

• Д. Д. Иваненко  
Ю. Н. Обухов  
Г. А. Сарданашвили

ВВЕДЕНИЕ  
В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ  
ТЕОРИЮ  
КАЛИБРОВОЧНЫХ  
ПОЛЕЙ



Москва  
Высшая школа  
1991

ББК 22.31  
ИЗЗ  
УДК 530.1

Рецензент — проф. В. Р. Китайгородов (Казанский государственный университет)

ИЗЗ

Иваненко Д. Д. и др.

Введение в геометрическую теорию калибровочных полей / Д. Д. Иваненко, Ю. Н. Обухов, Г. А. Сарданашвили. Науч.-теор. пособие. — М.: Высш. шк., 1991. — 000 с.: ил.

ISBN 5-06-001010-4

Книга посвящена изложению теории калибровочных полей в формализме расслоений, позволяющем учитывать глобальные свойства полей, и описанию основных физических моделей с нетривиальными топологическими характеристиками. Приведены основы аппарата дифференциальной геометрии, расслоений, гомотопий, гомологий и характеристических классов. Рассмотрены солитонные, инстантонные и монополярные модели, аномалии в квантовой теории поля, эффект Адрона — Бома. Описаны основные геометрические конструкции обобщенных калибровочных моделей гравитации.

Для студентов физических специальностей университетов, педагогических и технических вузов.

И 1604030000—000 001(01)—91  
6—91

ББК 22.31

530.1

ISBN 5-06-001010-4

© Д. Д. Иваненко, Ю. Н. Обухов,  
Г. А. Сарданашвили, 1991

## Предисловие

## Введение

## Глава I

### ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

- § 1. Топологические пространства
- § 2. Многообразия
- § 3. Расслоения
- § 4. Связности на расслоениях

## Глава II

### КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

- § 5. Теория Янга — Миллса
- § 6. Классические поля в формализме расслоений
- § 7. Калибровочные антисимметричные поля
- § 8. Спиноры в 4-мерном пространстве — времени

## Глава III

### ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

- § 9. Гомотопические группы
- § 10. Солитоны
- § 11. Гомологии и когомологии
- § 12. Эффект Аяронова — Бома

- § 13. Характеристические классы расслоений
- § 14. Инстантоны
- § 15. Алгебраические конструкции инстантонов
- § 16. Магнитные монополи
- § 17. Теорема об индексе
- § 18. Квантование калибровочных полей
- § 19. Калибровочные аномалии

## Глава IV

### ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ

- § 20. Гравитация в формализме расслоений
- § 21. Суперсимметрия и суперпространства
- § 22. Многомерные модели типа Калуца — Клейна

## Приложения

- Приложение I. Теоремы Нетер
- Приложение II. Системы со связями
- Приложение III. Пространство путей
- Приложение IV. Когомологии со значениями в пучках
- Приложение V. Функциональное пространство калибровочных полей

### Дополнение ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОЙ АТОМНО-КВАНТОВОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КАРТИНЫ МИРА

## Литература

## Указатель терминов

## Предисловие

Стимулированные развитием калибровочной теории геометрические методы применяются в теории поля сейчас повсеместно. Наша книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и ученых, специализирующихся в области теории поля, гравитации и объединенных моделей фундаментальных взаимодействий. Ее цель — познакомить читателей с основными положениями дифференциальной геометрии и алгебраической топологии и показать, как с их помощью описывать те или иные полевые системы. Поэтому мы, как правило, не даем доказательств приводимых математических утверждений, а, не пренебрегая строгостью изложения, стремимся лишь пояснить их или по возможности проиллюстрировать простыми примерами. Для более глубокого овладения математическим аппаратом мы рекомендуем литературу [1—8]. Описание физических систем мы в основном сосредоточиваем на ключевых пунктах и моделях, которые служат отправными точками современного геометрического подхода к теории поля. При этом следует иметь в виду, что разработка некоторых моделей (например, струн, многомерии) уже далеко продвинулась и предполагает использование более изощренных математических методов, чем изложенные в книге, тогда как для других физических систем строгий математической формулировке поддаются лишь некоторые исходные положения. Такие неравномерность и фрагментарность характерны для активно развиваемой теории. В частности, быстро устаревает цитируемая литература. Поэтому по физической проблематике мы ограничиваемся в книге в основном ссылками на необходимые оригинальные работы. В книге используется много математических терминов, и мы снабдили ее обширным предметным указателем. Метрика Минковского выбрана с сигнатурой  $(+ \text{---})$  и принята система единиц, в которой постоянная Планка и скорость света равны 1.

Авторы

## Введение

Взаимоотношение физики, связанной с реальными объектами, и математики, являющейся, казалось бы, чисто абстрактной системой концепций, анализировалось в течение столетий, еще с античности вплоть до нашего времени, в трудах энциклопедистов Д. Дидро и Ж. Д'Аламбера, Г. Вейля, Э. Вигнера и других авторов. Хорошо известно высказывание Канта, что в какой-либо отрасли естествознания содержится собственно научных сведений столько, насколько она является математизированной. С другой стороны, Эйнштейн в одном из академических докладов 1921 г. указал, что если теоремы математики относятся к действительности, то они не являются точными, а будут полностью надежными, если они не связаны с реальностью. Так или иначе, удивительным образом, самые далекие от наглядной лабораторной действительности математические построения, например, XIX в. — неевклидова геометрия Н. И. Лобачевского, грассманова алгебра некоммутирующих координат, гиперкомплексные кватернионы и другие концепции — оказались в физике XX в. самыми необходимыми в создании релятивистской и квантовой теорий, модели гравитации, т. е. основ всей физической картины мира, со своей стороны давшей большой импульс развитию многих областей математики. Дальнейшее развитие современной физики с ее главнейшей принципиальной задачей построения единой теории, тесно связанное с расширением математического формализма, по-видимому, будет вводить в игру новые непривычные области математики.

Для лучшего понимания современной ситуации мы сочли целесообразным в Дополнении дать ее общую краткую характеристику, напомнив успехи и вместе с тем указав главные нерешенные проблемы, придав при этом изложению несколько историзированный характер. Нынешнюю физическую картину мира можно описать как основанную на геометризованной трактовке гравитации, отражающей искривление пространства — времени и порождаемой лучевыми видами материи, состоящей из элементарных частиц и субчастиц — кварков, взаимодействующих посредством калибровочных полей (фотонов, глюонов и др.). Теория калибровочных полей в

настоящее время составляет основу большинства моделей взаимодействия элементарных частиц. Ее главные достижения — подтверждаемые экспериментами и ставшие общепризнанными теория электрослабых взаимодействий, глюонная модель взаимодействия кварков — квантовая хромодинамика. В теории поля введение калибровочных полей в качестве медиаторов взаимодействия стало универсальным способом описания взаимодействий с самыми разными симметриями. На калибровочной теории базируется современная программа объединения элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. В данной книге рассматривается геометрическая сторона калибровочной теории.

Исторически первоначальная формулировка калибровочной теории Янга—Миллса—Утиямы (1954—1956) основывалась на принципе локальной инвариантности (т. е. инвариантности относительно зависящих от точки преобразований симметрий) и на введении калибровочных полей — потенциалов взаимодействия  $A_\mu$  — как компенсирующих полей в составе операторов обобщенной производной  $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  (см. § 5). В 60-е годы стала разрабатываться формулировка калибровочной теории в терминах расслоенных пространств, исходившая из интерпретации обобщенной производной  $D_\mu$  как ковариантной, а калибровочных полей как связностей некоторой геометрии.

Применение формализма расслоений в теории поля основывается на математическом определении классических полей как сечений векторных расслоений и непосредственно приводит к калибровочной теории взаимодействия этих полей. Принцип локальной инвариантности в описании классических полей расслоениями оказывается следствием естественного требования инвариантности относительно преобразований эквивалентности расслоений, а калибровочные поля возникают как коэффициенты формы связности на расслоениях. В результате взаимодействие посредством калибровочных полей выглядит как движение в некоторой геометрии, определяемой этими калибровочными полями как связностями.

Калибровочная теория в формализме расслоений фактически реализовала идею геометризации взаимодействий, положенную в основу известных единых теорий 20-х годов. Причиной их неудачи было то, что взаимодействие с внутренними (не пространственно-временными) симметриями (а конкретно — электромагнетизм) эти теории пытались описывать, как и гравитацию, в рамках геометрии пространства — времени, или, прибегая к терминологии расслоений, геометрии касательного расслоения над пространством — временем, тогда как в калибровочной теории для описания этих взаимодействий применяются расслоения, слоями которых являются не касательные пространства, а пространства соответствующих внутренних характеристик полей и частиц.

Геометрическая формулировка позволяет строить калибровочную теорию на произвольном многообразии (см. гл. II). В случае

внутренних симметрий она локально (на стягиваемых областях) совпадает с компенсационной янг-миллсовской формулировкой калибровочной теории на пространстве Минковского. В то же время применение расслоений вводит в рассмотрение совершенно новый класс физических характеристик — так называемые топологические числа и заряды, учитывающие глобальные топологические особенности многообразий и расслоений и описывающие глобальные свойства материальных и калибровочных полей соответственно как сечений этих расслоений и связностей на них. Примером таких характеристик являются элементы гомотопических групп, числа Чженя, Понтрягина, эйлерова характеристика и др. Они широко применяются в различных солитонных, монополярных, инстантонных и других нелинейных моделях, описывающих полевые конфигурации с нетривиальной топологией (см. гл. III). Причем для таких моделей не обязательно предполагать топологическую нетривиальность самого пространства — времени, что значительно сужало бы их физическое приложение. Полевые конфигурации с ненулевыми топологическими характеристиками могут возникать и в пространстве Минковского. Например, если поля на пространственной бесконечности имеют по всем направлениям одну и ту же асимптотику, их можно рассматривать и классифицировать как поля на 3-мерной сфере.

Существует, однако, точка зрения, что рассмотрение классических калибровочных полей неабелевых внутренних симметрий вообще физически бессмысленно, поскольку и глюоны, и промежуточные бозоны электрослабого взаимодействия — сугубо квантовые объекты, на которые геометрическая трактовка калибровочной теории не распространяется.

Тем не менее геометризация классических полей сказывается и на квантовых полевых моделях. Дело в том, что при квантовании методом функционального интегрирования производящий функционал функций Грина квантованных полей выражается через классический функционал действия и интегрирование в нем ведется по функциональному пространству классических полей. Кроме того, неотъемлемой частью большинства современных калибровочных моделей является неинвариантный вакуум — своего рода классический фон. В результате топологические характеристики могут проявлять себя и в квантовых полевых моделях (см. гл. III). Причем, что особенно важно, связанные с ними эффекты являются существенно непертурбативными, т. е. не могут быть получены по теории возмущений.

До сих пор речь шла о калибровочных моделях только внутренних симметрий. Калибровочный подход, конечно, не обошел стороной и пространственно-временные симметрии. Пространственно-временные калибровочные модели имеют своей главной целью распространение на гравитацию и ее обобщения универсального калибровочного способа описания фундаментальных взаимодейст-

вий и тем самым включение гравитации в объединенную картину этих взаимодействий. Однако непосредственное применение янг-миллсовской компенсационной формулировки калибровочной теории к пространственно-временным симметриям столкнулось с серьезными трудностями, обусловленными спецификой пространственно-временных преобразований. Преодолеть эти трудности во многом позволяет использование аппарата расслоений. Однако пока еще ни одна калибровочная модель гравитации не стала окончательно общепризнанной. Поэтому, не касаясь в данном учебном разделе расслоений лишь математические основы тех пространственно-временных геометрий, с которыми имеют дело современная теория гравитации, ее обобщенные и объединенные модели (см. гл. IV).

Рассмотрение геометрических аспектов калибровочной теории требует привлечения соответствующего математического аппарата. Поэтому мы посвятили гл. I и еще ряд параграфов книги изложению по возможности в доступной форме необходимого минимума сведений из дифференциальной геометрии и алгебраической топологии. Описание некоторых физических и математических конструкций вынесено в Приложения.

## Глава I. Элементы дифференциальной геометрии

В книге в физических моделях, если специально не оговорено, топологические пространства считаются паракомпактными связными локально евклидовыми топологическими многообразиями, а дифференцируемые многообразия и дифференцируемые отображения — бесконечно дифференцируемыми (класса  $C^\infty$ ).

