\Delta = (5{,}0 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-5}$. Учет сплюснутости приводил к дополнительной прецессии орбиты Меркурия, равной 3,4″ за столетие, так что возникло рассогласование между оставшимися 39,6″ и предсказанием ОТО. В то же время это значение прецессии описывалось скалярно-тензорной теорией Иордана — Бранса — Дикке (см. разд. 3.4). Однако последующие эксперименты, а также анализ многочисленных астрономических данных подтвердили сферичность Солнца, $\Delta = (0{,}8 \pm 0{,}8) \cdot 10^{-5}$.

Лазерная локация Луны. Существенно новые возможности появились в связи с применением лазеров для высокоточного измерения расстояний до небесных объектов. Так, в экспериментах по лазерной локации Луны (1976) расстояние до уголкового отражателя на ее поверхности определялось с погрешностью всего 3 см. Это позволило с большой точностью установить совпадение законов движения системы Земля — Луна с предсказаниями ОТО и отвергнуть ряд альтернативных неэйнштейновских вариантов гравидинамики, например, уже упоминавшуюся теорию Иордана — Бранса — Дикке, предсказывавшую [40], в частности, деформацию орбиты Земля — Луна (до 200 м) в силу большего значения ускорения к Солнцу Луны, чем Земли (эффект Нордтведта) [116].

Прецессия гироскопа на околоземной орбите. Еще одним эффектом (предложенным Л. Шиффом в 1960 г.) для проверки постньютоновской константы γ является прецессия гироскопа, запущенного на полярную орбиту вокруг Земли, ось которого перпендикулярна плоскости орбиты. По расчетам [19], она равна

$$0{,}055 \left(\frac{1+2\gamma}{3}\right)\left(\frac{R_з}{r}\right)^{5/2} \approx 0{,}05'' \text{ год}^{-1},$$

где r — радиус орбиты. Большую величину $\approx 7''$ в год составила бы прецессия гироскопа, ось которого направлена по оси вращения Земли. Техническая реализация этого экспе-

римента оказалась, однако, очень сложной. Подготовка его сейчас ведется, но без определенных сроков.

Радиолокация планет. В 1964 г. И. Шапиро предложил, а затем в 1967 г. впервые провел эксперименты по измерению времени, за которое радарный сигнал достигает Меркурия и, отразившись от него, возвращается на Землю. Интерес представляет дополнительное запаздывание, по сравнению с тем, которое было бы, если бы свет распространялся по прямой со скоростью c. Оно максимально, когда радиолокационный сигнал касается Солнца, и должно составить

$$16{,}3\left[1 + 11{,}2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right] \text{ мкс.}$$

Кроме Меркурия были осуществлены радиолокации Венеры [62, 127], а также измерялось запаздывание сигналов, посылавшихся с Земли на космические станции «Маринер» (1970) и посадочные модули «Викингов» на поверхности Марса (1976) [127]. Анализ полученных данных приводит к значению $\gamma = 1{,}002 \pm 0{,}004$, весьма точно совпадающему с эйнштейновским.

В целом согласование ОТО с проведенными экспериментами, относящимися к группам (3)—(5), составляет 0,5 % и является лучшим в сравнении с другими вариантами теории гравитации. Все эти эксперименты проверяют, однако, только эффекты первого постньютоновского приближения. Но уже обсуждаются возможности повышения их точности, например при радиолокации планет, достаточной для измерения эффектов второго порядка.

Большие надежды в этом плане связывают с наблюдением открытого в 1974 г. пульсара PSR 1913 + 16, входящего в состав двойной звезды. Например, измеренное смещение периастра орбиты системы оказалось равным 4,0 ± 1,5° в год, т. е. в 35 000 раз больше, чем смещение орбиты Меркурия. Сложность, однако, состоит в том, что измеряемые величины зависят от неизвестных характеристик системы, которые не удается независимо измерить и можно только оценивать [116][8].

Гравитационные волны. Как мы уже отмечали, большие усилия экспериментаторов-гравитационистов сосредоточены сейчас на детектировании гравитационных волн [4]. Методы предлагаются самые разные. Но прежде чем обратиться

---

[8] Обнаружены двойные системы, для которых наблюдения и предсказания ОТО сильно расходятся [156], что, по мнению В. Моффата, говорит в пользу варианта Эйнштейна — Шредингера с несимметричной метрикой.

к ним, мы коротко остановимся на том, что такое гравитационные волны.

Во многом описание гравитационных волн пытаются строить по аналогии с электромагнитными. Однако оно имеет свою весьма существенную специфику. Во-первых, гравитационные волны всегда нелинейны, т. е. для них не выполняется принцип суперпозиции. Это значит, что их нельзя разложить на монохроматические волны, описываемые волновыми функциями от запаздывающего аргумента $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость волны. Это ставит вопрос о критерии гравитационных волн.

Во-вторых, электромагнитные волны воздействуют только на заряженные тела, движение которых можно всегда сравнить с движением нейтральных тел. Гравитационная волна в силу принципа эквивалентности одинаково действует на все физические объекты, и их относительное движение можно заметить только, если они находятся в точках с разной фазой гравитационной волны.

Предлагаются различные критерии гравитационных волн [44]. В электромагнетизме волновыми считаются поля, для которых обращаются в нуль оба фундаментальных инварианта электромагнитного поля: $F_{\mu\nu}E^{\mu\nu}$ (или $H^2 - E^2$) и $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}F_{\mu\nu}F_{\alpha\sigma}$ (или $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$). По аналогии строится определение Беля гравитационных волновых полей. Они трактуются как волны тензора кривизны $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ (аналога $F_{\mu\nu}$), критерием которых является обращение в нуль соответствующих фундаментальных скаляров, образованных из тензора кривизны (мы их здесь не выписываем). Эти поля составляют типы N и III, по Петрову. Уточнения этого критерия были предложены А. Лихнеровичем, А. Л. Зельмановым, В. Р. Кайгородовым.

В то же время есть метрики, которые по ряду соображений (например, их компоненты имеют вид волновых функций) следовало бы считать волновыми, но ни под один из этих критериев они не подходят [163].

Проблема описания гравитационных волн существенно упрощается, если ограничиться приближением слабого поля. Оно вполне достаточно для целей гравитационных волновых экспериментов. В этом приближении уравнения Эйнштейна сводятся к линейным уравнениям (4.12), а в системе гармонических координат (см. разд. 2.1) — к волновому уравнению

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \tag{6.6}$$

с калибровочными условиями

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = \tfrac{1}{2}\,\partial_\nu h^\mu_\mu. \tag{6.7}$$

В пустоте уравнение (6.6) имеет общее решение, которое есть суперпозиция плоских волн, а в присутствии материаль-

ного источника — решение в форме запаздывающего потенциала, которое описывает квадрупольное излучение гравитационных волн [77][9].

В силу отмеченной особенности гравитационных волн для их обнаружения нужно иметь две разнесенные точечные массы или одно протяженное тело (резонансная квадрупольная антенна). В последнем случае переменное искривление пространства-времени, вызванное гравитационной волной, создает механические напряжения в протяженном теле, которые могут быть измерены. Такая схема детектирования гравитационных волн была разработана и впервые реализована американским физиком Дж. Вебером.

В первом варианте веберовская антенна представляла собой алюминиевый цилиндр длиной $\approx$ 150 см, диаметром $\approx$ 60 см и массой $\approx$ 1,5 т. Ее резонансная частота была $f_0 \approx$ $\approx$ 1,66 кГц, а добротность $\approx 10^5$, что позволяло принимать волны только в весьма узком диапазоне частот $\Delta f \approx 0{,}11$ Гц вблизи резонансной частоты. Чувствительность антенны была ограничена броуновскими колебаниями этой частоты, что давало оценку минимальной обнаруживаемой амплитуды колебаний торцов цилиндра $\delta^2 > kT/4\pi^2 m f_0^2 = 2 \cdot 10^{-14}$ см. В дальнейшем Дж. Вебер использовал два детектора, разнесенных сначала на 2 км, а потом на 1000 км с тем, чтобы отличить коррелированные сигналы, вызванные воздействием гравитационной волны на обе антенны, от сейсмических и других факторов. В 1969 г. он объявил, что обнаружил около 100 таких коррелированных гравитационных всплесков. При этом скорость совпадения зависела от звездного времени так, как будто излучение приходило из центра Галактики.

Это известие вызвало общее внимание, особенно экспериментаторов, и несколько групп попытались повторить опыты Дж. Вебера, применяя антенны с более высокой чувствительностью. Однако ни одной из них получить коррелированные сигналы типа веберовских не удалось. Смущало и то, что расчетная мощность находящегося в центре Галактики источника гравитационных волн, которые могли бы быть зарегистрированы веберовской артенной, оказалась на несколько порядков больше, чем у тех, которые можно себе представить — взрыв сверхновой, коллапс, колебания нейтронной звезды и др.

---

[9] Следует подчеркнуть, что электромагнитное излучение начинается с дипольного, тогда как из-за отсутствия отрицательных масс гравитационное излучение может начинаться только с квадрупольной моды. Это соответствует также тому, что фотон имеет спин 1, а гравитон — спин 2.

Все это породило скептическое отношение к тому, что Дж. Вебер зарегистрировал именно гравитационные волны. Обсуждались другие причины, которые могли бы вызвать согласованный отклик веберовских антенн. Например, усматривалась корреляция веберовских сигналов с магнитной активностью Солнца. Вместе с тем опыты по обнаружению гравитационных волн Дж. Вебера дали мощный толчок в этом совершенно новом для гравитационистов-экспериментаторов направлении. И примечательно, что большинство действовавших или подготавливаемых к работе лабораторных детекторов являются антеннами веберовского типа, усовершенствованными тем или иным образом — охлаждением до долей градусов Кельвина (см. [148], с. 894, 897, 910, 919), применением вместо болванки Вебера монокристалла и др.

Можно выделить три типа гравитационных волн, детектирование которых сейчас пытаются или планируют осуществить. Это космическое (источником которого являются астрофизические объекты), реликтовое (возникшее на ранней стадии развития Вселенной) и генерируемое лабораторными методами гравитационное излучение. Космические гравитационные волны подразделяются на высоко- (10^2—10^4 Гц) и низкочастотные (10^{-2}—10^{-4} Гц).

Чтобы наглядно показать возможности детектирования гравитационных волн, мы будем оценивать их амплитуду и чувствительность детекторов через безразмерную величину изменения метрики Δh.

Амплитуда всплесков высокочастотного гравитационного излучения, достигающего Земли, по расчетам не превышает $\Delta h = 10^{-19}$. Его детектирование может быть осуществлено антеннами веберовского типа, лучшая чувствительность которых на сегодняшний день составляет $\sim 10^{-18}$, и антеннами на свободных пробных телах с лазерной интерферометрической системой индикации. Имеющийся детектор такого типа (см. [148], с. 930) с плечом 40 м обладает чувствительностью $\sim 10^{-17}$, и проведенные с его помощью измерения гравитационных волн от некоторых пульсаров не дали положительного результата. К 1987 г. этой же группой планируется построить детектор с плечом 5 км, чувствительность которого достигала бы $\sim 10^{-23}$.

Рассматривается также вариант детектора, в котором гравитационная волна воздействовала бы непосредственно на саму лазерную систему, оптические элементы которой (зеркала резонатора) размещаются на пробных телах. При этом в результате относительного смещения оптических элементов будет изменяться частота биений лазерных мод (см. [110], с. 258).

Оценки низкочастотного космического гравитационного излучения дают его амплитуду $\Delta h \sim 10^{-16}$—10^{-17}. Для его детектирования определялся допплеровский сдвиг у радиоволн от межпланетных станций «Пионер-10» и «Вояджер» (см. [148], с. 946). При этом, чтобы заметить изменение метрики Δh, частотное разрешение $\Delta\omega/\omega$ (зависящее и от стабильности генератора) должно быть меньше Δh. В экспериментах с «Пионером-10» и «Вояджерами» оно составляло 10^{-13}—10^{-14}. Для продолжения этих исследований по схеме совпадений планировалось запустить в 1985—1987 гг. над эклиптикой одновременно два спутника — европейский «Галилео» и американский ISPM (см. [148], с. 945, 951), однако от запуска последнего пришлось отказаться. К 1990 г. планируют создать генераторы, стабильность которых достигла бы порогового значения 10^{-17}.

Детектирование гравитационных волн, особенно резонансными антеннами, осложняется незнанием их точной частоты. В этом плане исключение составляют гравитационные волны, идущие от систем двойных звезд, период которых можно рассчитать и который для разных источников колеблется от десятков до сотен минут [16, 116]. Однако амплитуда этих волн мала ($\sim 10^{-21}$). Для их регистрации был предложен метод типа антенны на свободных пробных телах, но разнесенных на 10^6 км. Роль этих пробных тел должны играть спутники, помещенные в точках либрации системы Солнце — Земля и «соединенные» лазерными лучами (см. [148], с. 960). Главная трудность реализации такого детектора состоит в том, что расстояние между спутниками должно быть очень стабильным, а именно их негравитационное ускорение не должно превышать 10^{-15} см/с^2. Сейчас же умеют контролировать ускорение не меньше 10^{-8} см/с^2.

Если регистрация космических гравитационных волн стала уже технически реальной и до успеха, как полагают, не хватает лишь одного-двух порядков, то вопросы детектирования реликтового гравитационного излучения (его максимум плотности энергии лежит, по расчетам, в области 10^{10}—10^{12} Гц) и генерации гравитационных волн в лабораторных условиях и их детектирования находятся пока на теоретической стадии. Основные усилия здесь направлены на изучение различных эффектов взаимодействия гравитационного поля с электромагнитными системами (см. [25]).

К важным предсказаниям ОТО относится также существование черных дыр, особых астрофизических объектов, из которых не могут выходить ни частицы, ни даже излучение (см. разд. 2.4). Еще П. Лаплас в 1794 г. отмечал, что при достаточно большой массе центрального тела гравитационное при-

тяжение будет настолько сильным, что даже свет не сможет преодолеть его и превзойти вторую космическую скорость. В 30-х годах Р. Оппенгеймер с сотрудниками (Дж. Волков, Х. Снайдер) рассмотрели коллапс самогравитирующих тел с позиций ОТО, когда в конце эволюции массивных звезд могут образоваться не только пульсары (нейтронные звезды с плотностью порядка ядерных), но для звезд массой, в несколько раз превышающей солнечную, после прекращения ядерных процессов будет иметь место коллапс с уходом массы под гравитационный радиус (горизонт) с образованием черной дыры.

Во многих работах анализируются подобные статические и вращающиеся, а также заряженные черные дыры, их столкновения, стабильность, различные квантовые свойства, особое значение приобретает аккреция материи на черные дыры, вызывающая интенсивное рентгеновское излучение в двойных системах звезд, что позволяет обнаруживать черные дыры.

Несмотря на многочисленные попытки назвать кандидатов в черные дыры, они один за другим отпадали, не выдерживая суровых тестов. По-видимому, лишь рентгеновский источник созвездия Лебедя можно рассматривать как один из наиболее правдоподобных кандидатов[10].

Следует отметить, что ряд критически настроенных авторов подчеркивают наличие в теории черных дыр недоказанных положений и даже отвергают правомерность их предсказания на базе ОТО, а также с точки зрения альтернативных, например, биметрических вариантов. Согласно наиболее распространенной теории, черные дыры могут образовываться не только в результате коллапса звезд, но и порождаться, подобно частицам, в начальный период развития Вселенной, т. е. речь может идти о первичных черных дырах. Большой интерес представляет термодинамика последних, в теории которой Дж. Бекенштейн и С. Хокинг ввели понятие температуры и энтропии как функции масс черных дыр. В 1974 г. С. Хокинг предсказал возможность испарения черных дыр благодаря рождению в их огромном гравитационном поле частиц из вакуума, при этом излучение будет обладать тепловым спектром черного тела. Температура излучения обратно пропорциональна массе, поэтому черные дыры имеют конечное время жизни и большинство из них уже испарилось за время, прошедшее после Большого взрыва. С. Хокинг под-

---

[10] *Брагинский В. Б., Полнарев А. Г.* Удивительная гравитация. — М.: Наука, 1985. — 159 с.; *Полнарев А. Г., Хлопов М. Ю.* Космология, первичные черные дыры и сверхмассивные частицы. — Успехи физ. наук, 1985, 145, № 3, с. 369 — 401.

черкивает новую принципиальную сторону теории, которая связана с дополнительной неопределенностью, обязанной потерей информации внутри черных дыр (сверхгейзенберговского квантового принципа неопределенности). Для описания испарения черных дыр надо применять не матрицу рассеяния, а матрицу плотности «суперрассеяния».

Так или иначе, предсказание существования черных дыр и развитие их теории открыли новую страницу как в теории гравитации, так и астрофизики, космологии и квантовой теории частиц, связав особым образом эти области науки с термодинамикой, и наряду с плодотворными теоретическими исследованиями дали импульс еще более тщательным астрономическим наблюдениям и поискам необычных объектов.

В этой связи обратим внимание на интерес, который проявляют ученые к общерелятивистской теории сверхплотных, в том числе необычных барионных звезд, внутри которых предполагается наличие ламбда-частиц и некоторых других наряду с обычными протонами и нейтронами (В. А. Амбарцумян и Г. С. Саакян). В развитие этих идей нами была высказана гипотеза (Д. Д. Иваненко и Д. Ф. Курдгелаидзе), развитая рядом авторов (Н. И. Максюков, В. де Саббата и др.), что внутри сверхплотных массивных звезд может находиться кварковая плазма[11].

---

[11] *Иваненко Д. Д., Курдгелаидзе Д. Ф., Максюков Н. И.* Кварки в астрофизике. — Вестн. Моск. ун-та, 1974, № 6, с. 667 — 671.

Глава 2
СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРОБЛЕМА СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Принцип относительности считается одним из основополагающих принципов ОТО. Он постулирует эквивалентность систем отсчета и тем самым инвариантность теории (функционала действия, уравнений движения, уравнений поля) относительно преобразований систем отсчета. В эйнштейновской формулировке ОТО принцип относительности выступает как принцип общей ковариантности — инвариантности относительно общековариантных преобразований.

Разные авторы по-разному оценивают значение принципа относительности для ОТО вплоть до того, что он является следствием принципа эквивалентности [19] или вообще «не возможен и не нужен» [121], т. е. тривиален. Однако уже многолетняя дискуссия А. Эйнштейна с А. Абрагамом при создании ОТО показала, что само осознание принципа общей ковариантности было далеко не простым делом. Более того, уже сама формулировка принципа относительности затрагивает столько глубоких физических проблем, что о его тривиальности не может быть речи.

Формулировка принципа относительности включает в себя два понятия — инвариантности и систем отсчета.

Мы уже указывали, что условие инвариантности относительно тех или иных преобразований симметрии играет важную роль при построении полевых теорий. Следует, однако, различать два рода преобразований — изменения системы отсчета и преобразования самой физической системы.

Требование инвариантности относительно изменений системы отсчета кажется вполне естественным и даже тривиальным, тогда как инвариантность при преобразованиях самой физической системы, несомненно, несет информацию о ее свойствах. Но дело в том, что преобразования обоих родов связаны между собой, поскольку выбор и преобразование системы отсчета — это выбор и преобразование определенного базисного набора физических объектов, с которыми сравниваются все другие объекты, составляющие данную физическую

систему. Поэтому, хотя сам принцип инвариантности относительно изменений системы отсчета и можно считать само собой разумеющимся, но конкретный вид этих преобразований является важной характеристикой физической системы. Примером тому служит теория калибровочных полей, полностью построенная на принципе относительности — калибровочном принципе.

Как уже отмечалось, следует различать условия ковариантности и инвариантности. В теории поля инвариантность (или симметрия) относительно тех или иных преобразований задается инвариантностью лагранжиана, описывающего данную систему. В применении к лагранжиану условие ковариантности означает, что при преобразовании полей $\varphi \to \varphi'$ лагранжиан $L(\varphi)$ не меняется по величине, т. е. $L'(\varphi') = L(\varphi)$, а условие инвариантности — что $L(\varphi)$ сохраняет еще и свой вид, как функционал полей φ, т. е. $L'(\varphi') = L(\varphi') = L(\varphi)$. Такое условие инвариантности иногда называют форм-инвариантностью.

Обратимся теперь к понятию системы отсчета. Оно имеет два аспекта — абстрактное определение системы отсчета и проблему реализации системы отсчета реальными физическими приборами.

В разделе 1.2 было дано математическое определение системы отсчета в теории гравитации как задание атласа касательного расслоения над пространственно-временным многообразием X, определяющего в каждой точке x четверку векторов (репер, тетраду) $\{t(x)\}$, образующих базис касательного пространства T_x. Задание такого репера трактуется как задание локальной системы отсчета в x.

В стандартной ОТО рассматривается случай только голономных систем отсчета, когда векторы $\{t_\mu(x) = \partial_\mu\}$ являются касательными векторами к координатным линиям некоторой системы координат на X. Однако можно этого и не требовать. Более того, не только можно, но и приходится отказаться от требования голономности системы отсчета, если попытаться описать такие важные объекты, как спинорные поля, в теории гравитации (см. ниже). Формулировка ОТО в произвольной неголономной системе отсчета составляет содержание тетрадной теории гравитации [55, 97].

На самом деле и в тетрадной теории гравитации рассматриваются, как правило, не произвольные системы отсчета, а некоторый их специальный класс. Для всякой данной псевдоримановой метрики (гравитационного поля) g на многообразии X^4 существует система отсчета (атлас касательного расслоения) Ψ_g, относительно которой метрика g в каждой точке имеет вид метрики Минковского η [54]. Если простран-

ство неплоское, такая система отсчета неголономна. Будем обозначать компоненты реперов этой системы отсчета латинскими буквами $\{t_a\}$, в отличие от греческих индексов $\{t_\mu\}$ голономной системы отсчета.

В каждой точке x реперы $\{t_a(x)\}$ и $\{t_\mu(x)\}$ могут быть связаны некоторой матрицей $h^a_\mu(x)$ или ее обратной $h^\mu_a(x)$

$$t_\mu(x) = h^a_\mu(x)\, t_a(x),\quad t_a(x) = h^\mu_a(x)\, t_\mu(x),$$

такими, что

$$h^a_\mu(x)\, h^\mu_b(x) = \delta^a_b,\quad h^a_\mu(x)\, h^\nu_a(x) = \delta^\nu_\mu. \tag{1.1}$$

Матричные функции $h^a_\mu(x)$, $h^\mu_a(x)$ называются тетрадными функциями (или тетрадными полями), и они описывают переход от системы отсчета Ψ^g к голономной системе отсчета.

С помощью тетрадных полей метрика g в голономной системе отсчета может быть выражена в виде

$$g_{\mu\nu}(x) = h^a_\mu(x)\, h^b_\nu(x)\, \eta_{ab} \tag{1.2}$$

через метрику Минковского, а это значит, что тетрадные поля при подстановке (1.2) в лагранжиан и уравнения гравитации могут заменить метрическое поле g в качестве динамической величины, описывающей гравитационное поле.

Правда, для данной псевдоримановой метрики g выбор системы отсчета Ψ^g не однозначен, а определен (поскольку метрика Минковского является лоренцевским инвариантом) с точностью до лоренцевских преобразований. Поэтому и тетрадные функции $h^a_\mu(x)$, отвечающие данному гравитационному полю g, т. е. связанные с ним соотношениями (1.2), тоже определены с точностью до лоренцевских преобразований, действующих на их латинские индексы. Это следует и из сравнения числа независимых компонент метрики $g_{\mu\nu}$, их десять, и тетрадного поля h^a_μ, их шестнадцать, шесть из которых отвечают произволу в выборе шести независимых параметров преобразований Лоренца. Их фиксация означает фиксацию системы отсчета Ψ^g и называется калибровкой тетрадного поля. Только при выборе некоторой калибровки описание гравитационного поля тетрадными функциями будет однозначным.

Задание гравитационного поля тетрадными функциями фактически реализует идею А. Эйнштейна, высказанную им в уже упоминавшейся дискуссии с М. Абрагамом, что гравитацию можно описывать как необходимый переход от инерциальных систем отсчета к неинтегрируемым неинерциальным системам отсчета. Действительно, поля h^a_μ представляют собой матрицы нелоренцевских преобразований, т. е. их

можно интерпретировать как переход от системы отсчета, где $g = \eta$, к неинерциальной системе отсчета. Причем, если пространство-время неплоское, этот переход неинтегрируем, т. е. h^a_μ нельзя представить как $h^a_\mu = \partial x'^a/\partial x^\mu$.

Приведем формулы для коэффициентов связности и кривизны в неголономной системе отсчета, которые получаются подстановкой в выражения (3.9), (3.13) из главы 1 выражения (1.2) метрики через тетрадные функции,

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(C_{abc} + C_{acb} + C_{cba});$$

$$R^a_{bcd} = \Gamma^a_{bd,\,c} - \Gamma^a_{bc,\,d} + \Gamma^a_{kc}\Gamma^k_{bd} - \Gamma^a_{kd}\Gamma^k_{bc} - \Gamma^a_{bk}C^k_{cd}; \quad (1.3)$$

$$C_{abc} = h^\mu_a h^\alpha_b g_{cd}(h^d_{\mu,\,\alpha} - h^d_{\alpha,\,\mu}).$$

Величины $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$ называются коэффициентами вращения Риччи, а C_{abc} — коэффициентами неголономности. Отметим, что тензор кривизны (1.3) отличается последним членом от выражения (3.13) из главы 1 кривизны через связность в голономной системе отсчета. Это вызвано тем, что при переходе к неголономной системе отсчета он преобразуется как тензор только по первым двум индексам.

Что дает переход к неголономной системе отсчета Ψ^g? В такой системе отсчета при переходе с карты на карту и при параллельном переносе метрика Минковского сохраняется, т. е. функции перехода атласа Ψ и связность Γ представляют собой лоренцевские преобразования.

Системы отсчета, в которых все функции перехода между картами и связность являются лоренцевскими, нужны для описания спиноров в теории гравитации. Дело в том, что дираковские 4-спиноры ψ, описывающие фермионы — релятивистские частицы со спином 1/2 (в том числе электроны, протоны, нейтроны) — допускают над собой только лоренцевские преобразования. Общековариантные преобразования на них просто не определены. Поэтому задать спиноры на псевдоримановом пространстве (в гравитационном поле) и описать их параллельный перенос можно только в системе отсчета Ψ_ξ. Для этого представим связность Γ^a_{bc} в форме

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}\Gamma_{kmc}(L^{km})^a_b,$$

где $(L^{km})^a_b$ — генераторы группы Лоренца в представлении на пространстве Минковского (см. разд. 3.1). Тогда на спинорах связность примет вид

$$\Gamma_c = \frac{1}{2}\Gamma_{kmc}L^{km} = \frac{1}{4}\Gamma_{kmc}\gamma^k\gamma^m, \quad (1.4)$$

где $L^{km} = \frac{1}{2}\gamma^k\gamma^m$ — выраженные через γ-матрицы Дирака генераторы группы Лоренца на спинорах.

Связность (1.4) представляет собой известные коэффициенты Фока — Иваненко, введенные впервые в работах В. А. Фока, Д. Д. Иваненко и Г. Вейля в 1929 г. для описания параллельного переноса спиноров в искривленном пространстве-времени.

Используя (1.4) и вспоминая, что переход к искривленному пространству-времени осуществляется заменой частных производных на ковариантные, строим из выражения (4.5) в главе 1 лагранжиан фермионных полей в теории гравитации

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}h_c^\mu\gamma^c\partial_\mu\psi - h_c^\mu\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^c\psi) + \frac{i}{2}\Gamma_{kmc}\bar{\psi}\gamma^k\gamma^m\gamma^c\psi. \quad (1.5)$$

Возвращаясь снова к общему определению систем отсчета, можно установить группу их преобразований и сформулировать принцип относительности как требование инвариантности относительно этой группы. Математически она определяется как группа преобразований атласов касательного расслоения, а наглядно ее можно представить как всевозможные преобразования базисных реперов $t(x)$ в точках многообразия X^4. В каждой точке такие преобразования представляют собой вещественные матрицы 4×4 (с $\det \neq 0$), которые образуют группу общих линейных преобразований $GL(4, R)$ касательного пространства. Вся группа преобразований систем отсчета — это так называемая локальная (или калибровочная) группа $GL(4, R)(X)$, образованная функциями $g(x)$ на X^4 со значениями в $GL(4, R)$, которые в каждой точке задают свою матрицу преобразования $g(x)$ репера $\{t(x)\}$. В эту группу входят и общековариантные преобразования, осуществляющие переходы между голономными системами отсчета [54].

В теории гравитации нет априори привилегированных систем отсчета, и выбор той или иной из них зависит от характера решаемой задачи. Задание определенной системы отсчета осуществляется обычно наложением тех или иных (калибровочных) условий на компоненты метрики g, основанием для чего служит теорема Римана о том, что преобразованиями координат в n-мерном пространстве можно привести n компонент метрики к наперед заданным функциям.

Приведем некоторые специальные типы систем отсчета. Это уже упоминавшиеся локально инерциальные системы координат, приводящие метрику g к метрике Минковского и обращающие в нуль компоненты связности Γ в наперед заданной точке. Более того, можно ввести систему координат,

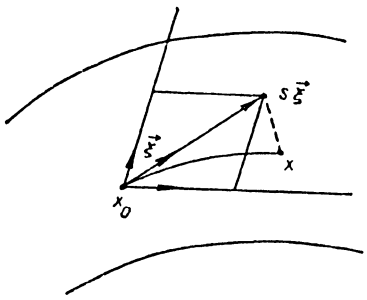


Рис. 19.

локально инерциальную вдоль любой наперед заданной кривой.

Другой системой координат, локально инерциальной в данной точке x_0, являются так называемые нормальные координаты. Для их построения проведем через точку x_0 геодезические по всем возможным направлениям. Любая такая геодезическая однозначно задается касательным к ней вектором $\xi(x_0)$ в точке x_0, а всякая точка на ней будет определена значением геодезического параметра s. Тогда всякую точку x в некоторой окрестности x_0 можно однозначно задать проходящей через нее и точку x_0 геодезической с направляющим вектором ξ в x_0 и значением геодезического параметра s, т. е. вектором $\boldsymbol{x} = s\xi^\alpha \partial_\alpha$ касательного пространства T_{x_0} в точке x_0. Компоненты этого вектора и могут быть выбраны в качестве новых координат точки x.

Задание нормальных координат x^α означает фактически проекцию касательного пространства к многообразию X в точке x_0 на некоторую область самого многоообразия X вокруг этой точки. При этом базисные векторы касательного пространства, описывающие некоторую локальную систему отсчета в точке x_0, с помощью параметра s как бы растягиваются в координатные оси, определяющие систему координат в некоторой области вокруг точки x_0 (рис. 19).

В нормальных координатах геодезические, проходящие через точку x_0, имеют тот же вид, что и прямые в плоском пространстве $x^\mu = s\xi^\mu$, где $\xi^\mu = \text{const}$. Приведем также полезное выражение для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в окрестности x_0 в виде разложения в ряд по нормальным координатам x^α, причем коэффициентами этого разложения являются компоненты тензора кривизны и его ковариантных производных в точке x_0:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x_0) - \frac{1}{3} R_{\alpha\mu\beta\lambda}(x_0)\, x^\mu x^\lambda - \\ - \frac{1}{3!} R_{\alpha\gamma\beta\lambda;\,\mu}(x_0)\, x^\lambda x^\mu x^\nu + \cdots.$$

Нормальные координаты — это именно те координаты, которые мы неосознанно вводим, глядя на мир из точки, в которой находимся.

Другой часто используемой системой отсчета являются так называемые гармонические координаты. Они задаются условием

$$\Gamma^{\alpha} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{\beta}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}) = 0$$

и находятся как четыре независимых решения обобщенного уравнения Д'Аламбера

$$g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}\varphi_{,\alpha} = 0. \qquad (1.6)$$

В пространстве Минковского гармоническими являются обычные декартовы координаты пространства и времени. Это дало ряду авторов, например В. А. Фоку [121], основание рассматривать гармонические координаты как преимущественные координаты в теории гравитации. Действительно, в таких координатах целый ряд выражений существенно упрощается. Например, уравнения Эйнштейна для слабого поля в гармонических координатах сводятся к волновому уравнению (см. выражения (4.12) и (6.6) в гл. 1). В гармонических координатах облегчается исследование задачи Коши [120] и т. д. Однако речь может идти только о большем удобстве этих координат для решения тех или иных задач[12]. Но и это удобство сводится подчас на нет тем, что гармонические координаты надо еще сначала найти, решая уравнение (1.6), что является далеко не простым делом.

Перейдем теперь ко второму аспекту определения систем отсчета — проблеме их реализации физическими наблюдателями и приборами. Сложность здесь та же, что и при физическом задании системы отсчета в пространстве Минковского (см. разд. 1.1). Компоненты тетрады, восстанавливаемой в данной точке пространства-времени и определяющей в ней локальную систему отсчета, можно представить как векторы некоторых 4-скоростей. Но только времениподобную компоненту тетрады можно рассматривать как 4-скорость какого-либо реального тела. Поэтому непосредственно физически могут быть измерены лишь проекции тех или иных объектов — векторов, тензоров, интервалов — на времениподобное направление или траекторию движения реального физического наблюдателя. Поскольку такую траекторию всегда можно параметризовать собственным временем наблюдателя, то физические измерения, производимые наблюдателем, могут быть сведены к измерениям интервалов времени [105].

В отличие от времениподобного направления, задание пространственноподобных направлений является математической

[12] Например, они непригодны для космологических моделей.

абстракцией, а непосредственное измерение пространственных проекций невозможно. Их можно только вычислить, если уже введена некоторая система координат и известны координаты тех или иных объектов, или известна геометрия (метрика, связность, кривизна) пространства-времени.

В первом случае, посылая и принимая отраженные световые сигналы, можно определить метрику, связность и кривизну вблизи мировой линии наблюдателя. Такое описание геометрии получило название хроногеометрии [105].

Во втором случае, зная геометрию и, следовательно, ход световых лучей, можно определить положение испускающего их объекта. Именно так в астрономии, исходя из предположения, что наша Вселенная описывается метрикой Фридмана, измеряется расстояние до звезд [106].

Если же ни геометрия пространства-времени, ни пространственные координаты объектов не известны, применяя указанные выше методы, их определить не удастся. Покажем это на примере рис. 6. Используя то, что траектория распространения света (линии AB, BA') изотропна, мы можем определить пространственноподобный интервал

$$s_{0B} = \frac{1}{2}(\tau_{A'} - \tau_B).$$

Но если мы попытаемся отсюда найти одновременно и пространственные компоненты метрики, и пространственную координату точки B, нам это так просто не удастся. Из соотношения

$$\frac{1}{4}(\tau_{A'} - \tau_B)^2 = s_{0B}^2 = g_{11}x_B^1 x_B^1 + g_{01}(\tau_{A'} - \tau_B)x_B^1$$

можно определить лишь что-то одно из них, зная другое.

Как же быть? На практике приходится исходить из некоторой модели геометрии окружающего наблюдателя пространства-времени, и в этой модели рассматривается сам наблюдатель и интепретируются его наблюдения. Если в возникающей таким образом картине пространства-времени появляются противоречия, то принятая геометрическая модель должна корректироваться.

2. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И (3+1)-РАЗБИЕНИЕ

Ключом к созданию релятивистской теории тяготения Эйнштейном исторически стал принцип эквивалентности.

Масса тел в уравнениях ньютоновской теории

$$m_{\text{и}}\ddot{\vec{r}} = -m_{\text{пз}}\operatorname{grad}\varphi, \quad \Delta\varphi = 4\pi m_{\text{аз}}\delta(\vec{r}) \qquad (2.1)$$

играет тройную роль. Во-первых, она является мерой инертного сопротивления движению — инертная масса $m_и$. Во-вторых, она играет роль гравитационного заряда тела — пассивного $m_{пз}$, определяющего величину воздействия гравитационного поля на тело, и активного $m_{аз}$, характеризующего генерацию гравитационного поля телом.

Экспериментальным фактом, проверенным с высокой точностью, является равенство всех этих трех масс. При этом равенства $m_и = m_{пз}$ и $m_{пз} = m_{аз}$ имеют разную, если так можно сказать, ценность. Равенство $m_{пз} = m_{аз}$ обусловлено третьим законом Ньютона — «действие равно противодействию», поскольку нарушение этого равенства приводило бы к тому, что гравитационные силы, с которыми два тела действуют друг на друга, не равны. Тогда как невыполнение $m_и = m_{пз}$ не сопровождалось бы нарушением какого-либо фундаментального физического закона (например, электрический заряд не пропорционален массе тела).

Поэтому факт, установленный еще Г. Галилеем, что все тела падают с одним и тем же ускорением, если на них не действует никакая сила, кроме силы тяготения, является физически нетривиальным и характеризует специфику именно гравитации. Будучи возведенным в ранг фундаментального принципа — принципа эквивалентности, он лег в основу построения ее теории. Но, как это часто бывает, на принцип, сыгравший эвристическую роль при построении теории, совершенно по-другому смотрят с позиций уже развитой теории.

Прежде всего принцип эквивалентности в приведенной формулировке равенства инертной массы и гравитационного заряда (мы будем называть его «слабейшим» принципом эквивалентности) весьма ограничен. Во-первых, само понятие инертной массы сложно и приближенно, ее природа недостаточно ясна (см. разд. 3.2). Формально можно считать, что физическая система обладает плотностью массы μ, если ее тензор энергии-импульса или его часть могут быть приведены к виду $T^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta$.

Во-вторых, как видно из уравнений Эйнштейна, источником гравитационного поля является не просто масса, а тензор энергии — импульса материи.

В-третьих, уравнение (2.1) описывает движение точечной частицы, а для протяженного тела в общем случае неприменимо (см. разд. 1.4).

Из принципа эквивалентности в его слабейшей формулировке непосредственно следует, что движение тел в однородном гравитационном поле может быть описано как движение свободных тел в некоторой неинерциальной системе отсчета. Для этого достаточно перейти в систему отсчета, движущуюся

с тем же ускорением, что и все тела. Отсюда последовало предположение, что гравитационное поле и гравитационные эффекты могут быть скомпенсированы переходом к соответствующей неинерциальной системе отсчета, т. е. тело в такой системе отсчета ведет себя, как свободное в СТО. Это оказалось близко к идеям (восходящим к Г. Герцу, П. Финслеру) геометрического описания движения тела под действием силы, как свободного движения в некоторой геометрии, а также указывало способ нахождения такой геометрии.

Действительно, если существует такая система отсчета, в которой гравитационное поле отсутствует, интервал в ней должен задаваться тем же выражением

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

что и в СТО. Возвращаясь обратно в систему отсчета, где гравитационное поле присутствует, с помощью нелоренцевских преобразований между неинерциальными относительно друг друга системами отсчета получаем выражение для интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где метрика $g_{\mu\nu}$ уже отлична от метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Отсюда остается только шаг до предположения, что неплоская метрика $g_{\mu\nu}$ пространства-времени может служить мерой гравитационного поля, а также до общего принципа относительности в его первоначальной формулировке об эквивалентности не только инерциальных, но и неинерциальных систем отсчета.

Таким образом, принцип эквивалентности оказался первым в цепочке шагов, приведших к формулировке основных положений ОТО. Когда ОТО была построена, принцип эквивалентности отступил в один ряд с другими принципами ОТО.

Сейчас в литературе различают несколько градаций принципа эквивалентности: уже обсуждавшийся «слабейший», «слабый», «среднесильный», «сильный» принципы эквивалентности [113].

Непосредственным обобщением, своего рода локализацией «слабейшего» принципа эквивалентности является «слабый» принцип эквивалентности. Используя тот факт, что для любой точки может быть выбрана локально-инерциальная в ней система координат, он распространяет действие принципа эквивалентности на физические системы в произвольном гравитационном поле, если их уравнения содержат производные гравитационного поля не выше первого порядка. К ним относятся, в частности, закон движения точечных частиц, уравнения электромагнитного и спинорного полей, но, например,

не уравнение скалярного поля с конформной связью $-R\varphi^2/6$. «Среднесильный» принцип эквивалентности предполагает применение его ко всем физическим системам, кроме гравитации, а «сильный» принцип эквивалентности — и к гравитации.

Общим для всех вариантов и сегодняшних оценок принципа эквивалентности является то, что он призван гарантировать переход от ОТО к СТО в некоторой системе отсчета. Трудность возникает в связи с тем, что следует понимать под переходом к СТО.

Поскольку наличие гравитационного поля отождествляется с неплоской метрикой пространства-времени, критерием перехода к СТО часто считают устранение гравитационного поля в некоторой системе отсчета. Однако, во-первых, такой критерий заведомо неприменим в теории самого гравитационного поля («сильный» принцип эквивалентности). Во-вторых, никаким выбором системы отсчета нельзя обратить в нуль кривизну гравитационного поля даже в точке, т. е. он не может быть применим и ко всем системам обычной материи («среднесильный» вариант). Таким образом, если исходить из этого критерия, остается справедливым только «слабый» принцип эквивалентности.

Однако в таком «ослабленном» варианте принцип эквивалентности может быть выведен из принципа тождественности гравитационного и метрического полей, если последний принять в качестве фундаментального [121]. Действительно, тождественность гравитационного и метрического полей, как мы уже отмечали, подсказывается, но не следует безусловно из «слабейшего» принципа эквивалентности. В то же время описание гравитации как искривления пространства-времени приводит как математический факт и к существованию локально инерциальной системы отсчета, и к закону движения точечного тела по геодезическим (т. е. к равенству инертной массы и пассивного гравитационного заряда), получаемого из функционала действия (4.6) главы 1, и к равенству пассивного и активного гравитационных зарядов, поскольку правая часть уравнений Эйнштейна получается вариацией по метрике того же функционала действия.

Следует ли тем самым отказаться от принципа эквивалентности в современной теории гравитации? Нет, надо изменить критерий перехода к СТО. Мы здесь приведем формулировку принципа эквивалентности, которая возникает в связи с построением калибровочной теории гравитации (разд. 3.3).

В геометрическом аспекте СТО можно характеризовать в духе эрлангенской программы Ф. Клейна как геометрию инвариантов группы Лоренца. Ф. Клейн так определил содер-

жание геометрии (1872): дано пространство и в нем группа преобразований, требуется построить теорию инвариантов этой группы (см. [20а]). Псевдориманова геометрия может быть охарактеризована таким же способом. Для этого надо рассмотреть пространство, группа преобразований которого действует локально, в бесконечно малой окрестности точки. Строго это делается в терминах касательного расслоения и инвариантов Клейна — Чженя [47]. Отсюда принцип эквивалентности может быть сформулирован как требование существования лоренцевских инвариантов и их сохранения относительно параллельных переносов в некоторой системе отсчета.