### § 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическая структура, задаваемая на множестве, определяет отношение близости между точками множества. Она позволяет придать выражению «такое-то свойство имеет место для всех точек, достаточно близких к  $x$ » точный смысл; это означает, что множество точек, обладающих этим свойством, образует некоторую окрестность точки  $x$  в данной топологии.

Говорят, что множество  $X$  наделено *топологической структурой*, (является *топологическим пространством*), если каждому его элементу  $x$  тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из  $X$ , называемых *окрестностями* этого элемента. Обозначим это семейство  $B(x)$ . Оно должно удовлетворять следующим весьма естественным условиям:

A1) элемент  $x$  принадлежит каждому множеству из  $B(x)$ ;

A2) всякое подмножество из  $X$ , содержащее какую-либо окрестность из  $B(x)$ , принадлежит  $B(x)$ , т. е. тоже является окрестностью  $x$ ;

A3) пересечение конечного числа окрестностей тоже является окрестностью, т. е. принадлежит  $B(x)$ ;

A4) для каждой окрестности  $V$  из  $B(x)$  всегда существует «меньшая» окрестность  $W \subset V$ , такая, что  $V \in B(y)$  для каждого элемента  $y \in W$ , т. е.  $V$  является окрестностью всякого элемента из множества  $W$ .

Из условия (A2) следует, что множество окрестностей  $B(x)$  можно определить, задавая *фундаментальную систему окрестностей* точки  $x$ , т. е. такое подмножество  $B(x) \subset B(x)$ , что всякая окрестность из  $B(x)$  содержит окрестность из  $B(x)$ .

**Пример 1.1.** Топологическое пространство называется *дискретным*, если фундаментальная система окрестностей всякой его точки сводится к самой этой точке. Отсюда следует, что в силу условия (A2) всякое множество, содержащее данную точку, является окрестностью этой точки в дискретной топологии.

**Пример 1.2.** Рассмотрим случай, когда отношение близости между точками множества можно выразить числом — расстоянием между точками. Множество  $X$  называется *метрическим пространством*, если для каждой пары его точек  $x$  и  $x'$  задана *функция расстояния* (метрика)  $\rho(x, x')$ . Она определяется как вещественная функция на *декартовом* (прямом) *произведении*  $X \times X$  (это множество всех пар  $(x, x'), x, x' \in X$ ), удовлетворяющая следующим условиям:

$$\rho(x, x) = 0;$$

$$\rho(x, x') = \rho(x', x) > 0, x \neq x';$$

$$\rho(x, x') + \rho(x', x'') \geq \rho(x, x'').$$

Примером метрического пространства служит множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  с функцией расстояния

$$\rho(x, x') = |x - x'|.$$

Определим на метрическом пространстве топологию, выбрав в качестве фундаментальной системы окрестностей каждой его точки  $x$  множества

$$D_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

для всех  $\varepsilon > 0$ . Такая топология называется *метрической*. Для нее выражение «такое-то свойство имеет место для всех точек, достаточно близких к  $x$ » означает, что это свойство выполняется для всех точек, расстояние которых от  $x$  меньше некоторого значения  $\varepsilon$ . Например, фундаментальная система окрестностей всякого элемента  $x$  множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  в метрической топологии образована интервалами

$$D_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\} = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

для всех  $\varepsilon > 0$ . Это топология 1-мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^1$ .

Топологию на множестве можно вводить несколькими эквивалентными способами, например, задавая семейство открытых подмножеств множества  $X$ .

Подмножество называется *открытым*, если оно является окрестностью всякой своей точки. Так, в дискретной топологии сама точка уже оказывается открытым множеством. В пространстве  $\mathbb{R}^1$  открытыми являются всевозможные интервалы; но, например, отрезок — не открытое множество, поскольку не является окрестностью своей граничной точки.

Множество открытых подмножеств топологического пространства обладает следующими свойствами:

Б1) всякое объединение открытых множеств есть открытое множество;

Б2) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;

Б3) пустое множество  $\emptyset$  и само множество  $X$  являются открытыми (это можно вывести из свойств (Б1) и (Б2)).

Подчеркнем, что свойство (Б2) не распространяется на бесконечное пересечение открытых множеств. Например, пересечение всех интервалов  $D_\varepsilon(x)$  из примера 1.2 сводится к самой точке  $x$ , которая не является открытым множеством в метрической топологии.

Задание множества открытых подмножеств, удовлетворяющее условиям (Б1)–(Б3), определяет топологию на множестве  $X$ . В этом случае окрестность точки  $x \in X$  характеризуется как множество, которое содержит какое-либо открытое множество  $U$ , содержащее точку  $x$ .

Свойство (Б1) позволяет определить все множество открытых подмножеств, задав *базу топологии*, т. е. такое семейство открытых подмножеств, что всякое открытое подмножество пространства  $X$  является объединением множеств из этого семейства. Например, базу дискретной топологии составляют все точки пространства  $X$ . Базу метрической топологии — множества вида  $D_\varepsilon(x)$  для всех  $x \in X$  и  $\varepsilon > 0$ ; они называются *открытыми шарами* радиуса  $\varepsilon$ .

Одно и то же множество может быть наделено различными топологическими структурами, и это будут разные топологические пространства. Например, на множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$  могут быть введены дискретная топология, топология евклидова пространства  $\mathbb{R}^1$ , или топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само множество  $\mathbb{R}$ .

Пусть на множестве  $X$  заданы две топологические структуры, такие, что всякое множество, открытое в первой топологии, является открытым и во второй. Тогда эти топологии называют *сравнимыми* и говорят, что первая топология *слабее* второй. Не всякие две топологические структуры на множестве  $X$  сравнимы, но среди всех топологий на  $X$  всегда есть *слабейшая* и *сильнейшая*. Первая — это топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само множество  $X$ , а вторая — дискретная топология.

Дополнения  $X \setminus U$  открытых множеств  $U$  в топологическом пространстве  $X$  называют *замкнутыми множествами*. Они обладают следующими свойствами:

всякое пересечение замкнутых множеств — замкнутое множество;

объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество;

пустое множество и все пространство являются замкнутыми. Примером замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^1$  служат отрезки  $[a, b]$ , как дополнения открытых множеств

$$]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[.$$

В метрической топологии — это *замкнутые шары*.

$$D_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

В дальнейшем под *шарами*, если специально не оговорено, будут подразумеваться именно замкнутые шары.

Пусть  $A$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Минимальное замкнутое множество, содержащее  $A$ , называется его *замыканием*  $\bar{A}$ . Оно состоит из всех точек *прикосновения* множества  $A$ , т. е. из точек, все окрестности которых пересекают  $A$ . *Границей* множества  $A$  именуется множество точек прикосновения  $A$  и его дополнения  $X \setminus A$ . Например, замыканием интервала  $]a, b[$  в  $\mathbb{R}^1$  является отрезок  $[a, b]$ , а его границей — множество из двух точек  $\{a\} \cup \{b\}$ . В метрическом пространстве границей открытого шара  $D_\varepsilon(x)$  является *сфера*

$$S_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) = \varepsilon\}.$$

Определим теперь *морфизмы топологических пространств*. Это отображения множеств, которые сохраняют топологическую структуру, т. е. *окрестность отображается в окрестность*. Таковыми являются непрерывные отображения.

Отображение  $f$  топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $X'$  называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества в  $X'$  является открытым множеством в  $X$ , или эквивалентно, если для всякой окрестности  $V'$  элемента  $x' \in X'$  существует окрестность  $V$  его прообраза  $x (f(x) = x')$ , такая, что  $f(V) \subset V'$ . Композиция  $f \circ f'$  непрерывных отображений  $f$  и  $f'$  является непрерывным отображением.

В частности, всякое отображение дискретного пространства в любое топологическое пространство является непрерывным, поскольку в дискретной топологии всякий прообраз  $x$  точки  $f(x)$  уже сам является открытым множеством.

При непрерывном отображении  $X$  в  $X'$ , хотя прообраз открытого множества в  $X'$  является открытым в  $X$ , *образ открытого множества в  $X$  может не быть открытым в  $X'$* , т. е. непрерывное отображение не обеспечивает изоморфизм топологических структур на  $X$  и  $X'$ . *Гомеоморфизмом* топологического пространства  $X$  на топологическое пространство  $X'$  называется взаимно однозначное соответствие  $f$  множества  $X$  на множество  $X'$ , устанавливающее изоморфизм топологических структур на  $X$  и  $X'$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы отображения  $f$  и  $f^{-1}$  были непрерывными.

**Пример 1.3.** В калибровочной теории в качестве групп симметрий фигурируют, как правило, группы Ли (см. пример 2.3), кото-

рые являются частным случаем топологических групп. Группа  $G$  называется *топологической*, если ее *групповое пространство* (множество всех элементов группы) наделено топологией, в которой операции произведения  $g : g' \rightarrow gg'$  и перехода к обратному элементу  $g \rightarrow g^{-1}$  являются непрерывными (гомеоморфизмами  $G$ ). Например, группа действительных чисел по сложению  $\mathbb{R}$  представляет собой прямую  $\mathbb{R}^1$ , в которой операция произведения (сдвиг на число) и переход к обратному (умножение на  $-1$ ) — гомеоморфизмы  $\mathbb{R}^1$ .

Пусть  $X$  и  $X'$  — топологические пространства. Их *произведением*  $X \times X'$  называется декартово произведение множеств  $X$  и  $X'$  наделенное топологией, базу которой составляют множества вида  $U \times U'$ , где  $U$  и  $U'$  — открытые множества в  $X$  и  $X'$ .

**Пример 1.4.** *Евклидовым топологическим пространством размерности  $n$*  называется  $n$ -кратное произведение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1.$$

Фундаментальную систему окрестностей всякой точки  $x$  в  $\mathbb{R}^n$  образуют  $n$ -мерные открытые шары

$$D_\varepsilon^n(x) = \left\{ y : \|x - y\| = \left( \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Функция  $\|x - y\|$  является функцией расстояния на  $\mathbb{R}^n$ , и определяется с ее помощью топология — метрической.

Топологическое пространство называется *локально евклидовым* размерности  $n$ , если всякая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной  $\mathbb{R}^n$ . Например, окружность  $S^1$  является локально евклидовым пространством размерности 1.

*Пространство — время Минковского как топологическое пространство представляет собой 4-мерное евклидово топологическое пространство*, что и дает основание ограничиваться в физических моделях евклидовыми и локально евклидовыми пространствами.

Пусть  $A$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Топологией, *индуцируемой на  $A$*  топологией пространства  $X$ , называется топология, открытыми множествами в которой являются всевозможные пересечения  $A$  с открытыми множествами из  $X$ . Множество  $A$ , наделенное такой топологией, называется *подпространством* пространства  $X$ . Топология подпространства является *наиболее слабой топологией на  $A$* , при которой отображение вложения  $A$  в  $X$  непрерывно.

Например, пусть  $X$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$ , а  $A$  — прямая  $\mathbb{R}^1$  в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда топология, индуцируемая на  $A$  из  $\mathbb{R}^2$  (пересечение открытого круга из  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{R}^1$  — это интервал в  $\mathbb{R}^1$ ), совпадает с топологией прямой  $\mathbb{R}^1$ , и  $A$  является 1-мерным евклидовым подпространством плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Введем теперь важные понятия отношения эквивалентности и фактор-пространства. *Отношением*  $E$  на множестве  $X$  называется подмножество  $E \subset X \times X$ , говорят, что элемент  $a \in X$ , находится в отношении  $E$  к элементу  $b \in X$  (обычно пишут  $aEb$ ), если  $(a, b) \in E$ . Отношение  $E$  именуется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$aEa$ , т. е. элемент  $a$  эквивалентен сам себе для всех  $a$ ;

$aEb$  влечет  $bEa$ , т. е. если элемент  $a$  эквивалентен  $b$ , то  $b$  эквивалентен  $a$ ;

из  $aEb$  и  $bEc$  следует  $aEc$ , т. е. если элемент  $a$  эквивалентен  $b$  и  $b$  эквивалентен  $c$ , то элемент  $a$  эквивалентен  $c$ .

Например, отношение параллельности прямых на плоскости есть отношение эквивалентности.

*Классом эквивалентности* отношения  $E$  на множестве  $X$  называется такое подмножество  $X_E \subset X$ , что  $aEb$  для всех  $a, b \in X_E$  и отношение  $E$  не имеет места ни для каких  $a \in X_E$  и  $b \in X \setminus X_E$ . В силу этого определения классы эквивалентности  $\{X_E\}$  образуют разбиение множества  $X$ , т. е.

$$X = \bigcup X_E, X_E \cap X'_E = \emptyset,$$

поскольку всякий элемент принадлежит некоторому классу эквивалентности (из условия  $aEa$ ), но он не может одновременно принадлежать разным классам эквивалентности.

**Пример 1.5.** Пусть топологическая группа  $G$  действует в топологическом пространстве представления  $V$  непрерывно и эффективно. Это означает, что отображение

$$G \times V \ni (g, v) \rightarrow gv \in V$$

непрерывно и, если  $gv = v$  для всех  $v \in V$ , то  $g = 1$  — единица группы. Зададим на  $V$  отношение  $E$ , такое, что  $vEv'$ , если  $v' = gv$  для некоторого элемента  $g \in G$ . Это отношение эквивалентности. Его классы эквивалентности называются *орбитами группы*  $G$  в  $V$ . Например, орбитами группы  $SO(2)$  вращений плоскости являются окружности с центром в точке вращения. Действительно, любые две точки такой окружности переводятся друг в друга некоторым поворотом. На каждой орбите группа  $G$  действует *транзитивно*, т. е. в силу определения орбиты для любых двух точек  $v$  и  $v'$  орбиты имеется элемент  $g \in G$ , такой, что  $v' = vg$ .

Множество всех классов отношения эквивалентности  $E$  на множестве  $X$  называется *фактором множества*  $X$  по отношению  $E$ , или *фактором-множеством*  $X/E$ .

**Пример 1.6.** Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ . Определим на  $G$  отношение эквивалентности  $E$ , такое, что  $gEg'$ , если  $g' = gh$  ( $g' = hg$ ) для некоторого элемента  $h \in H$ . Фактор группы  $G$  по этому отношению эквивалентности называется *левым (правым) фактор-прост-*

*ранством*  $G/H$ . Если  $H$  — инвариантная подгруппа  $G$ , т. е.  $g^{-1}hg \in H$  для всех  $g \in G, h \in H$ , то левое и правое фактор-пространство совпадают и  $G/H$  снабжено структурой группы, называемой *фактор-группой*.

Пусть  $X$  — топологическое пространство, наделенное некоторым отношением эквивалентности  $E$ , и

$$\pi: X \rightarrow X/E$$

— каноническая проекция, сопоставляющая каждому элементу из  $X$  его класс эквивалентности. Фактор-множество  $X/E$  становится топологическим *фактор-пространством*, если его снабдить *фактор-топологией*, такой, что прообразы  $\pi^{-1}(U)$  открытых множеств  $U$  в  $X/E$  открыты в  $X$ . Это наиболее сильная топология на  $X/E$ , при которой каноническая проекция  $X \rightarrow X/E$  непрерывна.

**Пример 1.7.** Фактор множества прямых на плоскости по отношению параллельности — это окружность с отождествленными противоположными точками (проективное пространство  $RP^1$ ).

В физических моделях имеют дело главным образом с отдельными компактными или локально компактными топологическими пространствами.

Топологическое пространство, в котором для всяких двух точек  $x$  и  $x'$  имеются не пересекающиеся между собой окрестности точки  $x$  и окрестности точки  $x'$ , называется *отделимым (хаусдорфовым) пространством*.

Например, в дискретном пространстве такими непересекающимися окрестностями являются сами точки и дискретное пространство отделимо; можно показать, что дискретная топология на конечном множестве является единственной отделимой топологией. *Евклидово пространство, как и всякое метрическое пространство, отделимо*, поскольку любые его две точки всегда можно окружить открытыми шарами, достаточно малыми, чтобы они не пересекались. Примером неотделимой топологии может служить слабейшая топология на множестве  $X$ .

Отделимое топологическое пространство, всякое *открытое покрытие*  $\{U_i\}$  которого ( $X = \bigcup U_i, U_i$  — открытые множества) содержит конечное подпокрытие, называется *компактным*.

Рассмотрим, например, покрытие дискретного пространства открытыми множествами, каждое из которых состоит из одной точки. Если число точек в пространстве более чем конечно, то это покрытие не содержит конечного подпокрытия и дискретное пространство некомпактно.

Приведенное определение компактного пространства может быть недостаточно наглядно. Некоторое представление о компактных пространствах могут дать таких два факта:

*в компактном пространстве  $X$  всякая бесконечная последовательность имеет предельную точку*, т. е. точку прикосновения, вся-



кая окрестность которой в  $X$  содержит элементы последовательности;

подмножество евклидова (метрического) пространства компактно в том и только том случае, когда оно ограничено (т. е. принадлежит некоторому шару конечного радиуса) и замкнуто.

Само евклидово пространство не является компактным. Оно локально компактно.

Топологическое пространство называется *локально компактным*, если оно отделимо и всякая его точка имеет компактную окрестность. Для точек метрического пространства такими окрестностями являются шары. *Всякое локально евклидово пространство локально компактно*. Дискретное пространство локально компактно, поскольку компактной окрестностью всякой его точки является сама эта точка.

Для любого локально компактного пространства  $X$  существуют компактное пространство  $X'$  и гомеоморфизм  $X$  на дополнение к некоторой точке  $a$  в  $X'$ . Такое пространство  $X'$  называется *компактификацией Александера локально компактного пространства  $X$* . Оно строится как объединение пространства  $X$  и множества из одного элемента  $\{a\}$ . Топология на  $X'$  определяется выбором в качестве открытых множеств в  $X'$  всех открытых множеств из  $X$  и всевозможных множеств вида  $(X \setminus K) \cup \{a\}$ , где  $K$  — компактные подмножества  $X$ . Говорят, что  $X'$  получается из  $X$  присоединением бесконечно удаленной точки  $a$ .

Например, компактификация прямой  $\mathbb{R}^1$  гомеоморфна окружности  $S^1$ . Действительно, введем на  $\mathbb{R}^1$  декартову координату  $x$ , а на  $S^1$  циклическую координату  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$  так, что координаты  $\pi$  и  $-\pi$  имеют одну и ту же точку  $a$ . Отображение  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} x$ , обратное стереографической проекции из точки  $a$ , осуществляет гомеоморфизм  $\mathbb{R}^1$  на  $S^1 \setminus \{a\}$ . При этом всякое открытое множество  $]a + \varepsilon, a - \varepsilon[$  в  $S^1$ , содержащее  $a$ , представляет собой объединение образа множества

$$\mathbb{R}^2 \left[ \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{-\pi + \varepsilon}{2} \right), \operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \varepsilon}{2} \right) \right] \right]$$

при этом отображении и бесконечно удаленной точки  $a$ , приобретающей декартову координату  $x = \pm \infty$ .

Локально компактное пространство называется *счетным в бесконечности*, если оно является счетным объединением компактных множеств. Например, *евклидово пространство счетно в бесконечности*. Действительно числовую прямую легко представить как объединение счетного числа отрезков.

Локально компактные пространства, счетные в бесконечности, *паракомпактны*. Условие паракомпактности (мы не приводим здесь его определения) входит во многие используемые нами теоремы. Это связано с тем, что паракомпактные пространства допускают так называемое *разбиение единицы*.

Пусть  $\{U_i\}$  — открытое покрытие отделимого топологического пространства  $X$ , т. е.  $X = \bigcup U_i$  и  $U_i$  — открыты. Семейство  $\{f_i\}$  неотрицательных вещественных непрерывных функций на  $X$  называется *разбиением единицы*, подчиненным покрытию  $\{U_i\}$ , если:

носитель  $\operatorname{supp} f_i$  (т. е. наименьшее замкнутое множество, вне которого  $f_i = 0$ ) принадлежит  $U_i$ ;

каждая точка  $x \in X$  обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств  $\operatorname{supp} f_i$ ;

$$\sum_i f_i(x) = 1 \text{ для всех } x \in X.$$

Упомянем в заключение еще одну характеристику — связность топологического пространства. Топологическое пространство называется *связным*, если оно не является объединением двух и более непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств.

Примером несвязного пространства может служить дискретное пространство. *Всякое несвязное подпространство топологического пространства образовано, как минимум, двумя подмножествами этого пространства, не имеющими общих точек прикосновения*. Связно евклидово пространство.

Принадлежность двух точек какому-либо одному связному множеству есть отношение эквивалентности, и классы эквивалентности, на которые это отношение разбивает пространство, является его максимальными связными подмножествами, именуемыми *компонентами связности* пространства. Отсюда, в частности, следует, что если для любой пары точек пространства  $X$  существует связное множество, их содержащее, то  $X$  связано.

Отметим, что свойства отделимости, компактности, локальной компактности, паракомпактности и связности топологических пространств сохраняются при непрерывном отображении, т. е. образ пространства, обладающего каким-либо из этих свойств, при непрерывном отображении тоже обладает тем же свойством.

## § 2. МНОГООБРАЗИЯ

**Дифференцируемые многообразия.** Дифференциальная геометрия, как и современная теория поля, ограничивается рассмотрением специального класса топологических пространств — многообразий, которые могут быть представлены как бы склеенными из областей евклидова топологического пространства. Это позволяет на каждой такой области вводить систему координат, а если отображения перехода между этими областями достаточно гладкие, задавать на таком пространстве дифференциальные структуры, такие, как касательные пространства, векторные поля, дифференциальные формы и др.

Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $\{U_i\}$  — его открытое

покрытие, такое, что для каждого индекса  $i$  имеется гомеоморфизм называется картой на  $X$ . Говорят, что две карты  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  множества  $U_i$  на открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пара  $(U_i, \varphi_i)$   $(U_j, \varphi_j)$  на  $X$   $C^r$  согласованы, если отображение  $\varphi_i \varphi_j^{-1}$  множества  $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$  на множество  $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$  (когда  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ) принадлежит классу  $C^r$ , т. е.  $r$  раз непрерывно дифференцируемо.

Все семейство попарно согласованных карт  $\Psi_X = \{U_i, \varphi_i\}$  называется атласом пространства  $X$ . На  $X$  могут существовать различные атласы. Два атласа считаются эквивалентными, если их объединение — тоже атлас, т. е. если карты, принадлежащие этим двум атласам, попарно согласованы.

Топологическое пространство, наделенное классом таких эквивалентных атласов  $\Psi_X$ , называется  $n$ -мерным дифференцируемым многообразием  $X^n$  класса  $C^r$ . Конструкция многообразия допускает также случай, когда требуется не дифференцируемость, а только непрерывность всех отображений. Такие многообразия называются топологическими.

Казалось бы, пространства, склеенные из областей евклидова пространства, с гарантией обладают хорошими свойствами. Однако это не так. Можно привести примеры, когда многообразие не является даже отделимым пространством. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы многообразие было также паракompактным связным локально евклидовым пространством. Топологические многообразия, обладающие этими свойствами, назовем допустимыми топологическими пространствами, а в дальнейшем, говоря дифференцируемое многообразие, будем подразумевать, что оно — допустимое топологическое пространство. Будем также считать, что оно класса  $C^\infty$ , т. е. все отображения бесконечно дифференцируемы.

На каждой карте  $(U, \varphi)$  многообразия  $X^n$  всякой точке  $x \in U$  можно сопоставить набор чисел — коэффициентов разложения  $\{x^1(x), \dots, x^n(x)\}$  вектора  $\varphi(x)$  относительно некоторого фиксированного базиса  $\{t_1, \dots, t_n\}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Этот набор называется координатами точки  $x$  в карте  $(U, \varphi)$ . Если точка  $x$  накрывается также другой картой  $(U', \varphi')$ , то в этой карте ей будет сопоставлен другой набор координат  $\{x^{\mu}(x)\}$  и отображение перехода  $\varphi' \varphi^{-1}$  между картами записывается как преобразование координат

$$\{x^{\mu}\} \rightarrow \{x^{\mu'}(x^{\nu})\}$$

на пересечении  $U \cap U'$ .