Математически это требование означает, что существует такая система отсчета (атлас Ψ касательного расслоения), в которой переходы с карты на карту являются лоренцевскими преобразованиями, а связность Γ представляется лоренцевскими операторами. В этом случае лоренцевский инвариант, определенный в одной карте, будет сохраняться при переходе на другую карту и при параллельном переносе.

Имеется математическая теорема, утверждающая, что эти требования выполняются тогда и только тогда, когда на многообразии X^4 существует псевдориманова метрика g, такая, что в системе отсчета Ψ она сводится к метрике Минковского, т. е. $g = \eta$ в обозначениях предыдущего раздела [47, 54].

Таким образом, выполнение принципа эквивалентности в формулировке геометрии инвариантов прямо требует существования псевдориманової метрики, отождествление которой с гравитационным полем приводит (как было отмечено) к выполнению всех положений принципа эквивалентности в его обычной формулировке, а ее учет в уравнениях движения позволяет, в свою очередь, удовлетворить общему принципу относительности.

Заметим, что принцип эквивалентности, требуя, чтобы связность была лоренцевской в некоторой системе отсчета, не предполагает ее симметричности. Отсюда следует, что принципу эквивалентности удовлетворяет не только теория гравитации, когда Γ — символы Кристоффеля, но и ее ближайшее обобщение — теория гравитации с кручением (см. разд. 3.4). Это делает учет кручения, источником которого является спин материи, еще более естественным.

Принцип эквивалентности в формулировке геометрии инвариантов обусловливает существование не только гравитационного поля, но и пространственно-временной структуры на многообразии X^4, которая собственно и превращает его в пространство-время.

Имеется математическая теорема, согласно которой, если существует атлас касательного расслоения Ψ^g, в котором склейка карт осуществляется с помощью лоренцевских преобразований, то существует и атлас $\overline{\Psi}^g$, в котором карты могут быть склеены посредством чисто пространственных поворотов [54]. Это означает, что выполнение принципа эквивалентности гарантирует существование не только лоренцевских инвариантов, но и величин, инвариантных относительно только пространственных поворотов. Правда, они не будут сохраняться при параллельном переносе.

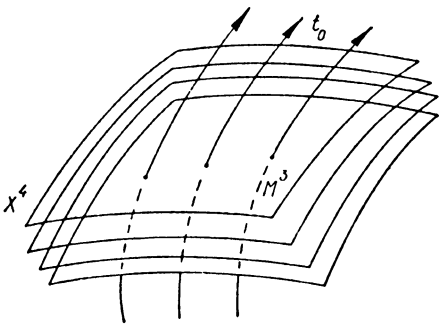


Рис. 20.

Примером таких величин являются временные компоненты тетрад $t_0 = h_0^\mu \partial_\mu$, определяемых указанным атласом $\overline{\Psi}^g$. Выделяя в каждой точке x локальное направление времени $t_0(x)$, в ней можно выделить и ортогональное ему трехмерное подпространство $T_x^\perp$ (касательного пространства T_x) пространственно-подобных относительно g направлений. Таким образом, в каждой точке будет иметь место локальное пространственно-временное $(3+1)$-разбиение многообразия X^4 (вернее, его касательных пространств). Это разбиение и представляет собой задание согласованной с данным гравитационным полем пространственно-временной структуры на многообразии X^4, превращающей его в пространство-время.

Локальные $(3+1)$-разбиения могут быть объединены в глобальное пространственно-временное разбиение многообразия X^4. Если поле $t_0(x)$ удовлетворяет так называемому условию интегрируемости

$$t_{0\sigma} t_{0\mu,\,\nu} + t_{0\nu} t_{0\sigma,\,\mu} + t_{0\mu} t_{0\nu,\,\sigma} = 0,$$

через каждую точку x пространства-времени X^4 может быть проведено трехмерное подпространство M^3, такое, что площадка $T_x^\perp$ определяемых $(3+1)$-разбиением пространственных направлений будет касательна к нему. В результате все пространство-время X^4 оказывается как бы расслоенным на такие непересекающиеся пространственноподобные относительно g подпространства (рис. 20).

Такая конструкция называется слоением многообразия (см. [43, 54]), слоями которого являются подпространства M^3, ортогональные во всех точках линиям поля $t_0(x)$. Оно определяет уже глобальное (3 + 1)-разбиение пространства-времени, где линии поля t_0 — линии времени, а слои M^3, если нет нарушений причинности (см. разд. 2.3), представляют собой гиперповерхности одновременности.

Для данного гравитационного поля существует не только одно согласованное с ним (3 + 1)-разбиение. Все они задаются нормированными полями $t_0(x)$, отличающимися друг от друга в каждой точке лоренцевскими преобразованиями. Выбор определенного (3 + 1)-разбиения — это выбор системы отсчета.

Существование в гравитации систем отсчета с явно выделенным временем позволяет описывать динамику в теории гравитации привычным образом, как эволюции во времени. Стало возможным даже применить гамильтонов формализм, который оказался полезен и для постановки задачи Коши, и для анализа проблемы энергии гравитационного поля, и для его квантования [13, 92].

Напомним суть гамильтонова формализма. В лагранжевом формализме физическая система описывается динамическими переменными q^A, а ее динамика задается лагранжианом $L(q^A, \dot{q}^A)$, зависящим от координат q^A и их скоростей $\dot{q}^A$. В гамильтоновом формализме переменных в два раза больше. Это те же координаты q^A и сопряженные им канонические импульсы

$$p_A = \frac{\partial L(q^A, \dot{q}^A)}{\partial \dot{q}^A}. \tag{2.2}$$

Динамика системы в гамильтоновом формализме определяется гамильтонианом

$$H(p, q) = \sum_A p^A \dot{q}^A - L(q^A, \dot{q}^A).$$

Причем в правую часть этого соотношения надо подставить найденные из (2.2) выражения для скоростей $\dot{q}^A$ через координаты q^A и импульсы p_A так, чтобы гамильтониан зависел только от q и p. Гамильтониан $H(p, q)$ представляет собой обобщенную энергию системы, а при квантовании — оператор энергии.

Уравнениями движения в гамильтоновом формализме являются уравнения Гамильтона

$$\dot{p}^A = -\frac{\partial H}{\partial q^A}, \quad \dot{q}^A = \frac{\partial H}{\partial p^A}.$$

Этих уравнений в два раза больше, чем уравнений Эйлера — Лагранжа, но зато, в отличие от последних, они содержат производные по времени только первого порядка.

Возможна ситуация, когда найденный из (2.2) сопряженный координате q^A канонический импульс $p_A = 0$. Это значит, что переменная q^A не является динамической, а соответствующие уравнения Гамильтона представляют собой нединамические уравнения связи.

Чтобы перейти к гамильтоновой формулировке в теории гравитации (впервые предложенной П. Дираком), необходимо ввести еще некоторые величины. При этом для простоты ограничимся рассмотрением гравитационного поля в отсутствие материи, будем полагать, что (3 + 1)-разбиение глобально и отвечающая ему система отсчета голономна.

В такой системе отсчета вектор $t_0 = \partial/\partial x^0$. Обозначим $N_i = g_{0i}$ его пространственные проекции и N — проекцию на нормаль к гиперповерхности M^3. Длина задается компонентой метрики $g_{00} = N^2 - N^2$.

Определим также тензор внешней кривизны

$$K_j^i = -D_j n^i,$$

где n^i — компоненты единичного 4-вектора, нормального к пространственной гиперповерхности. Внешняя кривизна характеризует погружение слоя M^3 в окружающее пространство, показывая, как изменяется нормаль к нему при параллельном переносе по гиперповерхности.

Введем и так называемый тензор плотности

$$\pi^{ij} = \sqrt{-g}\,(g^{ij}K - K^{ij}),$$

где $K = g_{ij}K^{ij}$ — скаляр внешней кривизны.

Тогда можно показать, что функционал действия гравитационного поля в ОТО (с точностью до интегралов по границе и полных производных по времени) принимает вид

$$S = \int dt \int d^3x\,(\dot{g}_{ij}\pi^{ij} - N_\mu R^\mu);$$

$$R^i = 2\sqrt{-g}NG^{0i};\quad R^0 = -2\sqrt{-g}N^2G^{00},$$

где $G_{\mu\nu}$ обозначает левую часть уравнений Эйнштейна. Динамическими переменными в этом функционале являются компоненты пространственной метрики g_{ij} и векторы N_μ. Причем π^{ij} и R^μ не зависят от скоростей $\dot{g}_{ij}$ и $\dot{N}_\mu$.

Варьирование действия S по $\dot{g}_{ij}$ определяет π^{ij} как импульсы, сопряженные g_{ij}. В то же время, поскольку действие не зависит от скоростей N_μ, импульсы, сопряженные N_μ, равны нулю

$$\pi^\mu = 0. \qquad (2.3)$$

Это значит, что переменные N_μ, т. е. компоненты метрики $g_{0\mu}$, не являются в теории гравитации (в системе отсчета, связанной с данным (3 + 1)-разбиением) динамическими переменными.

Получаемый из действия S гамильтониан гравитационного поля имеет вид

$$H = \int d^3x \, (\dot{N}_\mu \pi^\mu + N_\mu R^\mu). \tag{2.4}$$

Отсюда находим уравнения Эйнштейна в гамильтоновой форме: динамические уравнения

$$\dot{g}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{ij}}, \quad \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial g_{ij}} \tag{2.5}$$

и уравнения связи

$$\dot{N}_\mu = \frac{\partial H}{\partial \pi^\mu} = N_\mu, \quad \dot{\pi}^\mu = -\frac{\partial H}{\partial N_\mu} = R^\mu.$$

Первые из уравнений связи показывают, что величины $N_\mu(t)$ произвольны и не являются динамическими переменными. Это отражает произвольность четырех координат, используемых для описания пространства-времени. Вторые уравнения с учетом условия (2.3) приводят к четырем уравнениям связи

$$\dot{\pi}^\mu = R^\mu = 0. \tag{2.6}$$

Они называются вторичными уравнениями связи, тогда как (2.3) — первичными уравнениями связи.

Возвращаясь к привычной записи уравнений Эйнштейна, мы получаем из уравнений (2.5) шесть динамических уравнений

$$R_{ij} = 0, \tag{2.7}$$

а из (2.6) — четыре уравнения связи

$$R_{0\mu} = 0. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7), (2.8) включают в себя четыре произвольные функции $g_{0\mu}$ и шесть динамических переменных g_{ij}. Но это не значит, что имеется десять уравнений на шесть переменных. Можно показать, что, если поля $g_{ij}(x)$ удовлетворяют уравнениям (2.7) и на некоторой пространственноподобной гиперповерхности S—уравнениям (2.8), то они удовлетворяют (2.8) и в окрестности S, т. е. уравнения связи (2.8) фактически накладывают условия только на начальные данные — данные Коши.

В настоящее время методы (3 + 1)-разбиения получили широкое распространение в теории гравитации[13]. Оно, как мы видим, с одной стороны, имеет своей базой один из фундаментальных принципов ОТО — принцип эквивалентности, а с другой — неизбежно возникает при рассмотрении систем отсчета, связанных с реально допустимыми приборами и наблюдателями. Мы еще будем обращаться к (3 + 1)-разбиению при обсуждении различных проблем теории гравитации.

3. ПРОБЛЕМА ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Понятие энергии и законы сохранения занимают центральное место во всякой физической теории. В теории поля величиной, описывающей энергетические свойства физической системы, является тензор энергии-импульса. Проблема, вынесенная в заголовок этого раздела, состоит в том, что в эйнштейновской теории гравитации не удается построить удовлетворительного выражения для тензора энергии-импульса гравитационного поля.

Вопрос об определении энергии гравитационного поля возник уже в первые годы создания ОТО, и его решение А. Эйнштейном в 1918 г. вызвало активные возражения Ф. Клейна, Г. Лоренца, Э. Шредингера, позднее — К. Меллера, В. И. Родичева и др. В последние годы он был вновь заострен в работах А. А. Логунова с сотрудниками [38, 71, 71а].

Напомним определение тензора энергии-импульса. Пусть имеется некоторая система полей φ, описываемая лагранжианом $L(\varphi; \varphi_{,\mu})$. Рассмотрим малое преобразование (с бесконечно малыми параметрами $\delta\omega^m$) координат x и функций поля φ:

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = X^\mu_m \delta\omega^m,$$
$$\varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \delta\varphi^a(x), \quad \delta\varphi^a(x) = \Phi^a_m \delta\omega^m. \qquad (3.1)$$

Условие инвариантности функционала действия относительно преобразований (3.1) имеет вид

$$\int dx \left\{ \left[\frac{\delta L}{\delta \varphi^a} + \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \right] \bar{\delta}\varphi^a + \partial_\mu (L \delta x^\mu) \right\} = 0,$$

где $\bar{\delta}\varphi = \delta\varphi - \varphi_{,\mu}\delta x^\mu$ обозначает вариацию формы полевых функций. Поскольку это соотношение выполняется при инте-

[13] Вариант (3 + 1)-разбиения в виде теории хронометрических инвариантов был предложен К. Кагатнео, А. Л. Зельмановым [22].

грировании по любой области, из него следует, что подынтегральное выражение равно нулю. На решениях уравнений поля $\delta L/\delta\varphi^a = 0$ это равенство принимает вид локального закона сохранения

$$-\partial_\mu J^\mu_m + \partial_\mu (T^\mu_\nu X^\nu_m) = 0, \tag{3.2}$$

где величина

$$J^\mu_m = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \Phi^a_m$$

называется током симметрии, а

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} \varphi^a_{,\nu} - L\delta^\mu_\nu \tag{3.3}$$

— каноническим тензором энергии-импульса.

Равенство (3.2) составляет содержание так называемой первой теоремы Нетер. Если преобразование (3.1) затрагивает только полевые функции (т. е. $X^\mu_m = 0$), то (3.2) сводится к закону сохранения тока J^μ_m. Если же преобразуются только координаты и это преобразование — сдвиг $x^\mu \to x^\mu + \delta\omega^\mu$ (т. е. $X^\mu_m = \delta^\mu_m$), то сохраняется тензор энергии-импульса

$$T^\mu_{\nu,\,\mu} = 0. \tag{3.4}$$

Отсюда, в частности, делают вывод, что закон сохранения энергии-импульса является следствием однородности пространства-времени, т. е. когда все его точки эквивалентны.

Локальный закон сохранения (3.4) можно превратить в интегральный. Для этого проинтегрируем это равенство по трехмерному объему при постоянном времени и применим теорему Гаусса[14] к интегралу от пространственной части 4-дивергенции (3.4), превращая его в поверхностный интеграл по пространственной бесконечности, где тензор энергии-импульса естественно считать равным нулю. Тем самым этот интеграл обращается в нуль и закон сохранения (3.4) принимает вид

$$P_{\nu,\,0} = 0, \quad P_\nu = \int T^0_\nu \, d^3x$$

закона сохранения вектора 4-импульса P_ν. Его компонента P_0 представляет собой полную энергию, а $\boldsymbol{P}$ — полный импульс системы.

---

[14] Теорема Гаусса — Остроградского устанавливает равенство $\int A^\mu_{,\mu} dV = \int A^\mu dS_\mu$ интеграла по объему от дивергенции $A^\mu_{,\mu}$ векторной величины A^μ интегралу от A^μ по окружающей этот объем поверхности.

Важно подчеркнуть, что тензор энергии-импульса $T^{\nu\mu}$ из условия инвариантности действия относительно сдвига координат определяется неоднозначно. Закон сохранения (3.4) выполняется при прибавлении к $T^{\nu\mu}$ любого тензора вида

$$\psi^{\mu\nu\sigma}_{,\mu}, \quad \psi^{\mu\nu\sigma} = -\psi^{\mu\sigma\nu}.$$

При этом, как легко проверить, полные энергия и импульс системы не меняются. Тем не менее для некоторых вопросов эта неоднозначность не безразлична.

Для однозначного определения тензора энергии-импульса, исходя из ряда соображений, было выдвинуто требование, чтобы он был симметричен [69]. Таковым является так называемый метрический тензор энергии-импульса

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\nu\mu} = \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}} - \partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial g^{\nu\mu}_{,\sigma}} + \partial_{\sigma\rho}\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\sigma\rho}}. \tag{3.5}$$

Действительно, в целом ряде случаев он оказывается предпочтительней канонического тензора (3.3) (см. [31]). Метрический тензор (3.5) берется за определение тензора энергии-импульса материи в теории гравитации. Именно он возникает в правой части уравнений Эйнштейна при их выводе из вариационного принципа.

В теории гравитации имеет место ковариантное обобщение

$$T^{\mu}_{\nu;\,\mu} = 0 \tag{3.6}$$

закона сохранения (3.4) для тензора энергии-импульса материи во внешнем гравитационном поле. Равенство (3.6) получается из условия инвариантности функционала действия относительно голономных преобразований, индуцируемых малыми сдвигами координат $x^\mu \to x^\mu + a^\mu(x)$ (см. [61]) и может рассматриваться как следствие локальной однородности пространства-времени.

В отличие от (3.4), равенство (3.6), вообще говоря, не выражает закон сохранения чего-либо. Это и не удивительно, поскольку материя рассматривается во внешнем гравитационном поле, со стороны которого на нее действует сила, выражаемая в (3.6) членом $\Gamma^\mu_{\alpha\mu}T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}T^\mu_\alpha$. Так, равенство (3.6) не приводит к интегральным законам сохранения.

Наличие таких законов сохранения связано со свойствами глобальной однородности пространства, как, например, в пространстве Минковского, допускающего группу движений Пуанкаре. Действительно, если искривленное пространство тоже имеет группу движений, характеризуемую n полями Киллинга τ^ν_a, $a = 1, \ldots, n$ (см. разд. 1.5), то в таком пространстве можно ввести n величин $p^\mu_a = \tau^\nu_a T^\mu_\nu$, для которых

локальный закон сохранения примет вид обычной дивергенции

$$p^{\mu}_{a;\,\mu} = \tau^{\nu}_{a} T^{\mu}_{\nu;\,\mu} + \frac{1}{2}\, T^{\mu}_{\nu}\,(\tau^{\nu}_{a;\,\mu} + \tau^{\nu}_{a\mu}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,(\sqrt{-g}\,p^{\mu}_{a})_{,\mu} = 0,$$

и выполняются n интегральных законов сохранения

$$P_{a,\,0} = \partial_0 \int p^0_a\, d^3x = 0. \tag{3.7}$$

В частности, если среди полей Киллинга есть $\tau_0\,(x) = \partial_0$, величина P_0 является полной энергией материи, а выражение (3.7) ее законом сохранения. В случае произвольного гравитационного поля таких интегральных сохраняющихся величин нет.

Естественно ожидать, что закон сохранения должен выполняться для полного тензора энергии-импульса $T^{\nu\mu} + t^{\nu\mu}$ материи $T^{\nu\mu}$ и гравитационного поля $t^{\nu\mu}$:

$$(T^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu})_{,\mu} = 0. \tag{3.8}$$

Казалось бы, такой тензор энергии-импульса легко найти, применяя определение (3.5) к полному лагранжиану материи и гравитационного поля. Однако, как легко убедиться, $(-t_{\nu\mu})$ в этом случае представляет собой не что иное, как левую часть уравнений Эйнштейна, и сумма $T_{\nu\mu} + t_{\nu\mu}$ обращается тождественно в нуль на их решениях.

Можно видеть глубокий смысл в том, что полный тензор энергии-импульса материи и порождаемого ею гравитационного поля равен нулю, хотя при таком понимании гравитационное поле без обычной материи, например гравитационные волны, не обладает энергией. Но доминирующей точкой зрения стала та, что определение тензора энергии-импульса (3.5) применимо только к материи, но не к самому гравитационному полю.

Кроме того, при любом определении величина $t^{\nu\mu}$, выражающая в законе сохранения (3.8) энергию-импульс гравитационного поля, обладает одним существенным недостатком — она не является тензором относительно общековариантных преобразований[15]. Это, в частности, означает, что может существовать система отсчета, в которой энергия-импульс гравитационного поля ($R \neq 0$) обращается опять же в нуль. Возникают и другие неприятности из-за нетензорности $t^{\nu\mu}$. Все попытки избавиться от них, выбирая тот или иной «луч-

[15] Величина $t^{\mu\nu}$ получила название псевдотензора или комплекса энергии.

ший» вариант псевдотензора $t^{\nu\mu}$, оказались безрезультатными. К. Меллером были сформулированы критерии «хорошего» псевдотензора энергии-импульса, но выяснилось, что из метрики (или тетрадных функций) такой псевдотензор построить нельзя [75].

Тем не менее псевдотензор $t^{\nu\mu}$ вошел в большинство курсов теории гравитации как стандартный способ описания энергии гравитационного поля.

В наиболее удобной форме псевдотензор $t^{\nu\mu}$ записывается через так называемый суперпотенциал $\psi^{\mu\sigma}_{\nu}$

$$(-g)^N (T^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu}) = \psi^{\mu\sigma}_{\nu,\sigma}, \tag{3.9}$$

который имеет общий вид

$$\psi^{\mu\sigma}_{\nu} = \frac{1}{2\varkappa} \partial_{\alpha} [(-g)^N (g^{\mu}_{\nu} g^{\sigma\alpha} - g^{\sigma}_{\nu} g^{\mu\alpha})]$$

и приводит к закону сохранения

$$\partial_{\mu} [(-g)^N (T^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu})] = 0. \tag{3.10}$$

Здесь N — целое или полуцелое число. Подставляя в (3.9) выражение для T^{μ}_{ν} из уравнений Эйнштейна через их левую часть, получаем весьма сложное выражение для псевдотензора t^{μ}_{ν} через метрику; при $N = 1/2$ — псевдотензор Эйнштейна.

Закон сохранения (3.10), хотя и является обычной дивергенцией, не может быть, однако, проинтегрирован, вернее, однозначно проинтегрирован. Его левая часть не скаляр, и процесс интегрирования зависит от пути переноса и сопоставления величин в разных точках.

Непреодоленные с момента создания ОТО трудности с определением энергии гравитационного поля приводят к мысли, что они носят принципиальный характер. Так, широкое распространение получило мнение, что, поскольку в СТО закон сохранения энергии-импульса изолированной физической системы выводится обычно из условия однородности пространства Минковского (см. начало разд.), само понятие тензора энергии-импульса неотделимо от спецрелятивистской группы движений Пуанкаре (определенной хотя бы асимптотически) (см. [117]).

В этой связи возникли надежды, что, если не весь комплекс энергии-импульса, то энергию гравитационного поля можно корректно определить, если отказаться от общековариантного рассмотрения и применить метод (3 + 1)-разбиения, трактуя гамильтониан гравитационного поля как генератор сдвигов по времени [117]. Однако и в таком подходе обна-

руживаются все известные трудности. Гамильтониан гравитационного поля (2.4) обращается в нуль при выполнении условий связи. При другом выборе гамильтониана он отличается от (2.4) на дивергенцию, аналогичную дивергенции суперпотенциала в формуле (3.9). В результате приходим к гамильтоновой записи все того же псевдотензора энергии-импульса.

Дело в том, что, как мы уже отмечали, свойства однородности пространства-времени — наличие группы движений — сказывается на существовании интегральных законов сохранения, тогда как трудности возникают уже на «локальном» уровне при определении плотности энергии гравитационного поля.

Есть, однако, два типа гравитационных систем, для которых энергию гравитационного поля удается определить удовлетворительно. Это асимптотически плоские гравитационные поля, а также такие, которые рассматриваются на фоне некоторой фиксированной базовой метрики.

Пространство-время считается асимптотически плоским, если вне некоторой компактной области оно представляет собой топологически простое пространство, параметризуемое 4 координатами x^μ, принимающими по модулю все сколь угодно большие значения; при $r \to \infty$ и конечных t

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\,(r^{-1}),\quad g_{\mu\nu,\,\sigma} = 0\,(r^{-2}),\quad \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0\,(r^{-2}), \qquad (3.11)$$

где $0\,(r^{-n})$ обозначает функцию порядка r^{-n} и ниже.

Для таких гравитационных полей почти все предложенные выражения для плотности энергии гравитационного поля эквивалентны псевдотензору, который сам имеет асимптотику $0\,(r^{-4})$. Законы сохранения (3.10) можно в асимптотически плоском пространстве проинтегрировать обычным образом (поскольку по порядку $D_\mu \sim \partial_\mu$) и получить интегральные сохраняющиеся величины для энергии и импульса гравитационного поля и материи:

$$P_\nu = \int (-g)^N (t^0_\nu + T^0_\nu)\, dV = \int \psi^{\sigma 0}_\nu\, dS_\sigma, \qquad (3.12)$$

где в последнем интеграле интегрирование ведется по бесконечно удаленной сфере $r = \infty$.

Величины (3.12) обладают всеми нужными для полных энергии и импульса свойствами и, что особенно важно подчеркнуть, инвариантны относительно преобразований координат, сохраняющих асимптотику (3.11) [75]. В частности, для асимптотически плоского гравитационного поля Е. Виттен доказал положительность P_0 (что оказалось весьма непростой задачей) [117], и для гравитационного поля точечной массы M

(изолированной системы вблизи начала координат) получается значение энергии Mc^2 (см. [75]).

Наиболее удовлетворительное описание энергия-импульс гравитационного поля получает, когда это поле рассматривается на фоне некоторой базовой (фоновой) метрики. В этом случае тензор энергии-импульса гравитационного поля определяется, как для обычной материи, выражением (3.5), в котором варьирование лагранжиана производится по фоновой метрике [19, 71а, 144].

Обозначим $g^{\mu\nu}$ полную метрику; $\gamma^{\mu\nu}$ — фоновую метрику; $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}$ — гравитационное поле на фоне γ; φ_0 — фоновое материальное поле; φ — материальное поле на фоне φ_0. Поднятие и опускание индексов осуществляются с помощью фоновой метрики γ, и ковариантные производные записываются с ее символами Кристоффеля [144].

Лагранжиан для полей h и φ строится из гильберт-эйнштейновского лагранжиана $L_g = -\frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}R(g)$ для полной метрики g и лагранжиана $L_M(\varphi + \varphi_0, g)$ полного поля материи исключением из них членов нулевого и первого порядка по h и φ:

$$L = L_h(h, \gamma) + \tilde{L}_M(\varphi, \varphi_0, h, \gamma). \tag{3.13}$$

Вариация этого лагранжиана по плотности $\bar{h}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}h^{\mu\nu}$ приводит к уравнению

$$G^L_{\mu\nu}(h) + \Phi^L_{\mu\nu}(h, \varphi) = -(t_{\nu\mu} + T_{\nu\mu}). \tag{3.14}$$

Слева в (3.14) стоят линейные по h и φ члены, а справа — тензоры энергии-импульса гравитационного поля h и материального поля φ:

$$t_{\nu\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta L_h}{\delta\gamma^{\mu\nu}}, \quad T_{\nu\mu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta\tilde{L}_M}{\delta\gamma^{\mu\nu}}. \tag{3.15}$$

Если предположить, что фоновые метрика γ и материальное поле φ_0 удовлетворяют уравнениям Эйнштейна, уравнение (3.14) становится эквивалентным уравнениям Эйнштейна для полных метрики g и поля $\varphi_0 + \varphi$ [144].

Тензор энергии-импульса $t_{\nu\mu}$ действительно оказывается тензором относительно общековариантных преобразований

$$g = \gamma + h \to g' = \gamma' + h'.$$

Хотя лагранжиан (3.13) инвариантен относительно этих преобразований, ковариантный закон сохранения (3.6) полного тензора энергии-импульса $(t_{\nu\mu} + T_{\nu\mu})$ из-за взаимодействия с фоном материи не имеет места. Он выполняется, если $\varphi_0 = 0$.

Многое упрощается, если рассматривать Риччи-плоский фон, т. е. когда $R_{\alpha\beta}(\gamma) = 0$, а обычно в качестве фона берут просто метрику Минковского η. В этом случае уравнение (3.14) принимает вид уравнения для поля спина 2 с той только разницей, что источником поля является его же тензор энергии-импульса.

На плоском фоне для полного тензора энергии-импульса $(t_{\nu\mu} + T_{\nu\mu})$ выполняется обычный закон сохранения (3.4), и можно получить интегральные сохраняющиеся величины энергии и импульса. Имеются и другие хорошие свойства определенного таким образом тензора энергии-импульса гравитационного поля (см. [19]).

Мы привели вариант описания гравитационного поля на фоне базовой метрики как частный случай гравитационных систем, в котором энергию гравитационного поля удается удовлетворительно определить. Однако является ли этот случай частным?

Во-первых, согласно ОТО, гравитационное поле — это именно поле отклонений h от метрики Минковского. Во-вторых, на всяком наперед заданном многообразии псевдориманова метрика g может быть представлена как сумма некоторой фоновой метрики γ и поля отклонений h, а в топологически простой (стягиваемой) области пространства в качестве γ может быть выбрана метрика Минковского. В-третьих, как уже было отмечено, уравнения гравитационного поля над фоновой метрикой могут быть построены эквивалентными уравнениям Эйнштейна для полной метрики.

Эти и другие соображения дают основание ряду гравитационистов (С. Вейнбергу, А. А. Логунову и др.) утверждать, что тензор (3.15) является истинным общим выражением для энергии-импульса гравитационного поля.

Модели с ненулевым фоном сейчас очень распространены, особенно в квантовой теории поля (см. разд. 3.5). В классической теории гравитации подход с фоновой метрикой получил название биметризма (см. [113, 149, 155]). Неожиданную поддержку идея биметризма приобрела со стороны калибровочной теории гравитации, в которой трактовка гравитационного поля как хиггс-голдстоуновского предполагает существование особого классического гравитационного фона (см. разд. 3.3; 3.5).

Все это побуждает отнестись к биметрическому варианту решения проблемы энергии в теории гравитации со всем вниманием.

4. ГРАВИТАЦИОННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ

Другой серьезной проблемой, с которой сталкивается эйнштейновская теория гравитации, являются гравитационные сингулярности. Она имеет два аспекта: 1) согласно теоремам Хокинга — Пенроуза (см. ниже), в большинстве физически разумных решений уравнений Эйнштейна присутствуют сингулярности; 2) имеются сложности с установлением самого критерия гравитационных сингулярностей.

Казалось бы, гравитационные сингулярности естественно связывать с сингулярными (бесконечно большими) значениями самого гравитационного поля — метрики, тензора кривизны, скалярных комбинаций, образованных из его компонент и их ковариантных производных. Действительно, этот критерий долгое время не подвергался сомнению. Однако от него приходится отказаться.

Во-первых, даже регулярность всех гравитационных величин не гарантирует, что не возникнут такие сингулярные ситуации, как неполнота геодезических (т. е. геодезические как бы обрываются в некоторых точках), нарушения причинности и др.

Во-вторых, не ясно, следует ли считать сингулярными ситуации, когда нескалярные гравитационные величины (например, компоненты метрики) сингулярны, тогда как все скалярные комбинации из них регулярны. Обычно такие сингулярности принято рассматривать как фиктивные, которые можно убрать переходом к другой системе отсчета и которые тем самым, существуя для одного наблюдателя, отсутствуют для другого. Однако переход от «сингулярной» к «регулярной» системе отсчета осуществляется с помощью сингулярного (в частности, недифференцируемого в сингулярных точках) преобразования, и может возникнуть ситуация из предыдущего пункта, когда все гравитационные величины регулярны, а сингулярности имеются.

В-третьих, казалось бы гарантию наличия гравитационной сингулярности дает сингулярность какой-либо скалярной свертки из тензора кривизны. Но и в этом случае точку сингулярности (или даже некоторую область вокруг нее) можно вырезать и оставшееся пространство рассматривать в качестве истинного пространства-времени. Оно все равно будет сингулярным, но данный критерий этого не установит.

В качестве примера приведем сингулярности в упоминавшемся в главе 1 решении Шварцшильда (5.4) [125]. Это так называемое внешнее решение Шварцшильда при $r > r_g$. Оно имеет особенность компонент метрики g_{00} и g_{rr} при $r = r_g$, тогда как все скалярные величины на гравитационном радиусе

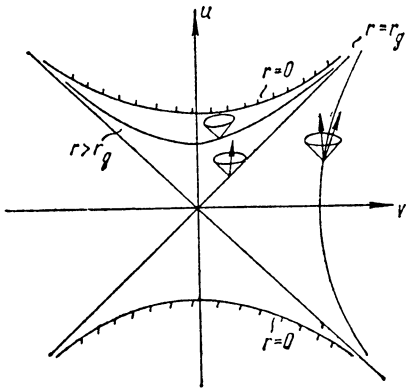


Рис. 21.

r_g регулярны, т. е. сингулярность $r = r_g$, казалось бы, фиктивная. Действительно, она связана с тем, что систему отсчета внешнего неподвижного наблюдателя, в которой записана метрика Шварцшильда, нельзя распространить на сферу $r = r_g$, поскольку ни один световой сигнал из-под гравитационного радиуса до внешнего наблюдателя не доходит (см. ниже). Такая поверхность образует для внешнего наблюдателя, как говорят, горизонт.

Можно перейти, однако, к системе отсчета (координатам Крускала)

$$u = (r - r_g)^{1/2} \exp(r/2r_g) \operatorname{sh}(t/2r_g);$$
$$v = (r - r_g)^{1/2} \exp(r/2r_g) \operatorname{ch}(t/2r_g),$$

связанной с наблюдателем, падающим на гравитационной радиус, в которой метрика Шварцшильда становится регулярной при $r = r_g$

$$ds^2 = \frac{4r_g^2}{r^2} \exp(-r/r_g)(du^2 - dv^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2);$$
$$u^2 - v^2 = -(r - r_g)\exp(r/r_g) \qquad (4.1)$$

и может быть продолжена на значения $r < r_g$, т. е. внутрь шварцшильдовского горизонта.

На рис. 21 приведена диаграмма Крускала сечения $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ пространства-времени. На ней изображены линии постоянного r. Световые конусы на диаграмме Крускала имеют образующие, наклоненные под углом 45° к осям u и v. В частности, видно, что линия $r = r_g$ является изотропной и световые конусы на гравитационном радиусе направлены внутрь поверхности $r = r_g$. Это значит, что мировые линии реальных тел, лежащие в растворе световых конусов (показаны стрелками), могут пересекать шварцшильдовский горизонт снаружи, но не изнутри, т. е. поверхность $r = r_g$ ведет себя как полупроницаемая мембрана и является так называемой ловушечной поверхностью. Внутри такой поверхности нарушается причинность, возникают и другие сингулярные ситуации.

Все же истинной сингулярностью в решении Шварцшильда — Крускала (4.1) считается особенность $r = 0$, в которой скаляр $R^{\mu\nu\alpha\sigma}R_{\mu\nu\alpha\sigma}$ расходится как r^{-6}. Однако точку $r = 0$ можно исключить из пространства-времени. Тогда, казалось бы, согласно обсуждавшемуся критерию, сингулярности нет, но на самом деле она остается. Например, все времениподобные геодезические под гравитационным радиусом «обрываются» в точке $r = 0$.

Вместе с тем отметим, что сингулярность $r = 0$ решения Шварцшильда — Крускала для точечной массы M, будучи «истинной» математически, по всей видимости, является «фиктивной» физически, подобно особенности α/r электрического потенциала точечного заряда.

В настоящее время наиболее признанным является критерий гравитационных сингулярностей, основанный на понятии так называемой b-полноты [125]. Суть его состоит в том, что кривые при подходе к точкам гравитационных сингулярностей в сами эти точки продолжены быть не могут, т. е. оказываются неполными.

Понятие неполноты кривых очень часто встречается в литературе по гравитационным сингулярностям, поэтому необходимо его пояснить. Точки геодезической могут быть параметризованы ее геодезическим параметром (см. нормальные координаты в разд. 2.1). Для времениподобных геодезических его роль выполняет релятивистская длина кривой, или, что то же самое, собственное время наблюдателя, движущегося по геодезической. Геодезическая считается неполной, если она не может быть продолжена до любого конечного значения своего геодезического параметра. Вводя на произвольных кривых некоторое обобщение геодезического параметра, понятие неполноты распространяют и на негеодезические кривые (b-неполнота).

Факт такой неполноты и может служить критерием наличия гравитационной сингулярности. Причем пространство-время считается сингулярным, если в нем существует хотя бы одна такая неполная кривая. При этом сингулярные точки из пространства-времени удаляются, и вместо них специальной весьма сложной процедурой b-пополнения в него добавляются точки, в которые кривые уже могут быть продолжены; множество этих точек называется b-границей. Затем анализируется поведение кривых и гравитационных величин (в специальном параллельно переносимом вдоль кривых базисе) при подходе к b-границе. По поведению на b-границе дается классификация сингулярностей [139].

Упомянем из нее квазирегулярные сингулярности, когда кривизна при приближении к точкам b-границы остается регу-

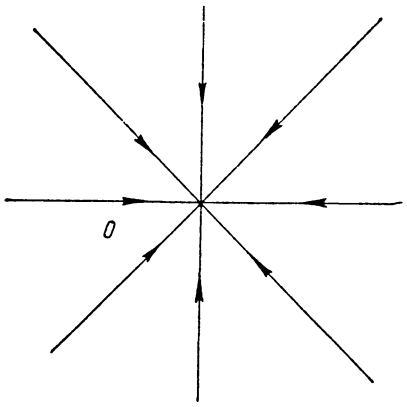


Рис. 22.

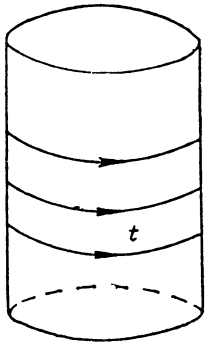


Рис. 23.

лярной, но кривые тем не менее за нее продолжить нельзя; например сингулярности типа конуса, когда все временные линии сходятся в точку (рис. 22).

Критерий гравитационных сингулярностей, основанный на понятии неполноты кривых, выглядит неплохим с точки зрения одиночного наблюдателя, двигающегося по кривой в пространстве-времени (столкнется или не столкнется он с сингулярностью в какой-либо конечный момент своего собственного времени), но и этот критерий не безупречен.

Во-первых, он не эффективен для обнаружения сингулярностей, поскольку невозможно проверить полноту всех кривых. На практике сингулярности ищут опять же по сингулярным значениям гравитационных величин, а потом эти точки исследуют с помощью b-критерия. Кроме того, неконструктивно определение b-границы, ее можно построить лишь в нескольких случаях.

Во-вторых, согласно b-критерию, сингулярные точки должны исключаться из пространства-времени X, а для оставшегося пространства $\overline{X}$ строится b-пополнение. Это скрывает некоторые характеристики гравитационных сингулярностей, которые определяются глобальными топологическими свойствами пространства X. В то же время однозначно восстановить X по $\overline{X}$ далеко не всегда удается. Например, b-пополнение $\overline{X}$ может не совпадать с X, даже если из X удалена регулярная точка.

В-третьих, b-критерий не всегда может выявить сингулярности, заключающиеся лишь в нарушении причинности. Например, пусть X — цилиндр и линии времени t — окруж-

ности (рис. 23). В этом пространстве все кривые полные, но наличие замкнутых линий времени нарушает причинность.

В-четвертых, по поведению одной или нескольких кривых можно установить присутствие гравитационной сингулярности, но оно мало что может сказать о структуре сингулярности, свойствах пространства-времени вблизи нее. Для этого надо рассматривать поведение целого семейства кривых или гиперповерхностей в окрестности сингулярной точки.

Роль такого семейства могут играть линии времени и слои пространственно-временного (3 + 1)-разбиения пространства-времени [103, 169].

В разделе 2.2 указывалось: всякой псевдоримановой метрике g можно поставить в соответствие согласованное с ней пространственно-временное (3 + 1)-разбиение (и не одно), характеризуемое векторным полем временных направлений t_0. Обратно, всякое (3 + 1)-разбиение многообразия X^4 определяет на нем некоторую псевдориманову метрику g, относительно которой это разбиение будет пространственно-временным. Это выражается следующим соотношением:

$$g^{\mu\nu} = g^{R\mu\nu} - 2t_0^\nu t_0^\mu \qquad (4.2)$$

между псевдоримановой метрикой g, векторным полем t_0 и некоторой римановой метрикой g^R на многообразии X^4.

Эта риманова метрика весьма примечательна. Именно она задает функцию расстояния между точками пространства-времени и его согласованную с g стандартную структуру многообразия как локально евклидова метрического и топологического пространства. Причем в разных системах отсчета (т. е. для разных t_0) риманова метрика в соотношении (4.2) разная, что отражает известный эффект изменения длин при переходе к движущейся системе отсчета.

То, что с гравитационным полем можно связать некоторую риманову метрику на пространстве-времени, часто упускается из виду. В результате структура стандартного многообразия, приписываемая пространству-времени, кажется никак не связанной с псевдоримановой метрикой на нем. Это стимулировало попытки выводить топологию пространства-времени непосредственно из его псевдоримановой структуры (топологии Зимана, Александрова, топология путей) [125]. Однако эти топологии в общем случае обладают целым рядом недостатков, в них нельзя построить содержательную дифференциальную геометрию.

Исходя из связи (4.2) между псевдоримановой метрикой и (3 + 1)-разбиением, можно попытаться описывать сингулярности гравитационного поля через особенности связанного с ним (3 + 1)-разбиения и определяющего его поля t_0, т. е.

через особенности порождаемой g пространственно-временной структуры.

В таком подходе различаются два типа сингулярностей. Сингулярностями первого типа обладают поля, допускающие регулярные, но не причинные (3 + 1)-разбиения. Такие сингулярности нарушают только причинность пространства-времени и не сопровождаются сингулярными значениями гравитационных величин.

В СТО условием причинности является то, что никакая скорость не может превышать скорость света. В ОТО оно оказывается недостаточным, поскольку свет распространяется не по прямой и могут возникать такие сингулярные ситуации, как замкнутые времениподобные кривые, ловушечные поверхности и др.

В теории гравитации применяются различные условия причинности [125]: хронологическое условие — не существует замкнутых времениподобных кривых; условие сильной причинности — каждая точка содержит окрестность, которую никакая непространственно-подобная кривая не пересекает более одного раза; условие устойчивой причинности и др. Наиболее сильным из них является устойчивая причинность. Оно гарантирует отсутствие каких-либо причинных патологий.