**Пример 2.1.** Сфера  $S^2$  является дифференцируемым многообразием, атлас которого может быть построен из двух карт —  $(U_1, \varphi_1)$  и  $(U_2, \varphi_2)$ , где  $U_1$  ( $U_2$ ) — сфера без северного (южного) полюса и  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) — стереографическая проекция из северного (южного) полюса на плоскость  $\mathbb{R}^2$  (рис. 1). Пусть  $\{x_1, y_1\}$  и  $\{x_2, y_2\}$  — координаты

наты относительно этих карт. Тогда дифференцируемое отображение перехода между картами имеет вид

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (2.1)$$

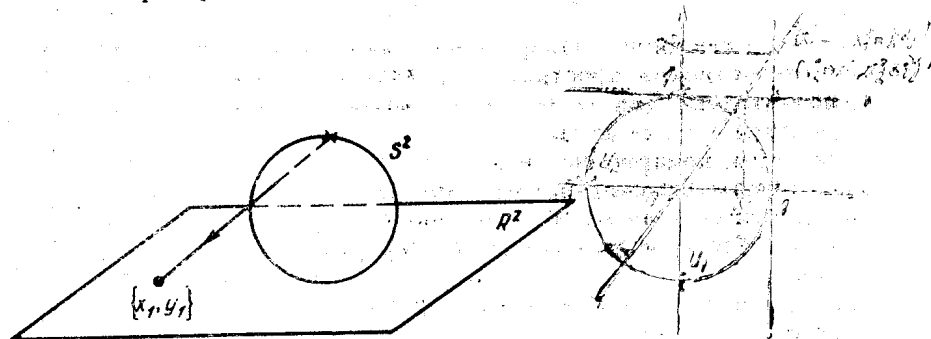


Рис. 1

Рис. 2

**Пример 2.2.** В ряде физических моделей приходится иметь дело с проективными пространствами. Вещественное  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  определяется как сфера  $S^n$  с отождествленными противоположными точками. Дифференцируемый атлас на  $\mathbb{R}P^n$  может быть построен из  $(n+1)$  карты, определяемой следующим образом. Поместим  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  гомеоморфно пространству центральных прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Каждая такая прямая задается направляющим вектором с координатами  $\{x^1, \dots, x^{n+1}\}$ . В качестве области  $U_i$  в  $\mathbb{R}P^n$  возьмем прямые, у которых  $x^i \neq 0$ , и каждой такой прямой сопоставим точку ее пересечения с гиперплоскостью  $x^i = 1$  — это отображение  $\varphi_i$  (см. пример  $\mathbb{R}P^1$  на рис. 2). Таким образом, координатами на карте  $(U_i, \varphi_i)$  являются координаты

$$\{x^1, \dots, x^{n+1}\}, \quad x^i = k^k x^i,$$

направляющих векторов прямых, координата  $x^i$  которых равна 1, т. е.

$$\{x^1, \dots, x^i, \dots, x^{n+1}\} = \{x^1, \dots, 1, \dots, x^n\}.$$

Для удобства в числе координат на карте  $(U_i, \varphi_i)$  мы оставили и  $x^i = 1$ . Переход между картами осуществляется на областях пересечения  $U_i \cap U_j$ , образованных прямыми с  $x^i \neq 0, x^j \neq 0$ , посредством отображений  $x_i^k = x_j^k / x_j^i$ .

**Пример 2.3.** Групповое пространство группы Ли — это дифференцируемое (аналитическое) многообразие, образованное множеством ее параметров. Приведем примеры некоторых групповых многообразий, наиболее часто встречающихся в физических приложениях.

1. Группа  $U(1)$  умножений на комплексные числа вида  $\exp(i\alpha)$ ; она же — группа поворотов  $SO(2)$ . Поскольку  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  и точки  $\alpha=0$  и  $\alpha=2\pi$  отождествлены, ее групповое пространство — окружность  $S^1$ .

2. Группа  $SU(2)$  комплексных унитарных  $(2 \times 2)$ -матриц  $M$ , которые имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad M^+ M = \hat{1}, \quad \det M = 1,$$

где  $a = x^1 + ix^2$ ,  $b = x^3 + ix^4$ . Поскольку

$$\det M = |a|^2 + |b|^2 = \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1,$$

групповое пространство  $SU(2)$  представляет собой 3-сферу  $S^3$ .

3. Группа 3-мерных вращений  $SO(3)$ . Она изоморфна факторгруппе группы  $SU(2)$  по подгруппе  $Z_2$  умножений на  $-1$  в выписанном выше представлении матрицами  $M$ . Поэтому ее групповое пространство

$$SD(3) = SU(2)/Z_2 = RP^3.$$

Мы будем рассматривать также *многообразия с границей*, т. е. когда  $\varphi_i$  — отображения в евклидово полупространство  $R^n$  с  $x^1 \leq 0$ . В этом случае дифференцирование в точках граничной гиперповерхности  $x^1=0$  понимается как дифференцирование слева. Граница многообразия  $X^n$  обозначается  $\partial X^n$  и представляет собой  $(n-1)$ -мерное многообразие. Компактное многообразие без границы, примером которого является сфера, называют *замкнутым многообразием*, и этот термин следует отличать от термина «замкнутое множество», приведенного в предыдущем параграфе.

В физических приложениях обычно рассматриваются ориентруемые многообразия. Атлас  $\Psi_X = \{U_i, \varphi_i\}$  дифференцируемого многообразия  $X$  называется *ориентированным*, если якобианы  $\det(\partial x_j^i / \partial x_i^v)$  всех преобразований переходов с карты на карту в этом атласе положительны. Многообразие считается ориентруемым, если всякий его атлас эквивалентен ориентированному. Говорят, что два ориентированных атласа на  $X$  ориентированы одинаково, если их объединение — снова ориентированный атлас. *Ориентацией на  $X$*  называется класс эквивалентности одинаково ориентированных атласов. На связном ориентруемом многообразии имеются в точности две ориентации.

**Пример 2.4.** Сфера  $S^n$  ориентруема, а проективное пространство  $RP^n$  ориентруемо только, когда  $n$  — нечетно. Иллюстрациями этим фактам могут служить:

сфера  $S^2$  из примера 2.1, для которой якобиан преобразования

перехода (2.1) равен  $(x_1^2 + y_1^2)^{-1} > 0$ , т. е. атлас  $\{x_1, y_1; x_2, y_2\}$  является ориентированным;

проективное пространство  $RP^1$  (см. рис. 2), для которого преобразование перехода между картами  $(x^1, 1)$  и  $(1, x^2)$  имеет вид  $x^1 = (x^2)^{-1}$  и его якобиан равен  $-(x^2)^{-2} < 0$  (т. е. атлас  $\{x^1; x^2\}$  не является ориентированным), но преобразованием координат  $x^1 = -x^1$ ,  $x^2 = x^2$  можно перейти к ориентированному атласу с положительным якобианом  $\partial x^1 / \partial x^2$ .

Задание ориентации на многообразии можно себе представить наглядно в случае 2-мерной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве как построение непрерывного поля нормальных к поверхности векторов. Ясно, что если такое поле построено, то возможно еще только одно такое поле, получаемое изменением направлений всех векторов на противоположные. Примером поверхности, на которой поле нормальных векторов однозначно построить нельзя, является лист Мёбиуса (см. пример 3.3).

Пусть  $X$  и  $X'$  — дифференцируемые многообразия и  $f$  — отображение  $X$  в  $X'$ . Говорят, что  $f$  является *морфизмом многообразий*, если оно непрерывно и для любых карт  $(U, \varphi)$  на  $X$  и  $(U', \varphi')$  на  $X'$  отображение

$$\varphi' f \varphi^{-1} : \varphi(U \cup f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(U')$$

дифференцируемо. Если при этом  $f$  — взаимно однозначное отображение, оно осуществляет изоморфизм дифференцируемого многообразия  $X$  на дифференцируемое многообразие  $X'$  и называется *диффеоморфизмом*.

Построение конкретного отображения многообразий  $f$  осуществляется именно заданием отображений  $\varphi' f \varphi^{-1}$  между картами многообразий.

**Пример 2.5.** Построим отображение окружности  $S^1$  в окружность  $S^1$ , при котором первая окружность дважды оборачивается вокруг второй. Введем на первой окружности атлас

$$\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha_1 < \frac{3\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha_2 < \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4} < \alpha_3 < \frac{7\pi}{4}\right),$$

$$\left(\frac{5\pi}{4} < \alpha_4 < \frac{9\pi}{4}\right),$$

$$\frac{\pi}{4} < \alpha_2 = \alpha_1 < \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < \alpha_3 = \alpha_2 < \frac{5\pi}{4},$$

$$\frac{5\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_3 < \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_1 + 2\pi < \frac{9\pi}{4}.$$

а на второй окружности — атлас

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \frac{5\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi}{2} < \varphi_1 = \varphi_2 < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi < \frac{5\pi}{2}.$$

Тогда искомое отображение задается в виде

$$a_1 \rightarrow \varphi_1 = 2a_1, \quad a_2 \rightarrow \varphi_2 = 2a_2, \\ a_3 \rightarrow \varphi_1 = 2a_3 - 2\pi, \quad a_4 \rightarrow \varphi_2 = 2a_4 - 2\pi.$$

**Касательные пространства.** Рассмотрим теперь конструкции, характерные именно для дифференцируемых многообразий. Это касательные векторы и касательные пространства. *Ведь то, что принято называть геометрией на многообразии, — это геометрия именно на касательном расслоении, образованном касательными пространствами, а глобальные топологические свойства многообразия выражаются через характеристические классы касательного расслоения.*

Хотя касательный вектор к кривой или касательную плоскость к поверхности наглядно легко себе представить, строгое математическое определение касательного вектора к многообразию выглядит весьма формальным.

Пусть  $X$  — многообразие и  $x \in X$ . Рассмотрим пары  $(c, t)$ , где  $c$  — карта  $(U, \varphi)$  на  $X$  такая, что  $x \in U$ , и  $t$  — элемент из  $\mathbb{R}^n$ . Две такие пары называются эквивалентными, если дифференциал  $d(\varphi' \varphi^{-1})$  отображения  $\varphi' \varphi^{-1}$  из карты  $c$  в карту  $c'$  в точке  $\varphi(x)$  преобразует  $t$  в  $t'$ , т. е.

$$t'^{\mu} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) t^{\nu},$$

где  $\{x^{\mu}\}$  и  $\{x'^{\nu}\}$  — координаты  $x$  относительно  $c$  и  $c'$ . Таким образом задается отношение эквивалентности между парами  $(c, t)$ , и класс эквивалентности пар  $(c, t)$  называется *касательным вектором*  $\tau$  к многообразию  $X$  в точке  $x$ .

Касательные векторы к  $X$  в точке  $x$  образуют множество, обозначаемое  $T_x(X)$  и называемое *касательным пространством* к  $X$  в точке  $x$ . Оно наделено структурой векторного пространства  $\mathbb{R}^n$  посредством отображения  $\theta_c$  и  $\mathbb{R}^n$  в  $T_x(X)$ , ставящего в соответствие вектору  $t \in \mathbb{R}^n$  касательный вектор, представляемый парой  $(c, t)$ .

Хотя базис касательного пространства  $T_x(X)$  можно выбрать произвольно, его часто задают так, чтобы он был согласован с системой координат, а именно, чтобы векторы этого базиса были касательными к координатным линиям в точке  $x$ . Для данной координатной карты  $c = (U \ni x, \varphi)$  таковыми являются векторы  $\tau_{\mu}$ , представляемые парами  $(c, t_{\mu})$ , где  $\{t_{\mu}\}$  — фиксированный базис прост-

ранства  $\mathbb{R}^n$ , т. е.  $\tau_{\mu} = \theta_c t_{\mu}$ . Такой базис касательного пространства называется *голономным*.

Если требовать, чтобы голономность базиса касательного пространства сохранялась при преобразованиях координат  $c \rightarrow c'$ , последние должны сопровождаться переходом от базиса  $\{\tau_{\mu}\}$ , голономного в карте  $c$ , к базису

$$\left\{\tau'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \tau_{\nu}\right\},$$

голономному в карте  $c'$ . Этот переход будет осуществляться автоматически при замене координат, если базисные векторы  $\tau_{\mu}$  представить в виде операторов частных производных  $\tau_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ . Смысл этой записи будет раскрыт ниже.

Морфизмы многообразий индуцируют морфизмы касательных пространств к ним. Пусть  $f: X \rightarrow X'$  — морфизм многообразий и  $x$  — точка в  $X$ . Рассмотрим карты  $(U \ni x, \varphi)$  на  $X$  и  $(U' \ni f(x), \varphi')$  на  $X'$ . Отображение  $\varphi' f \varphi^{-1}$  дифференцируемо, и его дифференциал в точке  $\varphi(x)$  определяет линейное отображение

$$(df)_x = \theta d(\varphi' f \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \theta_c^{-1}$$

из  $T_x(X)$  в  $T_{f(x)}(X')$ . Если отображение  $f$  переводит точку  $x \in X$  с координатами  $\{x^{\mu}\}$  в карте  $c$  в точку  $f(x) \in X'$  с координатами  $\{x'^{\mu}\}$  в карте  $c'$ , то отображение  $(df)_x$  переводит вектор  $\tau \in T_x(X)$  с координатами  $\{\tau^{\mu}\}$  в голономном базисе  $\{\partial/\partial x^{\mu}\}$  касательного пространства  $T_x(X)$  в вектор  $\tau' \in T_{f(x)}(X')$  с координатами

$$\tau'^{\mu} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \tau^{\nu} \quad (2.2)$$

в голономном базисе  $\{\partial/\partial x'^{\mu}\}$  касательного пространства  $T_{f(x)}(X')$ . Проводя замены координат  $\{x^{\mu}\}$  и  $\{x'^{\mu}\}$  в выражении (2.2), легко убедиться, что отображение  $(df)_x$  не зависит от выбора карт. Оно называется *касательным отображением* к  $f$  в точке  $x$ , матрица (2.2) — матрицей Якоби отображения  $f$ , а детерминант этой матрицы — *якобианом*  $f$ .

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  дифференцируемое отображение ориентированных многообразий. Выберем точку  $y \in Y$ . Предположим, что отображение  $f$  является *правильным* по отношению к точке  $y$ , т. е. полный прообраз точки  $y$  состоит из конечного числа точек  $x_i$  и якобианы отображения  $f$  в точках  $x_i$ , записанные относительно ориентированных координат  $\{x_i^{\mu}\}$  и  $\{y^{\nu}\}$ , не равны нулю. Назовем  $f$  *сохраняющим (меняющим) ориентацию* в точке  $x_i$ , если якобиан  $f$  в координатах  $\{x_i^{\mu}\}$ ,  $\{y^{\nu}\}$  положителен (отрицателен). *Локальной степенью отображения*  $f$  в точке  $y$  называется разность

$$\deg f_y = A_+(y) - A_-(y)$$

числа прообразов точки  $y$ , в которых  $f$  сохраняет ориентацию, и числа прообразов, в которых  $f$  одна и та же во всех точках  $y \in Y$ . Например, легко проверить, что степень отображения окружности на окружность из примера 2.5 равна двум.

**Векторные поля и дифференциальные формы.** Конструкция касательного пространства позволяет задать на многообразии такие объекты, как векторные поля и внешние дифференциальные формы.

В § 3 векторное поле будет определено как глобальное сечение касательного расслоения над многообразием  $X$ . Здесь мы скажем, что *векторное поле*  $\tau$  на многообразии  $X$  есть сопоставление каждой точке  $x \in X$  вектора  $\tau(x) \in T_x(X)$ . В локальной системе координат поле  $\tau$  задается набором дифференцируемых коэффициентов функций

$$\tau = \tau^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

которые называются *компонентами поля*  $\tau$ .

Аналогично определяются *тензорные поля*

$$T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x)$$

( $p$  раз ковариантные и  $q$  раз контравариантные) на многообразии  $X$ , принимающие значения в тензорных произведениях

$$\left( \otimes^q T(X) \right) \otimes \left( \otimes^p T_x^*(X) \right)$$

$q$  экземпляров касательных пространств  $T_x(X)$  и  $p$  экземпляров кокасательных пространств  $T_x^*(X)$ .

*Кокасательное пространство*  $T_x^*(X)$  — это дуальное к  $T_x(X)$  пространство линейных форм на  $T_x(X)$ . *Голономный базис*  $T_x^*(X)$  составляют формы, обозначаемые  $dx^\mu$  и определяемые соотношениями

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu.$$

Векторное поле  $\tau$  называется *неособым*, если оно нигде на  $X$  не обращается в нуль. *Неособые векторные поля существуют не на всяком многообразии*; например, такое поле нельзя построить на сфере  $S^2$ .

Каждому неособому векторному полю  $\tau$  на  $X$  однозначно ставится в соответствие *стационарный поток*  $x(s, x_0)$  на  $X$ , определяемый как решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \tau^\mu(x(s)), \quad x^\mu(0) = x_0^\mu. \quad (2.3)$$

Из известных теорем о существовании и единственности решения такой системы уравнений следует, что *через каждую точку*  $x_0 \in X$

*проходит одно и только одно решение*  $x(s, x_0)$  *уравнений (2.3), удовлетворяющее начальному условию*  $x(0, x_0) = x_0$  *и определенное на интервале*

$$s \in ]a, b[, \quad -\infty < a \leq 0 \leq b < \infty.$$

Векторное поле называется *полным*, если его интегральная кривая  $x(s, x_0)$  определена при всех  $x_0 \in X, s \in \mathbb{R}$ .

Стационарный поток  $x(s, x_0), x_0 \in X$ , индуцирует отображение

$$G_\tau(s) : x_0 \rightarrow x(s, x_0)$$

многообразия  $X$  на себя. Причем  $G_\tau(0) = \text{Id}_X$  — тождественное преобразование  $X$  и

$$G_\tau(s + s') = G_\tau(s) G_\tau(s'), \quad G_\tau(-s) = G_\tau^{-1}(s),$$

т. е. эти отображения при разных  $s$  образуют однопараметрическую группу Ли с генератором

$$\partial_\tau = \left. \frac{dG_\tau(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

Отображения  $G_\tau(s)$  многообразия  $X$  определяют отображения касательных и кокасательных пространств, а тем самым и тензорных полей на многообразии  $X$ . Действие генератора  $\partial_\tau$  группы  $G_\tau(s)$  на этих полях имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\tau^L : T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) \rightarrow & \left( \partial_\alpha \tau^\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) + \dots + \left( \partial_\alpha \tau^\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \partial_{\nu_1} \tau^\alpha T_{\alpha \nu_2 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) - \dots - \left( \partial_{\nu_p} \tau^\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) + \tau^\mu \partial_\mu T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x) \right) \right) \right). \quad (2.4) \end{aligned}$$

Преобразование (2.4) называется *дифференцированием* (или *производной Ли*) тензорного поля  $T$  вдоль векторного поля  $\tau$ . В частности, если  $T$  — скалярное поле (вещественная функция) на  $X$ ,

$$\partial_\tau^L T(x) = \tau^\mu(x) \partial_\mu T(x).$$

Часто векторные поля определяются именно как дифференцирования и эти понятия отождествляются. Поэтому при разложении поля  $\tau$  по голономному базису  $\{\partial^\mu\}$  базисные векторы  $\partial^\mu$ , оправдывая их форму записи, можно рассматривать как операторы частных производных. Например, может быть определен коммутатор двух векторных полей

$$[\tau, \tau'] = [\tau^\mu \partial_\mu, \tau'^\nu \partial_\nu] = (\tau^\mu \partial_\mu \tau'^\nu - \tau'^\nu \partial_\nu \tau^\mu) \partial_\nu,$$

который тоже является векторным полем. Это наделяет пространство векторных полей на многообразии  $X$  структурой алгебры Ли.

Обратно, пусть  $G$  — некоторая группа Ли диффеоморфизмов многообразия  $X$ , которая действует на  $X$  эффективно. Имеется вложение алгебры Ли  $A_G$  группы  $G$  в алгебру Ли векторных полей на

многообразия  $X$ , при котором генератору  $I$  алгебры  $A_G$  ставится в соответствие так называемое *фундаментальное векторное поле*

$$\tau_1(x) = \frac{d}{ds} \exp(sI)|_{s=0}, \quad x \in X, \quad (2.5)$$

такое, что  $\partial = I$ . Наглядно говоря, поле  $\tau_1(x)$  указывает направление, в котором переносится точка  $x$  под действием генератора  $I$  группы диффеоморфизмов многообразия  $G$ .

**Пример 2.6.** Пусть  $X$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$  и  $G$  — группа поворотов плоскости  $SO(2)$ . Ее единственный генератор  $I$  представляется на  $\mathbb{R}^2$  матрицей

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и согласно (2.5) ему соответствует фундаментальное векторное поле

$$\tau_1 = \tau^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \tau^2 \frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$\begin{pmatrix} \tau^1 \\ \tau^2 \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} \exp \left[ s \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Big|_{s=0} = \\ = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Big|_{s=0} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

$$\tau_1 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

В калибровочной теории особое место занимают  $p$  раз ковариантные антисимметричные по всем индексам тензорные поля. Они называются *внешними дифференциальными формами* степени  $p$ . Ковекторные поля — 1-формы — часто именуются также *пфаффовыми формами*; 0-формы являются вещественные функции.

Обозначим  $\Omega^p(X)$  векторное пространство внешних дифференциальных  $p$ -форм на многообразии  $X^n$  (ясно, что  $\Omega^{p>n}(X) = \emptyset$ ). Определим прямую сумму

$$\Omega(X) = \bigoplus_{p=0}^n \Omega^p(X).$$

На  $\Omega(X)$  может быть задана структура *градуированной алгебры* введением операции  $\wedge$  *внешнего произведения форм*, которая удовлетворяет следующим условиям:

если  $\sigma_p \in \Omega^p(X)$ ,  $\sigma'_q \in \Omega^q(X)$ , то  $\sigma_p \wedge \sigma'_q \in \Omega^{p+q}(X)$ ;

$$\sigma_p \wedge \sigma'_q = (-1)^{pq} \sigma'_q \wedge \sigma_p;$$

$$(\sigma + \sigma') \wedge \sigma'' = \sigma \wedge \sigma'' + \sigma' \wedge \sigma''.$$

Тогда в локальной системе координат в пространстве  $\Omega^p(X)$  может быть выбран голономный базис, образованный формами  $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ , где  $\{dx^{\mu_i}\}$  — голономный базис кокасательного пространства и фиксировано какое-либо одно упорядочение  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$  индексов  $[\mu_1 \dots \mu_p]$ .

**Пример 2.7.** На многообразии  $X^4$  внешние дифференциальные формы в разложении по голономному базису имеют вид:

$$\Omega^1 \ni \sigma_1 = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3 + a_4 dx^4,$$

$$\Omega^2 \ni \sigma_2 = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \\ + a_{14} dx^1 \wedge dx^4 + a_{24} dx^2 \wedge dx^4 + a_{34} dx^3 \wedge dx^4,$$

$$\Omega^3 \ni \sigma_3 = a_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + a_{234} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \\ + a_{124} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + a_{134} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

$$\Omega^4 \ni \sigma_4 = a_{1234} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

Операция внешнего произведения в голономном базисе выглядит следующим образом:

$$\sigma_q \wedge \sigma'_p = \left( \sum_{[\mu_1 \dots \mu_q]} a_{[\mu_1 \dots \mu_q]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \right) \times \\ \times \left( \sum_{[\nu_1 \dots \nu_p]} a'_{[\nu_1 \dots \nu_p]} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \right) = \\ = \sum_{\substack{[\mu_1 \dots \mu_q] \\ [\nu_1 \dots \nu_p]}} \text{sgn} \begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_q & \nu_1 \dots \nu_p \\ a_1 \dots a_q & a_{q+1} \dots a_{q+p} \end{pmatrix} a_{[\mu_1 \dots \mu_q]} a'_{[\nu_1 \dots \nu_p]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q+p},$$

где суммирование производится по упорядоченным наборам  $[\mu_1 \dots \mu_q]$ ,  $[\nu_1 \dots \nu_p]$  и:  $\text{sgn}(\cdot) = 0$ , если нижняя строка в скобке не является перестановкой верхней;  $\text{sgn}(\cdot) = 1$ , если перестановка четная, и  $\text{sgn}(\cdot) = -1$ , если перестановка нечетная.