В терминах (3 + 1)-разбиения условие устойчивой причинности означает, что пространство-время допускает причинное пространственно-временное слоение, слои которого являются гиперповерхностями одновременности некоторого глобального времени f, где f — некоторая вещественная функция на многообразии, градиент которой $\partial_\mu f$ везде отличен от нуля; поле $t_{0\mu} = \partial_\mu f$. Такое слоение обладает тем свойством, что всякая непространственноподобная линия пересекает каждый его слой только один раз[16].

Условие устойчивой причинности накладывает довольно сильное ограничение на глобальную топологию пространства-времени. Последнее должно представлять собой прямое произведение $R^1 \times M^3$ временной линии R^1 и некоторого трехмерного пространства M^3 (рис. 24). Поэтому в решениях уравнений Эйнштейна условие причинности выполняется далеко не всегда, и чтобы характеризовать ту или иную степень сохранения причинности прибегают к другим, более слабым, условиям.

Пример решения уравнений Эйнштейна с одной только причинной сингулярностью дают модель Тауба-НУТ и ее дву-

[16] Здесь, чтобы не затруднять изложение излишними тонкостями, мы несколько усилили условие устойчивой причинности, доведя его до условия глобальной гиперболичности.

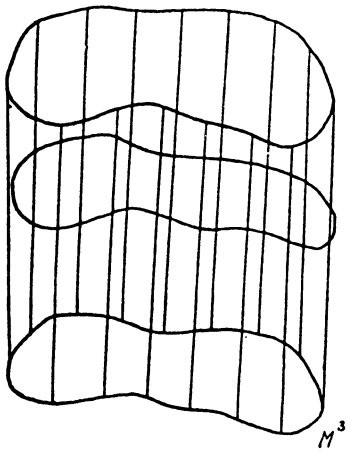


Рис. 24.

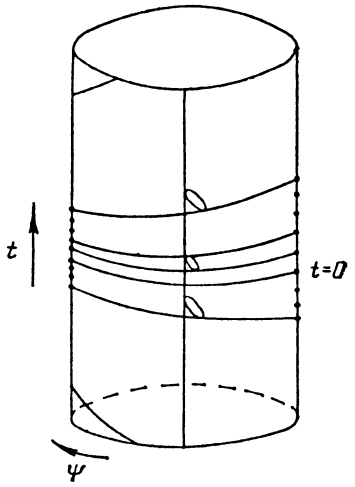


Рис. 25.

мерный вариант Тауба — Мизнера [125]. Это цилиндр $R^1 \times S^1$ с метрикой

$$ds^2 = 2\,d\psi\,dt + t\,d\psi^2 \qquad (4.3)$$

в координатах t на R^1 и ψ на S^1 (рис. 25).

Метрика (4.3) не допускает причинное пространственно-временное слоение, и имеет место нарушение причинности. На рис. 25 изображены изотропные линии — образующие световых конусов (ими являются $\psi = \text{const}$ и $t = C\exp(-\psi/2)$). Видно, что линия $t = 0$ изотропна, а линии $t = \text{const} < 0$ — замкнутые времениподобные кривые.

Второй тип гравитационных сингулярностей соответствует полям, не допускающим регулярных $(3 + 1)$-разбиений и пространственно-временных слоений, т. е. поле временных направлений t_0, соответствующее данному гравитационному полю, в каких-то точках становится неопределенным. Причем, если какое-либо одно согласованное с g поле t_0 имеет особенности, то и всякое другое поле t_0', согласованное с тем же гравитационным полем g и получаемое из t_0 лоренцевскими поворотами, будет тоже иметь особенности в тех же самых точках. Тем самым они характеризуют сингулярности самого гравитационного поля.

В большинстве своем эти сингулярности представляют собой каустику (пример которой дан на рис. 26), когда линии поля (пунктирные линии) и ортогональные им поверхности начинают самопересекаться (точка A на рис. 26) и слоение

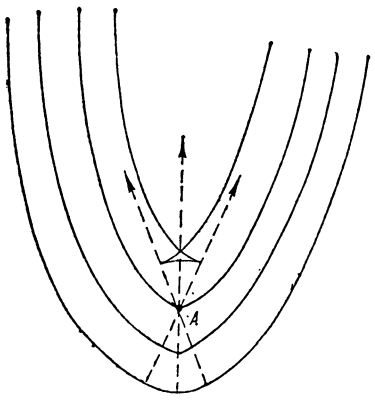


Рис. 26.

разрушается. Существуют хорошо разработанные общие методы описания и классификации каустик [5], которые начали применяться и в теории гравитации [141].

Частным случаем каустик являются изолированные особые точки поля t_0, пример которых изображен на рис. 22. Они описываются как критические точки функции времени f, т. е. точки, где $\partial_\mu f = 0$. В этих точках слоение сохраняется, но изменяется топология слоев. Причем можно показать, что перестройка слоев идет через так называемые невырожденные критические точки.

Таковыми считаются критические точки, в окрестности которых функция f выбором координат может быть приведена к каноническому виду

$$f(x) = \pm (x^0)^2 \pm \ldots \pm (x^3)^2.$$

Число минусов в этом выражении называется индексом критической точки, а функция f, имеющая только невырожденные критические точки,— функцией Морса.

Важно отметить, что количество и индексы критических точек функции Морса на многообразии связаны с его глобальной топологической структурой — эйлеровой характеристикой [124], что выражает упоминавшуюся выше связь гравитационных сингулярностей со свойствами пространства-времени в целом.

Не формулируя здесь определения эйлеровой характеристики, требующего привлечения многих понятий из топологии, рассмотрим для примера закрытую модель Фридмана с метрикой, задаваемой выражением (5.5) в главе 1 и пространственно-временным слоением, образованным трехмерными сферами радиуса $r = a(t)$. В случае пыли ($p = 0$) имеем решение

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \quad t = a_0(\eta - \sin\eta), \tag{4.4}$$

откуда находим функцию времени

$$t = a_0\left[\arccos\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) - \sqrt{1-(1-r/a_0)^2}\right].$$

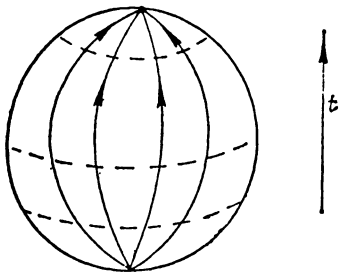


Рис. 27.

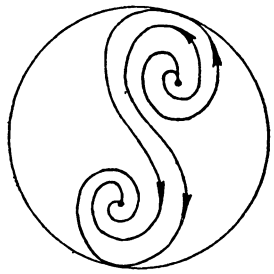


Рис. 28.

Она содержит две невырожденные критические точки $t = 0$, $r = 0$ (индекса 4) и $t = 2\pi a_0$, $r = 0$ (индекса 0), которые соответствуют сингулярностям $r = 0$ фридмановской космологии. Они имеют такой же вид, как на рис. 22, но только при $t = 0$ линии времени выходят из сингулярной точки.

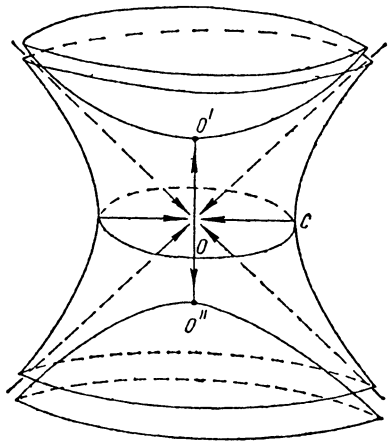


Рис. 29.

Отсюда, используя известные теоремы [124], можно восстановить топологию всего пространства-времени закрытой модели Фридмана, показав его эквивалентность 4-сфере. Ее двумерный аналог изображен на рис. 27, где сплошные линии — линии времени, а пунктирные — пространственные слои, сжимающиеся в критических точках в точку.

Используя только топологические свойства сферы (ее эйлерова характеристика равна 2), можно нарисовать неизотропный вариант фридмановских космологических сингулярностей (рис. 28).

Приведем еще трехмерный вариант топологического перехода через критическую точку индекса 1. В окрестности критической точки он имеет канонический вид перехода однополостного гиперболоида в двухполостный (рис. 29). Его можно представить как сжатие окружности C однополостного гиперболоида в точку 0 и затем раздувание ее в точки 0′ и 0″ двухполостного гиперболоида.

Существует удобный критерий, который позволяет выявить сингулярности слоений. Это — обращение в бесконеч-

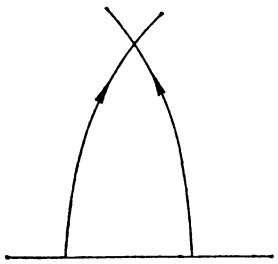


Рис. 30.

ность скаляра внешней кривизны (см. раздел 2.2) слоев пространственно-временного слоения.

Его величина K просто выражается через поле t_0

$$K = -\operatorname{div} t_0 - \tfrac{1}{2}\partial_0 \ln|g|,$$

а эволюция описывается непосредственно уравнением Райчаудхури (см. ниже), на решении которого основаны известные теоремы о сингулярностях Хокинга — Пенроуза.

Эти теоремы устанавливают, что, если тензор энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет сильному энергетическому условию (т. е. $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geqslant T/2$ для любого нормированного времениподобного вектора u^μ, выполняется определенное условие причинности и наложены еще некоторые требования), то решение уравнений Эйнштейна будет содержать сингулярность в смысле b-критерия.

Сильное энергетическое условие справедливо для тензора энергии-импульса большинства физически разумных материальных источников, например, для тензора энергии-импульса среды оно имеет вид $\varepsilon \geqslant 3p$. Поэтому из теорем Хокинга — Пенроуза и следует, что сингулярность должна иметь место чуть ли ни во всех физически значимых решениях уравнений Эйнштейна.

Доказательство этих теорем опирается на решение уравнения Райчаудхури, описывающего девиацию (расхождение) близких геодезических, которое при условии $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geqslant 0$ (где u^μ — направляющий вектор времениподобной геодезической) показывает существование сопряженных точек (пересечений) геодезических, ортогональных слоям причинного пространственно-временного слоения (рис. 30). Требование $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geqslant 0$ при подстановке его в уравнения Эйнштейна и приводит к сильному энергетическому условию.

Если в качестве геодезической взять линию векторного поля причинного пространственно-временного слоения, то уравнение Райчаудхури можно привести к виду уравнения непосредственно для скаляра внешней кривизны слоев этого слоения

$$\partial_s K = -R_{00} - K_{ab}K^{ab} + \frac{2}{3}K^2. \qquad (4.5)$$

Решая уравнение (4.5) при учете сильного энергетического условия, получаем, что K становится бесконечным при

конечном значении геодезического параметра s от точки, в которой $K \neq 0$, т. е. имеет место гравитационная сингулярность. Сравнивая рис. 30 и 26, можно заключить, что это сингулярность типа каустики.

Однако, если причинность пространства-времени нарушается, то в уравнении (4.5) появляются дополнительные члены, которые могут предотвратить сингулярность. Эту возможность демонстрирует, в частности, модель Тауба — Мизнера с метрикой (4.3), в которой, хотя $R_{00} = 0$, непричинные сингулярности отсутствуют.

Вместе с тем существуют способы, которые позволяют избавляться от гравитационных сингулярностей, не прибегая к таким нежелательным, с физической точки зрения, предположениям, как нарушение причинности. К таким способам относятся использование отрицательного космологического члена, переход к квадратичным по кривизне лагранжианам, учет геометрического поля кручения, когда появляющиеся добавочные члены в уравнениях Эйнштейна, будучи перенесенными в правую часть, могут нарушать ее энергодоминантность. Именно на учете таких добавочных членов основана современная так называемая инфляционная модель расширения Вселенной с дофридмановской де ситтеровской стадией, которую мы рассмотрим в следующем разделе.

5. СОВРЕМЕННАЯ КОСМОЛОГИЯ

Еще пять лет назад выражение «современная космология» для большинства гравитационистов в основном означало то же, что и в 30-е годы — фридмановскую космологию. Сейчас — это модель раздувающейся Вселенной с дофридмановской «инфляционной» стадией расширения, когда за 10^{-32} с размеры Вселенной увеличиваются в 10^{55} раз (рис. 31).

Фридмановская модель (см. разд. 1.5; 2.4) описывает однородную изотропную заполненную веществом (с тензором энергии-импульса, задаваемым выражением (4.11) из главы 1) Вселенную с метрикой Робертсона — Уокера — Фридмана

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2\right), \quad (5.1)$$

где $a(t)$ — неизвестная функция времени, а k — постоянная, значения которой равны 1 (закрытая модель), 0 и —1 (плоская и открытая модели). Пространственными сечениями $t = \text{const}$ модели являются трехмерные пространства постоянной кривизны: соответственно, сферы радиуса $a(t)$, плоские пространства и пространства Лобачевского.

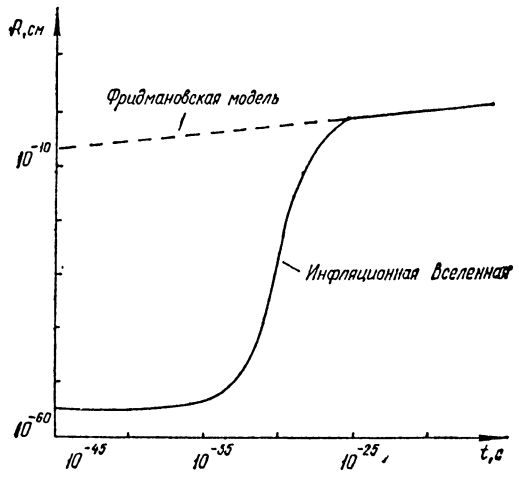


Рис. 31.

Уравнения Эйнштейна в модели Фридмана для метрики (5.1) имеют вид

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon a^2. \tag{5.2}$$

Они дополняются уравнением сохранения энергии

$$\frac{d}{da}(\varepsilon a^2) = -3pa^2 \tag{5.3}$$

и уравнением состояния $p = p(\varepsilon)$.

Общим свойством решения этих уравнений (пример его в случае закрытой модели и $p = 0$ дан выражением (4.4)) является то, что до тех пор, пока величина $\varepsilon = 3p$ остается положительной, ускорение $\ddot{a}$ отрицательно и, поскольку в настоящее время $\dot{a} > 0$ (так как мы наблюдаем красное, а не голубое космологическое смещение (см. ниже)), величина $a(t)$ обращается в 0 в некоторый конечный момент времени в прошлом, т. е. имеет место гравитационная сингулярность. Причем, если время отсчитывать от этой сингулярности, то t, рассматриваемое тогда как возраст Вселенной, должно быть не больше времени Хаббла $H_0^{-1} = a(t) / \dot{a}(t)$.

Сейчас общепризнано, что по крайней мере при $t > 1$ с Вселенная развивается по фридмановскому сценарию.

Метрика (5.1) была построена в предположении однородности и изотропности Вселенной. Современные наблюдения не дают пока оснований сомневаться в его правильности. Наибольшая по размерам обнаруженная до сих пор неоднородность — это так называемая «ячеистая» структура Все-

ленной — области без видимого вещества протяженностью порядка 100 Мпс (1 пс = 3,26 св. лет = 3,08 · 10^{18} см). Для сравнения отметим, что радиус наблюдаемой Вселенной (Метагалактики) примерно в 100 раз больше, а размер домена, которому принадлежит наша Метагалактика (согласно модели раздувающейся Вселенной), составляет примерно 10^{30} Мпс. Так что Вселенную с большой точностью можно считать однородной.

Изотропность Вселенной в основном оценивается по изотропии реликтового излучения (см. ниже). Различают мелко- и крупномасштабную по углу изотропии. Первую можно было бы считать порожденной неоднородностями первичной плазмы, которые, в свою очередь, могут быть связаны с образованием галактик. Вторая могла бы свидетельствовать об анизотропии и неоднородности Вселенной в целом в период, когда вещество и излучение находились в тепловом равновесии ($t \sim 10^5$ лет). Пока наблюдаемое реликтовое излучение оказывается в высшей степени изотропным ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$, где T — температура излучения [148a]).

В 1982 г. появилось, однако, сообщение П. Берча об открытии определенной поляризации излучения у целой группы радиоисточников, которое, по мнению автора, указывает на вращение Метагалактики с угловой скоростью 10^{-13} рад/год. Оно еще не получило полного признания, но, если такое вращение действительно существует, это говорило бы в пользу не модели Фридмана, а модели Геделя расширяющейся вращающейся Вселенной [52].

Помимо однородности и изотропности наблюдаемой Вселенной вид (5.1) описывающей ее метрики подтверждает обнаруженная линейная пропорциональность между величиной космологического красного смещения и расстоянием. Первые данные о систематическом красном смещении в спектрах галактик были получены в 20-х годах (В. Слайфер), а окончательно оно было признано в качестве космологического эффекта после установления в 1929 г. Э. Хабблом линейной зависимости его величины от расстояния.

Для описания космологического красного смещения вводятся постоянная Хаббла H_0 и параметр замедления q_0:

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad q_0 = -\ddot{a}(t)\frac{a(t)}{\dot{a}^2(t)},$$

параметр красного смещения $z = (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1$, где λ_0, λ_1 — длина волн света при испускании и детектировании; фотометрическое расстояние

$$d_\Phi = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2},$$

где L — абсолютная светимость источника, а l — видимая светимость. Тогда в метрике (5.1) фотометрическое расстояние и параметр красного смещения связаны следующим образом:

$$d_{\Phi} = H_0^{-1}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)\, z^2\right]. \qquad (5.4)$$

Подчеркнем, что в соотношение (5.4) входит именно фотометрическое расстояние d_{Φ}. Существуют и другие «расстояния» (паралактическое, по угловому диаметру, по собственному движению), отличающиеся способом определения и классом астрофизических объектов, которые служат для них реперными точками. Для расстояний до 10^9 св. лет все они совпадают, тогда как уверенное измерение больших расстояний составляет серьезную проблему.

Мы не будем останавливаться на всех сложностях измерения H_0 и q_0. Отметим только, что первоначально Э. Хаббл получил значение $H_0 \approx 500$ км/с · Мпс, что приводило к слишком короткому возрасту Вселенной $H_0^{-1} \approx 3{,}5$ млрд. лет, тогда как по геологическим данным уже возраст Земли составляет 4—5 млрд. лет. Современные оценки H колеблются между 50 и 100 км/с · Мпс, склоняясь по ряду дополнительных соображений к нижней границе, отодвигающей возраст Вселенной за рубеж 15 млрд. лет.

Интересную дополнительную информацию может дать подсчет распределения числа источников N с данным красным смещением z. Различные варианты фридмановской модели приводят к различным зависимостям $N(z)$, например $N \sim (1 + z)^3$. Однако какой-либо определенной закономерности пока не наблюдается (см. [148], с. 799). Заметен лишь довольно четкий максимум числа квазаров вблизи $z = 2$ (но для других источников этого максимума нет).

Примерно линейная зависимость величины космологического красного смещения от расстояния приводит, согласно формуле (5.4), к значению $q_0 \approx 1$. Учтем его в выражениях для плотности и давления вещества:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{a^2} + H_0^2\right); \quad p = -\frac{1}{8\pi G}\left[\frac{k}{a^2} + H_0^2(1 - 2q_0)\right],$$

получаемых из уравнений Эйнштейна.

Из первого выражения видно, что пространственная кривизна k/a^2 положительна или отрицательна в зависимости от того, больше или меньше ρ критической плотности

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}1 \cdot 10^{-29}\ \text{г/см}^3$$

при $H_0 = 75$ км/с · Мпс. Второе выражение, взятое при условии $p \ll \rho$ преобладания нерелятивистского вещества над излучением, тоже приводит к оценке

$$\frac{k}{a^2} = (2q_0 - 1) H_0^2.$$

Откуда получаем важное соотношение

$$\frac{\rho}{\rho_{кр}} = 2q_0.$$

При $q_0 > 1/2$ Вселенная замкнута и $\rho > \rho_{кр}$, при $q_0 < 1/2$ она открыта и $\rho < \rho_{кр}$.

Таким образом, при наблюдаемом значении $q_0 \approx 1$ мы должны бы иметь закрытую Вселенную и $\rho = 2\rho_{кр} \approx 2 \times 10^{-29}$ г/см^3. Дело, однако, в том, что такая плотность вещества (4 нуклона/м^3) не наблюдается. Здесь мы сталкиваемся с так называемой проблемой скрытой массы. Она состоит в следующем.

Массы галактик M могут быть оценены из динамического анализа зависимости их орбитальных скоростей от расстояния до центра галактики. Их принято выражать через отношение к абсолютной светимости M/L. При этом оказывается, что оно в десятки раз больше, чем аналогичное отношение для Солнца. Это дает основание полагать, что значительную часть вещества галактик мы не видим. Это проблема галактической скрытой массы.

Если оценить массу всех галактик и «размазать» ее по Вселенной, то можно подсчитать среднюю плотность галактического вещества во Вселенной $\rho_г \approx 10^{-30}$—10^{-31} г/см^3. Как видим, она на 1-2 порядка меньше критической и приводит к значениям $q_0 < 0{,}05$. Это проблема космологической скрытой массы. Попытки ее решить учетом межгалактического вещества, энергии электромагнитного излучения (его плотность на 2-3 порядка меньше $\rho_г$, что и позволяет положить $p = 0$ для современной Вселенной), космических лучей, гипотетических «черных дыр» и даже «черных галактик» не могут пока близко подвести ρ к значению $\rho_{кр}$.

Кардинальное решение могло бы дать наличие массы порядка десятка электрон-вольт у нейтрино [42], об открытии которой сообщил В. А. Любимов [72]. Однако этот результат пока еще не признан. Надежды связывают также с учетом различных гипотетических частиц — фотино, аксино и других, подсказываемых моделями Большого объединения и супергравитации.

В сегодняшней Вселенной преобладает вещество. Но было ли так всегда? Если учесть в уравнении (5.3) экстремальные

уравнения состояния для вещества (пыли) $p_в = 0$ и излучения $\varepsilon_и = 3p_и$, получим соответственно, что $\varepsilon_в \sim a^{-3}$, а $\varepsilon_и \sim a^{-4}$. Отсюда следует, что, поскольку во всех вариантах модели Фридмана в прошлом $a \to 0$, на некоторой начальной стадии излучение должно было преобладать над веществом. В частности, это означает, что во фридмановской модели вблизи особенности $a = 0$, например, замкнутая Вселенная должна описываться не решением (4.4) и его приближением $a \sim t^{2/3}$, а решением с $\varepsilon = 3p$, которое при малых t дает приближение $a \sim t^{1/2}$ (верное и в плоской, и в открытой Вселенных).

Гипотеза о том, что ранняя Вселенная могла быть заполнена излучением (модель «горячей» Вселенной) была выдвинута Дж. Гамовым в 1948 г. Одним из ее следствий является существование заполняющего все пространство излучения, температура которого $T_и$ убывает как a^{-1}. Причем различные оценки приводили к значениям $T \sim 5$ К. Гипотеза Дж. Гамова была блестяще подтверждена открытием А. Пензиаса и Р. Вильсона в 1965 г. фонового космического излучения на длине волны 7,35 см с $T = 3{,}5$ К. Подтверждено и другое предсказание модели горячей Вселенной: спектральное распределение плотности излучения в эру вещества должно совпадать со спектром «черного» тела. Оно действительно соответствует спектру излучения «черного» тела при $T = 2{,}7$ К [148а].

Сам термин «горячая» Вселенная произошел от того, что в такой Вселенной число фотонов, приходящихся на один нуклон, является величиной постоянной и составляет $\approx 10^{10}$ и в настоящее время. Однако вклад фотонов в общую плотность энергии незначителен, поскольку они испытывают красное смещение $z \sim a$.

Когда произошел переход от эры излучения к эре вещества? Предполагают, что это случилось в период $t \approx 10^5$ лет при $T \approx 4000$ К, когда свободные электроны были связаны в атомные оболочки, вещество стало прозрачным для излучения и контакт между веществом и излучением пропал. Считается, что последнее, претерпев с тех пор красное смещение $z \approx 1500$, и составляет современный реликтовый фон. Отметим, что отдельные виды вещества (типы частиц) могли выпадать из теплового равновесия гораздо раньше (например, нейтрино при $T < 10^{10}$ К).

Другим важным предсказанием модели «горячей» Вселенной является весовое содержание гелия во Вселенной (см. подробнее [86, 46]). Гелий во Вселенной имеет двойное происхождение. Он образуется при нуклеосинтезе в ранней Вселенной и в звездах. По ряду веских соображений гелий звезд-

ного происхождения может составить лишь 5—10 % всего содержания гелия во Вселенной. Остальной гелий должен иметь космологическую природу.

В модели «горячей» Вселенной синтез He^4 происходит при $T \approx 10^9$ К, $t \approx 200$ с, плотности нуклонов $\approx 10^{18}$ см$^{-3}$ и приводит к значениям весового содержания гелия ≈ 27 %, которое попадает в рамки существующих эмпирических оценок 20—30 %. Модель «холодной» Вселенной дает более высокое содержание гелия, что и побудило в свое время Дж. Гамова отказаться от нее.

Наряду с этими и другими успехами фридмановская модель сталкивается и с серьезными трудностями, особенно при описании первой секунды эволюции Вселенной [34, 70].

Проблема сингулярности. При $t = 0$ модель Фридмана приводит к сингулярности $a = 0$, $\varepsilon = \infty$ во всех своих вариантах. Как ее понимать? Фридмановская модель, как мы уже отмечали, дает удовлетворительное описание Вселенной при $t > 1$ с. Инфляционная модель позволяет распространить это описание на $t > 10^{-43}$ с, до которого Вселенная должна рассматриваться по крайней мере как сугубо квантовый объект. Поэтому наличие сингулярности $t = 0$ в классических космологических моделях само по себе не должно особенно смущать.

Проблема однородности и изотропии. Она имеет два аспекта: объяснение существующей мелкомасштабной неоднородности Вселенной (галактик и их скоплений) и ее крупномасштабной однородности и изотропии.

Если предположить, что Вселенная с самого начала была изотропна и однородна, то такой она и останется при эволюции. Однако в подобной Вселенной крайне мало рождалось бы частиц (см. разд. 3.5). В ней должны были быть затравочные неоднородности, эволюция которых могла бы привести к образованию галактик; не обязаны быть однородными причинно несвязанные области, т. е. отделенные друг от друга горизонтом. Эти и другие соображения дают основание считать, что ранняя Вселенная не была ни изотропной, ни однородной, и в теории гравитации рассматриваются анизотропные и неоднородные космологические модели. Проблема состоит в изотропизации такой ранней Вселенной.

Во-первых, оказалось, что множество начальных условий, при которых Вселенная при больших t переходит во Вселенную Фридмана, несравнимо меньше множества всех начальных условий [70]. Правда, изотропизации в микромасштабах способствуют эффекты рождения частиц в ранней Вселенной (см. разд. 3.5).

Во-вторых, хотя пока не существует какой-либо одной признанной схемы формирования галактик и их скоплений,

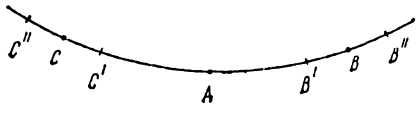


Рис. 32.

считается, что наиболее приемлемым спектром затравочных флуктуаций является так называемый плоский спектр, когда их амплитуда не зависит от их размеров и равняется примерно $\delta\rho/\rho \approx 10^{-4}$ [46]. Это очень жесткое начальное условие, которое никак нельзя отнести к естественным. Оно требует обоснования.

В-третьих, возникает проблема горизонта, которую мы поясним с помощью рис. 32. На нем схематически изображена область пространственной трехмерной сферы в некоторый момент космического времени t. Дуга $C''B''$ показывает область, причинно связанную с наблюдателем, находящимся в точке A, который регистрирует в данный момент t реликтовое излучение, испускаемое из точек C и B, находящихся на противоположных сторонах небесной сферы, во времена, когда Вселенная стала прозрачной. Дуги $C''C'$ и $B'B''$ обозначают области, причинно связанные в то время соответственно с точками C и B. Они не пересекаются, а значит, никакие процессы не могли уравнять физические условия в точках C и B, хотя реликтовое излучение из этих точек изотропно.

Проблема плоскостности. Из уравнения (5.2) нетрудно получить, что в неплоской модели Фридмана

$$\Omega = \frac{|\rho - \rho_{кр}|}{\rho_{кр}} = \dot{a}^{-2},$$

и можно подсчитать, что для того чтобы современные значения $q_0 = \rho/2\rho_{кр}$ попали в наблюдаемый интервал от 0,5 до 1,5, при $t = 1$ с должно выполняться $\Omega \approx 10^{-15}$, т. е. Вселенная должна была быть почти плоской. Это тоже не столь очевидное начальное условие, чтобы его можно было принять без добавочного обоснования.

На решение этих и других проблем в настоящее время претендует модель инфляционной (раздувающейся) Вселенной. Она имеет цель объяснить возникновение к моменту $t \approx 1$ с тех весьма специфических начальных условий, в которых нуждается фридмановская модель для описания наблюдаемой сейчас Вселенной.

Мы не будем здесь сколько-нибудь подробно излагать инфляционную модель ввиду ее сложности [70, 108, 108а], но постараемся дать о ней общее представление.

Впервые эта модель была предложена А. А. Старобинским [108]. Она основывалась на том, что при учете квантовых эффектов уравнения Эйнштейна в качестве самосогласованного решения (при плотностях энергии, близких к планковским)

допускают решение де Ситтера, когда Вселенная расширяется не как $t^{1/2}$, а экспоненциально, как $\exp t$. Решение это, однако, оказывается неустойчивым и при развитии этой неустойчивости может переходить в решение Фридмана «горячей» Вселенной.

Решение де Ситтера, полученное в 1917 г., было первым динамическим космологическим решением. В то время все считали Вселенную статической, и самим А. Эйнштейном была первоначально предложена статическая модель Вселенной. Для статической метрики (5.1) из уравнений Эйнштейна следует, однако, нефизический результат $\varepsilon = -3p = 3k/8\pi G a^2$, т. е. или ε, или p должны быть отрицательными. Поэтому, чтобы избежать его, Эйнштейн ввел в свои уравнения космологический член $-\Lambda g_{\alpha\beta}$. Будучи перенесенным в правую часть, он приводит к эффективному тензору энергии-импульса, в котором играет роль отрицательного давления

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

Тогда указанное выше условие переписывается для эффективных $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{p}$ и допускает физически разумное решение.

Модель де Ситтера тоже является решением уравнений Эйнштейна с космологическим членом для пустого ($\varepsilon = p = 0$) пространства, когда уравнение (5.2) принимает вид

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = H^2, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad \Lambda > 0.$$

Оно имеет решение

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2H}\left(e^{Ht} + ke^{-Ht}\right) & k = \pm 1; \\ a_0 e^{Ht}, & k = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

которое при $k = 1,0$ не содержит особенности при $t = 0$. Этим модель де Ситтера привлекательна, но радиус Вселенной a в ней экспоненциально растет при $t > 0$, что делает ее при больших t нереалистичной.

В модели Старобинского учет квантовых эффектов приводит к добавлению в уравнения Эйнштейна к тензору энергии-импульса классической материи T_μ^ν вакуумного среднего тензора энергии-импульса $\langle T_\mu^\nu \rangle$ квантовых материальных полей. Величина $\langle T_\mu^\nu \rangle$ находится вариацией добавочных квадратичных по кривизне членов, возникающих в эффективном лагранжиане гравитационного поля (см. разд. 3.5). В резуль-

тате уравнение (5.2) заменяется на уравнение

$$\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}=\frac{1}{H_0^2}\left(\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}\right)^2-\frac{1}{M^2}\left[2\frac{\dot{a}\dddot{a}}{a^2}-\frac{\ddot{a}^2}{a^2}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4-2k\frac{\dot{a}^2}{a^4}+\frac{k^2}{a^4}\right], \qquad (5.6)$$

где введены обозначения $H_0^2=360\pi\,(Gb)^{-1}$, $M^2=-360\pi\,(Gc)^{-1}$ и классический тензор энергии-импульса $T_\mu^\nu=0$. Подстановкой можно проверить, что уравнение (5.6) допускает решение де Ситтера (5.5) с $H=H_0$. Однако оно неустойчиво. Малое изотропное возмущение δ решения (5.5) растет как

$$\exp\left[\left(\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{M_0^2}{H_0^2}}-\frac{3}{2}\right)H_0t\right].$$

При этом, с одной стороны, для описания реальной Вселенной желательно, чтобы ее радиус за де ситтеровскую стадию t_s увеличился не менее чем в 10^{50} раз, т. е. $H_0t_s>70$. С другой стороны, за это же время, чтобы выйти на переходную стадию, начальные отклонения должны вырасти в $\delta^{-1}\sim 10^2$ раз. Это возможно, если де ситтеровская стадия будет продолжаться не более 10^{-32} с, что приводит к значениям $H_0^2G\approx$ $\approx 10^{20}$, $M^2G\approx 10^{-22}$.

В работе [108а] было доказано существование регулярного решения $a(t-t_s)$, переходящего с де ситтеровской стадии на стадию (случай $k=0$)

$$a(t)=a\,[M(t-t_s)]^{2/3}\left[1+\frac{2}{3M(t-t_s)}\sin M(t-t_1)\right],$$
$$t_1\sim t_s. \qquad (5.7)$$

Возникающая на этой стадии зависимость $a(t)$ совпадает при усреднении по $\Delta t\sim M^{-1}$ с зависимостью $a(t)\sim t^{2/3}$ в «холодной» фридмановской модели ранней Вселенной. Это было проинтерпретировано так, что при распаде стадии де Ситтера рождается некоторое количество тяжелых квазичастиц с массой M, которые были названы скаляронами.

В случае безмассовых квантовых полей скаляронная стадия (5.7) оказывается, однако, стабильной и сохраняется далее при всех t. Если же предположить, что квантовые поля имеют массу, это приводит к появлению добавочного члена ε_m в $\langle T_0^0\rangle$, учитывающего рождение массивных частиц в изотропной метрике, распаду скаляронов и замене закона расширения $t^{2/3}$ на $t^{1/2}$, т. е. к желаемому выходу на стадию «горячей» Вселенной [108а].

Другой сценарий экспоненциального расширения Вселенной [145] был предложен в 1980 г. А. Гутом, работы которого привлекли к этому направлению общее внимание. Он основывается на механизме спонтанного нарушения симметрии и фазовых переходов в калибровочных теориях в варианте скалярного хиггсовского поля σ (см. разд. 3.2) с потенциалом

$$V(\sigma) = -\frac{\mu^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{4}\sigma^4.$$

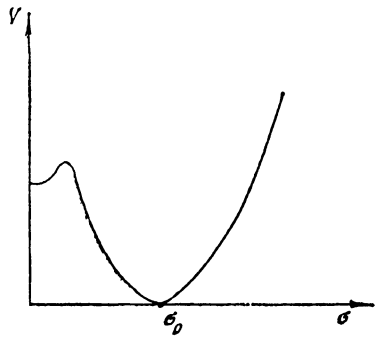


Рис. 33.

Для построения реальных моделей в потенциале $V(\sigma)$ необходимо учесть квантовые и температурные поправки. Так, в SU (5)-модели Большого объединения (см. разд. 3.2), используемой в сценариях раздувающейся Вселенной, потенциал $V(\sigma, T)$ принимает вид ($\mu = 0$) [70]

$$V(\sigma, T) = \frac{5}{8} g^2 T^2 \sigma^2 + \frac{25 g^4 \sigma^4}{128\pi^2}\left(\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} - \frac{1}{4}\right) + cT^4 + \frac{9m_x^4}{32\pi^2}, \quad (5.8)$$

где $g^2 \approx 0{,}3$ — константа взаимодействия; $m_x = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{g\sigma_0}{2}$ — масса калибровочного поля; c — некоторая постоянная порядка 10, и $\sigma_0 \approx 10^{15}$ Гэв.

Потенциал (5.8) написан при $T \gg \sigma_0$. При такой температуре единственным минимумом $V(\sigma, T)$ является точка $\sigma = 0$, т. е. нарушения симметрии, вызываемого полем σ, нет. Для $T \ll \sigma_0$ потенциал $V(\sigma, T)$ изображен на рис. 33.

Он сохраняет локальный минимум $\sigma = 0$, но имеет более глубокий глобальный минимум $\sigma = \sigma_0$. Это означает, что система с таким потенциалом имеет метастабильное состояние точной симметрии $\sigma = 0$, которое может сохраняться и при температурах, когда потенциал $V(\sigma, T)$ уже имеет более глубокий минимум σ_0, отвечающий фазе с нарушенной симметрией. Система оказывается как бы переохлажденной, и фазовый переход затягивается, происходя при более низкой температуре (для модели (5.8) при $T = 10^6$ Гэв, 1 Гэв $= 10^{13}$ К). При этом фазовый переход осуществляется, наглядно говоря, путем рождения и бурного роста пузырьков стабильной фазы внутри метастабильного состояния (роста мелкомасштабных флуктуаций поля σ до величины σ_0).

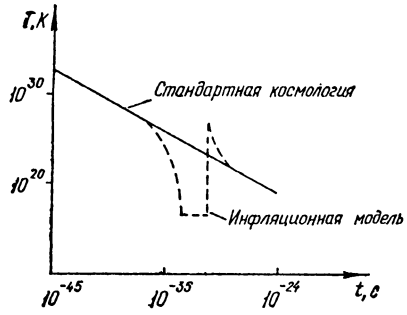


Рис. 34.

Указанная специфика фазового перехода в моделях Большого объединения при использовании такого хиггсовского поля σ в качестве материального источника в уравнениях Эйнштейна тоже приводит к инфляционному сценарию эволюции Вселенной. В этом сценарии она претерпевает следующие стадии [108а].

На первой стадии $T \gg 10^{15}$ Гэв, хиггсовское поле $\sigma = 0$, квантовые безмассовые поля описываются уравнением состояния $p = \frac{1}{3}\varepsilon$ и $a(t) \sim t^{1/2}$ ($k = 0$). Это стадия первичной фридмановской «горячей» Вселенной.

Вторая, де ситтеровская, стадия начинается при $T \sim 10^{15}$ Гэв, когда появляются малые флуктуации поля σ с $V(\sigma) \approx V(0)$. Внутри этого пузырька уравнения Эйнштейна принимают вид сначала

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\,(cT^4 + V(0)),\quad T \sim a^{-1},$$

с решением

$$a(t) \sim \sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2Ht},\quad H = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G V_0} \approx 10^{10}\ \text{Гэв},$$

а потом, при дальнейшем понижении температуры (до $T^4 \ll V(0)$),— уравнения модели де Ситтера ($k = 0$) с потенциалом $V(0)$ в качестве эффективного космологического члена. На этой стадии за время $\Delta t = 0{,}2T_{\text{кр}}^{-1} \approx 10^{-33}$ с поле σ дорастает до величины σ_0, осциллируя вокруг него. Эти осцилляции быстро затухают из-за процесса рождения скалярных и векторных бозонов, при котором вся первоначальная энергия $V(0)$ переходит в энергию этих частиц. Последние быстро термализуются, в результате чего Вселенная вновь нагревается до $T \approx 10^{15}$ Гэв (рис. 34). Далее эволюция вновь идет по сценарию фридмановской «горячей» Вселенной. При этом размеры пузырька увеличиваются до 10^{800} см, что гораздо больше размера 10^{28} см наблюдаемой Вселенной (рис. 35).

Изложенный здесь коротко сценарий раздувающейся Вселенной получил название «нового» сценария, в сравнении

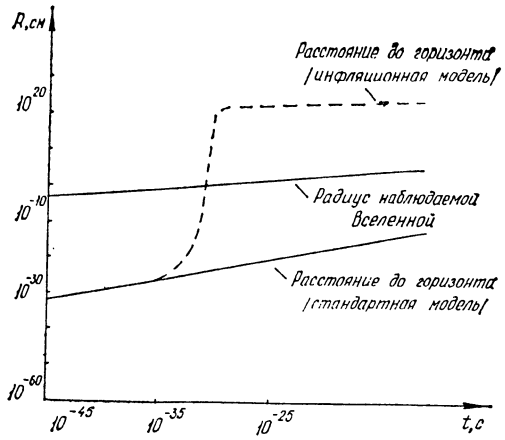


Рис. 35.

с первоначальной моделью Гута, но и он сейчас уже не самое последнее слово в этой области [70а].

Наличие инфляционной стадии в развитии Вселенной в целом позволяет решить те проблемы, с которыми столкнулась фридмановская космологическая модель.

Поскольку после расширения размеры пузырька достигают 10^{800} см, наша наблюдаемая Вселенная до раздувания помещалась внутри такого пузырька и имела размеры много меньше размеров горизонта 10^{-33} см, т. е. она в такой модели причинно связана и это дает возможность объяснить изотропность и однородность нашей Метагалактики. В то же время инфляционным сценарием предусматриваются неоднородности гораздо большего масштаба. Ведь Вселенная раздувалась не из одного, а из многих пузырьков, и в результате должна иметь что-то вроде доменной структуры с разными вакуумами и другими характеристиками доменов [34].

В раздувающейся Вселенной получается также желаемый плоский спектр неоднородностей [145].

Решается в ней и проблема плоскостности. После раздувания Вселенная выходит на фридмановскую стадию с таким большим радиусом, что становится почти абсолютно плоской и $\rho/\rho_{кр} = 1$ с очень высокой точностью.

Тем не менее разрешение этих и других проблем в модели раздувающейся Вселенной не является автоматическим следствием наличия инфляционной стадии. В частности, причинная связанность Метагалактики не означает еще ее однородности и изотропности. Получение нужной картины эволюции

Вселенной накладывает определенные условия на параметры используемых моделей элементарных частиц. Например, требования к амплитуде затравочных неоднородностей диктуют в рассмотренном сценарии с неравновесным фазовым переходом условие, чтобы коэффициент λ в выражении для потенциала (5.8) был меньше 10^{-12}. Тогда как в SU (5)-модели Большого объединения $\lambda \approx 1/2$. Тем самым реалистичность космологической модели становится важным фактором отбора моделей Большого объединения элементарных частиц. Это еще с одной стороны свидетельствует об актуальности поисков связи теории гравитации с теорией элементарных частиц.

Глава 3.
ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП И ТАБЛИЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Современное описание элементарных частиц основывается на применении теории групп для классификации элементарных частиц и теории калибровочных полей для описания их взаимодействия. Поэтому сначала мы коротко напомним основы теории групп (см. [28, 53, 96, 111]). Теория калибровочных полей будет изложена в следующем разделе.

Понятие группы входит в теорию поля и элементарных частиц через понятие симметрии. Если физическая система инвариантна относительно некоторой пары преобразований (т. е. эти преобразования — симметрии системы), то, очевидно, такие преобразования, выполненные одно за другим, тоже составляют инвариантное преобразование системы (т. е. произведение двух симметрий также является симметрией). Естественно ожидать, что обратное преобразование симметрии — тоже симметрия, а также в число симметрий можно включить тождественное преобразование системы, т. е. когда она вообще не преобразуется. Таким образом, множество всех симметрий физической системы образует группу.

Приведем теперь строгое определение группы. Группой называется множество (в физических приложениях множество преобразований, операторов), для элементов которого определена операция умножения, такая, что произведение любых двух элементов группы тоже является элементом группы и выполняются следующие условия: $(ab)\,c = a\,(bc)$ для всех элементов a, b, c группы; группа содержит единичный элемент (его часто обозначают просто как 1), такой, что $1 \cdot a = a \times 1 = a$ для всех элементов a группы; для каждого элемента a группы существует обратный ему элемент, обозначаемый a^{-1}, такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Группа называется коммутативной (абелевой), если произведение элементов группы не зависит от их порядка, т. е. $ab = ba$.

Если группа H содержится в некоторой большей группе G, то она называется подгруппой группы G.

Знание группы, которую образуют симметрии физической системы, является очень важной, а подчас — единственной достоверной информацией о физической системе, которая нередко оказывается для исследователя своего рода «черным ящиком». Тем не менее, исходя только из группы симметрии, можно предсказать структурные элементы, из которых состоит система, их характеристики и, используя аппарат калибровочных полей, смоделировать взаимодействие между ними. Впечатляющей демонстрацией такого успешного «группового» описания физической реальности и является современная теория элементарных частиц.

Перечислим основные типы групп, которые используются в теории поля и элементарных частиц. Это различные группы матриц. Напомним следующие обозначения для комплексных матриц $A = (a_i^j)$ с элементами a_i^j на пересечении i-строки и j-столбца:

$$A^{\mathrm{T}} = (a_i^{\mathrm{T}j} = a_j^i), \quad A^+ (a_i^{+j} = (a_j^i)^*).$$

Матрица A называется ортогональной, если $AA^{\mathrm{T}} = \hat{1}$; унитарной, если $AA^+ = \hat{1}$, где $\hat{1} = (\delta_i^j)$ — единичная матрица.

Множество всех $(n \times n)$-матриц с ненулевым детерминантом образует группу относительно операции умножения матриц. Если эти матрицы комплексные, группа обозначается $GL\ (n, C)$, если вещественные — $GL\ (n, R)$.

Подгруппа унитарных матриц группы $GL\ (n, C)$ называется унитарной группой и обозначается $U\ (n)$. В ней, в свою очередь, выделяют подгруппу $SU\ (n)$ унитарных матриц с $\det = 1$. Унитарные группы описывают так называемые внутренние симметрии полей и частиц, связанные с такими их характеристиками, как изоспин, гиперзаряд, «цвет» и др.

Подгруппы вещественных групп $GL\ (n, R)$ описывают пространственно-временные (или внешние) симметрии полей и частиц. Это группа ортогональных матриц $0\ (n)$, ее подгруппа $SO\ (n)$ матриц с $\det = 1$, псевдоортогональные группы $SO\ (n - k, k)$. Примером ортогональных групп является группа $SO\ (3)$ вращений трехмерного пространства, псевдоортогональных — группа Лоренца $SO\ (3, 1)$.

Приведенные матричные группы относятся к так называемым параметрическим группам, или группам Ли. Всякий элемент такой группы g характеризуется определенными значениями некоторого набора вещественных или комплексных параметров $g\ (\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$, а все множество элементов образует r-мерное многообразие, координатами на котором и являются параметры $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ (см. пример группы Лоренца в разд. 1.1).

С группами Ли, содержащими бесконечное число элементов, работать не всегда удобно. Однако в физических приложениях группы Ли, как правило, могут быть заменены алгебрами генераторов.

Генераторами группы Ли называются операторы

$$I_m = \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^m}\Big|\alpha^1, \ldots, \alpha^r = 0.$$

Они представляют собой касательные векторы к групповому пространству в точке $\alpha = 0$. Число генераторов группы совпадает с числом ее параметров. Они образуют так называемую алгебру Ли, что проявляется в том, что коммутатор двух генераторов выражается через сами генераторы:

$$[I_m, I_n] = c^k_{mn} I_k,$$

где c^k_{mn} — некоторые фиксированные числа, называемые структурными константами. Если группа абелева, ее генераторы между собой коммутируют и структурные константы равны нулю.

Таким образом, всякой группе Ли может быть поставлена в соответствие алгебра Ли ее генераторов. Обратно, всякой алгебре Ли может быть поставлена в соответствие группа Ли, имеющая эту алгебру алгеброй своих генераторов. Восстановить группу Ли по алгебре Ли можно с помощью экспоненциального отображения

$$g(\alpha^1, \ldots, \alpha^r) = \exp(\alpha^m I_m).$$

Приведенное соответствие между группами и алгебрами Ли позволяет в физических приложениях вместо групп Ли использовать алгебры их генераторов, проверяя, например, инвариантность той или иной физической величины φ не для бесконечного множества элементов группы $g(\alpha)(\varphi) = \varphi$, а для конечного числа ее генераторов $I_m\varphi = 0$.

Мы описали группы GL, SU, SO как группы матриц. Однако они могут быть определены как абстрактные группы, имеющие данные матричные представления, но которые для них не являются единственно возможными.

Представлением абстрактной группы называется изоморфное отображение ее в матричную группу линейных преобразований некоторого векторного пространства, которое называется пространством представления группы. Реализация групп $GL(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ соответствующими $(n \times n)$-матрицами и является примером представлений этих групп в n-мерных пространствах.

Для целей классификации частиц нас будут интересовать конечномерные представления. Такие представления для интересующих нас групп могут быть проклассифицированы.

Среди генераторов этих групп можно выделить набор взаимно коммутирующих генераторов H_i, $i = 1, \ldots, l < r$ и выбрать в качестве базиса пространства представления собственные векторы операторов H_i ($H_i e = m_i e$). Каждый такой вектор можно характеризовать набором $(m_1, \ldots, m_l)$ принимаемых на нем собственных значений m_i операторов H_i. Он называется весом вектора.

В физических приложениях операторы H_i имеют смысл операторов тех или иных физических величин — спина, изоспина, гиперзаряда и др., а их собственные числа m_i — квантовых значений этих величин, характеризующих данное физическое состояние (частицу), представляемое вектором $(m_1, \ldots, m_l)$.

Различные представления группы имеют разный спектр собственных значений m_i, принимаемых операторами H_i на векторах представления. Классификация представлений определяется тем, что существует l так называемых фундаментальных представлений группы, таких, что всякое представление получается их тензорным произведением.

Например, представления группы вращений SO (3) классифицируются по собственным значениям s генератора iI_{12} вращений в плоскости x — y, который интерпретируется как оператор проекции спина на ось z. Фундаментальное представление SO (3) реализуется матрицами Паули

$$iI_{23} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad iI_{31} = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$iI_{12} = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

на двумерном пространстве 2-спиноров $\psi_{1,2}$ со значениями $s = \pm 1/2$. Оно называется спинорным представлением и описывает нерелятивистские частицы со спином 1/2.

Релятивистские частицы со спином 1/2 описываются спинорным представлением группы Лоренца[17]. Оно характеризуется собственными значениями $\pm 1/2$ генераторов iL_{12} и iL_{03} группы Лоренца и реализуется операторами

$$L_{ab} = \frac{1}{2}\sigma_{ab} = \frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$$

[17] Фермионы допускают описание и посредством антисимметричных тензоров в рамках теории Иваненко — Ландау — Келера [150б]. В частности, оно предпочтительнее для фермионов на решеточных пространствах, рассматриваемых в квантовой хромодинамике на решетках.

на пространстве дираковских 4-спиноров $\psi_{1,2,\dot{1},\dot{2}}$. Здесь γ_a — матрицы Дирака, выражаемые через матрицы Паули (12.1)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1;\ 2;\ 3,$$

и удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}.$$

Несколько слов скажем теперь о представлениях групп U (1), SU (2), SU (3).

Однопараметрическая группа U (1) реализуется как группа умножений на комплексные числа $\exp(i\alpha)$.

Группа SU (2) имеет ту же алгебру генераторов, что и группа SO (3), хотя сами группы различны. Поэтому группа SU (2) имеет те же представления алгебры генераторов, что и SO (3), в частности, представление матрицами Паули (1.1). Однако величине s придается другой смысл, не спина, а внутренней характеристики, например изоспина.

Группа SU (3) имеет 8 генераторов, а ее конечномерные представления характеризуются двумя квантовыми числами — собственными значениями операторов $I_3 = 1/2\Lambda_3$ и $Y = 1/3\Lambda_8$. Группа SU (3) имеет два фундаментальных представления. Они реализуются на трехмерных пространствах так называемых унитарных спиноров (3 × 3)-матрицами Гелл — Манна $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_8$, которые мы здесь не будем выписывать. Физический смысл этих представлений будет пояснен чуть позже.

Сделав необходимое математическое введение, перейдем теперь к краткому обзору современной таблицы элементарных частиц (см. подробнее [82, 119]).

Как уже отмечалось, современная классификация элементарных частиц основана на групповом принципе и имеет своей физической базой симметрии взаимодействий, в которых частицы участвуют. Сейчас известны четыре типа их взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое (атенонное) и сильное. Дифференциация элементарных частиц связывается с их участием в слабом и сильном взаимодействиях.

Элементарные частицы делятся на два больших класса: лептоны, не участвующие в сильном взаимодействии, и адроны.

В настоящее время известно 6 лептонов (и их античастиц): электрон e^- (позитрон e^+), мюон μ^-, тяжелый лептон τ^-, электронное ν_e и мюонное ν_μ нейтрино, и есть все основания допустить существование τ-нейтрино ν_τ.

Групповая классификация лептонов на первый взгляд кажется простой. Лептоны разбиваются на пары

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}.$$

Каждая пара характеризуется своим отдельно сохраняющимся лептонным зарядом $L_{e,\,\mu,\,\tau}$ со значением $+1$ (-1 для античастиц) и описывается фундаментальным представлением (1.1) группы симметрий слабого взаимодействия SU (2), т. е. лептонам e^-, μ^-, τ^- приписываются значения «лептоспина» $-1/2$, а нейтрино $\nu_{e,\,\mu,\,\tau}$ — «лептоспина» $+\,1/2$.

Однако в каждой паре оказываются объединенными довольно разнородные частицы: массивная (e, μ, τ) и безмассовая — нейтрино ν, которые, например, описываются разными спинорными полями: массивная частица — четырехкомпонентным дираковским спинором, а нейтрино — двухкомпонентным спинорным полем с отрицательной спиральностью (т. е. со спином, направленным противоположно импульсу частицы). Правоспиральных нейтрино пока не обнаружено. Поэтому, например, в ставшей на сегодняшний день общепризнанной модели слабых и электромагнитных взаимодействий Вейнберга — Салама (см. разд. 3.2) каждую пару лептонов рассматривают на самом деле как триплет, состоящий из SU (2)-дублета левого нейтрино, левого массивного лептона и SU (2)-синглета правого массивного лептона с нулевым значением «лептоспина». Правда, картина может измениться, если окажется, что у нейтрино все же есть масса.

В последние годы активно проводятся эксперименты по обнаружению массы у нейтрино. Они были стимулированы опубликованными В. А. Любимовым с сотрудниками результатами измерения спектра электронов при бета-распаде трития, согласно которым электронное нейтрино должно иметь массу порядка одного-двух десятков электрон-вольт (напомним, что масса электрона примерно полмиллиона электрон-вольт) [72]. Подтверждением наличия массы у нейтрино было бы открытие также нейтринных осцилляций, поиском которых сейчас занят целый ряд лабораторий. Возможность этого эффекта была предсказана Б. М. Понтекорво [8], предположившим, что электронное и мюонное нейтрино могут не иметь определенных масс, а являются суперпозициями двух других состояний с определенными и различными массами. Можно показать, что такие смешанные состояния будут осциллировать и в первоначально чистом пучке ν_μ постепенно появится примесь ν_e. Достоверных подтверждений существования таких осцилляций, однако, пока не получено.

Гораздо более богатый спектр, чем лептоны, демонстрируют адроны. Они характеризуются барионным зарядом B, изоспином I, «странностью» S, «очарованием» c и «красотой» b. Вместо «странности» S часто используют другое число — гиперзаряд $Y = B + S + c - b$, через который, в частности, удобно выражается величина электрического заряда элементарных частиц $Q = I + \frac{1}{2}Y$. Адроны подразделяются на мезоны ($B = 0$) и барионы ($B \neq 0$).

Групповая классификация адронов развивается по линии применения унитарных групп $SU(n)$ со все возрастающим n, хотя на ранних этапах (а теперь вновь в ряде моделей) сбсуждались и другие типы групп.

Начало групповой классификации адронов положила в 30-е годы идея В. Гейзенберга относительно того, что нейтрон и протон (единственные известные тогда адроны, очень близкие по массе) надо рассматривать как два состояния одной и той же частицы — нуклона. Теория, предложенная В. Гейзенбергом, формально очень напоминала теорию спина электрона, построенную В. Паули, однако физической величиной, различные значения которой характеризуют разные состояния нуклона, являлся уже не спин, а изоспин (протон и нейтрон — два «изотопа» нуклона). В этой теории нуклон представляется как изотопический дублет, реализующий фундаментальное представление (1.1) группы $SU(2)$ с двумя базисными состояниями: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ — протон, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ — нейтрон, имеющими собственные значения $+1/2$ и $-1/2$ оператора изоспина $I = \frac{1}{2}\tau_3$ ($\tau_3 = \sigma_3$ — матрица Паули, но чтобы отличать операторы спина и изоспина, для них практикуют различные обозначения).

Группа изоспина $SU(2)$ была первой группой, описывавшей так называемые внутренние характеристики элементарных частиц, не связанные с пространственно-временными преобразованиями. Однако по мере открытия новых частиц ее оказалось недостаточно.

В начале 60-х годов для описания мультиплетов барионов и мезонов М. Гелл-Манном и Ю. Нееманом была предложена группа $SU(3)$. Она выдержала конкуренцию других групп (G_2, $Sp(2)$) и после открытия предсказанного на ее основе Ω-гиперона в 1964 г. была признана как группа симметрий адронов. На ее базе родилась гипотеза кварков.

Применение группы $SU(3)$ для описания внутренних симметрий элементарных частиц основывается на интерпретации I как оператора изоспина, а Y — как оператора гиперзаряда

Таблица 4

Кварк	Спин	I	S	c	b	Q	B
u^α	1/2	1/2	0	0	0	2/3	1/3
d^α	1/2	—1/2	0	0	0	—1/3	1/3
s^α	1/2	0	—1	0	0	—1/3	1/3
c^α	1/2	0	0	1	0	2/3	1/3
b^α	1/2	0	0	0	1	—1/3	1/3

частиц. В такой интерпретации весовые векторы, составляющие базис представления группы SU (3), обозначаемого M^8 (1, 1), оказываются сопоставимыми с октетом барионов (p, n, Ξ^+, Ξ^-, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Λ).

Представление M^8 (1,1) группы SU (3) может быть получено из тензорного произведения трех фундаментальных представлений M^3 (1, 0) (подобно тензорному произведению тензоров (2.4)) в главе 1). На этом основании М. Гелл-Манном и Дж. Цвейгом была выдвинута гипотеза, что каждый барион состоит из трех более «простых» субчастиц — кварков, триплет u, d, s которых описывается представлением M^3 (1, 0) группы SU (3). Например, $p = uud$.

Представление M^8(1,1) может быть также получено из тензорного произведения представления кварков M^3 (1, 0) и представления антикварков M^3 (0, 1). В этом случае оно описывает октет псевдоскалярных мезонов (K^+, K^0, $\bar{K}^0$, K^-, π^+, π^0,π^-, η), т. е. мезоны оказываются состоящими из пар кварк—антикварк. Например, $K^+ = u\bar{s}$. В результате их барионное число и спин, в отличие от барионов, равны нулю.

Представления группы SU (3) описывают и другие мультиплеты частиц: барионный декуплет $3/2^+$ (M^{10} (3, 0)), мезонный октет 2^+, нонет 1^+ и другие (здесь цифра обозначает спин, а знак $+$ — четность). Однако с открытием частиц с новыми числами — «очарованием», «красотой» — симметрий SU (3) тоже оказалось недостаточно для классификации элементарных частиц.

На современном этапе считается, что все многообразие наблюдаемых адронов возникает за счет различных сочетаний u-, d-, s-, c-, b-кварков и антикварков. Их характеристики представлены в табл. 4. Открыт и шестой t-кварк.

С индексом α в табл. 4 у каждого типа кварков связана особая характеристика — «цвет». Индекс α принимает значения 1, 2, 3 (условно красный, желтый, голубой), т. е. кварк каждого типа представляет собой цветной триплет, описывае-

мый фундаментальным представлением «цветной» группы $SU(3)_{col}$.

Чтобы отличать от «цвета», характеристики частиц — изоспин, странность, «очарование», «красота» — получили название «ароматов».

Необходимость введения «цвета» вытекает из требования антисимметрии волновой функции системы кварков, образующих барионы (кварки как частицы со спином 1/2 должны подчиняться принципу Паули). Между тем имеются барионы, составленные из трех одинаковых кварков с одинаковой ориентацией спинов: Δ^{++} ($u\uparrow$, $u\uparrow$, $u\uparrow$), Ω^- ($s\uparrow$, $s\uparrow$, $s\uparrow$), которые явно симметричны относительно перестановки кварков, если последние не обладают дополнительной степенью свободы. Такой степенью свободы и является, как предполагают, «цвет». Важно отметить, что ни мезоны, ни барионы не несут цветовых индексов и являются, как говорят, бесцветными.

Первоначально при построении кварковой модели кварки рассматривались как гипотетические структурные элементы, позволяющие удобно описывать адроны. В конце 60-х — начале 70-х годов были проведены эксперименты, которые позволили говорить о кварках как о реальных образованиях внутри адронов. Первыми из них были эксперименты по рассеянию электронов, а затем и нейтрино на нуклонах. Из них следовало, что заряд составных частей нуклона дробный и кратный 1/3 (в соответствии с ожиданием). Изучение процесса рождения адронов при аннигиляции электрона и позитрона, который предположительно идет через рождение пары кварк — антикварк, указало на наличие двух групп рождавшихся адронов («струй»), генетически связываемых с каждым из образующихся кварков. Это дало возможность определить спин кварков, который оказался равным 1/2. Общее число рожденных в этом процессе адронов свидетельствует также о том, что в промежуточном состоянии возникают кварки трех разновидностей, т. е. кварки трехцветны.

В современной классификации элементарных частиц остается много вопросов. Неизвестно, каково полное число лептонов и кварков. Неясны причины деления частиц на две группы — лептоны и кварки. Почему кварки не наблюдаются в свободном состоянии? Неизвестно происхождение внутренних квантовых чисел лептонов и кварков — «ароматов», «цвета». Имеются и другие проблемы. Решения их ищут на путях построения моделей так называемого Большого объединения, суть которого состоит в поиске общей группы, охватывающей кварки и лептоны, и в едином описании на базе ее калибровочной теории электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий.

2. ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОГРАММА БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

Долгое время групповая классификация элементарных частиц не затрагивала динамики их взаимодействия. Положение кардинально изменилось с появлением теории калибровочных полей, согласно которой взаимодействие частиц происходит посредством калибровочных полей, отвечающих группе симметрий этого взаимодействия. В этом разделе мы рассмотрим калибровочную теорию только внутренних симметрий.

Основу теории калибровочных полей в том виде, в котором она была первоначально сформулирована, составляет принцип локальной инвариантности (калибровочный принцип). В предыдущем разделе мы приводили примеры групп внутренних симметрий, используемых при построении моделей теории поля и элементарных частиц. До недавнего времени операторы g этих симметрий, действующие на полевые функции $\varphi^a(x)$, считались независящими от точки

$$g : \varphi^a(x) \to g^a_b \varphi^b(x). \tag{2.1}$$

Соответственно лагранжианы полевых моделей строились инвариантными относительно этих преобразований.

Согласно калибровочному принципу, преобразование симметрии нужно рассматривать зависящим от точки

$$g(x) : \varphi^a(x) \to g^a_b(x)\, \varphi^b(x), \tag{2.2}$$

и лагранжиан полевых моделей должен быть инвариантным относительно таких локальных преобразований. Казалось бы, требование перехода от глобальных (как их стали называть) преобразований симметрий (2.1) к локальным (2.2) весьма формально, но оно привело к очень важным физическим следствиям.

Впервые калибровочный принцип фактически применил Г. Вейль в 1918 г. в своей единой теории гравитации и электромагнетизма (см. в [83]), который (по аналогии с введением гравитационного поля для обеспечения общековариантности теории) связал введение электромагнитного поля с обеспечением инвариантности относительно локальных масштабных преобразований (умножений на действительное число). Однако реально теория Вейля привела к описанию не электромагнетизма, а к конформной теории гравитации и геометрии Вейля (см. разд. 3.4). Подход Вейля был впоследствии применен к электромагнетизму, но с заменой группы масштабных преобразований на группу фазовых преобразований $U(1)$ (Паули, 1941).

Пусть $\varphi(x)$ — волновая функция некоторого классического поля, лагранжиан которого инвариантен относительно группы $U(1)$ фазовых преобразований

$$g: \varphi(x) \to \exp(i\alpha)\varphi(x).$$

Предположим теперь, что параметр этих преобразований α является некоторой функцией точки x, т. е. рассмотрим локальные фазовые преобразования

$$g(x): \varphi(x) \to \exp(i\alpha(x))\varphi(x). \tag{2.3}$$

Лагранжиан L поля φ в общем случае уже не будет инвариантен относительно таких преобразований, поскольку оператор $g(x)$, в отличие от оператора глобальных преобразований g, не коммутирует с операторами частных производных ∂_μ:

$$\partial_\mu g(x) = g(x)\partial_\mu + \partial_\mu(g(x)).$$

Инвариантность L по $g(x)$ может быть обеспечена путем введения дополнительного векторного поля A_μ интерпретируемого как электромагнитный потенциал, с законом локальных преобразований

$$g(x): A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \tag{2.4}$$

и путем замены в L операторов частных производных ∂_μ на обобщенные

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \tag{2.5}$$

Включение поля A в состав обобщенной производной (2.5) позволяет компенсировать член вида $\partial_\mu(g(x))$, возникающий при локальных преобразованиях поля под знаком производных. В результате лагранжиан уже будет инвариантен относительно преобразований (2.3), (2.4), которые представляют собой известные калибровочные преобразования электродинамики.

Для электродинамики такой способ введения электромагнитного поля, однако, ничего существенно нового не давал, и ему не придали особого значения.

Решающий шаг в становлении калибровочной теории сделали Ч. Янг и Р. Миллс в своей статье 1954 г. (см. в [131]). Они анализировали инвариантность взаимодействия нуклонов относительно вращений изоспина, которая приводит к закону сохранения изоспина и означает, что ориентация изоспина не имеет абсолютного физического смысла и может быть произвольной. Однако, если исходить из обычной (глобальной) симметрии, этот произвол ограничен тем, что, когда ориентация изоспина задана в одной точке пространства, свобода выбора ее в других точках сразу пропадает. Но такое положе-

ние несовместимо хотя бы с основными принципами релятивизма. Это побудило Ч. Янга и Р. Миллса рассмотреть независимые вращения изоспина во всех точках пространства-времени и потребовать инвариантность теории относительно таких вращений.

Аналогичные рассуждения применимы к любым внутренним симметриям, и уже в работе Р. Утиямы 1956 г. (см. в [131]) была изложена общая схема калибровочной теории для групп внутренних симметрий.

Она состоит в следующем [54, 61]. Пусть $\{\varphi^a(x)\}$ — мультиплет классических полей с группой G внутренних симметрий, L_0 — обычный G-инвариантный лагранжиан свободных полей $\varphi^a(x)$. Применяя калибровочный принцип, потребуем, чтобы лагранжиан этих полей был инвариантен относительно локальных преобразований симметрий, параметры которых зависят от точки x. Эти преобразования образуют группу $G(X)$, которая называется локальной, или калибровочной группой.

Далее делается следующее.

1. Помимо полей φ (они получили название материальных полей) вводятся еще новые поля $A_\mu^m(x)$ (где μ — координатный индекс, а m — индекс генераторов группы G), которые имеют следующий закон локальных преобразований (удобно ограничиться инфинитезимальными преобразованиями $g(x) = 1 + \alpha^n(x) I_n$):

$$\alpha^n(x) I_n : A_\mu^m(x) \to c_{nk}^m A_\mu^k(x) + \partial_\mu \alpha^m(x), \tag{2.6}$$

где c_{nk}^m — структурные константы алгебры генераторов группы G. В случае абелевой группы структурные константы равны нулю, и преобразование (2.6) в точности совпадает с калибровочным преобразованием электромагнитного потенциала (2.4). Это и позволяет рассматривать преобразование (2.6) как обобщение калибровочного преобразования (2.4) в электродинамике (группа симметрий $U(1)$) на неабелевы симметрии. На них был перенесен термин калибровочные преобразования, а поля $A_\mu^m(x)$ стали называть калибровочными.

2. В лагранжиане $L_0(\varphi; \varphi_{,\mu})$ свободных полей φ операторы частных производных ∂_μ заменяются на обобщенные производные

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu^m I_m. \tag{2.7}$$

Включение полей A_μ^m в состав обобщенной производной, как и в случае электромагнетизма (и гравитации (см. разд. 1.3)), преследует цель компенсировать члены вида $\partial_\mu(g(x))$, возникающие при локальных преобразованиях полей под знаком

производных. В результате лагранжиан $L_\varphi(\varphi, D_\mu\varphi)$, получаемый из $L(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ заменой $\partial_\mu \to D_\mu$, оказывается, как этого требует калибровочный принцип, инвариантным относительно локальных преобразований симметрий. Указанная роль калибровочных полей дает основание назвать эти поля, как и производные D_μ, компенсирующими. В ряде работ это название применяется.

Нетрудно видеть, что приведенный компенсационный подход к построению калибровочной теории полностью аналогичен построению электродинамики из условия инвариантности относительно локальных фазовых преобразований. Калибровочная теория и создавалась ее авторами именно как обобщение электродинамики на неабелевы симметрии, так, чтобы в частном случае $G = U$ (1) она ее полностью воспроизводила.

3. Чтобы получить полный лагранжиан системы полей $\{\varphi, A\}$, к лагранжиану материальных полей L_φ добавляют лагранжиан калибровочных полей L_A. По аналогии с лагранжианом электромагнитного поля (выражение (4.2) в главе 1) его выбирают в виде

$$L_A = -\frac{1}{g^2} F^m_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_m, \tag{2.8}$$

где анологом напряженности электромагнитного поля является величина

$$F^m_{\mu\nu} = A^m_{\nu,\mu} - A^m_{\mu,\nu} - c^m_{nk} A^n_\mu A^k_\nu, \tag{2.9}$$

называемая напряженностью калибровочного поля.

Вариация полного лагранжиана системы

$$L = L_\varphi(\varphi;\ \varphi_{;\mu}) + L_A \tag{2.10}$$

по материальным полям φ^a и калибровочным потенциалам A^m_μ дает следующие уравнения поля:

$$D_\mu \frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi^a_{;\mu}} - \frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi^a} \Big| \varphi^a_{\varphi\mu} = \text{const} = 0; \tag{2.11}$$

$$D_\nu F^{\mu\nu}_m = g^2 J^\mu_{\varphi m}, \tag{2.12}$$

где

$$J^\mu_{\varphi m} = \frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi^a_{,\mu}} I^a_{mb} \varphi^b \tag{2.13}$$

— ток симметрии поля φ, отвечающий генератору группы симметрий I_m (см. разд. 2.3). В электродинамике это просто ток.

Лагранжиан (2.10) и уравнения поля (2.11), (2.12) имеют вид лагранжиана и уравнений материальных полей φ^a, взаимодействующих посредством потенциалов взаимодействия —

калибровочных полей A_μ^m, источником которых, согласно уравнению (2.12), являются токи симметрий самих материальных полей.

Эта картина подобна той, которая имеет место в электродинамике, когда заряженные частицы взаимодействуют посредством порождаемого ими электромагнитного поля (в квантовом варианте — обмена фотонами). Отличие состоит только в том, что фотоны между собой не взаимодействуют, а калибровочные поля взаимодействуют, поскольку из-за наличия в выражении (2.9) для напряженности калибровочного поля членов $\sim A^2$ лагранжиан (2.8) калибровочного поля содержит члены взаимодействия типа A^4 и $A^2\partial_\mu A$. Это существенно усложняет картину взаимодействия посредством неабелевых калибровочных полей, но и открывает возможность новых, не имеющих электромагнитных аналогов, эффектов.

Таким образом, простое требование перехода к инвариантности относительно локальных преобразований симметрий, как видим, оказалось универсальным средством построения потенциалов взаимодействия в системах с самыми различными симметриями. Это и обусловило чрезвычайно широкое применение методов калибровочной теории в современной теории поля и элементарных частиц.

С другой стороны, было замечено, что обобщенная производная (2.7) по своей структуре напоминает ковариантную производную в теории гравитации, а в теории Вейля она прямо трактовалась как ковариантная производная в геометрии, в которой роль связности, как ошибочно полагал Г. Вейль, исполнял электромагнитный потенциал A_μ. В такой интерпретации лагранжиан (2.10) и уравнение (2.11) выглядят, как описывающие свободные материальные поля φ^a в геометрии с ковариантными производными D_μ (за ними закрепилось это название) и связностями $A_\mu^m l_m$. Однако эти связности (операторы l_m) действуют не на пространственно-временные векторы и тензоры, а на векторы пространств внутренних характеристик полей и частиц. Поэтому определяемая калибровочными полями A_μ^m геометрия является геометрией не пространства-времени, а более общего расслоенного пространства.

Не рассматривая детали формулировки калибровочной теории на языке расслоенных пространств (см. [36, 54, 61, 138]), прибегнем к аналогиям с касательным расслоением и геометрией пространства-времени, знакомым по теории гравитации (см. разд. 1.2).

Расслоенное пространство обобщает конструкцию касательного расслоения, заменяя касательное пространство в каж-

дой точке пространства-времени на произвольное векторное пространство V. Например, это может быть пространство лептонной пары (e, ν_e) (рис. 36).

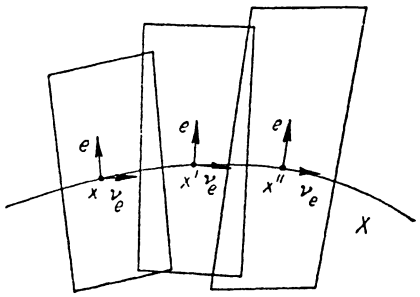


Рис. 36.

Для расслоенного пространства имеют место те же конструкции, которые мы перечисляли и для касательного расслоения. Пространство V в точке x называется слоем V_x над точкой x, а многообразие X — базой расслоенного пространства. Сечения расслоенного пространства представляют собой дифференцируемые отображения базы X в расслоенное пространство, сопоставляющие всякой точке x из X вектор из слоя V_x. Атлас расслоенного пространства $\Psi = \{(U_\iota, \psi_\iota)\}$ состоит из покрытия многообразия X областями U_ι и отображений $\psi_\iota(x)$ слоя V_x в типичный слой V. Причем функции перехода $\rho_{\iota\varkappa} = \psi_\iota \psi_\varkappa^{-1}$ между картами атласа Ψ представляют собой элементы локальной группы $G(X)$, где G — группа преобразований пространства V. Группа G называется структурной группой расслоенного пространства.

Расслоенное пространство полностью определяется заданием типичного слоя V, структурной группы G, базы X и атласа Ψ, а вся совокупность этих объектов называется векторным дифференцируемым расслоением $\lambda = (V, G, X, \Psi)$. Два атласа, Ψ и Ψ', определяют одно и то же расслоение, если они эквивалентны, т. е. могут быть заданы функции перехода между картами одного и другого атласов.

Связность на расслоенном пространстве определяется аналогично тому, как это делается для касательного расслоения. Она описывает параллельный перенос, но уже не касательных векторов, а векторов слоя V вдоль некоторого пути в базе X. В дифференциальной форме этот перенос задается оператором ковариантной производной $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu^m I_m$, где I_m — генераторы группы G, а функции A_μ^m называются коэффициентами связности. При изменении атласа расслоения коэффициенты A_μ^m преобразуются точно так, как калибровочные поля при локальных преобразованиях.

Теория калибровочных полей, можно сказать, открыла для физиков расслоенные пространства. И оказалось, что аппарат расслоений дает наиболее корректную математическую формулировку теории классических (неквантовых) полей.

Таблица 5

Терминология теории	
калибровочной	расслоений
Классические поля	Сечения векторных расслоений
Пространство-время	База расслоения
Группа симметрий	Структурная группа расслоения
Калибровочные преобразования	Преобразования атласа расслоения
Калибровочный принцип	Принцип относительности
Калибровочные поля	Коэффициенты связности
Напряженность калибровочного поля	Кривизна связности

При этом сама калибровочная теория возникает в такой формулировке естественно и с необходимостью.

Пусть $\{\varphi^a(x)\}$ — некоторый мультиплет классических полей на пространстве-времени X со значениями в векторном пространстве V с группой внутренних симметрий G. В терминах расслоений материальные поля $\varphi(x)$ формализуются как сечения расслоения $\lambda = (V, G, X, \Psi)$ с базой X, типичным слоем V и структурной группой G. Атлас расслоения Ψ и атлас Ψ_X многообразия фиксируют систему отсчета и систему координат, а их преобразования индуцируют соответственно калибровочные (из группы $G(X)$) и координатные преобразования полевых функций.

Поскольку преобразование атласа Ψ представляет собой преобразование эквивалентности расслоения λ, требование инвариантности системы полей φ относительно таких преобразований представляется вполне естественным. Тем самым описание полей в формализме расслоений ведет непосредственно к калибровочной теории, а принцип локальной инвариантности выступает как своего рода принцип относительности.

Также естественно в таком описании возникают и калибровочные поля. Они отождествляются с коэффициентами A_μ^m некоторой связности на расслоении λ. Тензором кривизны связности A является тензор напряженности калибровочных полей (2.9).

Таким образом, калибровочная теория может строиться не из принципа локальной инвариантности, а в рамках общего описания классических полей в терминах расслоений. Соответствие терминов теории калибровочных полей и теории расслоений представлено в табл. 5.

Что дает применение расслоений в калибровочной теории и теории поля вообще?

1. Использование расслоений позволяет существенно уточнить и математически корректно определить целый ряд понятий калибровочной теории, в том числе такие основополагаю-

щие, как само калибровочное преобразование. В действительности, как отмечалось в разделе 2.1, существуют два рода калибровочных преобразований, которые в традиционной компенсационной формулировке калибровочной теории, как правило, отождествляются, но хорошо различаются на языке расслоений [54]. Поэтому компенсационная схема калибровочной теории не всегда оказывается эффективной, и в общем случае надо использовать методы описания полевых систем расслоениями. Примером тому служит калибровочная теория гравитации (см. разд. 3.3).

2. Применение расслоений ввело в рассмотрение совершенно новый класс физических характеристик — «топологические» квантовые числа и заряды. Они описывают глобальные топологические свойства расслоений, а тем самым — и глобальные характеристики калибровочных полей как связностей на расслоениях. Примерами таких характеристик являются числа Чженя, Понтрягина и уже упоминавшаяся (см. разд. 2.4) эйлерова характеристика. Они широко применяются при классификации различных солитонных, монопольных, инстантонных решений калибровочных и других нелинейных полевых моделей. Мы этих вопросов не касаемся в силу их математической сложности (см. [53, 128, 138]).

3. Расслоения представляют собой мощный инструмент выхода за рамки традиционной калибровочной теории, если не ограничиваться векторными дифференцируемыми расслоениями. Речь может идти об общем методе формализации физических систем расслоениями, основанном на расширении понятия поля на сечения, вообще говоря, любого рода расслоений и на использовании нетривиальных геометрических и топологических характеристик этих расслоений для описания взаимодействия в моделируемой ими физической системе. Это особенно важно для систем, к которым пока не удается подойти привычными методами.

Уже сейчас именно аппарат расслоений составляет математическую и в какой-то мере аксиоматическую базу для суперобъединения гравитации и элементарных частиц, о котором речь будет в следующих разделах. Для Большого объединения пока достаточно традиционной компенсационной формулировки калибровочной теории, поэтому вернемся к ней опять.

Калибровочная инвариантность лагранжиана (2.10) приводит к следующим законам сохранения — тождествам так называемой второй теоремы Нетер [54, 61]:

$$\partial_\mu \left(J^\mu_{\varphi m} + J^\mu_{Am}\right) = 0; \tag{2.14}$$

$$J^\mu_{\varphi m} + J^\mu_{Am} + \frac{\partial L}{\partial A^m_\nu} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial A^m_{\nu,\mu}} + \frac{\partial L}{\partial A^m_{\mu,\nu}} = 0, \tag{2.15}$$

где $J^{\mu}_{\varphi m}$, J^{μ}_{Am}—токи симметрий полей φ и A. Тождество (2.14) совпадает с тождеством первой теоремы Нетер (см. разд. 2.3), выражающим инвариантность L относительно глобальных преобразований, а специфика инвариантности L относительно локальных симметрий заключена в тождествах (2.15).

Если материальные поля φ рассматривать во внешнем калибровочном поле, то тождества теоремы Нетер сводятся к выражению

$$D_{\mu} J^{\mu}_{\varphi m} = 0. \tag{2.16}$$

Это аналогично ситуации с законами сохранения в теории гравитации (см. разд. 2.3). Тождество (2.16) имеет тот же вид ковариантной дивергенции, что и закон сохранения тензора энергии-импульса материи во внешнем гравитационном поле, и не ведет к интегральному закону сохранения. Учет калибровочного поля приводит закон сохранения к виду обычной дивергенции (2.15), но при этом ток симметрии калибровочного поля, подобно псевдотензору гравитационного поля и в отличие от тока материальных полей, не является тензором относительно калибровочных преобразований.

Еще одной общей чертой калибровочной теории и теории гравитации является то, что, согласно уже упоминавшейся второй теореме Нетер, калибровочная инвариантность лагранжиана калибровочной теории приводит к условиям связи

$$D_{\mu} (D_{\nu} F^{\mu\nu}_{m} + J^{\mu}_{m}) = 0$$

на уравнения поля (2.11), (2.12), которые тем самым не являются независимыми и их решение при заданных граничных условиях неоднозначно. Чтобы устранить эту неоднозначность, надо наложить на поля дополнительное калибровочное условие, как это делается в электродинамике. Таким образом, калибровочная теория, как и теория гравитации, относится к теориям со связями.

Условие калибровочной инвариантности приводит также к тому, что калибровочные поля, как и электромагнитное поле, не должны иметь массу, поскольку включение массового члена $m^2 A^m_{\mu} A^m_{\mu}$ в лагранжиан L_A нарушало бы его калибровочную инвариантность. Так как взаимодействия элементарных частиц, кроме электромагнитного и гравитационного, короткодействующие, т. е. должны переноситься массивными частицами, безмассовость калибровочных полей была первоначально серьезным препятствием для построения реалистичных калибровочных моделей.

В 1964 г. П. Хиггс предложил механизм так называемого спонтанного нарушения симметрии, позволивший обойти эту

трудность (см. [2, 58]). Суть его состоит в том, что в лагранжиан калибровочной теории, помимо материальных полей φ и калибровочных полей A, вводится еще так называемое хиггс-голдстоуновское поле σ. Для этого поле σ выбирается G-неинвариантным, т. е. имеются элементы из группы G, такие, что $g\sigma \neq \sigma$, но H-инвариантным, если H — подгруппа точных симметрий группы G. Это позволяет учесть в квантовой калибровочной теории неинвариантность физического вакуума, взаимодействие с которым полей φ и A эффективно описывается как их взаимодействие с полем σ.

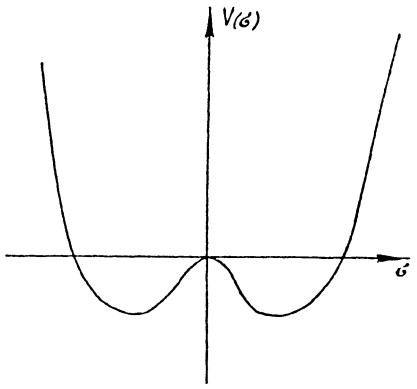


Рис. 37.

Присутствие хиггс-голдстоуновского поля σ в лагранжиане калибровочной теории нарушает его G-инвариантность как функционала полей φ и A, но сохраняет его G-ковариантность, что и требуется для моделирования неинвариантного вакуума.

Хиггс-голдстоуновское поле можно представить в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$, где H — инвариантная компонента σ_0 называется хиггсовским полем, а σ' — голдстоуновским. Последнее в калибровочной теории внутренних симметрий не является, однако, динамическим, поскольку может быть убрано калибровкой. Хиггсовское поле в классическом приближении (без учета квантовых эффектов) описывается так называемым лагранжианом Хиггса

$$L_\sigma = \frac{1}{2}(D_\mu\sigma)^2 + \frac{\mu^2}{2}\sigma^2 - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^4. \qquad (2.17)$$

Получаемое из него уравнение поля имеет три постоянных решения $\sigma_0 = 0$, $\sigma_0 = \pm\,\mu/\lambda$. Первое из них, отвечающее точной симметрии, как видно из рис. 37, не соответствует минимуму потенциальной энергии $V(\sigma) = -\frac{\mu^2}{2}\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{4}\sigma^4$ поля σ и является неустойчивым. Минимум $V(\sigma)$ достигается на решениях $\sigma = \pm\mu/\lambda$, которые и выбираются в качестве хиггсовского поля σ_0. Взаимодействие с этим полем приводит к появлению в лагранжиане калибровочной теории массовых членов материальных и калибровочных полей.

Проиллюстрируем это на примере объединенной модели Вейнберга — Салама слабых и электромагнитных взаимодействий (см. [58, 101]). Она строится как калибровочная модель группы $U(1) \times SU(2)$.