**Пример 2.8.** Пусть  $\sigma_1$  и  $\sigma'_2$  — формы из примера 2.7:

$$\sigma_1 \wedge \sigma'_2 = (a_1 a'_{23} - a_2 a'_{13} + a_3 a'_{12}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$(a_4 a'_{23} - a_3 a'_{24} + a_2 a'_{34}) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 +$$

$$+(a_1 a'_{24} - a_2 a'_{14} + a_4 a'_{12}) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 +$$

$$(a_1 a'_{34} - a_3 a'_{14} + a_4 a'_{13}) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

Часто, однако, бывает неудобно постоянно следить за упорядочением индексов  $\mu_1 \dots \mu_p$ . Поэтому внешние дифференциальные формы записывают также в виде

$$\sigma_p = a_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \vee \dots \vee dx^{\mu_p},$$

где имеет место обычное суммирование по каждому индексу  $\mu_i$  с учетом антисимметричности коэффициентов  $a_{\mu_1, \dots, \mu_p}$ . Отметим, что

$$|a_{\mu_1, \dots, \mu_p}| = \frac{1}{p!} |a_{[\mu_1, \dots, \mu_p]}|.$$

В алгебре  $\Omega(X)$  определена операция *внешнего дифференцирования*

$$d: \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)$$

со следующими свойствами:

$$dd=0,$$

$$d(\sigma_p \wedge \sigma'_q) = (d\sigma_p) \wedge \sigma'_q + (-1)^p \sigma_p \wedge d\sigma'_q.$$

В голономном базисе эта операция имеет вид

$$d(a_{[\mu_1, \dots, \mu_p]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = (\partial_\nu a_{[\mu_1, \dots, \mu_p]}) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

В частности, если  $f$  — вещественная функция,

$$df = (\partial_\mu f) dx^\mu$$

— градиентное ковекторное поле. Если  $\sigma_1 = a_\mu dx^\mu$  — ковекторное поле, его внешний дифференциал

$$d\sigma_1 = (\partial_\nu a_\mu - \partial_\mu a_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

представляет собой ротор поля  $\sigma_1$ . Например, выражение для напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  через вектор-потенциал  $A_\mu$  на языке форм принимает вид  $F = dA$ .

Форма  $\sigma$  называется *замкнутой*, если  $d\sigma=0$ , и *точной*, если существует форма  $\sigma'$ , такая, что  $\sigma = d\sigma'$ . Поскольку  $dd=0$ , *точная форма является замкнутой*. Например, ротор градиентного поля равен нулю. Обратное, *на стягиваемой области* (т. е. когда она непрерывной деформацией может быть стянута в точку (см. § 9)) *замкнутая форма является точной (лемма Пуанкаре)*.

В алгебре  $\Omega(X)$  внешних дифференциальных форм на многообразии  $X$  определен оператор Ходжа  $*$  перехода от  $p$ -формы к сопряженной  $(n-p)$ -форме:

$$*p_p = \frac{p!}{(n-p)!} \varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_{n-p}} a_{\mu_1, \dots, \mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}},$$

где  $\varepsilon^{\mu_1, \dots, \mu_n}$  — полностью антисимметричный тензор с компонентой  $\varepsilon^{1, \dots, n} = 1$ . В случае неевклидовой метрики  $g_{\mu\nu}$  он умножается на  $|\det g_{\mu\nu}|^{-1/2}$  и его индексы посредством этой метрики опускаются и поднимаются. Оператор Ходжа обладает следующими свойствами:

$$**\sigma_p = (-1)^{p(n-p)} \sigma_p,$$

$$*\sigma_p \wedge \sigma'_p = \sigma_p \wedge * \sigma'_p.$$

**Пример 2.9.** Если  $f$  — 0-форма на  $X^n$ ,  $*f = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

С помощью оператора  $*$  строится оператор кодифференцирования

$$\delta = (-1)^{p(n-p)} *d*, \quad \delta\delta=0, \quad (2.6)$$

сопряженный оператору внешнего дифференцирования  $d$  и переводящий  $p$ -формы в  $(p-1)$ -формы. Определяется также оператор Лапласа—Бельтрами  $\delta d + d\delta$ .

**Пример 2.10.** Если  $\sigma_1$  — ковекторное поле, то  $\delta\sigma_1$  — его дивергенция. На 0-формах  $\sigma_0$  оператор  $\delta d + d\delta$  — оператор Лапласа.

В заключение отметим, что базисная форма  $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$  определяет меру на  $p$ -мерном подмногообразии  $Y^p$  многообразия  $X^n$  с локальными координатами  $x^{\mu_{p+1}} = \dots = x^{\mu_n} = 0$ , и если  $Y^p$  ориентируемо и компактно, существует интеграл  $p$ -форм по подмногообразию  $Y^p$ . При этом справедлива формула Стокса

$$\int_{Y^p} d\sigma_{p-1} = \int_{\partial Y^p} \sigma_{p-1}, \quad (2.7)$$

где  $\partial Y^p$  — граница  $Y^p$  в  $X^n$ . Например, в случае 3-мерного многообразия она приводит к равенствам

$$\int_{Y^3} d\sigma_1 = \int_{\partial Y^3} \sigma_1, \quad \int_{Y^3} d*\sigma_1 = \int_{\partial Y^3} *\sigma_1,$$

составляющим содержание известных теорем Стокса и Гаусса—Остроградского.

### § 3. РАССЛОЕНИЯ

**Топологические расслоения.** *Расслоением* называется тройка  $\lambda = (Q, \pi, X)$  топологических пространств  $Q, X$  и непрерывной проекции  $\pi: Q \rightarrow X$ . Пространство  $Q$  именуется *тотальным (расслоенным) пространством*  $\text{tl}\lambda$ , а  $X$  — его *базой*, которая будет предполагаться связной. Подпространство  $V_x = \pi^{-1}(x)$  — прообраз точки  $x$  базы  $X$  относительно проекции  $\pi$  — называется *слоем расслоения* над точкой  $x \in X$ . Таким образом, тотальное пространство  $Q$  представляется как бы расслоенным на слои  $V_x$ , множество которых образует пространство  $X$ .

**Пример 3.1.** Тотальное пространство  $\text{tl}\lambda = \mathbb{R}^3$ , база  $X$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$ , а  $\pi$  — ортогональная проекция  $\mathbb{R}^3$  на  $\mathbb{R}^2$  (рис. 3). Слоями такого расслоения являются прямые, ортогональные плоскости  $X$ .

**Пример 3.2.** Тотальное пространство  $\text{tl}\lambda$  — тор  $T^2$ , база  $X$  — окружность  $S^1$  по оси тора (рис. 4). Все слои такого расслоения — окружности  $S^1$ .

Из рис. 4 видно, что база расслоения  $X$ , вообще говоря, не принадлежит тотальному пространству  $\text{tl}\lambda$ . Однако может существо-

вать непрерывное вложение  $s$  базы  $X$  в  $\text{tl}\lambda$ , когда всякой точке  $x \in X$  сопоставляется некоторая точка  $s(x)$  обязательно из слоя  $V_x$  над точкой  $x$ , т. е.  $\pi \circ s = \text{Id}_X$ . Такое вложение  $s$  называется *глобальным сечением* расслоения  $\lambda$ . На рис. 3 и 4 изображены глобальные сечения расслоений из примеров 3.1 и 3.2. Глобальное сечение может существовать не всегда. Если вложение  $s$  ограничено некоторым открытым подмножеством  $U$  базы  $X$ , то оно называется *сечением* (или *локальным сечением*) над множеством  $U$ .

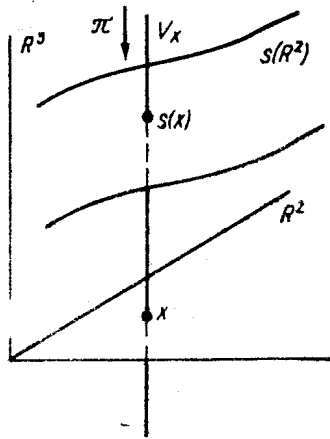


Рис. 3

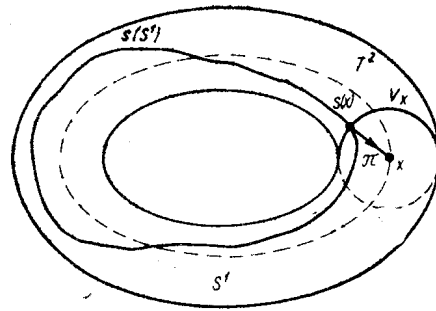


Рис. 4

Расслоение считается *тривиальным*, если существует топологическое пространство  $V$ , такое, что его тотальное пространство  $\text{tl}\lambda$  гомеоморфно произведению  $V \times X$ . Расслоения из примеров 3.1 и 3.2 тривиальны, поскольку  $R^3 = R^1 \times R^2$  ( $V = R^1$ ) и  $T^2 = S^1 \times S^1$  ( $V = S^1$ ). Наглядным примером нетривиального расслоения служит лист Мёбиуса. Базой его является окружность  $S^1$ , а слоями — отрезки  $[-1, 1]$  (см. ниже Пример 3.3). Он отличается от кольца — тривиального расслоения с той же базой и теми же слоями.

Подобно тому как из топологических пространств мы ограничились многообразиями, склеиваемыми из областей евклидова пространства, будем в дальнейшем рассматривать расслоения, склеенные из кусков тривиальных расслоений.

Расслоение  $\lambda = (\text{tl}\lambda, \pi, X)$  называется *локально тривиальным*, если существуют такое покрытие базы  $X$  открытыми множествами  $\{U_i\}$  и такое топологическое пространство  $V$ , что для каждого  $U_i$  найдется гомеоморфизм

$$\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow V \times U_i,$$

и  $\rho_{ij}(x) = \psi_i(x)\psi_j^{-1}(x)$  есть гомеоморфизм  $V$  на себя для всех  $x \in U_i \cap U_j$ . Иными словами, существует такое открытое покрытие ба-

зы  $X$ , что сужение расслоения  $\lambda$  на всякое множество  $U_i$  из этого покрытия оказывается тривиальным расслоением  $\lambda_i = (\pi^{-1}(U_i), \pi, U_i)$ , а расслоение  $\lambda$  в целом представляется как бы склеенным из тривиальных расслоений  $\lambda_i$  посредством *функций перехода*  $\rho_{ij}$ .

Пара  $(U_i, \psi_i)$  области  $U_i$  и морфизма  $\psi_i$  тривиализации расслоения  $\lambda$  называется *картой расслоения*, а совокупность карт  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  — *атласом расслоения*  $\lambda$  с функциями перехода  $\rho_{ij}$ , которые удовлетворяют условиям

$$\rho_{ii} = \text{Id}_V, \quad \rho_{ij}\rho_{jk} = \rho_{ik}.$$

Всякий слой  $V_x$  локально тривиального расслоения гомеоморфен пространству  $V$ , называемому *типичным слоем* расслоения  $\lambda$ .

**Пример 3.3.** Лист Мёбиуса является тотальным пространством локально тривиального расслоения с базой  $S^1$  и типичным слоем  $V$  — отрезком  $[-1, 1]$ . Введем на  $V$  координату  $-1 \leq v \leq 1$ , а окружность  $S^1$ , как в примере 2.5, покроем двумя координатными картами:

$$U_1 = \{-\varepsilon < \varphi_1 < \pi + \varepsilon\}, \quad U_2 = \{\pi - \varepsilon < \varphi_2 < 2\pi + \varepsilon\}.$$

Пересечение  $U_1 \cap U_2$  состоит из двух несвязных множеств

$$W_1 = \{-\varepsilon < \varphi_1 < \varepsilon\} = \{2\pi - \varepsilon < \varphi_2 < 2\pi + \varepsilon\},$$

$$W_2 = \{\pi - \varepsilon < \varphi_1 < \pi + \varepsilon\} = \{\pi - \varepsilon < \varphi_2 < \pi + \varepsilon\},$$

с преобразованиями перехода  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$  на  $W_1$  и  $\varphi_1 = \varphi_2$  на  $W_2$ . Области  $U_1$  и  $U_2$  являются и областями тривиализации рассматриваемого расслоения с функциями перехода  $\rho_1: v \rightarrow v$  на  $W_2$  и  $\rho_2: v \rightarrow -v$  на  $W_1$  (рис. 5).