В этой модели левый массивный лептон (в дальнейшем это будет электрон e) и нейтрино ν объединяются в $SU(2)$-дублет $l = \begin{pmatrix} \nu \\ e_L \end{pmatrix}$, а правый электрон образует $SU(2)$-синглет $r = e_R$. Кроме того левым частицам приписывается связанный с симметрией $U(1)$ «гиперзаряд» $Y = 1$, а правому синглету — «гиперзаряд» $Y = -2$, чтобы сохранить универсальность выражения для электрического заряда $Q = I + 1/2Y$. На это следует обратить внимание, поскольку частицам, отличающимся только пространственно-временной характеристикой — спиральностью — присваиваются и разные внутренние числа.

Калибровочными полями в модели Вейнберга — Салама являются изовекторный триплет калибровочных полей A_μ^m группы $SU(2)$ и синглет B_μ группы $U(1)$.

Калибровочно инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие мультиплетов l и r, имеет вид

$$L = i\bar{l}\gamma^\mu \left[\partial_\mu + ig\frac{\tau_m}{2} A_\mu^m + i\frac{g'}{2} B_\mu\right] l + \\ + i\bar{r}\gamma^\mu [\partial_\mu + ig' B_\mu] r + L_A + L_B, \qquad (2.18)$$

где g и $g'/2$ — константы взаимодействия с калибровочными полями A и B. Причем, поскольку группа симметрий представляет собой прямое произведение подгрупп $U(1)$ и $SU(2)$, для калибровочных полей каждой из этих подгрупп может быть выбрана своя константа взаимодействия.

Заметим, что в лагранжиане (2.18) безмассовыми оказываются не только калибровочные поля, но и лептоны, массовый член которых имеет вид $m(\bar{l}r + \bar{r}l)$ и не является $SU(2)$-инвариантным. В этой модели калибровочные поля и лептоны приобретают массу за счет эффекта Хиггса — взаимодействия с хиггс-голдстоуновским полем σ, представляющим собой $SU(2)$-дублет $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ с «гиперзарядом» $Y = -1$. Оно описывается лагранжианом Хиггса (2.17) плюс член взаимодействия поля σ с лептонами

$$-G[\bar{l}\sigma r + \bar{r}\bar{\sigma} l]. \qquad (2.19)$$

Хиггсовская компонента поля σ, описывающая неинвариантный вакуум, выбирается в виде постоянного столбца $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Тогда член взаимодействия (2.19) лептонов с вакуумом

σ_0 превращается в массовый член $-\lambda G\bar{e}e$

$$-G\left[(\bar{\nu}\bar{e}_L)\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix}e_R+\bar{e}_R(0\,\lambda)\begin{pmatrix}\nu\\ e_L\end{pmatrix}\right]=$$
$$=-G\lambda(\bar{e}_Le_R+\bar{e}_Re_L)=-\lambda G\bar{e}e$$

для электрона, тогда как нейтрино остается безмассовым.

Массовый член возникает и для калибровочных полей:

$$\frac{\lambda}{4}[g^2(A_\mu^1)^2+g^2(A_\mu^2)^2+(g'B_\mu-gA_\mu^3)^2].$$

Его диагонализация (чтобы получить поля с определенными массами) приводит к следующему спектру частиц:

1) заряженным бозонам с массой $m_W=g\lambda/2$

$$W_\mu\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1\pm A_\mu^2);$$

2) нейтральному бозону с массой $m_Z=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(g^2+g'^2)^{1/2}$

$$Z_\mu=(g^2+g'^2)^{-1/2}(-gA_\mu^3+g'B_\mu);$$

3) безмассовому нейтральному бозону

$$A_\mu=(g^2+g'^2)^{-1/2}(g'A_\mu^3+gB_\mu).$$

Бозоны $W_\mp$, Z интерпретируются в модели как переносчики слабого взаимодействия, а A_μ — как фотон.

Из модели Вейнберга — Салама вытекают три главных следствия, экспериментальное подтверждение которых и стало подтверждением самой этой модели.

1. Существование нейтральных токов, т. е. реакций, при которых не изменяется заряд лептона. Их предсказание следует из наличия в модели нейтрального бозона Z. На возможность его существования, наряду с заряженными промежуточными бозонами $W_\pm$, указывалось и раньше из некоторых феноменологических соображений. Но в модели Вейнберга — Салама он возникает с необходимостью вместе с бозонами $W_\mp$. Это следует из самого калибровочного характера модели, поскольку группа $SU(2)$ имеет не два, а три калибровочных поля, служащих переносчиками слабого взаимодействия. Поэтому открытие в 1973 г. безмюонных нейтринных реакций типа

$$\nu_\mu+p\to\nu_\mu+p+\pi^++\pi^0$$

было воспринято как первое подтверждение модели Вейнберга — Салама и калибровочного характера слабого взаимодействия.

2. Угол смешивания. Согласно модели Вейнберга — Салама электромагнитное и слабое взаимодействия не независимы. Электромагнитный потенциал A_μ включает в себя калибровочное поле A^3_μ группы SU (2) симметрий слабого взаимодействия, а генератор «электромагнитной» группы симметрий $U(1)_{эл}$ представляет собой сумму оператора I_3 «лептоспина» и генератора I независимой от SU (2) группы «гиперзаряда» U (1) с углом смешивания θ_W:

$$I_{эл} = I_3 \cos\theta_W + I \sin\theta_W;\ \operatorname{tg}\theta_W = \frac{g'}{g}.$$

Таким образом, действительно имеет место нетривиальное соединение электромагнитного и слабого взаимодействия в одно объединенное электрослабое взаимодействие. Угол Вейнберга θ_W был экспериментально измерен: $\sin^2\theta_W \approx 0{,}22$. Угол θ_W, заряд электрона e и константа Ферми слабого взаимодействия G_F составляют три экспериментально определяемые фундаментальные постоянные слабого взаимодействия, через которые выражаются константы g, g', λ модели Вейнберга — Салама.

3. Существование промежуточных бозонов массой свыше 70 Гэв. То, что контактный характер слабого взаимодействия, как оно описывалось в теории Ферми, является следствием лишь большой массы (несколько гигаэлектрон-вольт) переносчиков этого взаимодействия, предполагалось давно, и строились соответствующие модели. В этом пункте модель Вейнберга — Салама была не нова. Но, следуя хиггсовскому механизму появления массы у калибровочных полей, она предсказала очень большие массы: $m_W \approx 83$ Гэв, $m_Z \approx 94$ Гэв. Причем без всяких подгоночных параметров массы m_W и m_Z выражаются через три уже известные константы теории — заряд электрона, константу Ферми и угол Вейнберга. Поэтому открытие в 1982 г. промежуточных бозонов с массами, близкими предсказываемым, стало окончательным подтверждением модели Вейнберга — Салама, а с ней и хиггсовского механизма происхождения массы частиц.

Калибровочная теория хорошо зарекомендовала себя и при описании сильных взаимодействий. Первоначально, исходя из мезонной картины ядерных сил, калибровочную модель сильных взаимодействий пытались строить на базе «ароматной» группы SU (3) изоспина и гиперзаряда. Когда же стало ясно, что взаимодействие между адронами — это в основе своей взаимодействие между составляющими их кварками, и была высказана гипотеза «цвета» кварков, на роль калибровочной модели сильных взаимодействий выдвинулась калибровочная

теория «цветной» группы $SU(3)_{col}$, получившая название хромодинамики [1, 82].

В этой модели взаимодействие между кварками осуществляется обменом глюонами — калибровочными полями группы $SU(3)_{col}$. Старые мезонные силы в такой картине рассматриваются как обмен кварковыми комплексами, которыми являются мезоны.

Одним из наиболее интересных предсказаний хромодинамики стало явление асимптотической свободы, когда с ростом переданного импульса (или, что то же самое, с уменьшением расстояния) между кварками их эффективный заряд (сильного взаимодействия) уменьшается. Это означает, что при высоких энергиях кварки почти свободны.

Действительно, при глубоко неупругих процессах взаимодействия электронов и нейтрино с нуклонами последние при больших передачах импульса ведут себя как совокупность точечных частиц — партонов. Считается (и эксперименты это косвенно подтверждают), что партоны — это виртуальные кварки, а их «партонное» поведение получает обоснование в рамках теории с асимптотической свободой.

Другое явление, надежды на объяснение которого связывают с хромодинамикой,— это удержание кварков. Все попытки обнаружить кварки в свободном состоянии, а не в составе адронов, оказались тщетными. Причину этому видят в том, что потенциал взаимодействия кварков при увеличении расстояния между ними не убывает, а растет. Действительно, качественные соображения и прямые расчеты на компьютерах, когда пространственно-временной континуум аппроксимируется решеткой с конечным числом узлов (до 10^6), показывают, что на расстояниях, больших 10^{-13} см, из-за сильного взаимодействия глюонов силовые линии как бы сдавливаются в трубку (глюонную «струну» с кварками на концах) и потенциал взаимодействия кварков становится прямо пропорциональным расстоянию между ними [15].

В целом хромодинамика пока не является полностью законченной и однозначно экспериментально подтвержденной теорией сильного взаимодействия, но она общепризнана и описывает основные свойства адронов и кварков.

Успешное объединение на базе калибровочной теории электромагнитного и слабого взаимодействий и описание сильного взаимодействия выдвинули на первый план современной физики элементарных частиц задачу Большого объединения кварков и лептонов, электрослабого и сильного взаимодействий (см. [39, 82, 101]). На ее решение сейчас направлены усилия не только теоретиков, но и работа всех крупнейших ускорителей.

Таблица 6

Мультиплет	$SU(3)_{col}$-синглет	$SU(3)_{col}$-триплет		
$SU(2)$-дублет	$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^r_L$	$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^y_L$	$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^b_L$
$SU(2)$-синглет	e^-_R	$u^r_R,\ d^r_R$	$u^y_R,\ d^y_R$	$u^b_R,\ d^b_R$

Современные модели Большого объединения в основном строятся по следующей схеме: лептоны ставятся на один структурный уровень с кварками и рассматриваются как «лептокварки»; ищется общая группа симметрий кварков и лептонов; строится ее калибровочная теория. При этом группа симметрии Большого объединения должна включать в себя прямое произведение $U(1) \times SU(2) \times SU(3)_{col}$ групп симметрий электрослабого и сильного взаимодействия, и ее калибровочная теория должна иметь единую константу всех этих взаимодействий. Действительно, при высоких энергиях величины эффективных зарядов электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий сближаются и совпадают при значениях переданного импульса $\sim 10^{15}$ Гэв/с. Это интерпретируется следующим образом.

При очень высоких энергиях существует единое взаимодействие элементарных частиц с общей группой симметрий G. При энергиях $\sim 10^{15}$ Гэв в результате спонтанного нарушения симметрии группы G до группы $SU(3) \times SU(3)_{col}$ (фазового перехода) это взаимодействие разделяется на сильное и электрослабое. Последнее, в свою очередь, при энергии $\sim 10^2$ Гэв опять в результате спонтанного нарушения симметрии $SU(3) \to U(1) \times SU(2)$ разделяется на электромагнитное и слабое. Сложности возникают с однозначным выбором группы симметрий G Большого объединения.

По отношению к группе $U(1) \times SU(2) \times SU(3)_{col}$ кварки и лептоны делят на мультиплеты — поколения. Первый из них приведен в табл. 6, а второй и третий получаются из него заменами $e \to \mu$, $u \to c$, $d \to s$ и $e \to \tau$, $u \to t$, $d \to b$. Такое деление на поколения обосновывается тем, что переходы между частицами разных поколений ($d \leftrightarrow s$, $s \leftrightarrow b$) сильно подавлены в сравнении с переходами внутри поколений ($u \leftrightarrow d$, $c \leftrightarrow s$, $t \leftrightarrow b$).

Группа симметрий Большого объединения на первом этапе должна объединить лептоны и кварки одного поколения, а затем и разных поколений. Предлагаются различные такие группы. Наиболее распространенной пока остается модель

Х. Джорджи и Ш. Глэшоу (1974) с группой SU (5) — минимальной простой группой, содержащей в себе произведение U (1) $\times$ SU (2) $\times$ SU (3)$_{\text{col}}$ [74]. В этой модели ν_e, e_L, $\tilde{d}^r_L$, $\tilde{d}^y_L$, $\tilde{d}^b_L$, объединяются в один SU (5)-мультиплет, отвечающий фундаментальному представлению SU (5), а остальные субчастицы образуют SU (5)-декуплет (здесь $\tilde{d}$ обозначает антикварк).

Привлекает внимание также группа SO (10), фундаментальный мультиплет которой содержит 16 компонент и может объединить все субчастицы одного поколения и левое антинейтрино [136]. Для объединения субчастиц разных поколений предлагаются группы SU (5) $\times$ SU (5), SU (8), SO (18), E_6 и др.

Главным предсказанием моделей Большого объединения является существование процессов с несохранением барионного числа и переходов между e-, μ-, τ-лептонами. Поэтому проводимые сейчас эксперименты по обнаружению распада протонов ($p \to e^+ + \pi_0$) и нейтринным осцилляциям $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ являются довольно критическими для программы Большого объединения. Причем первоначальный оптимизм сменился тревожным ожиданием. Так, предсказываемый SU (5)-моделью период жизни протона 10^{30} лет уже приходится отодвигать за 10^{32} лет.

Существующие модели Большого объединения обладают рядом недостатков и с теоретической точки зрения. Из них в первую очередь бросается в глаза очень большое количество частиц и параметров (до сотен) в этих моделях. Ряд авторов считают, что это слишком много для того, чтобы принять кварки и лептоны за «атомы» мира элементарных частиц.

В результате была выдвинута гипотеза (А. Салам), что кварки и лептоны, в свою очередь, состоят из более простых образований — преонов [175]. Например, полагают, что каждый такой преон несет одну какую-либо характеристику кварков и лептонов — или определенный «аромат» («флавоны» f_i), или определенный «цвет» («хромоны» c_i) и другие, а кварки и лептоны представляют собой композиции таких преонов, $q = f_i + c_i + \ldots$. Соответственно из преонов строятся и глюоны и хиггсовские бозоны. Но оказалось, что и преонов требуется не один десяток. Так что впору предположить, что и преоны из чего-то состоят. В результате возникает цепочка адроны — кварки — преоны — ..., которую не удается никак оборвать.

Дело в том, что в этой цепочке характеристики одних частиц выражаются через характеристики других, но остается открытым вопрос, откуда берутся сами эти характеристики —

«ароматы», «цвет». Его решение и было бы, по нашему мнению, кардинальным решением задачи Большого объединения (см. разд. 3.6).

3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Первая калибровочная модель гравитации была предложена сразу вслед за пионерской работой Ч. Янга и Р. Миллса по калибровочной теории (Р. Утияма, 1956 (см. [131]); Д. Д. Иваненко с сотр. 1961). Она основывалась на калибровочной теории группы Лоренца, но, помимо калибровочных полей последней, в ней для компенсации общековариантных преобразований вводилось, как и в ОТО, тетрадное (метрическое) гравитационное поле. Присутствие этого поля не укладывалось, однако, в рамки традиционной компенсационной схемы калибровочной теории, и его калибровочный статус оставался неясным.

Таким образом, уже с первых своих шагов калибровочная трактовка гравитации столкнулась с той трудностью, что калибровочные поля — это связности, а эйнштейновское гравитационное поле — метрическое или тетрадное. Эта проблема в течение двадцати лет была главным препятствием для построения калибровочной теории гравитации.

Ее старались решить в рамках калибровочной теории группы Пуанкаре, трактуя тетрадное гравитационное поле как калибровочное поле группы трансляций. Такой подход долгое время доминировал в калибровочной теории гравитации, но полностью удовлетворительного результата не дал (см. ниже). В то же время упускалось из виду, что в калибровочной теории, помимо калибровочных полей, в случае спонтанного нарушения симметрии возникают также хиггс-голдстоуновские поля. Полем именно такого типа, на наш взгляд, и оказывается эйнштейновское гравитационное поле [54, 150а].

Многолетние неудачи калибровочной модели гравитации связаны с тем, что для ее построения применялась хорошо зарекомендовавшая себя в случае внутренних симметрий компенсационная формулировка калибровочной теории. Но для пространственно-временных симметрий она оказалась недостаточно эффективной, и нужно было применять формализм расслоений. Поэтому, учитывая, что калибровочная теория гравитации во всяком случае должна содержать в себе эйнштейновскую ОТО, ее, как и ОТО, можно пытаться строить, исходя непосредственно из принципов относительности и эквивалентности, реформулируя их в терминах расслоений.

Как мы уже подробно обсуждали (см. разд. 2.1), в ОТО принцип относительности формулируется как требование инвариантности теории относительно преобразований системы отсчета. В формализме расслоений задание системы отсчета в теории гравитации определяется как фиксация атласа касательного расслоения, а группой преобразований атласов — систем отсчета — является калибровочная группа $GL(4, R)(X)$.

Таким образом, на языке расслоений принцип относительности в теории гравитации может быть сформулирован как требование инвариантности теории относительно калибровочной группы $GL(4, R)(X)$ и в таком виде он идентичен калибровочному принципу в калибровочной теории группы пространственно-временных симметрий $GL(4, R)$.

Следовательно, теория гравитации может строиться на основе принципа относительности непосредственно как калибровочная теория пространственно-временных симметрий. Но схемы этой теории и калибровочной теории внутренних симметрий не совпадают. Дело в том, что, в отличие от калибровочной теории внутренних симметрий, в случае пространственно-временных симметрий существуют два типа калибровочных преобразований, а именно: как и в случае внутренних симметрий, преобразования атласа расслоения материальных полей λ и преобразования атласа касательного расслоения $T(X)$, действующие на операторы частных производных ∂_μ, как на вектора касательных пространств. Атласы обоих этих расслоений эквивалентны, но, как указывалось выше (см. разд. 2.1), не обязаны совпадать.

По-разному обеспечивается и инвариантность теории относительно разных типов калибровочных преобразований. Для калибровочных преобразований первого типа, как и в случае внутренних симметрий, это достигается введением калибровочных полей, а для преобразований второго типа — введением метрического поля (без фиксации его сигнатуры).

Функционал действия S в калибровочной теории гравитации инвариантен порознь относительно калибровочных преобразований первого и второго типов. В результате разные типы калибровочных преобразований приводят также и к разным законам сохранения. Калибровочные преобразования первого типа ведут к обычным для калибровочных теорий законам сохранения (2.14), (2.15). В то же время инвариантность лагранжиана материальных полей относительно голономных калибровочных преобразований атласа касательного расслоения ведет к закону сохранения тензора энергии — импульса (см. формулу (3.6) из гл. 2).

Принцип относительности как калибровочный принцип оказывается, однако, недостаточным для построения калибровочной теории гравитации. Он допускает общую связность — калибровочные поля группы $GL(4, R)$ — на пространстве-времени, не фиксирует сигнатуру метрического поля g, а тем самым не может быть определена пространственно-временная структура на многообразии X^4. Остается неясным статус метрического поля в рамках такой калибровочной теории. Хотя оно и вводится для обеспечения инвариантности относительно одного из типов пространственно-временных калибровочных преобразований, но не является связностью и не может трактоваться как какое-либо калибровочное поле. Все это делает необходимым привлечение для построения калибровочной теории гравитации принципа эквивалентности.

Как обсуждалось выше (см. разд. 2.2), принцип эквивалентности в теории гравитации может быть сформулирован как требование сохранения инвариантов группы Лоренца при переходах с карты на карту и параллельном переносе в некоторой системе отсчета. Это эквивалентно требованию сводимости связности (калибровочного поля) Γ к калибровочным полям группы Лоренца и существования на многообразии X^4 именно псевдоримановой метрики. При этом калибровочное поле Γ и метрическое гравитационное поле g оказываются связанными условием метричности (3.8) главы 1.

Однако ничто не требует симметричности коэффициентов связности, и, в отличие от ОТО, она не сводится к символам Кристоффеля $\{\alpha\mu\nu\}$ метрики g, а включает в себя также компоненты тензора кручения $Q_{\alpha\mu\upsilon} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\upsilon\mu} - \Gamma_{\alpha\mu\upsilon})$:

$$\Gamma_{\alpha\nu\mu} = \{\alpha\nu\mu\} + K_{\alpha\nu\mu};\ K_{\alpha\nu\mu} = (Q_{\alpha\nu\mu} + Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\mu\alpha}) \quad (3.1)$$

(тензор $K_{\alpha\nu\mu}$ называется конторсией).

Таким образом, калибровочная теория гравитации, которая, как и ОТО, строится из принципов относительности и эквивалентности, приводит не к ОТО, а к ее обобщению на теорию гравитации с кручением. Это важно подчеркнуть, поскольку тот факт, что эйнштейновская гравитация в калибровочном подходе не возникает в одиночку, долгое время не удовлетворял ряд авторов. В первой работе по калибровочной теории гравитации Р. Утияма, например, просто положил равными нулю антисимметричные компоненты связности. Принцип эквивалентности определяет также калибровочный статус гравитационного поля.

Присутствие гравитационного поля в функционале действия материальных полей S нарушает его лоренцевскую инвариантность, поднимая ее до $GL(4, R)$-ковариантности, и

приводит к ситуации спонтанного нарушения симметрии, в которой роль хиггс-голдстоуновского поля играет метрическое гравитационное поле.

Как и в случае внутренних симметрий, в хиггс-голдстоуновском поле g может быть выделена L-инвариантная хиггсовская компонента — метрика Минковского, а отклонения от нее играют роль голдстоуновских полей. Эти отклонения отождествляются с гравитационным полем, которое тем самым выступает как поле голдстоуновского типа.

Однако, в отличие от голдстоуновских полей внутренних симметрий, гравитационное поле не может быть убрано какой-либо калибровкой. Причина состоит в том, что калибровочные преобразования пространственно-временных симметрий действуют так же на операторы частных производных ∂_μ, как на векторы касательных пространств $\partial_\mu = t_\mu$. Однако, обратно, векторы t имеют смысл частных производных только в голономной системе отсчета. В неголономной системе отсчета, когда метрика g становится метрикой Минковского, векторы $t_a = h^\mu_a \partial_\mu$ содержат тетрадные функции h^a_μ, описывающие гравитационное поле в тетрадной форме, т. е. гравитационное поле в такой калибровке не исчезает, а переходит из «метрической» в «тетрадную» форму. Это означает, что гравитационное поле в общем случае не сводится к хиггсовскому полю ни в какой системе отсчета и что хиггсовским вакуумом в теории гравитации может быть в действительности неплоская метрика.

Впервые идея о том, что нарушение лоренцевской симметрии из-за искривления пространства-времени ведет к концепции гравитона как голдстона, была высказана в середине 60-х годов Д. Д. Иваненко и В. Гейзенбергом. В плане спонтанного нарушения симметрии (но игнорируя геометрические аспекты гравитации) этот вопрос исследовался затем в работах В. И. Огиевецкого, Ю. Неемана. С позиций геометрической формулировки калибровочной теории на хиггс-голдстоуновскую природу гравитационного поля было указано нами и А. Траутманом. При этом мы показали, что она непосредственно следует из принципов относительности и эквивалентности, реформулируемых в терминах калибровочной теории и расслоений [54, 150a]. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса с квантовых позиций в разд. 3.5.

Изложенная калибровочная версия теории гравитации является минимальной, но не единственной калибровочной моделью, включающей в себя эйнштейновскую ОТО.

Непосредственным ее расширением является калибровочная модель группы GL (4, R). Алгебра генераторов этой груп-

пы, помимо генераторов группы Лоренца, включает также генератор растяжений D и девять генераторов $I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}$, которые иногда называют операторами гипермомента.

Группа GL (4, R) представляет собой наиболее общую линейную группу симметрий в теории гравитации, а ее калибровочные поля дают самый общий вид связности на пространстве-времени. В сравнении с калибровочными полями группы Лоренца, которые содержат символы Кристоффеля и кручение, GL (4, R)-связности включают также коэффициенты неметрического переноса B, отвечающие генераторам I, D группы GL (4, R). Они определяется из выражения

$$\mathrm{D}_\mu g_{\nu\sigma} = -2B_{\nu\sigma\mu}, \tag{3.2}$$

и полная GL (4, R)-связность имеет вид

$$\Gamma_{\alpha\nu\mu} = \{\alpha\nu\mu\} + K_{\alpha\nu\mu} + (B_{\alpha\nu\mu} + B_{\mu\nu\alpha} - B_{\nu\mu\alpha}).$$

Г. Вейль в 1918 г. был первым, кто предпринял попытку обобщить гравитационную теорию учетом неметричности в частном случае, когда $B_{\nu\sigma\mu} = g_{\nu\sigma}B_\mu$ является калибровочным полем (конформных (см. разд. 3.4)) растяжений D. Геометрия с такой добавкой к символам Кристоффеля получила название геометрии Вейля, а геометрия с полной связностью — геометрии Эддингтона [109, 129].

Однако, несмотря на более чем 60-летнюю историю, эддингтоновское обобщение эйнштейновской гравитации не получило такого признания, как, например, теория гравитации с кручением. По-видимому, главная причина этого состоит в том, что отсутствуют какие-либо физические источники, которые могли бы быть отождествлены с токами симметрий генераторов I, D и могли бы порождать соответствующие калибровочные поля, подобно тому, как спин порождает кручение (см. след. разд.).

Во-вторых, возникают сложности с физической интерпретацией спинорных представлений группы GL (4, R), которые сводятся к бесконечным мультиплетам обычных нерелятивистских SO (3)-спиноров [12, 159]. Что касается дираковских спиноров, описывающих фермионы, то они, как указывалось выше (см. разд. 2.1), не допускают действия группы GL (4, R), а именно операторов гипермомента $I_{\alpha\beta}$. В результате для них в геометрии Эддингтона не определена операция параллельного переноса.

В-третьих, калибровочные поля группы GL (4, R) не сохраняют вообще лоренцевские инварианты, и тем самым в калибровочной теории этой группы нарушается принцип эквивалентности.

Второе замечание не относится к вейлевскому частному случаю геометрии Эддингтона, и полевые модели с такой геометрией разрабатываются [66]. Но гораздо более известен и до недавнего времени пользовался большой популярностью собственно вариант Вейля, когда D — генератор не растяжений, а выходящих за рамки $GL(4, R)$ конформных отображений (см. разд. 3.4).

Альтернативой изложенному выше нашему взгляду на калибровочную теорию гравитации в хиггс-голдстоуновской трактовке гравитационного поля является калибровочная теория группы Пуанкаре. Она возникла сразу за работой Р. Утиямы 1956 г. с целью устранить неясность в калибровочной интерпретации гравитационного поля в его модели (Т. Киббл, Д. Шиама, Б. Н. Фролов). Подход, основанный на группе Пуанкаре, ставил своей целью представить тетрадное поле как калибровочное поле группы трансляций, исходя из кажущегося совпадения тензорных рангов тетрадного поля h^a_μ и трансляционного калибровочного поля A^a_μ. Но интерес к калибровочной модели группы Пуанкаре был вызван не только этим.

Пространством-временем СТО является аффинное пространство Минковского (см. разд. 1.1), и группа Пуанкаре, будучи группой движения этого пространства, представляет собой фундаментальную динамическую группу СТО, чьи унитарные представления описывают свободные частицы в СТО. Поэтому, для того чтобы калибровочная теория элементарных частиц была полной, казалось естественным дополнить калибровочную теорию внутренних симметрий калибровочной теорией группы Пуанкаре.

Однако на этом пути возникли трудности, которые были вызваны именно динамическим характером группы Пуанкаре. Динамические симметрии описывают пространственное распределение и временную эволюцию системы и реализуются дифференциальными операторами (см. формулы (1.10) в гл. 1). В отличие от внутренних симметрий и лоренцевских преобразований спина, которые меняют волновую функцию в точке, преобразования Пуанкаре с генераторами (1.10) могут интерпретироваться, с одной стороны, как координатные преобразования, а с другой — как переходы от точки к точке. Обе эти интерпретации совпадают в плоском пространстве, но различаются в пространстве с ненулевой связностью.

Авторы первых работ по калибровочной теории группы Пуанкаре следовали координатной интерпретации операторов (1.10). Они объединяли локализации спиновых лоренцевских преобразований и преобразований координатных трансляций

$x^\mu \to x^\mu + a^\mu$. Локализация первых приводит к стандартной схеме калибровочной теории группы Лоренца. Локализация вторых, $x^\mu \to x^\mu + a^\mu(x)$, воспроизводит группу общих координатных преобразований, которая индуцирует, в свою очередь, голономную подгруппу калибровочной группы $GL(4, R)$ преобразований систем отсчета, как это обсуждалось в разделе 2.1. Таким образом, полученные преобразования не являются локальными трансляциями, а вводимые из условия инвариантности функционала действия относительно этих преобразований тетрадные поля не могут рассматриваться как калибровочные поля группы трансляций.

Процедура локализации преобразований группы Пуанкаре, основанная на интерпретации генераторов (1.10) главы 1 как переходов между точками, была предложена Ф. Хелем [147]. Она не ограничивалась локализацией групповых параметров, как обычно, а включала модификацию самих генераторов группы Пуанкаре путем замены обычных производных в (1.10) на ковариантные $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$, где Γ — некоторая лоренцевская связность. Эта замена кажется вполне естественной как обобщение трансляций в плоском пространстве на трансляции в искривленном пространстве. Но в то же время она нарушает коммутационные соотношения группы Пуанкаре (1.11) главы 1, например, генераторы таких локальных трансляций перестают коммутировать

$$[D_\mu, D_\nu] = R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} L_{\alpha\beta},$$

и порождаемые ими преобразования не образуют калибровочной группы трансляций в обычном смысле.

Таким образом, оказывается, что обе обсуждаемые калибровочные модели динамической группы Пуанкаре лежат вне традиционной калибровочной схемы и не обеспечивают тетрадное гравитационное поле статусом калибровочного поля группы трансляций, вопреки первоначальным надеждам. По-видимому, это является следствием общего положения, что применение калибровочной теории к динамическим группам не имеет смысла. Динамические симметрии характеризуют конкретную динамику системы, являющуюся следствием уже имеющегося в системе взаимодействия, в том числе порождаемого теми или иными калибровочными полями. Например, группа Пуанкаре — это группа динамических симметрий, как правило, свободных систем, когда взаимодействие вообще отсутствует. В теории гравитации примером динамических групп являются группы движений.

Стандартная техника построения калибровочной теории может быть применена к группе Пуанкаре, если ее рассматривать не как динамическую, а как абстрактную структурную

группу некоторого расслоения, т. е. как своего рода группу внутренних симметрий [92, 134, 177]. Однако анализ показал, что тетрадное поле h и калибровочное поле трансляций A и в таком подходе все же не могут быть отождествлены [54].

Различие, грубо говоря, состоит в том, что у поля A оба индекса, что называется, координатные: A^{μ}_{ν}, а у h^{a}_{ν} один координатный, а другой тетрадный. Это различие ведет к разным законам преобразований полей h и A. У первого при изменении системы отсчета — атласа Ψ — меняется только один индекс $h^{a}_{\nu} \to h^{a}_{\nu'}$, а у второго — оба $A^{\mu}_{\nu} \to A^{\mu'}_{\nu'}$. Кроме того, отождествлению A и h препятствует также то, что поле A может обращаться в нуль, а h — нет; A определено однозначно, а h — с точностью до лоренцевских преобразований.

Невозможность использования трансляционных калибровочных полей для описания гравитации ставит вопрос об их физической интерпретации. Предлагались различные варианты, вплоть до связи с симметриями адронов, но они не являются убедительными. Интересно, что в теории твердого тела трансляционные калибровочные поля используются для описания дислокаций [152].

Рассматривались калибровочные модели гравитации, основанные и на более общих группах. Но они, как правило, опираются на включение в них группы $GL(4, R)$ и группы Пуанкаре [134, 177].

Что дает калибровочная трактовка гравитации? Прежде всего исчезает обособленность теории гравитации, которая как калибровочная теория пространственно-временных симметрий, имеющая свою весьма существенную специфику, дополняет янг-миллсовскую схему калибровочной теории внутренних симметрий и позволяет включить гравитацию в объединенную картину фундаментальных взаимодействий.

Что касается собственно гравитации, то ее калибровочная теория, во-первых, со всей определенностью приводит к аффинно-метрическому обобщению эйнштейновской ОТО и в первую очередь — к теории гравитации с кручением. Во-вторых, подсказывает существование классической фоновой метрики — гравитационного хиггсовского вакуума, трансформируя теорию гравитации в духе упоминавшегося в разделе 2.3 биметризма.

4. ОБОБЩЕНИЯ ОТО. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ С КРУЧЕНИЕМ

Структура той или иной теории гравитации, как и всякой полевой теории, задается выбором ее фундаментальных динамических переменных и видом функционала дей-

ствия, определяющего полевые уравнения, законы сохранения в классической теории и производящий функционал функций Грина в квантовой теории.

Долгое время большинство гравитационистов придерживалось принципа эйнштейновской ОТО, что псевдориманова метрика (или тетрадное поле, или поле спина 2 в разных вариантах ОТО) является единственной динамической гравитационной переменной, описываемой гильберт-эйнштейновским лагранжианом. В настоящее время, однако, выбор динамических переменных и лагранжиана теории гравитации вновь стал предметом дискуссий.

Г. Вейль, А. Эддингтон, Э. Картан — авторы единых теорий 20-х годов — были первыми, кто обратил внимание на фундаментальную роль связности в геометризованных теориях. Решающий же шаг был сделан именно в рамках калибровочного подхода к гравитации, все варианты которого приводят к теориям с двумя динамическими переменными — метрикой g (или тетрадным полем) и связностью Г. Такие теории получили название аффинно-метрических.

Метрика и связность представляют собой два независимых объекта пространственно-временной геометрии. Но в теории гравитации их независимость не является абсолютной, поскольку, согласно принципу эквивалентности, они должны быть связаны условием метричности (3.8) в главе 1, которое тем самым имеет физическую причину и не вытекает из геометрической природы метрики и связности.

При наличии такой связи возможны два варианта выбора динамических переменных в аффинно-метрической теории. В первом варианте это метрика и связность, связанные условием метричности, которое вводится в лагранжиан в качестве связи с неопределенными множителями Лагранжа [90]. Во втором варианте эта связь разрешается, в результате чего связность Г выражается через символы Кристоффеля метрики g и тензор конторсии K (см. (3.1)). В этом случае динамическими переменными в аффинно-метрической теории гравитации являются тензорные величины — метрика g и поле конторсии K (или кручение Q). Если условие метричности отсутствует, два указанных варианта выбора динамических переменных остаются, но во втором из них к метрике и конторсии добавляются компоненты неметрического переноса B.

Обсудим теперь выбор лагранжиана в аффинно-метрической теории гравитации. Мы уже указывали, что гильберт-эйнштейновский лагранжиан в виде скалярной кривизны R не во всем является удовлетворительным и из ряда соображений, особенно из квантовой гравитации, следует необходимость квадратичных по кривизне лагранжианов. В пользу

квадратичных лагранжианов свидетельствует и аффинно-метрическая теория гравитации. Дело в том, что лагранжиан гильберт-эйнштейновского вида $\tilde{R}$ (где $\tilde{R}$ обозначает кривизну полной связности Γ) приводит в этой теории к алгебраическим уравнениям для Γ, K или B. Хотя теория с такими уравнениями тоже оказывается не бессодержательной (см. ниже), общий случай дифференциальных уравнений для конторсии и неметричности требует рассмотрения квадратичных по $\tilde{R}$ лагранжианов.

При выборе лагранжианов аффинно-метрической теории и проявляется различие между двумя вариантами задания ее динамических переменных (g, Γ) и (g, K, B). В первом из них лагранжиан строится из полной связности Γ, а поля K и B входят в такой лагранжиан только в составе Γ.

Во втором варианте лагранжиан теории может быть выбран также в виде суммы

$$L = L_g(R) + L_K(K, \tilde{D}K) + L_B(B, \tilde{D}B) \qquad (4.1)$$

чисто гравитационного лагранжиана L_g (например, это может быть гильберт-эйнштейновский лагранжиан ОТО) и лагранжианов L_K для конторсии и L_B для неметричности. Это возможно, поскольку как K, так и B являются тензорами.

Конечно, лагранжиан вида (4.1) может показаться неестественным с точки зрения геометрического единства символов Кристоффеля, тензоров конторсии и неметричности как компонент полной связности Γ. Однако ряд соображений говорит в пользу лагранжианов такого типа.

Во-первых, гравитационный лагранжиан L_g, лагранжиан конторсии L_K и неметричности L_B могут строиться независимо друг от друга, в частности, L_g как в ОТО, а L_K и L_B как лагранжианы янг-миллсовского типа (2.8).

Во-вторых, ничто не требует, чтобы константы взаимодействия кручения и неметричности в лагранжианах L_K и L_B совпадали с гравитационной постоянной в L_g. Например, они могут быть значительно больше, чем гравитационная постоянная, что открывает возможность существования (сейчас или в ранней Вселенной) «сильных» кручения и неметричности, которые приводили бы к эффектам, сопоставимым с эффектами слабого и сильного взаимодействий.

В настоящее время наибольшее признание из аффинно-метрических теорий получила теория гравитации с кручением (см. [54, 92, 147]). Дело в том, что пока известны всего две пространственно-временные характеристики частиц — энергия-импульс и спин. Именно они являются источниками соответственно метрической гравитации и кручения. Поэтому

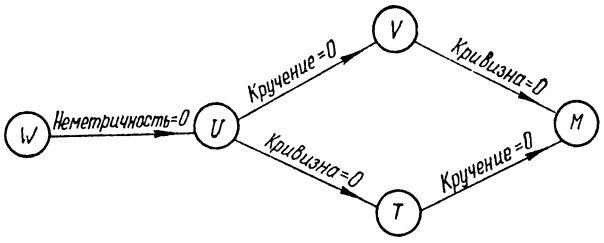


Рис. 38.

обобщение метрической теории гравитации, учитывающей только первую из этих характеристик, на теорию гравитации с кручением представляется вполне закономерным.

Теория гравитации с кручением начала развиваться с работы Э. Картана 1922 г., где он предложил рассматривать в качестве модели пространства-времени четырехмерное многообразие с псевдоримановой метрикой и несимметричной связностью $\Gamma_{\alpha\nu\mu} \neq \Gamma_{\alpha\mu\nu}$. В последующих работах он предположил, что кручение связано с плотностью внутреннего углового момента материальной среды, т. е. фактически со спином. Но спин в то время еще не был известен, и идеи Картана не получили развития. Они стали возрождаться лишь в конце 40-х годов.

Важным этапом становления теории гравитации с кручением стала калибровочная трактовка гравитационного поля (Д. Д. Иваненко, Д. Шиама, Т. Киббл, Б. Н. Фролов). Калибровочная теория показала, что материальным источником поля кручения является спин материи.

Математический аппарат теории пространств с кручением (геометрии Римана — Картана) был в значительной степени создан именно в работах Э. Картана [57]. Связь этой геометрии с другими геометриями пространства-времени показана на рис. 38, где T — пространство телепараллелизма; V — псевдориманово; M — пространство Минковского; W — пространство с геометрией Эддингтона; U — пространство Римана — Картана. Из этой диаграммы, в частности, видно, что в геометрии Римана — Картана пространство является плоским, когда не только кривизна, но и кручение обращаются в нуль.

Уравнение геодезической в пространстве Римана — Картана имеет тот же внешний вид (см. (4.7) в гл. 1), что и в псевдоримановом пространстве. Но, в отличие от (4.7), связность Γ в нем содержит, помимо символов Кристоффеля, еще и тензор конторсии

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + (\{^{\alpha}_{\mu\nu}\} + K^\alpha_{\mu\nu})\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = 0. \qquad (4.2)$$

Таким образом геодезические в пространстве с кручением (их часто называют автопараллелями) не совпадают с геодезическими в псевдоримановом пространстве и не являются наикратчайшими. В то же время наикратчайшие и в пространстве с кручением остаются траекториями движения безспиновых точечных частиц. Это следует из функционала действия для пробных частиц, который не содержит кручения и вариация которого приводит к тем же уравнениям геодезических линий с символами Кристоффеля, что и в ОТО.

Рассмотрим теперь уравнения различных полей в пространстве с кручением. Поле нулевого спина, или скалярное, со связностью, а тем самым и с кручением в составе ковариантных производных не взаимодействует, поскольку $\tilde{D}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi$. Однако включение в лагранжиан скалярного поля, как и в ОТО, члена $\tilde{R}\,(g,\ Q)\,\varphi^2$ порождает взаимодействие типа $\varphi^2 Q^2$.

Две точки зрения существуют на взаимодействие электромагнитного поля с полем кручения. Дело в том, что замена обычной производной на ковариантную $\partial_\mu \to \tilde{D}_\mu$ приведет в данном случае к появлению в выражении для напряженности электромагнитного поля членов взаимодействия

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \tilde{D}_\mu A_\nu - \tilde{D}_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + 2Q^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda,$$

нарушающих $U(1)$-калибровочную инвариантность лагранжиана электромагнитного поля.

Поскольку принцип калибровочной инвариантности является одним из основных в теории поля, ряд авторов, желая сохранить его, предположили, что кручение не взаимодействует с электромагнитным и янг-миллсовским полями, и поэтому следует считать, что взаимодействие Q — A отсутствует. Такой же вывод следует и из определения напряженности $F^m_{\mu\nu}$ калибровочного поля как его кривизны, поскольку связность A^m_μ действует только на свои групповые индексы m и не действует на координатные. Это значит, что калибровочные поля разных групп (в данном случае $U(1)$ и группы Лоренца) не должны взаимодействовать.

С другой стороны, были предприняты попытки таким образом модифицировать калибровочный принцип, чтобы совместить его с Q — A взаимодействием, или даже отказаться от него. Они привели к описанию электромагнитного поля в пространстве с кручением уравнениями Максвелла в пространстве без кручения, но с нелинейными добавками [89].

Приведенные варианты взаимодействия скалярного и электромагнитного полей с кручением получены, однако, вне рамок калибровочной теории и нарушают вытекающий из нее прин-

цип минимальности взаимодействия, т. е. когда потенциал взаимодействия (калибровочное поле) входит в лагранжиан только в составе обобщенной производной D_μ. Если же строго придерживаться калибровочной теории, эти поля не должны взаимодействовать с кручением.

В калибровочной теории с полем кручения взаимодействует спинорное поле. Его лагранжиан имеет тот же вид (см. (1.5) в гл. 2), что и в ОТО, только коэффициенты Риччи заменяются произвольными калибровочными лоренцевскими полями. При этом поле кручения $Q_{kmc} = \Gamma_{k[mc]}$ в силу того, что $\Gamma_{kmc} = -\Gamma_{mkc}$, оказывается антисимметричным по всем своим индексам. Таким же является выражаемый через Q тензор конторсии $K_{kmc} = Q_{kmc}$. Уравнения полей более высокого спина в пространстве с кручением рассмотрены в работе [162а].

Чтобы получить полный лагранжиан теории гравитации с кручением, надо к лагранжиану материальных полей добавить лагранжиан гравитационного поля и поля кручения. В классической теории гравитации с кручением наибольшее распространение получил вариант, названный теорией Эйнштейна — Картана [92, 147, 176]., когда в качестве лагранжиана выбирается, как и в ОТО, скалярная кривизна

$$L = -\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-g}\,\tilde{R}(g,\ Q) + L_\psi. \tag{4.3}$$

В случае антисимметричного кручения

$$\tilde{R}(g,\ Q) = R(g) - Q^2,$$

а лагранжиан (4.3), принимающий вид лагранжиана (4.1), можно обобщить до лагранжиана

$$L = -\frac{1}{\varkappa}\sqrt{-g}\,R(g) + \varepsilon\sqrt{-g}\,Q^2 + L_\psi \tag{4.4}$$

с негравитационной константой взаимодействия с полем кручения ε; L_ψ обозначает лагранжиан дираковского поля в пространстве с кручением. Вариация лагранжиана (4.4) по полям ψ приводит к уравнению Дирака в пространстве Римана — Картана

$$\gamma^\mu \tilde{D}_\mu \psi = 0. \tag{4.5}$$

Вариация L по гравитационному полю дает уравнения Эйнштейна, в правой части которых стоит тензор энергии-импульса фермионов и поля кручения. Наконец, вариация лагранжиана по тензору кручения приводит к алгебраиче-

скому уравнению, выражающему кручение через спиновый фермионный ток

$$\varepsilon Q = \frac{1}{2} J_{\psi}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в уравнение (4.5), получаем нелинейное спинорное уравнение Иваненко (1938) в гравитационном поле

$$\gamma^{\mu} D^{\mu}\psi + \frac{3}{8\varepsilon}(\psi\gamma_{\mu}\gamma_{5}\psi)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi = 0. \tag{4.7}$$

Важно подчеркнуть, что это уравнение (в плоском пространстве) в 50-е годы было положено в основу нелинейной спинорной теории Гейзенберга — Иваненко, в которой кубическая нелинейность рассматривалась как фундаментальный тип взаимодействия (в частности, был получен ряд близких к эмпирическим значениям масс и констант связи) [27, 35, 48]. С позиций калибровочной теории такая нелинейность представляет своего рода инфракрасный предел взаимодействия посредством калибровочных полей. С другой стороны, такое взаимодействие оказывается ответственным за образование конденсата фермионных пар и в сверхпроводимости, и в полевых моделях (см. разд. 3.5). Это вновь возбудило к нему большой интерес, в частности, в применении к упоминавшимся (см. разд. 3.2) преонным моделям [175].

Связь кручения с нелинейностью Иваненко — Гейзенберга была впервые установлена В. И. Родичевым в отсутствие гравитационного поля, а затем рядом авторов обобщена на случай произвольного пространства Римана — Картана [65].

Из уравнения (4.6) видно, что источником кручения является спин фермионных полей. И это верно для любого лагранжиана поля кручения. В теории Эйнштейна — Картана связь кручения со спином алгебраическая (нединамическая). Это значит, что кручение есть только там, где имеются частицы со спином. В отсутствие таких частиц теория Эйнштейна — Картана сводится к ОТО.

Подчеркнем, что источником поля кручения является именно спин материальных полей. Электромагнитное поле и другие калибровочные поля, хотя и имеют спин 1, если строго придерживаться калибровочной теории, не являются источником кручения.

Еще одним источником кручения, который часто фигурирует в теории Эйнштейна — Картана, является спиновая жидкость (см. [54, 92]). Она моделирует вещество звезд и Вселенной и представляет собой идеальную жидкость, каждый элемент которой характеризуется импульсом, энергией и внутренним угловым моментом, отличным от нуля в системе

отсчета, в которой данный элемент покоится. Спиновая жидкость, например, широко применяется в космологических моделях.

К каким эффектам приводит учет кручения в сравнении с эйнштейновской ОТО? Это прежде всего движение частиц со спином в поле кручения. Кручение может вызывать дополнительное расщепление линий электрона в атоме, нарушение CP-инвариантности в распадах частиц и т. д. Все эти эффекты могут служить целям экспериментального обнаружения кручения. Однако остается открытым вопрос о величине константы связи поля кручения. Если она равна гравитационной, то все лабораторные эффекты очень малы и не поддаются в настоящее время экспериментальной проверке.

Более впечатляющим является учет кручения в космологических моделях. Кручение может остановить космологический и астрофизический коллапсы. Дело в том, что в уравнениях Эйнштейна в пространстве с кручением

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

выделение кручения из левой части и перенос его в правую часть приводят к эффективному тензору энергии-импульса, который может не удовлетворять сильному энергетическому условию и тем самым нарушать условия теорем Хокинга — Пенроуза [92]. Действительно, как в теории Эйнштейна — Картана, так и в моделях с динамическим кручением был получен целый ряд регулярных по метрике космологических решений [67, 154, 161]. Некоторые квантовые эффекты, связанные с кручением, мы обсудим в следующем разделе.

Наряду с теорией гравитации с кручением, среди расширений ОТО долгое время пользовалась популярностью так называемая скалярно-тензорная теория [19, 105]. Она строилась из требования конформной инвариантности.

Конформным отображением называется отображение псевдориманова пространства (X, g) в псевдориманово пространство (X, g') посредством умножения метрики на некоторую нигде не нулевую скалярную функцию $g_{\mu\nu}(x) = k^2(x) g_{\mu\nu}(x)$. Конформные отображения следует отличать от обычных растяжений из калибровочной группы $GL(4, R)(X)$. Первые не преобразуют контравариантные тензоры $A^{\cdots}$ и приводят к изменению длины вектора

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \to k^2 g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

Вторые преобразуют и метрику $g_{\mu\nu} \to k^2 g_{\mu\nu}$, и векторы $A^\mu \to \to k^{-1} A^\mu$, так что длина последних остается инвариантной [142].

В конформной теории помимо тензоров вводятся тензорные плотности. Тензорной плотностью $A^{\cdots}_{\cdots}$ веса n называется величина, преобразующаяся при конформных отображениях по закону

$$A^{\cdots}_{\cdots} \to k^n(x)\, A^{\cdots}_{\cdots}.$$

Тензорные плотности различного веса могут строиться умножением на скалярную плотность φ веса 1 в соответствующей степени

$$A^{\cdots}_{\cdots} \to \varphi^n A^{\cdots}_{\cdots}.$$

Так, метрика $g_{\mu\nu}$ в конформной теории имеет вес 2 и может быть образована из конформно инвариантной метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$ умножением на φ^2:

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \bar{g}_{\mu\nu}$$

Контравариантный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ имеет вес -2.

В дальнейшем удобно обозначать $A^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ тензорные плотности веса $(n-m)$ и выражать через них и скалярную плотность φ тензорные плотности того же ранга, но другого веса.

Связность Γ в конформной геометрии Вейля осуществляет неметрический перенос (3.2). Условие (3.2) определяет связность Γ не однозначно, а с точностью до кручения, которое в геометрии Вейля полагается равным нулю, и

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\} + (\delta^{\alpha}_{\nu} B_{\mu} + \delta^{\alpha}_{\mu} B_{\nu} - g_{\nu\mu} B^{\alpha}). \tag{4.8}$$

Связность (4.8) действует на тензорные плотности $A^{\cdots}_{\cdots}$ обычным образом, а для тензорных плотностей другого веса в (4.8) добавляется член $g_{\alpha\nu} B_{\mu} I$, где I — оператор, действующий только на скалярную плотность φ ($I\varphi = n\varphi^n$).

Отсюда, в частности, следует, что длина вектора, будучи скалярной плотностью веса 2, при параллельном переносе не сохраняется. Это служило серьезным поводом для возражений против геометрии Вейля.

Связность (4.8) преобразуется относительно конформных отображений обычным нетензорным образом, но если при этом переобозначить

$$B_{\mu} = B_{\mu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \ln k^2(x), \tag{4.9}$$

то связность $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ становится конформно инвариантной.

Преобразования (4.9) напоминают калибровочные преобразования в электродинамике, что и побудило в свое время Г. Вейля попытаться интерпретировать коэффициенты B_{μ} как электромагнитный потенциал.

Для построения конформно инвариантной теории коэффициенты B_μ достаточно задать в градиентном виде $B_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu \ln \Phi^2$, где Φ — скалярная плотность веса -1. Именно такой выбор делается в скалярно-тензорной теории. Таким образом, эта теория тоже может быть отнесена к аффинно-метрическим обобщениям ОТО, хотя динамическими переменными в ней являются метрика g и скалярное поле Φ.

Лагранжиан скалярно-тензорной теории выбирается в гильберт-эйнштейновском виде. Но при этом надо учесть, что скалярная кривизна $\tilde{R}(g, \Phi)$ имеет вес -2, множитель $\sqrt{-g}$, вес 4, и в результате лагранжиан $\sqrt{-g}\tilde{R}(g, \Phi)$ оказывается конформно неинвариантным. Чтобы этого избежать, в него добавляют множитель Φ^2 и он принимает окончательный вид

$$L = -\sqrt{-g}\,\Phi^2 \tilde{R}(\Phi, g) = -\sqrt{-g}\,[\Phi^2 R(g) - \lambda^2 \Phi^2 \Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha}],$$

где λ — константа, получаемая переобозначением $\Phi \to \lambda \times \times \Phi$, $L \to \lambda^2 L$.

Скалярно-тензорная теория зародилась на базе идеи П. Дирака 1938 г. о том, что гравитационная константа G может меняться. Он исходил из приближенных соотношений, связывающих космологические величины и величины из области элементарных частиц, например,

$$\left(\frac{\hbar^2 H_0}{Gc}\right)^{1/2} \approx m_\pi,$$

где m_π — масса пиона, а H_0 — постоянная Хаббла. П. Дирак постулировал их в качестве фундаментальных соотношений, что получило название гипотезы «больших» чисел, поскольку все безразмерные комбинации космологической, гравитационной постоянных и основных констант из мира элементарных частиц удивительным образом имеют один и тот же порядок 10^{-40} [76]. Однако одна из этих констант — постоянная Хаббла — изменяется со временем, что наводит на мысль, что и другие константы, а именно гравитационная постоянная G, должны изменяться.

Эта идея развивалась в 50-е годы П. Иорданом, а затем К. Брансом и Р. Дикке, предложившими в 1961 г. современный вариант скалярно-тензорной теории, в котором роль гравитационной постоянной играет скалярное поле.

В 1973 г. П. Дирак на базе скалярно-тензорной теории вновь вернулся к своим старым идеям. Он, в частности, предположил, что в природе существует, наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$, и конформно инвариантная метрика $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (см. работу [76]), и построил космологическую модель, в которой наблюдаемые

эффекты расширения Вселенной описывались как «фиктивные», вызванные наличием разных метрик.

Скалярно-тензорная теория получила в 60-е годы широкое распространение. Она приводила к отличной от единицы постньютоновской константе γ и проверялась, наряду с ОТО, во многих экспериментах. В этой теории был получен ряд интересных решений. Однако проведенные в 1976 г. эксперименты по лазерной локации Луны не подтвердили с высокой точностью предсказываемый скалярно-тензорной теорией эффект Нордтведта [116] и наложили очень сильное ограничение на константу λ. После этого интерес к этой теории резко упал. Впрочем, в последнее время появились работы, в которых показывается, что при некоторых условиях константа скалярно-тензорной теории, не жертвуя самой теорией, может оказаться в рамках, требуемых экспериментом [135].

Аффинно-метрические теории — это отнюдь не единственный путь обобщения эйнштейновской ОТО. В разделе 3.6 будут рассмотрены многомерная теория Калуца — Клейна и теория супергравитации, которые в настоящее время считаются наиболее перспективными кандидатами на объединение гравитации и элементарных частиц.

В заключение коснемся вопросов измеримости, которые, как известно, приобрели большое значение в квантовой механике, приведя к соотношению неопределенностей Гейзенберга, и подробно анализировались в квантовой электродинамике (Н. Бор, П. Иордан, В. А. Фок и др.). Подобно тому, как в абелевом случае электродинамики можно сколь угодно точно в принципе измерить компоненты поля, применяя пробные тела большого заряда (Н. Бор, Л. Розенфельд), для неабелевых калибровочных полей также можно, несмотря на нелинейность, измерить, например, компоненты локальной лоренцевой связности (с кручением) пробными телами большого спина, используя уравнение движения тел под действием калибровочного поля (Ю. Н. Обухов и др.). Конечно, этот анализ нужно проводить с учетом размеров тел и других обстоятельств [49б]. Проблемы измеримости в теории гравитации впервые проанализировал М. П. Бронштейн [29]. Установлено, что благодаря наличию размерной константы связи здесь существует предельное значение минимальной ошибки для компонент метрики и связности, а также минимальная длина порядка планковской, равная 10^{-33} см. По общему мнению, современные фундаментальные понятия о структуре пространства-времени, квантовые и релятивистские закономерности в запланковской квантово-гравитационной области могут потерять обычный смысл.

5. КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Как и построение калибровочной теории гравитации, квантование гравитации является необходимым шагом, чтобы вывести теорию гравитации на один уровень с теориями других фундаментальных взаимодействий.

Сейчас в квантовой теории поля имеются два подхода к квантованию полей. Первый, традиционный, классическое изложение которого дано в работе [10], исходным пунктом ставит явное построение алгебры операторов квантованных полей и пространства ее представлений, векторы которого описывают состояния системы этих полей. Реально измеримыми величинами считаются средние значения операторов в том или ином состоянии и амплитуды перехода между состояниями.

Второй подход опирается на выдвинутые Р. Фейнманом идеи квантования с помощью суммирования по траекториям [118]. Суть его состоит в том, что, не углубляясь в вопросы построения алгебры операторов квантованных полей, он прямо дает выражения их вакуумных средних через функциональные интегралы по классическим полям. Это, а также то, что с его помощью удалось проквантовать калибровочные поля, сделало этот подход очень популярным. Его наиболее полное изложение дано в работе [93].

В традиционной формулировке квантовой теории поля классические поля $\varphi(x)$ раскладываются в суперпозицию плосковолновых решений $\varphi_{p\alpha}$ уравнений свободного поля (Клейна — Гордона для скалярного поля, Дирака — для фермионного поля), характеризуемых определенными значениями энергии ε, импульса $\boldsymbol{p}$ и спина α

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha} \int d\boldsymbol{p}\, [a^{+}_{\alpha}(\boldsymbol{p})\, \varphi^{+}_{\boldsymbol{p},\alpha}(x) + a^{-}_{\alpha}(\boldsymbol{p})\, \varphi^{-}_{\boldsymbol{p},\alpha}(x)]. \qquad (5.1)$$

При одном и том же импульсе $\boldsymbol{p}$ энергия может принимать и положительное, и отрицательное значения $\varepsilon = \pm \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ (m — масса поля), и соответствующие решения в (5.1) (они называются соответственно положительно и отрицательно частотными) обозначены φ^{+} и φ^{-}.

Квантование поля φ состоит в том, что коэффициенты разложения (5.1) считаются операторами, удовлетворяющими коммутационным для бозонов (знак —) и антикоммутационным для фермионов (знак +) соотношениям

$$[a^{-}_{\alpha}(\boldsymbol{p}),\ \overset{*}{a}{}^{+}_{\beta}(\boldsymbol{k})]_{\mp} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k});$$
$$[\overset{*}{a}{}^{-}_{\alpha}(\boldsymbol{p}),\ a^{+}_{\beta}(\boldsymbol{k})]_{\mp} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}), \qquad (5.2)$$

где $\delta(y)$ — так называемая дельта-функция, которая отлична от нуля только в точке $y = 0$ и обладает свойством $\int f(y)\,\delta(y - y')\,dy = f(y')$. Знак * в (5.2) означает переход к зарядово-сопряженной функции, описывающей частицу с противоположным электрическим зарядом (античастицу). Остальные коммутационные (антикоммутационные) соотношения равны нулю.

Операторы $a_\alpha^+(\boldsymbol{p})$ ($\overset{*}{a}{}_\alpha^+(\boldsymbol{p})$) интерпретируются как операторы рождения частицы (античастицы) массы m, импульса $\boldsymbol{p}$, спина α, а $a_\alpha^-(\boldsymbol{p})$ ($\overset{*}{a}{}_\alpha^-(\boldsymbol{p})$) — как операторы уничтожения той же частицы (античастицы). Алгебра, образованная этими операторами, называется алгеброй канонических коммутационных (антикоммутационных) соотношений (соответственно ККС и КАС).

Отличие правил квантования для бозонов (как говорят, по Бозе — Эйнштейну) от квантования для фермионов (по Ферми — Дираку) связано с тем, что последние удовлетворяют принципу Паули, постулирующему, что никакие два фермиона не могут находиться в одном и том же состоянии, т. е. $a_\alpha^+(\boldsymbol{p})\,a_\alpha^+(\boldsymbol{p}) = 0$. Правильность квантования по Ферми — Дираку следует и из выражения для оператора энергии (гамильтониана):

$$H = \int d\boldsymbol{p}\varepsilon\left[\sum_\alpha \left(\overset{*}{a}{}_\alpha^+(\boldsymbol{p})\,a_\alpha^-(\boldsymbol{p}) \pm \overset{*}{a}{}_\alpha^-(\boldsymbol{p})\,a_\alpha^+(\boldsymbol{p})\right)\right], \qquad (5.3)$$

который для фермионов (знак —) становится положительно определенным, только если классические спинорные поля считать антикоммутирующими, а квантовые — квантованными по Ферми — Дираку.

Среди разных схем квантования, приводящих к операторным соотношениям (5.2), мы выделим так называемое каноническое квантование. В этой схеме полевая система записывается в гамильтоновом виде (см. разд. 2.2). Ее динамическими переменными являются канонические координаты — полевые функции φ^A и канонические импульсы $p_A = \partial L/\partial\dot{\varphi}^A$.

Правила квантования обобщают известное коммутационное соотношение квантовой механики и имеют вид

$$[p_A(\boldsymbol{x}, t),\ \varphi^B(\boldsymbol{x}', t)] = -i\delta_A^B\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \qquad (5.4)$$

Подставляя в (5.4) выражение p^A через полевые функции φ^A и переходя к разложению (5.1), получаем соотношения (5.2).

Достоинством канонической схемы является то, что она позволяет корректно квантовать системы со связями, когда не все канонические переменные являются динамическими [41].

Операторы a^+, a^-, удовлетворяющие соотношениям (5.2), являются квантовыми операторами свободных полей. Тем не менее посредством их удается описывать взаимодействие частиц, полагая, что оно осуществляется путем обмена свободными частицами, и рассчитывая его по теории возмущений.

Состояния свободных квантовых полей описываются представлением Фока алгебр ККС и КАС. Все состояния получаются из одного состояния $|>$, называемого фоковским вакуумом, действием на него всевозможных конечных произведений операторов рождения и уничтожения. Сам фоковский вакуум однозначно определяется условием $a^-|> = 0$ для всех операторов уничтожения a^-, т. е. представляет собой бесчастичное состояние. Тогда состояние $|\alpha, \boldsymbol{p} > = a^+_\alpha(\boldsymbol{p})|>$ можно рассматривать как состояние с одной частицей импульса $\boldsymbol{p}$ и спинового индекса α; $a^+_\beta(k)\, a^+_\alpha(\boldsymbol{p})\,|>$ — как состояние с двумя частицами и т. д.

Приведем теперь теорему Вика [10], важную для понимания связи традиционной формулировки квантовой теории поля и метода функционального интегрирования.

Нормальным называется произведение операторов рождения и уничтожения, в котором слева стоят только операторы рождения, а справа — только операторы уничтожения. Очевидно, что вакуумное среднее от нормального произведения равно нулю.

Теорема Вика утверждает, что всякое произведение операторов $a_1 \ldots a_n$, используя соотношения (5.2), можно представить в виде некоторой суммы нормальных произведений и числового выражения, которое называется спариванием и обозначается $\langle a_1 \ldots a_n \rangle$. Причем спаривание зависит от операторов $a_1, \ldots, a_n$, как если бы это были коммутирующие (антикоммутирующие) классические поля. Беря теперь среднее по вакууму от данного произведения операторов, находим, что оно как раз равно спариванию $\langle a_1 \ldots a_n \rangle$. Это значит, что все вакуумные средние операторов квантованных полей могут быть представлены как некоторые выражения от их неквантовых классических аналогов, на чем и основан метод функционального интегрирования.

Этот метод опирается на утверждение, доказываемое в аксиоматической квантовой теории, что представление алгебры операторов (при некоторых условиях на нее) можно задать, определив на алгебре линейную комплексную функцию (форму). В квантовой теории поля такой формой являются всевозможные вакуумные средние $\langle |\varphi \ldots \varphi| \rangle$ (полные связные функции Грина $\Delta(\varphi, \ldots \varphi)$), которые выражаются через

функциональные интегралы по полям φ

$$\Delta(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = -i^n \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\Big| J=0;$$
$$Z = \int [d\varphi] \exp\left\{iS(\varphi) + i\int dx J(x)\varphi(x)\right\}, \tag{5.5}$$

где $S(\varphi)$ — функционал действия классических полей φ, к которому добавлены так называемые источники J. Величина Z называется производящим функционалом функций Грина Δ. Он их полностью определяет.

Зная лагранжиан полей φ, интегралы в выражениях (5.5) можно вычислить (что является хотя и сложной, но все же технической задачей), а тем самым получить полную информацию о данной квантовой системе. Приведем основные правила такого вычисления.

1. Оно базируется на умении вычислять так называемые гауссовы интегралы вида

$$I = \int [d\varphi] \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, M\varphi) + (J, \varphi)\right\},$$

где M — линейный оператор на полях φ, а скалярное произведение $(\varphi, \varphi') = \int dx\, \varphi(x)\varphi'(x)$. Если оператор M невырожден, т. е. имеет обратный, то

$$I = (\det M)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(J, M^{-1}J)\right\}. \tag{5.6}$$

При квантовании фермионов используются гауссовы интегралы по антикоммутирующим переменным $\bar{\theta}$, θ. В этом случае

$$I = \int [d\bar{\theta}][d\theta] \exp\{-(\bar{\theta}, M\theta) + (\bar{\eta}, \theta) + (\bar{\theta}, \eta)\} = \det M \exp(\bar{\eta}, M^{-1}\eta). \tag{5.7}$$

2. Если действие S полей φ квадратично по φ, например, действие S_0 свободного поля, то интегралы в (5.5) являются гауссовыми. Если же S содержит члены взаимодействия, то подынтегральное выражение раскладывают в ряд

$$\exp iS = \exp i(S_0 + S_{\text{вз}}) = \left[1 + iS_{\text{вз}} + \frac{(iS_{\text{вз}})^2}{2} + \ldots\right]\exp iS_0$$

и используют для взятия интеграла формулу

$$\int [d\varphi]\, \varphi_1 \ldots \varphi_n \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi, M\varphi) + (J, \varphi)\right\} = \frac{\partial}{\partial J_1}\cdots\frac{\partial}{\partial J_n}\exp\left\{\frac{1}{2}(J, M^{-1}J)\right\}(\det M)^{-1/2}.$$

Такое разложение представляет собой не что иное, как разложение в ряд по теории возмущений на языке диаграмм Фейнмана. Поэтому, хотя строгое математическое обоснование представлений функций Грина функциональными интегралами отсутствует, на физическом уровне строгости его широко используют именно как удобный способ записи теории возмущений.

3. Однако в релятивистской теории поля оператор M в гауссовых интегралах (5.6), (5.7) вырожден. Например, для скалярного поля оператор M в импульсном представлении имеет вид $M(p, p') = (p^2 + m^2)\,\delta(p + p')$, и он вырожден при $p_0^2 = m^2 + p^2$. Поэтому, чтобы можно было применить формулы гауссова интегрирования, величину $M(p, p')$ сдвигают в комплексную область, или добавляя к ней малый член $i\varepsilon$, или проводя так называемую операцию евклидизации, заменяя p_0 на ip_0 и переходя тем самым от пространства Минковского к евклидову пространству. После вычислений ε устремляют к нулю, или, соответственно, возвращаются в пространство Минковского. Требование невырожденности оператора M накладывает также ограничение на класс полевых функций φ. В частности, они должны удовлетворять определенным граничным условиям [107].

4. Выражение (5.5) для производящего функционала справедливо только, если в Z интегрирование ведется по независимым динамическим переменным. Для систем со связями, каковыми являются калибровочные и гравитационные поля, интегрирование в Z тоже может проводиться по всем переменным, но в подынтегральное выражение входят добавочные члены, учитывающие калибровочное условие (см. ниже).

5. Подчеркнем, что общие выражения через функциональные интегралы типа (5.5)—(5.7) носят формальный характер и принимают реальные значения только в рамках теории возмущений и определенной процедуры регуляризации и перенормировки (устранения расходимостей). В частности, широкое применение получила размерная регуляризация, когда вычисления ведутся в пространстве с размерностью $4 - \varepsilon$.

Достоинством представления функций Грина через функциональные интегралы (5.5) является то, что оно позволяет в явном виде моделировать различные свойства вакуума в полевых моделях.

До недавнего времени доминировало представление о вакууме как о некотором бесчастичном состоянии с нулевыми физическими характеристиками. В квантовой теории поля таковым является фоковский вакуум. Однако оказалось, что фоковское представление алгебр ККС и КАС описывает главным образом свободные системы [17]. В связи с этим возникло

представление о «физическом» вакууме, близкое к понятию основного состояния. В отличие от «голого» фоковского вакуума, физический вакуум имеет ненулевые характеристики. Тем самым он неинвариантен относительно соответствующих преобразований симметрий, т. е. имеется физическая величина φ с ненулевым вакуумным средним $\langle\varphi\rangle \neq 0$, такая, что $g\varphi \neq \varphi$ для некоторого преобразования симметрий. Особенно важно, что поля и частицы могут взаимодействовать с неинвариантным вакуумом.

Согласно теореме Коулмена, доказываемой в рамках аксиоматической квантовой теории, нарушение симметрии в квантовой полевой системе всегда сопровождается нарушением симметрии ее вакуума [30]. Последнее называется спонтанным, если при этом сохраняется ковариантность лагранжиана системы относительно преобразований нарушенных симметрий.

Спонтанное нарушение симметрии вакуума имеет место во многих моделях квантовой теории поля и статистики. Оно является, скорее, правилом для систем с бесконечным числом степеней свободы, операторные алгебры которых допускают неэквивалентные неприводимые представления, а значит, и неэквивалентные вакуумы [30].

В квантовых полевых моделях роль вакуумных средних играют полные связные функции Грина. Используя представление (5.5), можно показать, что нарушение инвариантности функций Грина, моделирующее неинвариантность вакуума, возможно только при нарушении инвариантности классического действия $S(\varphi)$ относительно глобальной группы симметрий G. При этом, чтобы нарушение симметрии было спонтанным, действие S должно оставаться G-ковариантным как функционал полей φ. Пример такого нарушения симметрии дает взаимодействие квантовых полей с внешним классическим полем.

Это важно, поскольку позволяет моделировать неинвариантность вакуума в квантовых полевых моделях введением соответствующего классического хиггс-голдстоуновского поля σ, причем задавать и учитывать такую неинвариантность уже на уровне классической модели. Для этого в действие $S(\varphi)$ включают соответствующие члены $\varphi - \sigma$ взаимодействия, но в производящем функционале Z интегрирование по полям σ не производится. Присутствие внешнего поля σ порождает G-неинвариантность действия $S(\varphi, \sigma)$ как функционала полей φ, который, однако, будучи G-инвариантным по φ и σ, остается G-ковариантным по φ.

Для моделирования спонтанного нарушения симметрии хиггс-голдстоуновское поле достаточно ввести как внешнее

поле. Естественно, однако, предположить, что неинвариантность вакуума системы есть следствие каких-то свойств самой этой системы. Их можно учесть, если принять во внимание взаимодействие поля σ с квантованными полями φ. Сделать это позволяет метод динамического спонтанного нарушения симметрии [146, 174]. Для этого к действию $S(\varphi, \sigma)$ добавляют некоторое затравочное действие S_σ поля σ и включают в производящий функционал Z интегрирование по $d\sigma$ так, что

$$Z = \int [d\varphi][d\sigma] \exp\{iS(\varphi, \sigma) + S_\sigma\}. \tag{5.8}$$

Интегрирование Z по полям φ, в результате которого производящий функционал принимает вид

$$Z = \int [d\sigma] \exp\{iS_{\text{эфф}} + iS_\sigma\},$$

приводит к эффективному действию $S_{\text{эфф}}$ для поля σ. Это интегрирование соответствует суммированию диаграмм Фейнмана с внутренними линиями полей φ, и $S_{\text{эфф}}$ учитывает квантовые поправки к затравочному действию S_σ, вызванные поляризацией вакуума полей φ. С неинвариантным вакуумом связывают классическую компоненту σ_0 поля σ, определяемую как решение уравнения $\delta(S_{\text{эфф}} + S_\sigma)/\delta\sigma = 0$, отвечающее минимуму энергии.

Метод построения эффективного действия используется не только в моделях со спонтанным нарушением симметрий. Он хорошо известен в квантовой электродинамике, где позволяет воспроизвести динамическим путем лагранжиан электромагнитного поля и нелинейные добавки к нему, в калибровочной теории, в теории гравитации [132, 140].

Моделирование неинвариантности вакуума квантовых полевых систем введением взаимодействия с классическим хиггсовским полем σ оставляет открытым вопрос об истинной физической природе как самого этого вакуума, так и поля σ.

Наиболее перспективными на сегодняшний день представляются попытки описать хиггс-голдстоуновское поле как коллективное поле связанных пар материальных полей (типа куперовских пар в сверхпроводимости), а неинвариантность вакуума связать с образованием конденсата таких пар [104, 153, 174]. Вид взаимодействия материальных полей, приводящих к образованию такого конденсата, может быть восстановлен интегрированием производящего функционала (5.8) по полям σ. Это 4-фермионное нелинейное взаимодействие типа $(\bar{\psi}\tau\psi)^2$, где τ — некоторые матрицы.

Указанный подход восходит к работам Й. Намбу и Дж. Иона-Ласинио, В. Г. Вакса и А. И. Ларкина (см. [30]),

А. Салама, Т. Егучи. Он основывается на близости лагранжианов, описывающих коллективные поля, хиггсовское поле (лагранжиан Хиггса (2.17)) и поле куперовских пар в теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау. Такая близость дала основание для поисков в полевых системах явлений типа фазовых переходов [59, 133, 171]. В частности, как фазовый переход трактуется спонтанное нарушение симметрий в моделях Большого объединения, обусловливаемое появлением при определенной температуре ненулевого хиггсовского поля, и, как было показано (см. разд. 2.5), такой фазовый переход лег в основу варианта Гута — Линде «инфляционной» модели Вселенной.

Присутствие в функционале действия хиггс-голдстоуновского (внешнего) поля не только вызывает спонтанное нарушение внутренних симметрий, но, если оно не постоянно, нарушает и трансляционную симметрию вакуума. В частности, если оно зависит от времени, вакуум становится нестационарным. Это означает, что, если вакуум $|t\rangle$ в момент t считать безчастичным, то вакуум $|t'\rangle$ в момент t' относительно вакуума $|t\rangle$ таковым уже не будет, и переход от $|t\rangle$ к $|t'\rangle$ сопровождается рождением частиц относительно вакуума $|t\rangle$.

Здесь возникает вопрос, что вообще следует понимать под частицей в присутствии неинвариантного физического вакуума (или внешнего поля). Окончательный ответ на него пока не дан (см. [9, 31]).

Понятие частицы хорошо определено для свободных квантованных полей. В этом случае имеется разделение решений свободных полевых уравнений на положительно и отрицательно частотные. Сопоставляя первым операторы a^+, а вторым — a^-, строят алгебру ККС или КАС. Поскольку система свободна, ее гамильтониан, выраженный через операторы a^+, a^-, имеет диагональный вид (5.3), т. е. в нем нет членов типа $a_\alpha a_{\beta+\alpha}$ и a^+a^+, a^-a^-. Беря коммутатор гамильтониана (5.3) с операторами a^+ и a^-, получаем с учетом соотношений (5.2) $[H, a^+] = \varepsilon a^+$, $[H, a^-] = -\varepsilon a^-$. Это и позволяет интерпретировать операторы a^+ как операторы рождения частиц, а a^- — как операторы их уничтожения, поскольку, если $|E\rangle$ — состояние с определенным значением энергии E (т. е. $H|E\rangle = E|E\rangle$), то $a^+|E\rangle$ будет состоянием с энергией $E+\varepsilon$, а $a^-|E\rangle$ — с энергией $E-\varepsilon$.

Следовательно, чтобы в какой-либо физической системе можно было ввести понятие частицы, как минимум, операторы квантованных полей в ней должны образовывать алгебру ККС или КАС, а гамильтониан этой системы должен иметь диагональный вид (5.3) относительно этих операторов.

Как это сделать для квантовой системы во внешнем поле (или с неинвариантным вакуумом)? Предлагается следующий (но не единственный) рецепт [31]. Ищется полная система решений уравнений во внешнем поле и строится гамильтониан. Эта система квантуется. При этом возникает главная проблема, как сопоставлять операторы a^+ и a^-, чтобы гамильтониан системы приобрел диагональный вид.

Допустим, это удается сделать из некоторых соображений в какой-то момент времени t_0 (например, при $t_0 = -\infty$ внешнее поле отсутствует и система свободна). Тогда это можно сделать и в другие моменты времени, используя преобразование Боголюбова

$$\begin{aligned} a_A^-(t_0) &= \Phi_A^B a_B^-(t) + \Psi_A^B(t)\, a_B^+(t); \\ a_A^+(t_0) &= \Phi_A^{B*} a^-(t) + \Psi_A^B(t) a_B^+(t) \end{aligned} \tag{5.9}$$

(преобразования для a^+ получаются из (5.9) эрмитовым сопряжением). Надо постараться так подобрать коэффициенты Φ и Ψ преобразования (5.9), чтобы операторы $a^+(t)$, $a^-(t)$ удовлетворяли тем же операторным соотношениям (5.2), что и $a^+(t_0)$, $a^-(t_0)$, и гамильтониан $H(t)$ по $a^+(t)$ и $a^-(t)$ был диагонален.

Теперь для каждого момента t можно определить свой вакуум $|t\rangle$, такой, что $a_A^-(t)\,|t\rangle = 0$ для всех A, и найти число частиц, родившихся (относительно вакуума $|t_0\rangle$) при переходе от $|t_0\rangle$ к $|t\rangle$. Оно равно $\sum\limits_A \langle t_0|\, a_A^+(t)\, a_A^-(t)\,|t_0\rangle$.

Этот способ описания частиц называется методом диагонализации мгновенного гамильтониана.

Обратимся теперь непосредственно к квантовой теории гравитации. Мы рассмотрим здесь три вопроса: рождение частиц во внешнем гравитационном поле, индуцированная гравитация и проблемы квантования гравитационного поля. Первые два из них относятся к взаимодействию квантованных полей материи с классическим гравитационным полем. Эффекты этого взаимодействия не зависят от гравитационной постоянной и могут быть не так уж малы.

Есть реальная физическая модель, в которой рождение частиц в гравитационном поле можно и нужно учесть. Это модель расширяющейся Вселенной. В частности, возникает вопрос, каково происхождение частиц и полей во Вселенной. Были ли они изначально, или родились в результате её расширения?

Рождение частиц в гравитационном поле можно описывать упомянутым выше методом диагонализации мгновенного гамильтониана [31], хотя применение его к гравитационному

полю вызывает дополнительные трудности. Дело в том, что для определения интегральной величины — гамильтониана — гравитационное поле должно допускать времениподобное поле Киллинга (см. разд. 2.3), что, конечно, не всегда возможно. Кроме того, определение частиц существенно зависит от выбора системы отсчета. Так, если две системы отсчета взаимно неинерциальны (что, согласно принципу относительности, не нарушает их эквивалентность), то определенные в них операторы частиц будут связаны нетривиальными преобразованиями Боголюбова. Даже в плоском пространстве переход к равноускоренной системе отсчета сопровождается рождением частиц [9]. Причем, как показывает анализ процесса измерения, это реальные частицы, которые могли бы регистрироваться ускоренно движущимся детектором.

В однородных космологических моделях (см. разд. 1.5) времениподобное поле Киллинга всегда существует. Это поле направлений глобального «космического» времени, ортогональное трехмерным пространственноподобным орбитам групп движений этих моделей. Вместе они образуют систему отсчета, относительно которой и рассматривается рождение частиц.

Рассмотрим рождение частиц в изотропной Вселенной с метрикой, даваемой выражением (5.5) в главе 1. Результаты расчетов следующие (см. [31]).

1. Безмассовые частицы в изотропной Вселенной не рождаются.

2. Рождение скалярных и спинорных частиц массы m происходит в основном в период $t \approx m^{-1}$ (например, для электрона это 10^{-21} с). При $t \gg m^{-1}$ их рождение прекращается.

3. Плотность энергии рожденных частиц в сравнении с плотностью энергии фона, определяющего метрику модели, чрезвычайно мала, меньше 10^{-30}. Поэтому никакого влияния на эволюции Вселенной Фридмана рождение частиц не оказывает. Однако в модели «инфляционной» Вселенной А. А. Старобинского именно рождение массивных частиц приводит к распаду скаляронной стадии и выходу на фридмановскую стадию «горячей» Вселенной.

Несколько большего эффекта рождения частиц (в основном за счет безмассовых частиц) ожидается в анизотропной Вселенной [31, 45]. Причем на саму Вселенную их рождение влияет очень сильно, вызывая ее быструю изотропизацию.

Как уже отмечалось, ряд соображений побуждает думать, что Вселенная на самой ранней стадии была анизотропна, а потом изотропизировалась, причем в течение очень малого времени, $t < 10^{-40}$ с. Методы классического описания такой быстрой изотропизации обеспечить не могут. Однако оказалось, что она может быть осуществлена за счет обратного

влияния на метрику родившихся частиц. Дело в том, что метрика

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(dx^1)^2 + a_2^2(t)(dx^2)^2 + a_3^2(t)(dx^3)^2,$$

которой можно описывать анизотропную Вселенную, имея в виду ее изотропизацию во Вселенную Фридмана при $a_1 = a_2 = a_3$, будучи подставленной в уравнения Эйнштейна, при $t \to 0$ имеет своей асимптотикой решение Казнера

$$a_i(t) = a_i t^{q_i}, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1, \quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

в пустом пространстве. Поэтому в некоторый момент времени вклад тензора энергии-импульса родившихся частиц в правую часть уравнений Эйнштейна оказывается доминирующим и вызывает за очень короткий период времени полную изотропизацию Вселенной.

Учет обратного влияния рожденных частиц на гравитационное поле осуществляется через вакуумное среднее тензора энергии-импульса квантованной материи $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, который подставляется в правую часть уравнений Эйнштейна. Величина $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ содержит не только вклад энергии-импульса рожденных частиц, но и так называемые поляризационные члены, которые выражаются через тензор кривизны самого гравитационного поля. Перенос их в левую часть уравнений Эйнштейна приводит к эффективным неэйнштейновским квадратичным по кривизне уравнениям гравитации. Такие модернизированные уравнения использовались, в частности, в модели А. А. Старобинского «инфляционной» Вселенной. Их можно представить как результат вариации некоторого эффективного квадратичного по кривизне действия гравитационного поля, учитывающего взаимодействие с квантованной материей.

В этой связи возникла идея, нельзя ли лагранжиан классического гравитационного поля построить полностью как индуцированный эффектами поляризации вакуума [132], тем более, что именно такой способ задания лагранжианов практикуется для хиггсовских полей внутренних симметрий. Обсудим этот вопрос [9, 132].

Пусть Z — производящий функционал (5.5) для системы не взаимодействующих между собой квантованных (для простоты скалярных) полей φ в присутствии классического гравитационного поля g

$$Z(J) = \int [d\varphi] \exp\left\{ iS(\varphi, g) + iS_g + i \int J(x)\varphi(x)\,dx \right\}.$$

Действие $S(\varphi, g)$ для таких полей имеет вид

$$S(\varphi, g) = -\frac{1}{2}\int dx\,dy\varphi(x)\,K_{xy}(g)\,\varphi(y);$$

$$K_{xy}(g) = (\Box + m^2 - i\varepsilon + \xi R)\sqrt{-g}\delta(x-y),$$

Рис. 39.

где S_g — некоторое затравочное действие гравитационного поля g.

Интеграл Z гауссов, и, следуя общему правилу построения эффективного лагранжиана, проинтегрируем его по $d\varphi$. Используя (5.6) и равенства $\det M = \exp(\mathrm{tr}\ln M)$, $\mathrm{tr}\,M = \int dx\sqrt{-g}M_{xx}$, получаем

$$Z[\mathcal{J}] = \exp\left[\frac{-i}{2}\mathrm{tr}\ln(K_{xy}^{-1}) + \frac{i}{2}\int J(x)\,K_{xy}^{-1}J(y)\,dx\,dy + iS_g\right].$$

Подставляя его в выражения (5.5) для функций Грина найдем, что

$$\Delta(\varphi(x)\varphi(y)) = -iK_{xy}^{-1} = iG(x, y).$$

На языке фейнмановских диаграмм функция Грина $iG(x, y)$ представляет собой оператор распространения (пропагатор) частицы φ из точки x в точку y. Отсюда для эффективного действия гравитационного поля получаем выражение

$$S_{\text{эфф}} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln(-G(x, y)). \qquad (5.10)$$

В таком виде оно формально и требует применения процедуры регуляризации и перенормировки (см. [9]), но мы в дальнейшем ограничимся качественными рассуждениями и приведем только результаты.

Отметим два обстоятельства. Первое, поскольку поля φ не взаимодействуют (т. е. диаграммы Феймана состоят только из одной линии) и в формуле (5.10) стоит оператор взятия следа tr (т. е. $x = y$), вклад в выражение для $S_{\text{эфф}}$ дает только одна вакуумная петля поля φ (см. рис. 39) во внешнем гравитационном поле.