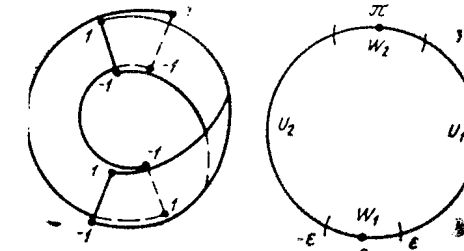


Рис. 5

Локально тривиальное расслоение однозначно задается набором  $(V, X, \Psi)$ , т. е. правилами склейки тривиальных расслоений, определяемых функциями перехода атласа  $\Psi$ . При этом расслоения  $(V, X, \Psi)$  и  $(V, X, \Psi')$  считаются *эквивалентными*, если атласы  $\Psi$  и  $\Psi'$  эквивалентны, т. е. их объединение тоже является атласом (что означает существование функций перехода между картами из атласов  $\Psi$  и  $\Psi'$ ). Примером, когда наборы  $(V, X, \Psi)$  и  $(V, X, \Psi')$  с одной и той же базой  $X$  и одним и тем же типичным слоем  $V$ , но не эквивалентными атласами  $\Psi$  и  $\Psi'$  описывают неэквивалентные расслоения, служат уже упоминавшиеся лист Мёбиуса и кольцо. У кольца в обозначениях примера 3.3  $\rho_{1,2}: v \rightarrow v$ .

Выбирать области тривиализации расслоения часто помогает



следующий факт. Локально тривиальное расслоение со стягиваемой локально компактной и паракомпактной базой тривиально. В частности, для атласа расслоения над многообразием и для атласа многообразия нередко можно использовать одно и то же открытие  $\{U_i\}$ .

Локально тривиальное расслоение всегда обладает сечением (на каждой области тривиализации  $U_i$  расслоения), но оно не всегда имеет глобальное сечение (см. ниже пример 3.6). Всякое сечение  $s$  локально тривиального расслоения может быть представлено семейством  $V$ -значных функций

$$\{s_i(x) = \varphi_i(x)s(x), x \in U_i, s_i(x) = \rho_{ij}s_j(x)\}$$

в атласе расслоения  $\Psi = \{U_i, \varphi_i\}$ .

Пусть  $\lambda$  — локально тривиальное расслоение и  $G$  — топологическая группа, которая действует непрерывно и эффективно в пространстве типичного слоя  $V$  расслоения  $\lambda$ . Пусть существует атлас  $\Psi$  расслоения  $\lambda$ , функции перехода которого  $\rho_{ij}(x)$  в каждой точке  $x \in U_i \cap U_j$  являются элементами группы  $G$ , и отображения

$$\rho_{ij}(x): U_i \cap U_j \rightarrow G$$

непрерывны. Тогда группа  $G$  называется *структурной группой расслоения*.

**Пример 3.4.** Лист Мёбиуса из примера 3.3 может быть представлен как расслоение со структурной группой  $Z_2 \cong \{1, z: z^2 = 1\}$ , наделенной дискретной топологией. Эта группа действует на отрезке  $[-1, 1]$  как группа умножений на  $-1$ , и функции перехода имеют вид

$$\rho(x) = \{1, x \in W_2, z = -1, x \in W_1\}.$$

В теории калибровочных полей используются расслоения именно структурными группами, причем в большинстве случаев это группы Ли.

Важным случаем расслоений со структурными группами являются локально тривиальные расслоения, в которых роль типичного слоя играет сама структурная группа  $G$ , которая действует на себя левыми сдвигами

$$L_g: G \rightarrow gG, g \in G.$$

Таким расслоения называются *главными  $G$ -расслоениями  $\lambda_G$* .

**Пример 3.5.** Для описания *дираковского монополя* (см. § 16) используется главное  $U(1)$ -расслоение, базой которого является сфера  $S^2$  с координатами  $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \alpha < 2\pi\}$ , а слоем — групповое пространство  $U(1) = S^1$  с координатой  $\exp(i\chi)$ . Покроем  $S^2$  двумя полусферами  $U_{\pm}$  с координатами соответственно  $\theta > -\varepsilon$  и  $\theta < \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , пересекающимися по кольцу  $-\varepsilon < \theta < \varepsilon$ . Полусферы

$U_{\pm}$  являются областями тривиализации расслоения, которое получается склеиванием двух тривиальных расслоений:

$$U_+ \times U(1) \text{ с координатами } \{\theta, \alpha, e^{i\chi_+}\},$$

$$U_- \times U(1) \text{ с координатами } \{\theta, \alpha, e^{i\chi_-}\}.$$

Функция перехода  $\rho$  на  $U_+ \cap U_-$  должна принимать значения в группе  $U(1)$ . Из условия периодичности этой функции по  $\alpha$  следует ее вид

$$e^{i\chi_-} = e^{in\alpha} e^{i\chi_+}, \quad (3.1)$$

где  $n$  — целое число. Расслоения, характеризуемых функциями перехода (3.1) с разными  $n$ , неэквивалентны (обозначим их  $\lambda_n$ ). Например, при  $n=0$  имеем тривиальное расслоение с тотальным пространством

$$\text{tl } \lambda_0 = S^2 \times S^1;$$

при  $n=1$   $\text{tl } \lambda_1 = S^3$ .

В математической литературе часто можно встретить другую конструкцию главного расслоения. На тотальном пространстве главного расслоения  $\text{tl } \lambda_G$  может быть задано действие группы  $G$  правыми сдвигами

$$R_g: \text{tl } \lambda_G \ni p \rightarrow \varphi_i^{-1}(\varphi_i(p)g) = pg.$$

Оно является *послойным* (т. е. переводит всякую точку  $p$  в точку того же слоя  $pg \in V_{\pi(p)}$ ), его вид не зависит от карты (поскольку функции перехода действуют слева) и оно является *свободным* (т. е. если  $pg = p$  для некоторого  $p \in \text{tl } \lambda_G$ , то  $g = 1$ ). База главного расслоения в таком описании представляет собой фактор-пространство  $\text{tl } \lambda_G / G$  орбит группы  $G$  в  $\text{tl } \lambda_G$ , а проекция  $\pi$  — каноническое отображение

$$\text{tl } \lambda_G \mapsto \text{tl } \lambda_G / G.$$

Морфизмы тривиализации главного расслоения удовлетворяют условию

$$\psi_i(pg) = \psi_i(p)g,$$

и всякому атласу  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  главного расслоения можно сопоставить набор его сечений

$$\{U_i, z_i = \psi_i^{-1}(1) = \rho(\psi_i(p))^{-1}, z_i = z_j \rho_{ji}\},$$

отвечающих  $\Psi$  и однозначно определяющих этот атлас.

Отсюда, в частности, следует, что *глобальное сечение главного расслоения существует тогда и только тогда, когда расслоение тривиально*. Действительно, глобальное сечение  $s$ , если положить

$z'_i = s$ , определяет атлас главного расслоения  $\Psi_s$  с тождественными функциями перехода  $\rho'_{ij}$ , поскольку в этом случае

$$s = z'_i = z'_j \rho'_{ji} = s \rho'_{ji},$$

и  $\rho'_{ii} = 1$ . Переход от атласа  $\Psi$ , задаваемого некоторым набором локальных сечений  $z_i$ , к атласу  $\Psi_s$  может быть осуществлен посредством преобразований  $\psi'_i = g_i \psi_i$ , где

$$s = z_i g_i^{-1} = p(\psi_i(p))^{-1} g_i^{-1} = p(g_i \psi_i(p))^{-1} = p(\psi'_i(p))^{-1}.$$

**Пример 3.6.** Рассмотрим расслоение из примера 3.3, тотальным пространством которого является лист Мёбиуса. Оно допускает глобальное сечение  $s$ , представляемое на областях тривиализации  $U_1$  и  $U_2$  функциями  $s_1(\alpha)$  и  $s_2(\alpha)$  со значениями в отрезке  $[-1, 1]$ , которые должны удовлетворять условию  $s_1 = \rho s_2$ , т. е.

$$s_1(\alpha) = s_2(\alpha), \quad \alpha \in W_2; \quad s_1(\alpha) = -s_2(\alpha), \quad \alpha \in W_1.$$

Покажем, что в какой-то точке функция  $s_1$  (или  $s_2$ ) неизбежно принимает нулевое значение. Действительно, пусть  $s_1$  не меняет знак, т. е., например, строго положительна. Тогда  $s_2$  на  $W_2$  положительна, а на  $W_1$  отрицательна, т. е. где-то проходит через 0. Таким образом, глобальное сечение расслоения обязательно проходит через середину листа Мёбиуса. Рассмотрим теперь расслоенное пространство, образованное краями листа Мёбиуса. Это локально тривиальное расслоение со структурной группой  $Z_2$ , типичным слоем которого является двухточечное множество — числа  $+1$  и  $-1$ , как раз образующие саму группу  $Z_2$ . Таким образом, это главное нетривиальное  $Z_2$ -расслоение, и глобального сечения оно не допускает.

На этом примере видно, что могут быть расслоения  $\lambda = (V, G, X, \Psi)$ ,  $\lambda' = (V', G, X, \Psi)$ , имеющие одну и ту же базу, одну и ту же структурную группу, атласы с одними и теми же функциями перехода, но разные типичные слои (в примере 3.6 это отрезок и его концы). Такие расслоения называются *ассоциированными*.

Любому главному расслоению  $\lambda_G$  всегда можно сопоставить ассоциированное с ним расслоение  $\lambda_V$  с данным типичным слоем  $V$ , реализующим эффективное действие структурной группы  $G$ . Определим тотальное пространство этого расслоения  $\text{tl } \lambda_V$  как фактор-пространство

$$(\text{tl } \lambda_G \times V)/G$$

относительно правого действия группы  $G$  в  $\text{tl } \lambda_G \times V$ , т. е. когда точки  $(p, v)$  и

$$[p, g(p, v)] = (pg, g^{-1}v), \quad g \in G,$$

отождествляются.

Для  $p \in \text{tl } \lambda_G$  и  $v \in V$  обозначим  $[p](v)$  образ элемента  $(p, v)$  в  $\text{tl } \lambda_V$ . Тогда

$$[p]_V: v \rightarrow [p](v), \quad p \in \text{tl } \lambda_G$$

есть отображение из  $V$  на  $V_x$ ,  $x = \pi(p)$ , такое, что

$$[pg]_V(v) = [p](gv), \quad p \in \text{tl } \lambda_G, \quad v \in V, \quad g \in G.$$

В частности, если  $\Psi$  — атлас расслоения  $\lambda_G$  и  $\{z_i(x)\}$  — семейство сечений  $\lambda_G$ , отвечающих  $\Psi$ , то отображение

$$[z_i(x)]_V: V \rightarrow V_x, \quad x \in U_i$$

определяет атлас расслоения  $\lambda_V$ , эквивалентный  $\Psi$ . Существует также взаимно однозначное соответствие между множеством глобальных сечений  $s$  ассоциированного расслоения  $\lambda_V$  и множеством  $V$ -значных функций  $f_s$  на  $\text{tl } \lambda_G$ , таких, что

$$f_s(pg) = g^{-1}f_s(p).$$

Оно осуществляется равенством

$$s(\pi(p)) = [p]_V f_s(p),$$

которое в атласе, определяемом семейством сечений  $\{z_i(x)\}$ , принимает вид

$$s_i(x) = f_s(z_i(x)).$$

**Векторные расслоения.** Наряду с главными расслоениями основным типом расслоений, применяемых в теории поля, являются *векторные дифференцируемые расслоения*, базой которых служит дифференцируемое многообразие, типичным слоем — конечномерное векторное топологическое пространство  $V$ , а структурной группой — группа  $GL(V)$  общих линейных преобразований пространства  $V$ . Все морфизмы, входящие в конструкцию такого расслоения, предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

Как и для топологических групп (см. пример 1.3), топология векторного пространства выбирается согласованной с его алгебраической структурой, т. е. так, чтобы операции сложения векторов и умножения вектора на число были непрерывны. Для конечномерных векторных пространств единственной такой отделимой топологией является топология евклидова пространства (см. пример 1.4). С учетом этого, а также поскольку все конечномерные векторные пространства одинаковой размерности изоморфны, все  $n$ -мерные векторные топологические пространства над полем  $\mathbf{R}$  считаются в дальнейшем гомеоморфными  $\mathbf{R}^n$ .