Второе, гравитационное поле, входящее в пропагатор поля φ, в точках этой петли можно выразить с помощью нормальных координат (см. разд. 2.1), через сами эти координаты и тензор кривизны гравитационного поля в точке x. Это значит, что в $S_{\text{эфф}}$ должны возникнуть слагаемые, зависящие от кривизны гравитационного поля в точке.

Действительно, расчеты показывают, что $S_{\text{эфф}}$ можно разделить на две части: $S_{\text{эфф}} = S_{\text{гр}} + S_{\text{м}}$, одна из которых $S_{\text{гр}}$ является чисто геометрической. Это значит, что, во-первых,

она локальна, т. е. зависит от величин, задаваемых в точке, и $S_{\text{гр}} = \int L_{\text{гр}} dx$. Во-вторых, она не зависит от полевых функций φ, и $L_{\text{гр}}$ представляет собой некоторую комбинацию из тензора кривизны. Для скалярного поля, например,

$$L_{\text{гр}} = \sqrt{-g}\left\{-A + BR + C\left[\frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{180} R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)\Box R + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2\right]\right\},$$

где A, B, C — бесконечные при снятии регуляризации константы.

Действие $S_{\text{гр}}$ естественно прибавить к S_g и рассматривать $S_{\text{п}} = S_{\text{гр}} + S_{\text{м}}$ как перенормированное полное действие для гравитационного поля. При этом, как принято в квантовой теории поля, чтобы перенормированные константы

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = \left(\frac{\Lambda_3}{8\pi G_3} + A\right), \quad \frac{1}{16\pi G} = \left(B + \frac{1}{16\pi G_3}\right)$$

были конечны, считается, что бесконечны затравочные константы в S_g. Однако полученные таким образом константы G и Λ не вычисляемы, тогда как, следуя идее индуцированной гравитации, желательно было бы определить их из характеристик квантованных полей. Такая возможность есть.

Если квантованные поля φ не имеют массы и их лагранжиан конформно инвариантен, т. е. не имеет размерных констант, эффективный лагранжиан $L_{\text{гр}}$ не содержит конформно неинвариантных членов A и BR. Чтобы они были конформно инвариантны, нужно, чтобы константы A и B были размерными, а их не из чего строить, поскольку лагранжиан полей φ не содержит размерных констант. В результате $L_{\text{гр}}$ имеет вид

$$L_{\text{гр}} = C\left[aC_{\mu\beta\gamma\delta}C^{\mu\beta\gamma\delta} + b\left(R_{\mu\nu\gamma\delta}R^{\mu\nu\gamma\delta} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2\right) + cR^2\right], \qquad (5.11)$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля (см. разд. 1.5); C — бесконечная при снятии регуляризации константа; a, b, c — конечные константы, определяемые спином материальных полей.

Заметим, что, хотя лагранжиан (5.11) конформно инвариантен, след получаемого из него тензора энергии-импульса T^{μ}_{μ} при снятии регуляризации, вопреки тому, что должно быть, отличен от нуля и конечен. Этот факт получил название конформной аномалии. Он, как считают, связан с тем, что лагранжиан (5.11) конформно инвариантен только в пространстве с размерностью $n = 4$, а при регуляризации $n = 4 - \varepsilon$ — нет.

Физическим следствием существования конформной аномалии является то, что, хотя безмассовые частицы могут не рождаться, как в модели Фридмана, поляризация вакуума безмассовых полей имеет место и дает вклад в тензор энергии-импульса квантованной материи.

Эффективный лагранжиан (5.11) не приводит к перенормировке затравочных констант G_3 и Λ_3. Однако в ряде конформно инвариантных моделей при учете взаимодействия входящих в них полей возникают конечные конформные аномалии их тензора энергии-импульса в плоском пространстве (например, в калибровочных моделях). В искривленном пространстве при перенесении их в левую часть уравнений гравитационного поля они и приводят к конечным вычислимым перенормировкам гравитационной постоянной G и космологического члена Λ [132].

Решение уравнений гравитации, получаемых вариацией полного действия $S_{\text{эфф}} + S_g$, следуя аналогии с хиггсовским вакуумом, можно рассматривать как классический гравитационный «хиггсовский» вакуум, или проще как фоновую метрику $\gamma_{\mu\nu}$. Так это и делают [37, 126, 132], хотя возникает целый ряд вопросов.

1. Правомерно ли вообще выделение в полной метрике $g_{\mu\nu}$ классического фона: $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$? В калибровочной теории внутренних симметрий существование такого фона обосновывается экспериментальным подтверждением модели электрослабых взаимодействий Вейнберга — Салама. В теории гравитации таких аргументов в пользу введения хиггсовского фона нет, но в ряде вопросов он оказывается весьма полезным (например, для решения проблемы энергии гравитационного поля (см. разд. 2.3)), а при квантовании гравитации, если применять теорию возмущений, даже необходимым. В этом случае в лагранжиане гравитационного поля можно выделить квадратичную по h часть и использовать ее для определения пропагатора свободных полей h, тогда как остальные — рассматривать как члены $h - h$ и $h - \gamma$ взаимодействия.

2. Что может представлять из себя гравитационный хиггсовский вакуум? «Обычный» хиггсовский вакуум принадлежит даже не микромиру, а субмикромиру. В то же время в модели инфляционной Вселенной учет эффективных членов имеет даже не макроскопические, а космологические следствия. Не является ли тогда вообще все наблюдаемое классическое гравитационное поле хиггсовским вакуумом? Это значило бы, что оно, в отличие, например, от классического электромагнитного поля, не есть усреднение по квантам поля, а является, если так можно выразиться, существенно классическим. Примером такого макроскопического классического вакуума

служит конденсат куперовских пар в сверхпроводимости, хотя он и образован парами квантовых частиц — электронов.

3. Как выделить хиггсовский гравитационный фон из полной метрики? Указанным ли выше способом, или из других соображений — однозначного ответа пока нет. К тому же квантовые системы оказываются очень чувствительными к изменению такого фона, поскольку, как было отмечено, уже переход к неинерциальной системе отсчета (что тоже можно интерпретировать как изменение фона $\gamma \to \gamma'$) качественно меняет квантовую картину и приводит к рождению частиц.

4. Одной из моделей, объясняющей природу хиггсовского вакуума, является описание хиггс-голдстоуновского поля как коллективного, образованного парами материальных полей, а хиггсовского вакуума — как конденсата этих пар. Предпринимались попытки аналогичным образом представить и гравитационное поле, но они носят пока предварительный характер [19а, 168].

Взаимодействие квантованных полей материи с классическим гравитационным полем, пожалуй, единственные квантовые эффекты, в которых вклад гравитации может быть реален. Квантование самого гравитационного поля имеет пока, скорее, принципиальное значение ввиду чрезвычайной малости гравитационной константы связи $Gm^2 < 10^{-42}$ (m — масса частицы), тогда как для слабого взаимодействия константа связи равна 10^{-5}. В основном квантовогравитационные эффекты будут существенны в планковской области длин $G^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см и энергий $G^{-1/2} = 1{,}2 \cdot 10^{19}$ Гэв, которая пока представляется слишком «экзотической». Например, с учетом квантовой гравитации связывают надежды на устранение квантово-полевых расходимостей, которое эффективно выглядит как обрезание верхних значений импульсов частиц, но граница $m^{-1}G^{-1} \sim 10^{31}$ Гэв этого обрезания слишком высока для реальных моделей [102].

Однако есть диаграмма квантовой гравитации, которая не зависит от константы G. Это поляризационная петля для гравитона. Она дает вклад в эффективный гравитационный лагранжиан, сравнимый с вкладом поляризации вакуума материальных полей. Также, если гравитация является не обычным классическим полем, а имеет характер хиггсовского вакуума или даже конденсата, это может привести к эффектам вне планковской области.

Квантование слабого гравитационного поля в линейном приближении выполнено давно. Были подсчитаны различные процессы с участием гравитонов, которые фактически рассматривались как кванты поля спина 2 [48].

Полное квантование гравитации сталкивается с двумя трудностями: существенной нелинейностью гравитационного лагранжиана и тем, что теория гравитации является теорией со связями.

Существуют два основных подхода к квантованию гравитационного поля — первоначальный геометродинамический [13, 92] и получивший сейчас гораздо более широкое применение метод квантования с помощью функциональных интегралов [37, 61, 126].

Геометродинамический подход Уилера — де Витта исходит из гамильтоновой формулировки теории гравитации (см. разд. 2.2). В этом подходе каноническим координатам g_{ij}, N_μ и каноническим импульсам π^{ij}, π^μ ставятся в соответствие операторы $\hat{g}$, $\hat{N}$, $\hat{\pi}$, которые действуют на векторы состояния квантовой системы, представляющие собой функционалы $\Psi(g_{ij}, N_\mu)$ от классических координат g_{ij} и N_μ:

$$g_{ij}\Psi = g_{ij}\Psi;\ \hat{N}_\mu\Psi = N_\mu\Psi;$$
$$\hat{\pi}^{ij}\Psi = -iL^2\frac{\delta\Psi}{\delta g_{ij}};\ \hat{\pi}^\mu\Psi = -iL^2\frac{\delta\Psi}{\gamma N_\mu},$$

где L — планковская длина.

Наличие связей учитывается следующим образом. Векторы состояния делятся на физические и нефизические. Условия связи выполняются только на физических состояниях и представляют собой уравнения на эти состояния

$$\hat{\pi}^\mu\Psi = 0;\ \hat{R}^i\Psi = 0;\ \hat{R}^0\Psi = 0.$$

Первые из этих уравнений означают, что физические состояния не зависят от координат N_μ. Вторые уравнения, с учетом того, что $R^i = -2\pi^{ij}{}_{,j}$, удовлетворяются, если Ψ явно не зависит от координат. Единственным нетривиальным уравнением является $\hat{R}^0\Psi = 0$, эквивалентное уравнению Шредингера $H\Psi = 0$, где H — гамильтониан гравитационного поля. Оно записывается в форме

$$\left(G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta g_{ij}}\frac{\delta}{\delta g_{kl}} + g^{1/2}R\right)\Psi = 0,$$
$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}g^{-1/2}(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{ik} - g_{ij}g_{kl}),$$

где величина G_{ijkl} представляет собой метрику на функциональном пространстве метрик g_{ij}, которое получило название суперпространство Уилера — де Витта.

Решение этого уравнения было бы естественно интерпретировать как амплитуду вероятности нахождения квантовой гравитационной системы в состоянии с данной метрикой.

Однако непосредственная такая интерпретация оказалась невозможной из-за того, что эта вероятность может быть отрицательной. Требуется специальная конструкция [92].

Серьезным недостатком геометродинамического подхода является то, что явный вид метрики g_{ij} как функции координат и времени он не определяет. Поэтому его удалось применить лишь к некоторым однородным космологическим моделям [158], метрики которых зависят от одного или нескольких параметров, являющихся функциями только времени, которое само можно заменить одним из этих параметров.

Квантование гравитационного поля методом функционального интегрирования следует общей схеме применения этого метода для квантования калибровочных и других полей. Он предполагает решение предварительно трех вопросов: выбор динамических переменных, учет наличия связей и выбор лагранжиана гравитационного поля.

В качестве динамических переменных при квантовании гравитационного поля могут быть взяты канонические переменные в гамильтоновой формулировке теории гравитации; метрика и связность как независимые переменные; одна метрика (тетрадное поле), через которую выражены компоненты связности. Все эти варианты применяются. Мы здесь остановимся на последнем, выбрав в качестве переменной величину $\bar{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ [61].

Как отмечалось выше (см. разд. 2.1), наличие связей приводит к тому, что уравнения гравитационного поля не являются независимыми, и при фиксированных граничных условиях их решение неоднозначно. Это интерпретируется так, что физическому состоянию системы соответствует не одно поле, а целый класс полей, связанных между собой калибровочными преобразованиями. Поэтому интегрировать в производящем функционале надо не по полям, а по этим классам полей.

Интегрировать по классам полей в явном виде невозможно. Поэтому в каждом классе заданием калибровочного условия выбирается представитель и интегрирование ведется по представителям. Выберем в качестве калибровочного условие гармоничности $\partial_\nu \bar{g}^{\mu\nu} = l^\mu$, где l^μ — заданное векторное поле. В результате дифференциал $d\bar{g}^{\mu\nu}$, который был бы в производящем функционале в отсутствие связей, заменяется на более сложную конструкцию

$$(\det A) \prod_x \delta(\partial_\nu \bar{g}^{\mu\nu} - l^\mu)\, \bar{g}^{7/2}\, g^{00}\, [d\bar{g}^{\mu\nu}], \qquad (5.12)$$

где $\prod_x$ обозначает произведение по всем x, а A — оператор

$$\partial_\nu (\bar{g}^{\nu\lambda}\partial_\lambda) - \partial_\lambda (\partial_\nu \bar{g}^{\lambda\nu}).$$

Используя выражение (5.7) для det A через гауссов интеграл от антикоммутирующих переменных $\bar{\Theta}$, Θ, а также еще некоторые приемы, на которых мы не будем останавливаться, все члены перед $d\bar{g}^{\mu\nu}$ в (5.11) можно поднять в показатель экспоненты. В результате производящий функционал примет вид

$$Z = \int \prod_x \bar{g}^{7/2}\bar{g}^{00}\,[d\bar{g}]\,[d\bar{\Theta}]\,[d\theta]\,\exp\{iS_g + \\ + \left(\frac{i\alpha}{4}\right)\int \partial_\rho \bar{g}^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}d_\sigma \bar{g}^{\nu\sigma}\,d^4x + i\int \bar{\Theta}^\mu A_{\mu\nu}\Theta^\nu\,d^4x\}, \quad (5.13)$$

где α — некоторая произвольная постоянная, от которой окончательные значения физических величин не зависят.

Как видим, в производящем функционале (5.13) для гравитационного поля имеются еще поля $\bar{\Theta}$, Θ, возникшие из условия калибровки. Это так называемые духи Фаддеева — Попова. В диаграммы теории возмущений они входят только как внутренние линии.

Чтобы можно было применить теорию возмущений, выделим в поле $\bar{g}^{\mu\nu}$ классическую составляющую — метрику Минковского ($\bar{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varkappa h^{\mu\nu}$), а в показателе экспоненты в производящем функционале (5.13) — квадратичные по h члены L_h. Например, если S_g — гильберт-эйнштейновское действие, такие члены имеют вид [61]

$$L_h = \left(-\eta_{\nu\sigma}\delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\mu + \tfrac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \tfrac{1}{4}\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}\right)\partial_\alpha h^{\mu\nu}\partial_\beta h^{\rho\sigma}.$$

Лагранжиан L_h трактуется как лагранжиан свободного поля h и определяет его пропагатор. Остальные компоненты в рамках теории возмущений описывают $h - h$ и $h - \Theta$ взаимодействия.

Обсудим теперь выбор функционала действия в квантовой теории гравитации. Условие согласования с эйнштейновской теорией требует, чтобы в $S(g)$ входил гильберт-эйнштейновский член R и космологический член Λ. Учет взаимодействия гравитационного поля с полями материи диктует присутствие в $S(g)$ членов, квадратичных по R. Их три (см. (5.11)):

$$I_1 = C_{\mu\nu\gamma\delta}C^{\mu\nu\gamma\delta}, \quad I_2 = R_{\mu\nu\gamma\delta}R^{\mu\nu\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2, \quad I_3 = R^2.$$

Причем второй из них представляет собой топологический инвариант, интеграл от которого по замкнутому многообразию равен эйлеровской характеристике этого многообразия (она упоминалась в разд. 2.4). На этом основании ряд авторов, поскольку вариация такого инварианта равна нулю, его не учитывают или рассматривают только в случае топологически

нетривиальных многообразий. Но это не совсем верно, так как I_2 является топологическим инвариантом только при размерности $n = 4$, а расчеты ведутся при размерности $n = 4 - \varepsilon$.

В гравитационное действие добавляют также граничные члены, т. е. представляющие собой интегралы по границе некоторой области [126], но мы их здесь не касаемся.

Хотя в общем случае в лагранжиан гравитационного поля надо включать все упомянутые выше слагаемые, в конкретных моделях, обладающих какой-либо добавочной симметрией, некоторые из них могут выпадать. Например, если число бозонных и фермионных спиновых состояний одинаково, то можно не учитывать космологический член Λ. Если теория к тому же конформно инвариантна (частицы безмассовы), то в действии можно оставить только квадратичные члены.

Одним из главных критериев выбора гравитационного действия является условие перенормируемости. Оно означает следующее. При разложении в ряд по теории возмущений в диаграммах Фейнмана возникают слагаемые, которые при снятии регуляризации становятся бесконечными. Их можно пытаться устранить, добавляя в лагранжиан соответствующие члены с бесконечными при снятии регуляризации константами. Они называются контрчленами. Если их конечное число и они того же типа, что и затравочные члены, то их прибавление приведет просто к перенормировке соответствующих констант в лагранжиане теории, и такая теория называется перенормируемой.

Теория гравитации в присутствии материи не является перенормируемой. Перенормируема чисто гравитационная теория (без материи) с квадратичными по кривизне лагранжианами, а именно с лагранжианом $L = A + BR + CI_1 + DI_3$ [173]. Дело в том, что в такой теории квадратичный по полю h член в гравитационном лагранжиане представляет собой квадрат не первых, а вторых производных от h. Соответственно пропагатор такого поля будет иметь порядок не p^{-2}, а p^{-4} по импульсу поля, что и ликвидирует расходимости в диаграммах Фейнмана.

Однако против подобной модели были выдвинуты серьезные возражения. Во-первых, с точки зрения обычной теории поля модель, в которой свободные поля (в данном случае гравитон h) описываются уравнениями с производными четвертого порядка, слишком «экзотична». Во-вторых, в такой модели имеются нефизические состояния, она неунитарна (т. е. нарушается вероятностная трактовка матрицы рассеяния) и т. д. Это побуждает ряд авторитетных авторов считать,

что вопрос о перенормировке теории гравитации остается открытым [19а, 37, 126].

В заключение приведем некоторые результаты, касающиеся квантовых эффектов с участием другого геометрического поля — кручения.

Рождение частиц в пространстве с кручением. В изотропной Вселенной безмассовые частицы, как было отмечено выше, не рождаются. Во Вселенной с кручением, суммарная величина которого остается постоянной, а плотность соответственно падает как a^{-3}, такое рождение (показанное для скалярных частиц) происходит [54, 91]. Максимум его приходится на времена порядка планковских 10^{-44} с. При этом тензор энергии-импульса родившихся частиц анизотропен, что вызвано существованием в пространстве выделенного направления поля кручения. Другой пример рождения спинорных частиц в пространстве с метрикой Минковского и кручением рассмотрен в работе [166].

Коллективное поле кручения [26, 54]. Метод построения эффективного действия может быть применен и к полю кручения. Рассмотрим для простоты плоское по метрике пространство. Лагранжиан взаимодействия кручения с фермионами в таком пространстве имеет вид

$$L_\psi = \frac{i}{2}\{\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi\} + g_0\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi Q^\mu,$$

где $Q^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}Q_{\alpha\beta\nu}$ (см. разд. 3.4). Следуя общей схеме, добавим к нему лагранжиан поля кручения, взяв его в варианте теории Эйнштейна — Картана $L_Q = -\frac{\varepsilon^2}{2}Q^2$, и включим интегрирование по dQ в производящий функционал

$$Z = \int [d\bar\psi]\,[d\psi]\,[dQ]\,\exp\Big\{i\int d^4x\,(L_\psi + L_Q + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta + j_\mu Q^\mu)\Big\}. \qquad (5.14)$$

Интегрируя Z по полю кручения, получаем в лагранжиане фермионных полей ψ вместо члена $\psi - Q$ взаимодействия, нелинейное 4-фермионное взаимодействие $\lambda(\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2$ Иваненко — Гейзенберга ($\lambda = g^2/\varepsilon^2$). Это уже на квантовом уровне подтверждает отмеченную выше связь кручения со спинорной нелинейностью и показывает, что в теории Эйнштейна — Картана поле кручения имеет характер коллективного поля фермионных пар $Q^\mu = \bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\psi$.

Интегрируя производящий функционал (5.14) по фермионным полям, получим эффективное действие для поля кручения, используя которое можно найти постоянную классиче-

скую хиггсовскую составляющую Q^0 поля кручения. Уравнение для нее имеет вид

$$\varepsilon^2 Q_\mu^0 = -(2\pi)^{-4} g^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^4p}{p_\mu \gamma^\mu - g Q_\mu^0 \gamma^\mu \gamma^5}$$

и решается с использованием размерной регуляризации. Но, как оказалось, оно имеет только нулевое решение.

Это важный результат (а он верен и в гравитационном поле), который показывает, что, если придерживаться теории Эйнштейна — Картана и рассматривать кручение как коллективное поле, классического кручения не существует и кручение сводится только к квантовым флуктуациям. Физически это кажется оправданным, поскольку ненулевое постоянное поле кручения выделяло бы некоторое направление в пространстве-времени и нарушало бы изотропность Вселенной.

Хотя классическое поле кручения равно нулю, эффекты, связанные с полем кручения, не исчезают, поскольку оказывается ненулевым среднее квадрата поля кручения $\langle Q_\mu Q^\mu \rangle$, а именно Q^2 входит в уравнения гравитации в теории Эйнштейна — Картана.

Упомянем еще поляризацию вакуума материальных полей в пространстве с кручением [162]. Расчеты ее очень громоздки из-за большого числа возможных поляризационных членов.

Учет кручения также способствует в ряде пунктов улучшению условий ренормируемости квантовой теории гравитации [160, 170]. Например, необходимым условием перенормируемости теории с лагранжианом $L = A_1 R + A_2 Q^a_{\mu\nu} Q_a^{\mu\nu} + A_3 R^{ab}_{\mu\nu} \times R^{\mu\nu}_{ab}$ является наличие квантовых флуктуаций кручения [79].

6. СУПЕРОБЪЕДИНЕНИЕ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Когда заходит речь об объединении гравитации и элементарных частиц, сразу встает вопрос, в какой форме вообще его можно себе представить. Для большинства тех, кто занимается программой Большого объединения (см. разд. 3.2), задача, по крайней мере на сегодняшний день, ясна — найти общую группу симметрий, описывающую все кварки и лептоны, и построить ее калибровочную модель. В свое время по такому же пути шли, стараясь связать внутренние и пространственно-временные симметрии в одну группу, но ничего не получилось.

Мы приведем две модели, которые сейчас пользуются большой известностью и, как полагают, наиболее продвинулись по пути объединения гравитации и элементарных частиц. Это

многомерное обобщение модели 5-мерия Калуца — Клейна и теория супергравитации.

Модель Калуца — Клейна была предложена в 1921—1926 гг. как совместное геометрическое описание гравитации и электромагнетизма (см. [6, 22, 98]. Ее главным атрибутом является пятимерное пространство X^5 с координатами x^0, ..., x^3, x^5 и метрикой

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu} \\ -g^{\nu} & 1 + g^{\mu\nu} g_{\mu_g \nu} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$A, B = 0, \ldots, 3; 5$. Компоненты метрики g^{AB} предполагаются не зависящими от координаты x^5, а на волновые функции в пятимерном пространстве накладывается условие цикличности $\partial_5 \Psi = im\Psi$ по координате x^5, т. е.

$$\Psi(x^0, \ldots, x^3; x^5) = \sum_m \psi(x^0, \ldots, x^3) \exp(imx^5). \tag{6.2}$$

Это означает, что пространство X^5 представляет собой прямое произведение $X^4 \times S^1$ четырехмерного пространства-времени и окружности S^1 с циклической координатой x^5. При этом выражения (6.1) для метрики g^{AB} и (6.2) для волновых функций Ψ на X^5 через метрику $g^{\mu\nu}$ и функции ψ на X^4 составляют условия проекции физических, геометрических и других объектов на пространстве X^5 в пространство-время X^4.

Например, волновое уравнение $\square \Psi = 0$ на пространстве X^5 приводится на пространстве X^4 к уравнению Прока $(\square - m^2)\psi = 0$, а уравнения Эйнштейна для метрики g^{AB} — к уравнениям Эйнштейна для метрики $g^{\mu\nu}$ и уравнениям Максвелла для величин g^{μ}, которые в модели Калуца — Клейна интерпретируются как электромагнитный потенциал с точностью до умножения на константу.

Все эти моменты присутствуют и в обобщенной многомерной модели Калуца — Клейна [137, 157].

1. Пространством в такой модели является прямое произведение $X^4 \times G$ пространства-времени X^4 и N-мерного замкнутого пространства N-параметрической группы G.

2. Метрика, задаваемая на этом пространстве, обобщает метрику Калуца — Клейна (6.1) и в некоторой специальной (неголономной) системе отсчета имеет вид

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu} B^m_\nu \\ -B^n_\mu g^{\mu\nu} & g^{mn} + g^{\mu\nu} B^m_\mu B^n_\nu \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

где $A = (\mu, m)$, $\mu = 0, \ldots, 3$; $m = 1, \ldots, N$. Компоненты метрики не зависят от координат x^m.

3. Величины B_μ^m являются с точностью до умножения на размерную константу ε калибровочными полями ($B_\mu^m = \varepsilon A_\mu^m$) группы G. Это строго доказывается в терминах расслоенных пространств, применяемых для корректной формулировки модели Калуца — Клейна [137, 164, 167]. Приведем соответствующее утверждение (в несколько адаптированном виде).

Пусть G — компактная группа преобразований многообразия X, все орбиты которой в X имеют один и тот же тип (в нашем случае это сама группа G). Существует взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными метриками g^{AB} на X и тройками $g^{\mu\nu}$, A_μ^m, h_{ab}) псевдоримановой метрики $g^{\mu\nu}$ на пространстве орбит (пространстве-времени), калибровочного поля A_μ^m группы G, некоторого поля h_{ab}, характеризующего геометрию орбит (в данном случае метрики g^{mn} на G). Скаляр кривизны $\tilde{R}$ метрики g^{AB} выражается через компоненты этих полей на пространстве-времени. В данном случае он имеет вид

$$\tilde{R} = R + R_G - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^m F_m^{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu}^m$ — тензор напряженности поля B_μ^m, а R_G — постоянная кривизна внутреннего пространства.

Отсюда, в частности, следует, что гильберт-эйнштейновский лагранжиан в $(4 + N)$-мерном пространстве трансформируется в пространстве-времени X^4 в объединенный лагранжиан гравитационного и калибровочного полей.

4. Поскольку пространство группы G замкнуто, волновые функции $\Psi(x^\mu, x^m)$ на нем должны удовлетворять тем или иным условиям цикличности. Используя эти условия, полевые функции $\Psi(x^\mu, x^m)$ и лагранжиан для них в $(4 + N)$-мерном пространстве можно свести к полевым функциям $\psi(x^\mu)$ и лагранжиану для них в пространстве-времени. Например, лагранжиан скалярного поля $L = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \Box \Psi$ в модели Калуца — Клейна (6.1) при условии (6.2) приводится к лагранжиану

$$L = -\frac{1}{2} \sum_m \bar{\psi} [g^{\mu\nu} (\partial_\mu - i q_m A_\mu)(\partial_\nu - i q_m A_\nu) + M_m^2] \psi, \quad (6.4)$$

который можно интерпретировать как лагранжиан заряженных скалярных полей с зарядами $q_m = 2\pi \varepsilon m R^{-1}$ и массами $M_m = 2\pi m R^{-1}$, где R — размер внутреннего пространства (радиус окружности S^1). Тем самым лагранжиан (6.4) и характеристики полей ψ на пространстве-времени оказываются связанными с характеристиками внутреннего пространства.

Это главный пункт, в котором многомерная модель Калуца — Клейна идет дальше калибровочной теории. Модель Калуца — Клейна тоже, по сути, калибровочная, и для ее формулировки применяется аппарат расслоений. Но, в отличие от обычной калибровочной теории, в ней полевые функции и динамические уравнения определены не только на базе расслоения (пространстве-времени), но и на его слое (внутреннем пространстве). В обычной калибровочной теории внутреннее пространство статично, в многомерной модели Калуца — Клейна его характеристики становятся объектом динамики, могут меняться (например, кривизна (размер) R внутреннего пространства), и уравнения, описывающие их динамику, перекрещиваются с полевыми уравнениями на пространстве-времени. Именно в этом заключается элемент суперобъединения в обобщенной модели Калуца — Клейна[18].

Несколько иной подход к задаче объединения гравитации и элементарных частиц проводится в теории супергравитации [7, 18, 23, 81, 106]. Своей известностью она обязана следующему факту. Было замечено, что расходимости в фейнмановских диаграммах, обязанные фермионам и бозонам, имеют разные знаки и в сумме могут скомпенсировать друг друга, если между фермионами и бозонами, участвующими в процессе, есть определенная симметрия. Ясно, что в качестве такой симметрии должны выступать какие-либо преобразования, переводящие фермионы в бозоны (расходимости с минусом в расходимости с плюсом) и обратно. Если теория инвариантна относительно таких преобразований, есть надежда, что в ней может не быть расходимостей. Эти преобразования получили название суперсимметричных.

Необычность их в сравнении с уже известными симметриями элементарных частиц подчеркивает тот факт, что во всех наблюдаемых процессах взаимодействия и при всех преобразованиях обычных симметрий спин частиц может меняться лишь на целое число, т. е. фермионы (частицы с полуцелым спином) и бозоны (частицы с целым спином) друг в друга не переходят.

Преобразования суперсимметрий представляют собой преобразования спинорных трансляций $\psi_\alpha \to \psi_\alpha + \xi_\alpha$. Как и преобразования обычных симметрий, их удобно задавать с помощью генераторов Q_α, которые вместе с генераторами обычных симметрий образуют так называемую супералгебру.

Теория супергравитации основывается на минимальном по суперсимметрии расширении Пуанкаре, когда к ее генераторам $L_{\mu\nu}$, P_μ добавляют генераторы трансляций Q_α, $\bar{Q}_\alpha$ и

[18] Сейчас наиболее популярна модель с $N = 7$.

пространстве дираковских 4-спиноров ψ_α, $\psi_{\dot\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ (см. разд. 3.1). Вместе они удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[L_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta;\ [L_{\mu\nu}, \bar Q_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta \bar Q_\beta;$$
$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar Q_\alpha, P_\mu] = 0;\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar Q_\alpha, \bar Q_\beta\} = 0; \quad (6.5)$$
$$\{Q_\alpha, \bar Q_\beta\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu,$$

плюс коммутационные соотношения (1.11)[19]. Первые два коммутационных соотношения (6.5), где $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ — матрицы генераторов группы Лоренца на спинорах ψ_α, $\psi_{\dot\alpha}$, как раз показывают, что Q_α относительно лоренцевских преобразований ведут себя как дираковские спиноры и являются генераторами трансляций в пространстве именно этих спиноров.

Подобно построению неприводимых представлений групп симметрий, можно строить неприводимые представления групп суперсимметрий. Как известно, неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре, описывающие свободные частицы, характеризуются определенными значениями массы m и спина j (спиральности, если $m = 0$) частицы. Неприводимое представление расширенной по суперсимметрии группы Пуанкаре (6.5) тоже характеризуется определенными значениями массы и так называемого суперспина Y (целого или полуцелого) входящих в него частиц, но по спину они образуют некоторый мультиплет (супермультиплет). При ненулевой массе m такое неприводимое представление включает в себя частицы со спином $j = (Y - {}^1/_2), Y, Y', (Y + {}^1/_2)$, где Y, Y' обозначают состояния с разной четностью (например, скаляр и псевдоскаляр). При нулевой массе $j = \lambda, \lambda + 1/2$, где λ — целое или полуцелое число.

Как видим, в супермультиплет обязательно входят и бозоны, и фермионы, которые переходят друг в друга при преобразованиях суперсимметрий. Частицы, входящие в один супермультиплет, называются суперпартнерами.

Рассмотрим теперь координатное представление расширенной по суперсимметрии группы Пуанкаре. Оно приводит к концепции суперпространства (его не надо путать с суперпространством Уилера — де Витта в геометродинамике (см. разд. 3.5)).

Координатное представление группы Пуанкаре с генераторами, задаваемыми формулами (1.10) в главе 1, характери-

[19] Здесь скобки $\{,\}$ обозначают антикоммутатор $\{A, B\} = AB + BA$; σ_i — матрицы Паули; σ_0 — единичную матрицу.

зует ее как группу преобразований некоторого пространства. Чтобы распространить это представление на расширение группы Пуанкаре (6.5), надо дополнить обычное пространство с координатами x^μ спинорными элементами Θ^α. Причем эти элементы должны быть антикоммутирующими [20], т. е. $\{\Theta, \Theta\} = \{\Theta, \bar{\Theta}\} = 0$. На таком пространстве (его называют суперпространством) преобразования с генераторами Q_α действительно имеют вид спинорных трансляций

$$\Theta' = \Theta + \xi, \quad \bar{\Theta}' = \bar{\Theta} + \bar{\xi}, \quad \bar{x'}^\mu = x^\mu + (\Theta\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\bar{\Theta}),$$

но, как видим, они нетривиальным образом преобразуют и обычные координаты x^μ. При этом параметры ξ суперпреобразований тоже являются антикоммутирующими.

Суперпространство (x^μ, Θ^α), реализующее координатное представление расширенной по суперсимметриям группы Пуанкаре, выполняет функции координатного пространства в теории супергравитации. Оно необычно наличием в нем грассмановых элементов Θ. Антикоммутирующие величины присутствуют и в обычной теории поля — это классические фермионные поля. Но использование их как часть координатного пространства поставило много вопросов. Прежде всего, можно ли на таком пространстве обычным образом задать топологию, структуру дифференцируемого многообразия, построить содержательную геометрию? Долгое время это не удавалось, и, например, дифференцирование и интегрирование по переменным Θ задавались формально, как некоторые алгебраические операции. Однако в последние годы появились работы, в которых показано, что можно наделить суперпространство привычной локально-евклидовой топологией, стандартной структурой дифференцируемого многообразия, построить к нему касательное и другие расслоения, задать связность [21, 165], т. е. ввести все необходимые для современной полевой теории конструкции.

Как же теория суперсимметрий столько времени без них обходилась (да и сейчас обходится), причем не в ущерб своей содержательности? Дело в том, что, поскольку $\Theta^2 = 0$, разложение всякой полевой функции $\Phi(x^\mu, \Theta^\alpha)$ на суперпространстве в ряд по грассмановым переменным Θ ограничено конечным числом членов:

$$\Phi(x, \Theta) = A(x) + \Theta\psi(x) + \bar{\psi}\bar{\Theta} + \Theta\Theta F(x) + \bar{\Theta}\bar{\Theta}G(x) + \\ + \Theta\sigma_\mu\bar{\Theta}B^\mu(x) + \Theta\Theta\bar{\varkappa}(x)\bar{\Theta} + \bar{\Theta}\bar{\Theta}\Theta\lambda(x) + \Theta\Theta\Theta\Theta D(\bar{x}). \quad (6.6)$$

[20] Такие элементы образуют так называемую алгебру Грассмана и называются грассмановыми.

Поэтому поле $\Phi(\bar{x}, \Theta)$ на суперпространстве (суперполе) можно представить набором полей на обычном пространстве ($A(x)$, ..., $D(x)$), образующих коэффициенты разложения (6.6). Эти поля составляют супермультиплет. Например, если Φ — скалярное суперполе, то в него входят фермионы (ψ, $\bar{\psi}$, λ, $\varkappa$) и бозоны (A, F, G, B^μ, D).

Таким образом, теория суперсимметрий, которая строится для суперполей на суперпространстве, на самом деле представляет собой теорию обычных полей на обычном пространстве, но эти поля входят в нее в составе определенных супермультиплетов и в суперсимметричных комбинациях. Это обеспечивает устранение в такой теории многих расходимостей (здесь мы этого вопроса не касаемся).

Другой особенностью теории суперсимметрий является то, что она позволяет нетривиальным образом объединить мультиплеты частиц по внутренним и спиновым индексам.

Для этого снабдим спинорные переменные Θ^α и соответствующие генераторы спинорных трансляций Q_α индексами внутренних симметрий m, обобщая при этом последнее из соотношений (6.5) до

$$\{Q_{\alpha m}, \bar{Q}^n_\beta\} = 2\delta^n_m (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu.$$

Полученная таким образом алгебра суперсимметрий называется расширенной. Индексы m могут относиться, например, к кварковому N-мерному представлению группы $SU(N)$.

Как и в случае обычных симметрий, в теории суперсимметрий генераторы внутренних и пространственных преобразований коммутируют между собой. Однако состав полей, входящих в супермультиплеты неприводимых представлений расширенной алгебры суперсимметрий, по спину и количеству отличается от супермультиплетов простой алгебры суперсимметрий (6.5) и зависит от числа внутренних индексов N.

Например, супермультиплет, состоящий в случае простой суперсимметрии из двух безмассовых частиц: фотона спина 1 и фотино спина 1/2, в случае расширенной ($N = 4$)-суперсимметрии состоит из 11 частиц: одной с $j = 1$, четырех с $j = 1/2$ и шести с $j = 0$. В этой связи большие надежды в плане задачи объединения гравитации и элементарных частиц возлагают на расширенную супергравитацию. Она строится как калибровочная теория суперсимметрий. При этом, как правило, применяется компенсационный янг-миллсовский метод построения калибровочной теории, а сама гравитация описывается в рамках калибровочной теории группы Пуанкаре. Недостатки компенсационной формулировки калибровочной теории, в том числе и калибровочной модели группы Пуанкаре в применении к гравитации, мы обсуждали (см. разд. 3.3). Тем

самым они переносятся и на существующие формулировки супергравитации. В частности, нет полной уверенности, является ли поле спина 2, которое возникает в супергравитационных мультиплетах, действительно гравитационным полем, тем более что геометрические аспекты супергравитации, как мы уже отмечали, еще только разрабатываются.

Минимальный супергравитационный мультиплет простой (нерасширенной) супергравитации содержит две частицы: гравитон спина 2 и гравитино спина 3/2. Максимально расширенная супергравитация, не содержащая частиц с $j > 2$, отвечает $N = 8$, и по ряду причин эта теория пользуется наибольшей популярностью. Ее супергравитационный мультиплет, помимо гравитона, содержит еще 8 гравитино и 154 бозона и фермиона спинов 0; 1; 1/2. Эти частицы имеют внутренние индексы, и гравитон (частица, отвечающая исключительно пространственно-временным симметриям), благодаря супергравитации, оказывается с необходимостью включенным в один мультиплет с частицами, обладающими внутренними симметриями. В этом состоит суть объединения гравитации с обычными частицами в теории суперсимметрий.

Однако такое объединение нельзя считать исчерпывающим. Оно не связывает между собой внутренние и пространственно-временные характеристики частиц, которые (индексы m и α у величин Θ и генераторов Q) принимаются в теории супергравитации как данные и не зависящие друг от друга. К тому же структура супермультиплета определяется только числом внутренних индексов N, а не характером связанных с ними внутренних симметрий. Смущает и то обстоятельство, что, согласно теории супергравитации, обычные частицы должны обладать суперпартнерами: фотон — фотино, гравитон — гравитино и т. д. Но ни один из таких суперпартнеров пока не обнаружен. Тем не менее расширенная супергравитация рассматривается сейчас как главный претендент на модель суперобъединения. Причем обнаружилась ее связь и с обобщенными моделями Калуца — Клейна, в которых внутренняя размерность равна N, а внешним пространством является суперпространство.

Однако ни супергравитация, ни многомерная теория Калуца — Клейна, ни преонные модели Большого объединения при всех их достижениях в том виде, в котором они сейчас разрабатываются, не решают (да и не ставят) ключевого, с нашей точки зрения, вопроса всей программы объединения о происхождении внутренних и пространственно-временных характеристик полей и частиц. Возможно, его выход на первый план преждевременен, но попытки нащупать почву для его решения уже предпринимаются. Они основываются на

идее описания частиц (или субчастиц) как некоторых геометрических и топологических образований, характеристики которых имитировали бы характеристики частиц. Например, компактность частиц в теории поля моделируют солитонными решениями (локализованными в пространстве и устойчивыми во времени). В теории гравитации с аналогичной целью частицы представляются (в духе иерархических моделей (см. введение)) как микровселенные [73] или «черные дыры» с учетом того, что в случае «сильной» гравитации (когда вместо G берется константа сильного взаимодействия) шварцшильдовский радиус частиц совпадает с их размерами [49а, 51].

Различные характеристики частиц — спин, заряд и другие — можно имитировать с помощью топологических особенностей. Широко известным примером является магнитный монополь [63], моделируемый как решение $H = qr/|r|^3$ в калибровочной модели с нетривиальным $U(1)$-расслоением. Величина магнитного заряда q этого монополя пропорциональна топологическому числу Чженя, характеризующему степень нетривиальности упомянутого расслоения.

В теории гравитации любопытный пример моделирования характеристик частиц дает решение Керра — Ньюмена:

$$ds^2 = \left[\frac{r^2 - 2GMr + a^2 + Ge^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right](dt - a\sin^2\theta\, d\varphi)^2 + \\ + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 + (r^2 + a^2\sin^2\theta) \times \\ \times \left[d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 2GMr + a^2 + Ge^2}\right]. \qquad (6.7)$$

Оно обобщает решение Шварцшильда для тела массы M на случай наличия у него заряда e и удельного собственного момента a. При $e = 0$ решение (6.7) переходит в решение Керра, при $a = 0$ — в решение Рейснера — Нордстрема, а при $a = 0$, $e = 0$ — в решение Шварцшильда [125].

Решение (6.7) определено и при $r < 0$ ($r^2 - 2GMr + a^2 + Ge^2 > 0$) имеет сингулярность $r = 0$, $\theta = \pi/2$ (переходящую при $a = 0$, $e = 0$ в сингулярность Шварцшильда $r = 0$) и, если $a^2 + Ge^2 < M^2G^2$, два горизонта r_1, r_2 ($r_{1,2}^2 - 2MGr_{1,2} + a^2 + Ge^2 = 0$), переходящих при $a = 0$, $e = 0$ в горизонт Шварцшильда. При $a^2 + Ge^2 > M^2G^2$ горизонты в метрике (6.7) отсутствуют.

Как видим, источником решения Керра — Ньюмена может быть частица с массой M, зарядом e, удельным собственным моментом a. Но главное обстоятельство, которое привлекает внимание к нему как модели частицы — заряженному геону со спином (А. А. Буринский (см. [110], с. 117)), было уста-

новлено в 1969 г. В. Картером. Он обнаружил, что решение уравнений Максвелла в метрике (6.7) приводит к двойному, как для дираковского электрона, гиромагнитному отношению $\mu = 2\mu_0 a$, где μ — магнитный момент, которое не удавалось раньше получить в классической теории электрона.

Для моделирования внутренних характеристик частиц пытаются использовать эффект, аналогичный квантованию магнитного потока (но в применении к потоку напряженности калибровочных полей) через отверстие в кольцевом сверхпроводнике (т. е. имеющем нетривиальную топологическую конфигурацию). Такие конструкции получили название флаксонов [151].

Конечно, большинство моделей такого рода слишком наивны и не могут претендовать на описание реальных полей и частиц. Но важен сам общий принцип, лежащий в их основе. Физические характеристики полей и частиц в этих моделях конструируются, они имеют топологическую природу и фундаментом для разных таких характеристик служат разные топологические конфигурации.

Математическое обоснование представления физических характеристик полевых систем некоторыми геометрическими и топологическими объектами дает общий метод формализации физических систем расслоениями, апробированный уже в калибровочной теории, в том числе в применении к уже упоминавшимся моделям солитонов, монополей, инстантонов, физические заряды которых имеют топологическую природу (см. разд. 3.2). Стоит вопрос, что взять за исходные первичные элементы, различные конфигурации из которых могли бы обеспечить все многообразие наблюдаемых полей, частиц и субчастиц. Естественно попытаться выбрать в качестве таких элементов какие-то самые простейшие объекты, чтобы наконец оборвать на них уже упоминавшуюся цепочку частицы — кварки — преоны — ...

Простейшими можно считать объекты с простейшей группой симметрий $Z_2 = \{\hat{1}, z\}$, состоящей только из $\hat{1}$ и еще одного элемента z, такого, что $z^2 = \hat{1}$. Примером таких объектов служит обычный двухкомпонентный спинор (нерелятивистский фермион) со значениями спина $\pm 1/2$, для которого z — оператор опрокидывания спина. Поэтому мы их стали называть праспинорами [50].

Группа Z_2 отвечает и простейшим логическим операциям — высказываниям «да» $= \hat{1}$, «нет» $= z$. Поэтому праспинор можно рассматривать как простейший логический элемент и как топологический объект. Последнее следует из того, что всякому топологическому пространству X можно поставить

в соответствие набор так называемых гомотопических групп $\pi_n(X)$, $n = 1, \ldots$, которые являются его топологическими инвариантами. Обратно, для всякой (конечной) группы G можно найти топологическое пространство X, такое, что $\pi_1(X) = G$, $\pi_{n>1}(X) = 0$. Для Z_2 таким пространством является проективное пространство P^2, получаемое из сферы отождествлением ее противоположных точек.

Таким образом, праспиноры могут выступать как физические, логические и топологические объекты, а их исследование дает возможность моделировать «праматерию» и «прагеометрию». В последние два десятилетия подобные простейшие объекты в том или ином аспекте рассматривались Д. Финкельстейном, К. Вейцзекером, Дж. Уилером [115] и другими, однако без достижения убедительной формализации таких систем. Мы, со своей стороны, подходили к исследованию систем праспиноров (см. [50]) как к реализации с принципиально новых позиций идеологии нелинейной спинорной теории Гейзенберга — Иваненко (см. разд. 3.5), которая в основе физического мира видела нелинейные спинорные поля.

Что позволяет надеяться на успех на этом пути? Во-первых, на одном и том же множестве праспиноров может возникать большое многообразие структур, описываемых разными группами симметрий — группами Кокстера. Образующими элементами этих групп служат преобразования z, отвечающие каждому праспинору. При этом преобразования z и z' разных праспиноров, вообще говоря, не коммутируют, т. е. $zz' \neq z'z$. Это интерпретируется как взаимодействие праспиноров z и z', приведшее к образованию определенной топологической конфигурации (см. ниже). Причем произведения $zz' \neq z'z$ могут быть определены по-разному, что приводит к разным группам симметрий и разным структурам на одном и том же множестве праспиноров.

Например, система из двух праспиноров может иметь группу симметрий $Z_2 \times Z_2$, когда $z_1z_2 = z_2z_1$ и праспиноры не взаимодействуют; группу A_2, определяемую условием $z_1z_2 \neq z_2z_1$, $(z_1z_2)^3 = \hat{1}$; группу G_2 с соотношением $(z_1z_2)^6 = \hat{1}$; группу $I_2(p)$ с соотношением $(z_1z_2)^p = \hat{1}$ ($p = 5$ или $p \geqslant 7$).

Во-вторых, существует тесная связь симметрий систем праспиноров с известными симметриями теории поля и элементарных частиц. Дело в том, что конечные группы Кокстера представляют собой известные группы Вейля отражений алгебр Ли и весовых диаграмм их конечномерных представлений (см. [111, 53]), т. е. конечные группы Кокстера реализуют свои представления на тех же мультиплетах частиц, что и обычные группы симметрий.

Например, группа Кокстера A_2 — это группа Вейля алгебры SU (3), которая действует на триплете кварков (u, d, s):

$$z_1 : u \leftrightarrow d,\ s \leftrightarrow s;\ z_2 : u \leftrightarrow s,\ d \leftrightarrow d.$$

Пространственно-временные группы поворотов и трансляций — это тоже группы Кокстера (бесконечные), порождаемые отражениями относительно всевозможных гиперплоскостей. Поворот получается как произведение двух отражений относительно скрещенных гиперплоскостей, сдвиг — относительно параллельных гиперплоскостей.

В-третьих, используя представление праспиноров как топологических объектов — пространств P^2, взаимодействие праспиноров, в результате которого элементы z_1 и z_2 перестают коммутировать, можно описать как склеивание пространств P_1^2 и P_2^2, такое, что гомотопическая группа π_1, получившегося в результате склейки пространства, будет совпадать с группой Кокстера данной системы праспиноров.

Таким образом, беря различные склейки праспиноров (пространств P^2) или, эквивалентно, различные правила произведения операторов z, мы можем получить системы (топологические конфигурации) с самыми разными симметриями, в том числе и симметриями элементарных частиц. Тем самым праспинор выступает как своего рода универсальный преон. Кварки и лептоны в такой преонной модели можно представлять как различного рода образования (топологические) из преонов всего одного сорта — праспиноров. Такое представление в случае успеха было бы действительно кардинальным решением задачи Большого объединения, но не только ее.

В приведенном описании праспиноры имеют двойственную (и даже тройственную) природу, выступая как первичные элементы и «праматерии», и «прагеометрии» (своего рода «геометрические» преоны, определяющие структуру пространства-времени, а также как логические элементы). Это создает базу для суперобъединения на основе праспиноров не только гравитации и элементарных частиц, но вообще обычной материи и геометрического фона, «праматерии» и «прагеометрии», что в наиболее исчерпывающем виде решало бы задачу объединения всех фундаментальных элементов физического мира: полей, частиц и субчастиц, вакуума, гравитации, пространства-времени и космологии.

Где и при каких условиях может происходить такое суперобъединение? Скорее всего, на уровне физического вакуума и в очень ранней (до 10^{-42} с) Вселенной.

Проблема физического вакуума уже обсуждалась. Верить в его существование побуждает успешное подтверждение модели Вейнберга — Салама, но природа его остается неясной.

Обратиться к нему в плане задач суперобъединения заставляет и проблема пространства Минковского в теории гравитации.

Из уравнений Эйнштейна следует, что пространство Минковского — это пространство без материи, вернее, с нулевым тензором энергии-импульса обычной материи. Что тогда определяет топологию континуума, псевдоевклидову и пространственно-временную структуры пространства Минковского, течение времени как направление роста энтропии? Можно только предположить, что это — физический вакуум.

В теории суперсимметрий, например, вакуумное среднее тензора энергии-импульса равно нулю [81], и пространство-время в присутствии вакуума суперполей будет оставаться пространством Минковского. При учете в уравнениях Эйнштейна космологического члена, их решением тоже может быть метрика Минковского при ненулевом вакуумном среднем тензора энергии-импульса в правой части. Таким образом, ненулевой физический вакуум и пространство Минковского совместимы, и первый может определять свойства второго. Но на вопросы, как это происходит и почему пространство Минковского обладает именно такими свойствами, современная теория гравитации ответить не может. Это задача суперобъединения, и необходимо исходить из какой-либо модели физического вакуума.

В этой связи отметим, что праспинор по многим соображениям надо считать грассмановой величиной. Поэтому модель праспиноров пересекается с теорией суперсимметрий, но отличается от распространенных сейчас моделей супергравитации тем, что суперпространство в ней (на уровне праспиноров) содержит только гассмановы величины.

Интересно также, что в ряде случаев на пространстве праспиноров возникают так называемые вполне несвязные топологии, в которых, наглядно говоря, никакие две точки нельзя соединить непрерывной линией (как, например, в пространстве рациональных чисел). Такие топологии формализуют наши представления о дискретном пространстве-времени [50].

В теории поля дискретное решеточное пространство впервые было использовано в работе В. А. Амбарцумяна и Д. Д. Иваненко (1930) для получения важного решения уравнения Лапласа — Пуассона с конечной энергией электрона (см. подробный обзор дискретных моделей в работе [24]).

Возможность использования уравнения в конечных разностях привлекла внимание многих авторов (квантование пространства Х. Снайдера, кванты времени, «хрононы», П. Кальдирола, в близкой связи также минимальные длины, обязанные конечному пространству импульсов И. Е. Тамма и т. д.).

Эта идея развивается, причем предпринимаются попытки уловить проявления дискретности в экстремальной планковской области величин (длины порядка 10^{-33} см и т. д.).

В квантовой теории поля дискретность анализировалась в связи с введением обрезающих факторов (В. Гейзенберг) как областей пространства, в которых, по-видимому, пространственно-временной континуум неприменим. Однако то, что и внутри частиц на уровне кварков пространство-время, по всей видимости, не меняет своих обычных свойств и кварки в целом успешно описываются хромодинамикой в пространстве Минковского, в последнее время ослабило интерес к дискретным моделям, если не считать технический прием расчета эффектов хромодинамики на решетках (до 10^6 узлов). Правда, при этом возникает ряд трудностей перехода между непрерывным и решеточным пространством. Если окажется, что они носят принципиальный характер, то гипотеза дискретности пространства-времени может вновь выйти на первый план.

Областью, в которой заведомо можно ожидать нарушений привычных свойств пространства-времени, являются планковские 10^{-33} см. Но влияния этой области на известные процессы взаимодействия элементарных частиц пока не ощущается, и по крайней мере сейчас единственной моделью, в которой ее вклад может быть существенным, является модель очень ранней околопланковской до 10^{-42} с) Вселенной.

Как уже отмечалось, модель Фридмана в целом успешно прослеживает историю Вселенной назад до $t \sim 1$ с. Инфляционные теории продолжают ее до $t \sim 10^{-35}$ с, но уже по поводу предынфляционной стадии в них есть расхождения (см. разд. 2.5). Говорить же о какой-либо достоверной модели планковской стадии ($t \leqslant 10^{-43}$ с) сейчас не приходится. Что было при $t = 0$? Было ли $t < 0$? Высказываются различные предположения, в их числе о своего рода квантовом рождении Вселенной [32, 123]. На этой стадии, возможно, вообще бессмысленно говорить о каком-либо времени, а тем более о времени как о четвертой координате (см. [84]). С нашей точки зрения, если не планковская, то допланковская Вселенная (условно $t < 0$) представляла собой образование (прасгусток), в котором все — частицы, поля, вакуум, пространство — было слито воедино, разделение его на «праматерию» и «прагеометрию» в результате какого-то первичного фазового перехода дало начало эволюции Вселенной. Словом, здесь налицо широкое поле деятельности для моделей суперобъединения. Калибровочная и квантовая теории гравитации, суперобъединение гравитации элементарных частиц составляют суть современного постэйнштейновского этапа теории гравитации.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азимов Я. И., Докшицер Ю. Л., Хозе В. А.* Глюоны.— Успехи физ. наук, 1980, **132**, с. 443—437.
2. *Ансельм А. А., Уральцев Н. Г., Хозе В. А.* Хиггсовские частицы.— Там же, 1984, **145**, с. 185—224.
3. *Альберт* Эйнштейн и теория гравитации.— М. : Мир, 1979.— 592 с.
4. *Амальди Э., Пиццела Г.* Поиск гравитационных волн.— В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф. И. Федорова. М. : Мир, 1982, с. 241—396.
5. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений.— М. : Наука, 1982.— 364 с.
6. *Береман П. П.* Введение в теорию относительности. — М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 380 с.
7. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 208 с.
8. *Биленький С. М., Понтекорво Б. М.* Смешивание лептонов и осцилляции нейтрино.— Успехи физ. наук, 1977, **123**, с. 181—216.
9. *Биррел Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.— М. : Мир, 1984.— 356 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1976.— 479 с.
11. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
12. *Борисов А. Б., Огиевецкий В. И.* Теория динамических аффинной и конформной симметрий как теория гравитационного поля.— Теорет. и мат. физика, 1974, **21**, с. 329—342.
13. *Брилл Д., Гоуди Р.* Квантование общей теории относительности.— В кн.: Квантовая гравитация и топология / Под ред. Д. Д. Иваненко. М. : Мир, 1973, с. 66—179.
14. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика.— М. : Наука, 1972.— 382 с.
15. *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* Потенциальные модели кварков.— Успехи физ. наук, 1984, **143**, с. 3—32.
16. *Вайсберг Дж., Тейлор Дж., Фаулер Л.* Гравитационные волны от пульсара в двойной системе.— Там же, 1982, **137**, с. 703—723.
17. *Вайтман А.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей.— М. : Наука, 1968.— 184 с.
18. *Введение* в супергравитацию / Под ред. С. Феррары, Дж. Тейлора.— М. : Мир, 1985.— 324 с.
19. *Вейнберг С.* Гравитация и космология.— М. : Мир, 1975.— 696 с.

19а. *Вейнберг С.* Ультрафиолетовые расходимости в квантовых теориях гравитации.— В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 405—460.

20. *Визгин В. П.* Релятивистская теория тяготения.— М. : Наука, 1981.— 352 с.
20а. *Визгин В. П.* Эрлангенская программа и физика.— М. : Наука, 1975.— 110 с.
21. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ I : Дифференц. исчисление.— Теорет. и мат. физика, 1984, 59, с. 3—27.
22. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации.— М. : Энергоиздат, 1982.— 256 с.
23. *Волков Д. В., Сорока В. А.* Калибровочные поля для группы симметрий со спинорными параметрами.— Теорет. и мат. физика, 1974, 20, с. 291—304.
24. *Вяльцев А. Н.* Дискретное пространство-время.— М. : Наука, 1966.— 399 с.
25. *Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И.* Излучение гравитационных волн электродинамическими системами.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984.— 128 с.
26. *Гвоздев А. А., Пронин П. И.* Четырехфермионное взаимодействие как квантовый источник кручения.— Изв. вузов. Физика, 1985, № 1, с. 7—12; *Квантовая* статистика, температурные эффекты в теории взаимодействия фермионов с кручением.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия, 1985, № 1, с. 29—33.
27 *Гейзенберг В.* Введение в единую теорию элементарных частиц.— М. : Мир, 1968.— 239 с.
28. *Гибсон У., Поллард Б.* Принципы симметрии в физике элементарных частиц.— М. : Атомиздат, 1979.— 344 с.
29. *Горелик Г. Е.* Размерность пространства.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 216 с.
30. *Гриб А. А.* Проблемы неинвариантности вакуума в квантовой теории поля.— М. : Атомиздат, 1978.— 127 с.
31. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях.— М. : Атомиздат, 1980.— 295 с.
32. *Грищук Л. П., Зельдович Я. Б.* Полные космологические теории.— В кн.: Квантовая гравитация : Тр. II семинара по квантовой теории гравитации. М. : Ин-т ядер. исслед., 1982, с. 39—48.
33. *Гурович В. И.* Нелинейные добавки в лагранжеву плотность гравитационного поля и космологические решения без сингулярности.— Докл. АН СССР, 1970, 195, № 25, с. 1300—1302.
34. *Гут А., Стейнхардт П.* Раздувающаяся Вселенная.— В мире науки, 1984, № 7, с. 56—68.
35. *Данилюк Б. В.* Об унитарно-инвариантных обобщениях нелинейной спинорной теории поля.— Изв. вузов. Физика, 1978, № 5, с. 143—145.
36. *Даниэль М., Виалле С.* Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга — Миллса.— Успехи физ. наук, 1982, 136, с. 377—419.
37. *Де Витт Б.* Квантовая гравитация: новый синтез. — В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 296—362.
38. *Денисов В. И., Логунов А. А.* Существует ли в общей теории относительности гравитационное излучение? — Теорет. и мат. физика, 1980, 43, с. 187—201.
39. *Джорджи Х.* Единая теория элементарных частиц.— Успехи физ. наук, 1982, 136, с. 287—316.
40. *Дикке Р.* Об экспериментальном базисе общей теории относительности.— В кн.: Гравитация и относительность / Под ред. Х. Цзю, В. Гоффмана. М. : Мир, 1965, с. 49—72.

41. *Дирак П.* Принципы квантовой механики.— М. : Наука, 1979.— 480 с.
42. *Долгов А. Д., Зельдович Я. Б.* Космология и элементарные частицы.— Успехи физ. наук, 1980, 130, с. 559—614.
43. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М. : Наука, 1979.— 759 с.
44. *Захаров В. Д.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна.— М. : Наука, 1972.— 199 с.
45. *Зельдович Я. Б., Старобинский А. А.* Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1971, 61, с. 2161—2175.
46. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной.— М. : Наука, 1975.— 735 с.
47. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения.— М. : Мир, 1975.— 348 с.
48. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Квантовая теория поля.— Л. : Гостехиздат, 1952.— 780 с.
49. *Иваненко Д. Д.* Гравитация и единая теория.— В кн.: Квантовая гравитация и топология / Под ред. Д. Д. Иваненко. М. : Мир, 1973, с. 5—26.
49а. *Иваненко Д. Д., Кречет В. Г.* К иерархической модели Вселенной и частиц.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия, 1979, № 5, с. 79—82.
49б. *Иваненко Д. Д., Обухов Ю. Н.* Измеримость неабелевых калибровочных полей.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия, 1984, № 3, с. 77—79.
50. *Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А.* Расширения эйнштейновской гравитации и перспективы единых теорий.— Изв. вузов. Физика, 1980, № 2, с. 54—65.
51. *Иваненко Д. Д.* Актуальность теории гравитации Эйнштейна.— В кн. : Проблемы физики: Классика и современность. М. : Мир, 1982, с. 127—154.
52. *Иваненко Д. Д.* Вращение Вселенной.— Астрон. циркуляр, 1983, № 1254, с. 1—3.
52а. *Иваненко Д. Д., Сагитов М. У.* О гипотезе расширения Земли.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия, 1961, № 6, с. 83—87.
53. *Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А.* Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983.— Ч. 1—2.
54. *Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А.* Калибровочная теория гравитации.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985.— 143 с.
55. *Иваницкая О. С.* Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории гравитации.— Минск : Наука и техника, 1979.— 336 с.
56. *Инфельд Л., Плебаньский Е.* Движение и релятивизм.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 204 с.
57. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной, конформной связности.— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1962.— 209 с.
58. *Квантовая* теория калибровочных полей / Под ред. Н. П. Конплевой.— М. : Мир, 1977.— 432 с.
59. *Киржниц Д. А., Линде А. Д.* Релятивистский фазовый переход.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1974, 67, с. 1263—1275.
60. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. — М. : Наука, 1981.— Т. 1. 344 с.
61. *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля.— М. : Атомиздат, 1980.— 238 с. 3-е изд. М.: УРСС, 2000. — 272 с.
62. *Котельников В. А., Александров Ю. Н., Головков В. К. и др.* Ре-

зультаты астрометрических измерений при радиолокации Венеры в 1977 г.— Астрон. журн., 1979, **56**, с. 405—411.
63. *Коулмен С.* Магнитный монополь 50 лет спустя.— Успехи физ. наук, 1984, **144**, с. 277—340.
64. *Крамер Д., Штефани Х., Херлд Э., Мак-Каллум М.* Точные решения уравнений Эйнштейна.—М. : Энергоатомиздат, 1982.— 416 с.
65. *Кречет В. Г., Пономарев В. Н.* Нелинейность и кручение.— Теорет. и мат. физика, 1975, **25**, с. 141—144.
66. *Кречет В. Г.* Гравитационное взаимодействие векторного поля с учетом неметричности пространства-времени.— Изв. вузов. Физика, 1984, № 8, с. 50—53.
67. *Кудин В. И., Минкевич А. В., Федоров Ф. И.* Об однородных изотропных космологических моделях с кручением.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 4, с. 59—67.
68. *Кудрявцев П. С.* Курс истории физики.— М. : Просвещение, 1974.— 311 с.
69. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М. : Наука, 1973.— 504 с.
70. *Линде А. Д.* Раздувающаяся Вселенная.— Успехи физ. наук, 1984, **144**, с. 177—203.
70а. *Линде А. Д.* Хаотическая раздувающаяся Вселенная.— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1983, **38**, с. 149—152.
71. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности и гравитации: Соврем. анализ. пробл. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985.— 258 с.
71а. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации.—Теорет. и мат. физика, 1984, **61**, с. 322—346.
72. *Любимов В. А.* Существует ли у нейтрино масса покоя? (Эксперименты по измерению β-спектра трития).— Атом. энергия, 1980, **49**, с. 340—352.
73. *Марков М. А.* О природе материи. — М. : Наука, 1976.— 216 с.
74. *Матинян С. Г.* На пути объединения слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий: SU (5).— Успехи физ. наук, 1980, **130**, с. 3—38.
75. *Меллер К.* Теория относительности.— М. : Атомиздат, 1975.— 399 с.
76. *Мельников В. Н., Станюкович К. П.* Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации.— М. : Энергоиздат, 1983.— 315 с.
77. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. — М. : Мир, 1977.— Т. 1—3.
78. *Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.* Четырехмерность пространства и времени.— М. ; Л. : Наука, 1966.— 189 с.
79. *Назаровский Е. А., Обухов Ю. Н.* О перенормируемости калибровочной теории гравитации.— Изв. вузов. Физика, 1984, № 12, с. 43—49.
80. *Нарликар Дж.* Инерция и космология в теории относительности.— В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф. И. Федорова. М. : Мир, 1982, с. 498—534.
81. *Огиевецкий В. И., Мезинческу Л.* Симметрия между бозонами и фермионами и суперполя.— Успехи физ. наук, 1975, **117**, с. 637—683.
82. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц.— М. : Наука, 1984.— 222 с.
83. *Паули В.* Теория относительности.— М. : Наука, 1983.— 336 с.
84. *Пенроуз Р.* Сингулярности и асимметрии по времени.— В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 233—295.
85. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности.— М. : Наука, 1966.— 495 с.

86. *Пиблз Дж.* Физическая космология.— М. : Мир, 1975.— 310 с.
87. *Писаренко В. Г.* Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейной теории поля.— Киев : Наук. думка, 1974.— 464 с.
88. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М. : Наука, 1974.— 176 с.
89. *Пономарев В. Н., Сметанин Е. В.* Новый вариант нелинейной электродинамики.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия, 1978, № 5, с. 29—37.
90. *Пономарев В. Н., Цейтлин А. А.* О корректном использовании принципа Палатини в гравитационных теориях.— Там же, № 6, с. 57—59.
90а. *Пономарев В. Н., Цейтлин А. А.* О вариационном принципе ОТО.— Там же, 1979, № 5, с. 68—70.
91. *Пономарев В. Н., Пронин П. И.* Рождение безмассовых скалярных частиц полем кручения.— Теорет. и мат. физика, 1979, 29, с. 425—429.
92. *Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитационных взаимодействий.— М. : Энергоатомиздат, 1984.— 167 с.
93. *Рамон П.* Теория поля : Соврем. ввод. курс.— М. : Мир, 1984.— 332 с.
94. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.— 664 с. 4-е изд. М.: УРСС, 2003.
95. *Реками Э.* Теория относительности и ее обобщения.— В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф. И. Федорова. М. : Мир, 1982, с. 53—128.
96. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики.— М. : Мир, 1984.— Т. 2. 381 с.
97. *Родичев В. И.* Теория гравитации в ортогональном репере.— М.: Наука, 1974.— 184 с.
98. *Румер Ю. Б.* Исследования по 5-оптике.— М. : Гостехиздат, 1956.— 152 с.
99. *Рябушко А. П.* Движение тел в общей теории относительности.— Минск : Высш. шк., 1979.— 237 с.
100. *Сагитов М. У., Милюков В. К., Монахов Е. А. и др.* Новое определение кавендишевской гравитационной постоянной.— Докл. АН СССР, 1979, 245, № 25, с. 566—569.
101. *Салам А.* Калибровочное объединение фундаментальных сил.— Успехи физ. наук, 1980, 132, с. 229—253.
102. *Салам А.* Вычисление перенормированных констант.— В кн.: Квантовая гравитация и топология / Под ред. Д. Д. Иваненко. М. : Мир, 1973, с. 180—215.
103. *Сарданашвили Г. А., Янчевский В. П.* Пространственно-временные слоения в теории гравитации.— Изв. вузов. Физика, 1982, № 9, с. 20—23.
104. *Сарданашвили Г. А., Субботин А. В.* Хиггсовские поля как конденсат.— Там же, 1984, № 7, с. 8—12.
105. *Синг Дж.* Общая теория относительности.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 432 с.
106. *Славнов А. А.* Суперсимметричные калибровочные теории и их возможные приложения к слабым и электромагнитным взаимодействиям.— Успехи физ. наук, 1978, 124, с. 487—508.
107. *Славнов А. А., Фадеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М. : Наука, 1978.— 238 с.
108. *Старобинский А. А.* Спектр реликтового гравитационного излучения и начальное состояние Вселенной.— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1979, 30, с. 719—723.
108а. *Старобинский А. А.* Космологические модели с промежуточной

де ситтеровской стадией : Теория и наблюдат. следствия.— В кн.: Фундаментальные взаимодействия / Под ред. В. Н. Пономарева. М. : МГПИ, 1984, с. 55—78.
109. *Схоутен Я.* Тензорный анализ для физиков.— М. : Наука, 1965.— 465 с.
110. *Тезисы* докладов Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации».— М. : МГПИ, 1984.— 308 с.
111. *Теория* групп и элементарные частицы / Под ред. Д. Д. Иваненко.— М. : Мир, 1967.— 375 с.
112. *Терлецкий Я. П.* Парадоксы теории относительности.— М. : Наука, 1966.— 139 с.
113. *Тредер Г. Ю.* Теория гравитации и принцип эквивалентности.— М. : Атомиздат, 1975.— 168 с.
114. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности.— М. : Наука, 1977.— 383 с.
115. *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино, Вселенная.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 403 с.
116. *Уилл К.* Теория гравитации и эксперимент.— В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 11—86.
117. *Фаддеев Л. Д.* Проблема энергии в теории тяготения.— Успехи физ. наук, 1982, 136, с. 435—457.
118. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по путям.— М. : Мир, 1968.— 382 с.
119. *Физика* микромира.— М. : Сов. энцикл., 1980.— 527 с.
120. *Фишер А., Марсден Дж.* Проблема начальных данных и динамическая формулировка общей теории относительности.— В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 87—162.
121. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— М. : Физматгиз, 1961.— 563 с.
122. *Франкфурт У. И.* Специальная и общая теория относительности.— М. : Наука, 1968.— 331 с.
123. *Фомин П. И.* Гравитационная неустойчивость вакуума и космологическая проблема.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 9, с. 831—840.
124. *Хирш М.* Дифференциальная топология.— М. : Мир, 1979.— 279 с.
125. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени.— М. : Мир, 1977.— 431 с.
126. *Хокинг С.* Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации.— В кн.: Общая теория относительности / Под ред. С. Хокинга, В. Израэля. М. : Мир, 1983, с. 363—406.
127. *Шапиро И.* Экспериментальная проверка общей теории относительности.— В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф. И. Федорова. М. : Мир, 1982, с. 215—240.
128. *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики.— М.: Мир, 1984.— 301 с.
129. *Эддингтон А.* Теория относительности.— Л. ; М.: Гостехиздат, 1934.— 356 с.
130. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4-х т.— М.: Наука, 1965.— Т. 1.
131. *Элементарные* частицы и компенсирующие поля / Под ред. Д. Д. Иваненко.— М. : Мир, 1964.— 299 с.
132. *Adler S.* Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum field theory.— Rev. Mod. Phys., 1982, 54, p. 729—766.

133. *Bailin D.* Superfluidity and superconductivity in relativistic fermion theory.— Phys. Repts, 1981, **107**, p. 327—385.
134. *Basombrio F.* A comparitive review of certain gauge theories of the gravitation field.— Gen. Rev. Grav., 1980, **12**, p. 109—136.
135. *Borneas M.* An extended scalar-field theory of gravitation.— Phys. Rev. D, 1984, **30**, p. 728—731.
136. *Chang D., Mohapatra R., Gipson J. et al.* Experimental tests of new SO (10) grand unification.— Ibid., 1985, **31**, p. 1718—1732.
137. *Coqueraux R., Jadczyk A.* Geometry of multidimensional universes.— Commun. Math. Phys., 1983, **90**, p. 79—100.
138. *Eguchi T., Gilkey P., Hanson A.* Gravitation, gauge theories and differential geometry.— Phys. Repts, 1980, **66**, p. 213—393.
139. *Ellis G., Shmidt B.* Classification of singular space-times.— Gen. Rel. Grav., 1979, **10**, p. 989—997.
140. *Friedman M., Srivastava J.* Gauge theories of composate bosons.— Phys. Rev. D, 1983, **28**, p. 1491—1495.
141. *Friedrich H., Stewart J.* Characteristic initial date and wave front singularities in General Relativity.— Proc. Roy. Soc. London A, 1983, **385**, p. 345—371.
142. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics.— Rev. Mod. Phys., 1962, **34**, p. 442—457.
143. *Gibbons G., Hawking S.* Action integrals and partition functions in quantum gravity.— Phys. Rev. D, 1977, **15**, p. 2752—2756.
144. *Grischuk L., Petrov A., Popova A.* Exact theory of the (Einstein) gravitational field in arbitrary background spacetime.— Commum. Math. Phys., 1984, **94**, p. 379—396.
145. *Guth A., Pi S.* Fluctuations in new inflationary univers.— Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, p. 1110—1113.
146. *Haymaker R.* Dynamical symmetry breaking.— Acta phys. pol. B, 1982, **13**, p. 575—607.
147. *Hehl F., Heyde P., Kerlick G., Nester J.* General Relativity with spin and torsion: Foundations and prospects.— Rev. Mod. Phys., 1976, **48**, p. 393—413.
148. *10th International* conference on General Relativity and Gravitation : Contribut. pap.— Padova, 1983.— Vol. 2, 566. p.
148a. *3th International* Rome meeting on astrophysics, cosmic background radiation and fundamental physics : Contribut. pap.— Rome, 1984.— 43 p.
149. *Israelit M., Rosen N.* A gauge-covariant bimetric theory of gravitation and electromagnetism.— Found. Phys., 1983, **13**, p. 1023—1047.
150. *Ivanenko D.* Perennial modernity of Einstein's theory of gravitation.— In vol.: Relativity, quanta, cosmology. / Ed. F. Finis. New York; San Francisko; London : Johnson Repr. Corp., 1979, p. 295—354.
150a. *Ivanenko D., Sardanashvily G.* The gauge treatment of gravity.— Phys. Repts, 1983, **94**, p. 1—47.
150б. *Ivanenko D., Obuchov Yu.* Gravitational interaction of fermion antisymmetric tensor fields. — Ann. der Phys., 1985, **42**, p. 38—50.
151. *Jehl H.* Relationship of flux quantization to charge guantization and electromagnetic coupling constant.— Phys. Rev. D, 1971, **3**, p. 306—345.
152. *Kadic A., Edelen D.* A gauge theory of dislocations and disclinations.— Berlin ; New York : Springer, 1983.— 290 p.
153. *Kawati S., Miyata H.* Phase transitionin in four-dimensional fermion model.— Phys. Rev. D, 1981, 23, p. 3010—3024.

154. *Kopczynski W.* An anisotropic Universe with torsion.— Phys. Lett. A, 173, **43**, p. 63—64.
155. *Liebschir D.-E., Mucket J.* Cosmological solutions of bimetric theories of gravitation.— Ann. der Phys., 1984, **41**, p. 172—178.
156. *Martynov D. Ya., Khaliullin Kh. F.* On the relativity motion of the periastron in the eclipsing binary system Di Herculis.— Astrophys. Space Sci., 1980, **71**, p. 147—170.
157. *Mecklenberg W.* The Kaluza-Klein idea : Status and Prospects. Fortschr. Phys., 1984, **32**, p. 207—260.
158. *Misner C.* Quantum cosmology.— Phys. Rev., 1969, **186**, p. 1319—1327.
159. *Ne'eman Y., Sijacki D.* Unified affine gauge theory of gravity and strong interaction with definite and indefinite GL (4,R)-spinor fields.— Ann. Phys., 1979, **120**, p. 292—315.
160. *Neville D.* Gravity theories with propagating torsion.— Phys. Rev. D, 1980, **21**, p. 867—873.
161. *Nurgaliev I., Ponomariov V.* The earliest evolutionary stages of the universe and space-time torsion.— Phys. Lett. B, 1983, **130**, p. 378—379.
162. *Obukhov Yu.* Spectral geometry of Riemann-Cartan space-time. — Nucl. Phys., 1983, **121**, p. 237—254.
162a. *Obukhov Yu.* Arbitrary spin field equations and anomalies in the Riemann — Cartan space-time.— J. Phys. A. : Math. Gen., 1983, **16**, p. 3795—3803.
163. *Penrose R.* A remarkable property of plane waves in General Relativity.— Rev. Mod. Phys., 1965, 37, p. 215—220.
164. *Percacci R.* Kaluza-Klein theories on bundles with homogeneous fibers. — J. Math. Phys., 1983, **24**, p. 807—814.
165. *Rogers A.* A global theories of supermanifolds.— Ibid., 1980, **21**, p. 1352—1365.
166. *Rumpf H.* Creation of Dirac particles in General Relativity with torsion and electromagnetism.— Gen. Rel. Grav., 1979, **10**, p. 525—533.
167. *Salam A., Strathdee J.* On Kaluza-Klein theory.— Ann Phys., 1982, **141**, p. 316—331.
168. *Sàllèr H.* Dinamical implementation of the gravitons as Nambu-Goldstone bosons.— Nuovo cim. A, 1983, **76**, p. 663—684.
169. *Sardanashvily G.* Space-time foliations.— Acta Phys. Hung., 1985, **57**, p. 31—40.
170. *Sezgin E., Nieuwenhuizen P.* New ghost-free gravity Lagrangian with propagating torsion.— Phys. Rev. D, 1980, **21**, p. 3269—3280.
171. *Shuryak E.* Theory and phenomenology of the QCD vacuum. — Phys. Repts., 1985, **115**, p. 152—314.
172. *Sivaram C., Sinha K.* Strong spin-two interaction and General Relativity.— Ibid., 1979, **51**, p. 111—213.
173. *Stelle K.* Renormalization of higher-derivative quantum gravity.— Phys. Rev. D, 1977, **16**, p. 953—969.
174. *Terazawa H., Chikashiga Y., Akawa K.* Unified model of the Nambu-Jona-Lasinio type for all elementary particle forces. — Ibid., **15**, p. 480—487.
175. *Terazawa H.* Subquark model of lepton and quarks.—Ibid., 1980, **22**, p. 184—199.
176. *Trautman A.* On the structure of the Einstein — Cartan equations.— Symp. Math., 1973, **12**, p. 139—160.
177. *Tseytlin A.* Poincare and de Sitter gauge theories of gravity with propagating torsion.— Phys. Rev. D, 1981, **26**, p. 3327—3341.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию 1

Введение

История и проблемы теории гравитации 3

Глава 1

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

1. Пространство-время Минковского 14
2. Пространство-время в теории гравитации Эйнштейна 21
3. Основы геометрии ОТО 22
4. Уравнения теории гравитации 35
5. Каталог гравитационных полей 45
6. Экспериментальные подтверждения ОТО 51

Глава 2

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

1. Принцип относительности и проблема систем отсчета 65
2. Принцип эквивалентности и (3 + 1)-разбиение . . 72
3. Проблема энергии гравитационного поля 81
4. Гравитационные сингулярности 89
5. Современная космология 99

Глава 3

ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. Элементы теории групп и таблица элементарных частиц 113
2. Теория калибровочных полей и программа Большого объединения 122
3. Калибровочная теория гравитации 138
4. Обобщения ОТО. Теория гравитации с кручением . 145
5. Квантовая гравитация 156
6. Суперобъединение гравитации и элементарных частиц 176

Список рекомендованной литературы 190

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Сарданашвили Г. А.

Современные методы теории поля

Т. 1. **Геометрия и классические поля**

Т. 2. **Геометрия и классическая механика**

Т. 3. **Алгебраическая квантовая теория поля**

Т. 4. **Геометрия и квантовые поля**

Геометрические методы сейчас широко применяются как в классических, так и в квантовых полевых моделях. В **томе 1** рассматривается классическая теория поля, математический аппарат которой, в отличие от квантовой теории поля, можно считать вполне разработанным. **Том 2** является своего рода приложением общего геометрического аппарата классической теории поля к теоретической механике. Такие основные понятия механики, как сила, система отсчета, энергия и др., нуждаются в математической формализации. В **томе 3** излагаются основные методы и имеющиеся модели алгебраической формулировки квантовой теории. Эта формулировка основана на так называемой конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала, когда квантовая система характеризуется некоторой алгеброй наблюдаемых, а физически достоверными считаются значения той или иной положительной формы на этой алгебре. В **томе 4** дается краткий обзор квантовых полевых моделей, в которых существенную роль играют связности. В квантовой теории поля используется алгебраическое понятие связностей на модулях и пучках.

Вигнер Э. **Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии.**

Рубаков В. А. **Классические калибровочные поля.**

Коноплева Н. П., Попов В. Н. **Калибровочные поля.**

Богуш А. А. **Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий.**

Розенталь И. Л., Архангельская И. В. **Геометрия, динамика, Вселенная.**

Ляховский В. Д., Болохов А. А. **Группы симметрии и элементарные частицы.**

Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. **Применение теории групп в квантовой механике.**

Эддингтон А. **Пространство, время и тяготение.**

Грин Б. **Элегантная Вселенная. Суперструны и поиски окончательной теории.**

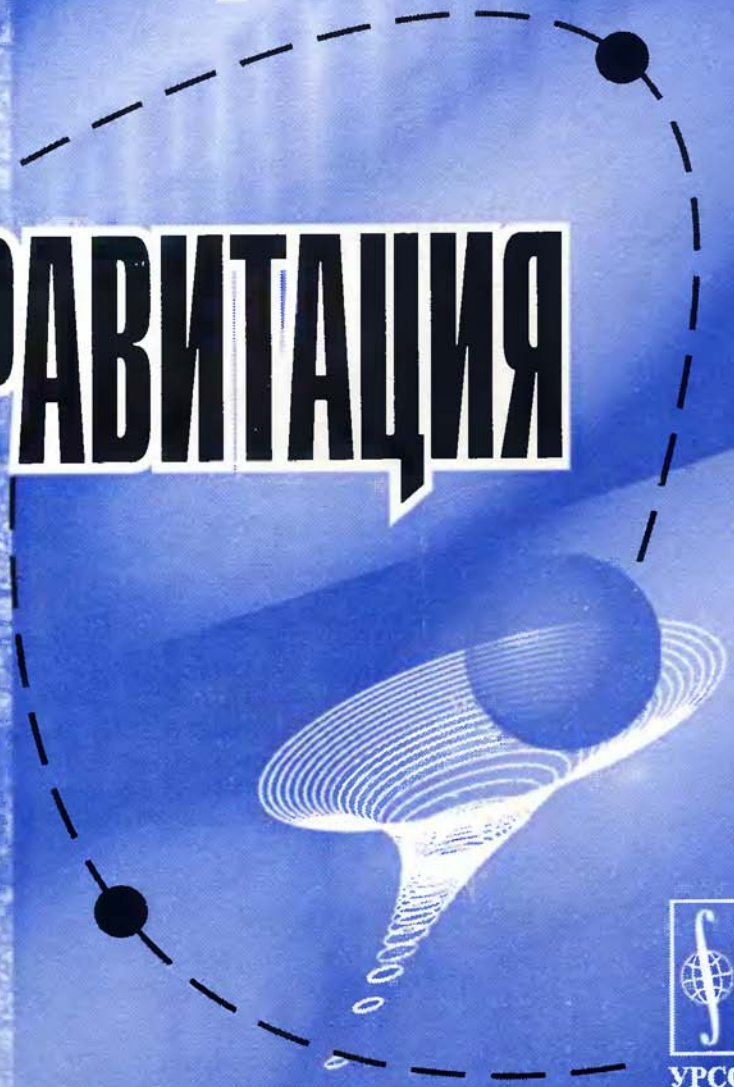
Пенроуз Р. **НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.**

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс **(095) 135–44–23, 135–42–46**
или *электронной почтой* URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в *Интернет-магазине:* http://URSS.ru

Издательство УРСС
Научная и учебная литература

Д. Д. Иваненко
Г. А. Сарданашвили

ГРАВИТАЦИЯ



УРСС

Дмитрий Дмитриевич
ИВАНЕНКО
(1904—1994)

Выдающийся физик-теоретик XX века. Предложил протон-нейтронную модель атомного ядра. Разработал первую модель ядерных сил (совместно с И. Е. Таммом). Совместно с Е. Н. Гапоном начал развивать оболочечную модель ядра. Разработал каскадную теорию космических ливней (совместно с А. А. Соколовым). Предсказал синхротронное излучение релятивистских электронов (совместно с И. Я. Померанчуком) и создал его классическую теорию (совместно с А. А. Соколовым). Совместно с В. А. Фоком построил уравнение Дирака в гравитационном поле (коэффициенты Фока—Иваненко). Построил нелинейное обобщение уравнения Дирака. Развивал обобщенную теорию гравитации с полем кручения. Предложил модель кварковых звезд (совместно с Д. Ф. Курдгелаидзе). Разработал калибровочную теорию гравитации как хиггсовского поля (совместно с Г. А. Сарданашвили).

Геннадий Александрович
САРДАНАШВИЛИ

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры теоретической физики МГУ. Занимается калибровочной теорией гравитации и применением геометрических методов в теории поля, классической и квантовой механике.

2158 ID 16859
9 785354 005383 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet:* http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135–44–23
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46