Примером векторного дифференцируемого расслоения служит *касательное расслоение*  $T(X)$ , образованное касательными пространствами  $T_x(X)$  к многообразию  $X$ . Атлас его эквивалентен голономному атласу  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$ , заданному на том же покрытии  $\{U_i\}$ , что и атлас многообразия  $\Psi_X = \{U_i, \phi_i\}$ , с морфизмами три-

вивализации  $\psi_i = \partial\varphi_i$  и функциями перехода  $\rho_{ij}$  — матрицами Якоби  $\partial(\varphi_i\varphi_j^{-1})$  преобразований перехода между координатами атласа  $\Psi_X$ .

**Пример 3.7.** Касательное расслоение  $T(S^1)$  над окружностью  $S^1$ , координатный атлас которого описан в примере 3.3, тривиально, поскольку матрица Якоби  $\partial\alpha_2/\partial\alpha_1$  преобразования от координаты  $\alpha_1$  к координате  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 = \alpha_1$  на  $W_2$  и  $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi$  на  $W_1$ ) равна единице. Касательное расслоение  $T(S^2)$  над сферой  $S^2$ , координатный атлас которого описан в примере 2.1, уже нетривиально. Его голономный атлас имеет своей функцией перехода матрицу Якоби преобразования (2.1).

Пусть  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  — атлас векторного расслоения и  $\{t_\mu\}$  — базис его типичного слоя  $V$ . Тогда в каждом слое  $V_x, x \in X$ , определен базис

$$\{\tau_\mu(x)\} = \{\psi_i^{-1}(x)t_\mu\},$$

отвечающий карте  $\{U_i, \psi_i\}$  атласа  $\Psi$ . При этом векторы слоя  $\tau$  и их образы  $\psi_i(\tau)$  в типичном слое  $V$  имеют одни и те же коэффициенты разложения относительно базисов  $\{\tau_\mu\}$  и  $\{t_\mu\}$ , а преобразование  $g$  типичного слоя  $V$  индуцирует преобразование  $g_x = \psi_i^{-1}g\psi_i$  слоя  $V_x$  над точкой  $x \in X$  и оба они имеют один и тот же матричный вид относительно базисов  $\{\tau_\mu\}$  и  $\{t_\mu\}$ .

Например, в касательном расслоении  $T(X)$  базисом в касательном пространстве  $T_x(X), x \in X$ , отвечающим голономному атласу расслоения  $\Psi$ , является голономный базис  $\{\partial_\mu\}$ .

Укажем следующие операции, производимые над векторными расслоениями над одной и той же базой  $X$ :

*дуальное* к  $\lambda$  расслоение  $\lambda^*$  с типичным слоем  $V^*$ , дуальным к типичному слою  $V$  расслоения  $\lambda$ ;

*сумма Уитни*  $\lambda \oplus \lambda'$  расслоений  $\lambda$  и  $\lambda'$  с типичным слоем  $V \oplus V'$  — прямой суммой векторных пространств  $V$  и  $V'$ ;

*тензорное произведение*  $\lambda \otimes \lambda'$  расслоений  $\lambda$  и  $\lambda'$  с типичным слоем  $V \otimes V'$  — тензорным произведением  $V$  и  $V'$ .

Например, если  $\lambda$  — касательное расслоение  $T(X)$ , то дуальным к нему является кокасательное расслоение  $T^*(X)$ , и могут быть образованы различные тензорные произведения касательных и кокасательных расслоений

$$\otimes^m T(X) \otimes \left( \otimes^n T^*(X) \right).$$

Они называются *расслоениями тензоров*.

*Векторное расслоение всегда имеет глобальное сечение*, например, принимающее во всех точках значения в нуле векторных слоев.

Глобальное сечение касательного расслоения  $T(X)$ , как отмечалось в предыдущем параграфе, представляет собой векторное

поле на многообразии  $X$ . Глобальное сечение кокасательного расслоения  $T^*(X)$  — это пфафова форма на  $X$ , а тензорного расслоения — тензорное поле на  $X$ .

Хотя структурной группой векторного расслоения является общая линейная группа  $GL(V)$ , всегда существует атлас расслоения, функции перехода которого принимают значения в некоторой подгруппе  $H$  группы  $GL(V)$ . В таком случае говорят, что имеет место *редукция* структурной группы  $G$  расслоения к подгруппе  $H$ . Например, структурная группа всякого тривиального расслоения редуцирована к подгруппе, состоящей только из единицы группы.

Если база расслоения паракомпактна, справедливы следующие утверждения:

структурная группа Ли  $G$  расслоения  $\lambda$  редуцируема к замкнутой подгруппе  $H$  тогда и только тогда, когда ассоциированное с  $\lambda$  расслоение на фактор-пространстве  $G/H$  допускает глобальное сечение; малой компактной подгруппе.

В частности, как уже говорилось, *структурная группа  $n$ -мерного вещественного векторного расслоения  $GL(n, \mathbb{R})$  всегда редуцирована к своей максимальной компактной подгруппе  $O(n)$* .

Эти математические факты существенным образом используются в калибровочной теории при описании метрических и хиггсовских полей.

#### § 4. СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИЯХ

Конструкция связности обобщает на многообразия и расслоенные пространства операцию параллельного переноса. Необходимость и характер такого обобщения мы проиллюстрируем сначала на следующем частном примере.

На лоскости параллельным называется такой перенос вектора, при котором направление вектора сохраняется. Его можно определить как перенос вдоль прямых так, что угол между вектором и прямой постоянен (рис. 6, а).

На искривленной поверхности роль прямых играют наикратчайшие линии, и параллельный перенос касательного вектора к поверхности можно описать как его перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остается неизменным. Однако сам вектор при этом поворачивается (рис. 6, б). Изменение касательного вектора при переносе и описывается введением связности. В дифференциальной форме это можно сделать заданием оператора поворота  $\Gamma$  вектора  $\tau$  при переходе из точки  $x$  в точку  $x + dx$ , а именно:

$$\Gamma(\tau^\mu) = \tau^\mu - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \tau^\nu dx^\alpha.$$

Изменение вектора может быть оценено только путем его сравнения с некоторыми базисными векторами. Однако, если (обращаясь опять к рис. 6, б) в качестве таких базисных векторов взять касательные векторы к наикратчайшим, переносимый вектор относительно них поворачиваться не будет, т. е. связность в такой системе отсчета как бы устраняется. Такого мнимого устранения можно избежать, если переносимый вектор сравнивать с самим

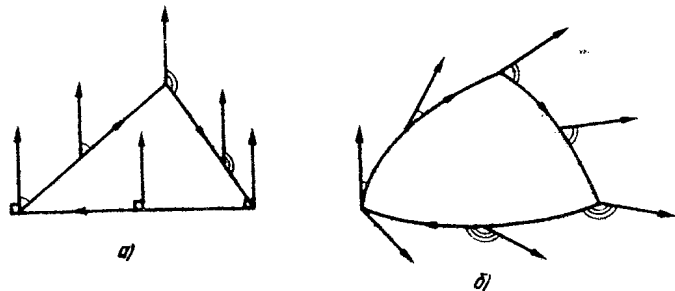


Рис. 6

собой до и после переноса по замкнутому контуру. В отличие от плоскости (рис. 6, а) на искривленной поверхности (рис. 6, б) эти два вектора не совпадают, и их отношение друг от друга характеризуется кривизной поверхности.

Изменение вектора при параллельном переносе сказывается и на операции дифференцирования. Действительно, производная определяется как предел

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{\tau(x + \Delta x) - \tau(x)}{|\Delta x|}.$$

Но векторы  $\tau(x + \Delta x)$  и  $\tau(x)$  заданы в разных точках, и чтобы их вычесть один из другого, вектор  $\tau(x)$  надо сначала перенести в точку  $x + dx$  с помощью оператора  $\Gamma$ . В результате выражение для производной при наличии связности принимает вид

$$D_v \tau^a = \partial_v \tau^a + \Gamma^a_{bc} v^b \tau^c.$$

Производная  $D_v$  называется *ковариантной* и может рассматриваться как генератор параллельного переноса вдоль координатной линии  $x^a$ .

Все эти наглядные соображения применимы и для связности на произвольном многообразии.

На расслоении  $\lambda = (tl\lambda, \pi, X)$  *параллельный перенос* можно представить как сопоставление всякому пути  $\gamma([a, b])$  в базе  $X$  семейства отображений

$$\varphi_{\gamma}(t_1, t_2): V_{\gamma}(t_1) \rightarrow V_{\gamma}(t_2), \quad t_1, t_2 \in [a, b],$$

слоев расслоения  $V_{\gamma}(t)$  над точками этого пути. При этом

$$\varphi_{\gamma}(t_1, t_2) \circ \varphi_{\gamma}(t_2, t_3) = \varphi_{\gamma}(t_1, t_3),$$

$$\varphi_{\gamma}(t_1, t_2) = \varphi_{\gamma}(t_2, t_1)^{-1}.$$

Подобное отображение касательных пространств — слоев касательного расслоения — и осуществляется при описанном выше параллельном переносе с помощью связности.

Пусть  $v$  — некоторая точка слоя  $V_{\gamma(a)}$ , тогда множество образов  $v(t)$  точки  $v$  при отображениях  $\varphi_{\gamma(a,t)}$ ,  $t \in [a, b]$ , образует некоторый путь

$$\varphi_{\gamma(a,t)}(v): [a, b] \rightarrow tl\lambda$$

в тотальном пространстве расслоения  $\lambda$ . Поскольку  $\pi(\varphi_{\gamma}(v)) = \gamma$ , такой путь называется *накрывающим* путь  $\gamma$  в базе  $X$ . Подобные пути, накрывающие  $\gamma$ , выходят из каждой точки слоя  $V_{\gamma(a)}$ . Поэтому в инфинитезимальной форме задание связности на расслоении  $\lambda$  можно наглядно представить себе как задание для каждой точки  $p \in tl\lambda$  направления, в котором она

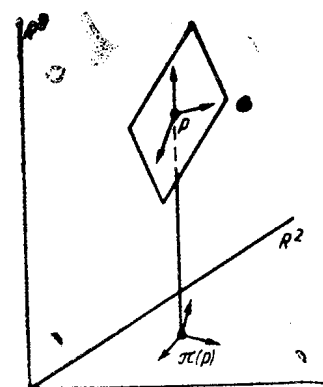


Рис. 7

будет переноситься в тотальном пространстве  $tl\lambda$ , если ее проекция  $\pi(p)$  переносится в некотором направлении в базе  $X$ . Это означает, что в каждой точке  $p \in tl\lambda$  строится *пространство направлений, накрывающее касательное пространство к базе  $X$  в точке  $\pi(p)$*  (рис. 7, где  $\lambda$  — расслоение  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  из примера 3.1).

Эти наглядные представления о связности полезно иметь в виду, обращаясь к ее строгому математическому определению.

Пусть  $\lambda_G$  — главное расслоение структурной группы Ли  $G$ . Выделим в касательном пространстве  $T_p(tl\lambda_G)$  к тотальному пространству  $tl\lambda_G$  в точке  $p$  подпространство, состоящее из векторов, касательных к слою, проходящему через  $p$ . Оно называется *вертикальным подпространством  $T_p^v$* . Связность на главном расслоении  $\lambda_G$  определяется заданием в каждом  $T_p(tl\lambda_G)$  такого подпространства  $T_p^h$ , что:

$$1) T_p(tl\lambda_G) = T_p^v \oplus T_p^h;$$

$$2) T_p^h = (\partial g)_p T_p^h,$$

где  $(\partial g)_p$  — касательное отображение к действию  $g \in G$  в  $tl\lambda_G$  правыми сдвигами;

$$3) \text{распределение } T_p^h \text{ зависит дифференцируемо от } p. \text{ Подпро-}$$

пространство  $T_p^h$  называется *горизонтальным* и является пространством как раз тех направлений, в которых осуществляется параллельный перенос точки  $p$  в тотальном пространстве.

Из условия 1) следует, что всякий вектор  $t \in T_p(\text{tl } \lambda_G)$  однозначно записывается как

$$t = t^v + t^h, \quad t^v \in T_p^v, \quad t^h \in T_p^h.$$

Условие 2) означает, что сопоставление  $p \rightarrow T_p^h$  инвариантно относительно  $G$ . Действительно, направления параллельного переноса точек одного и того же слоя не могут быть произвольными, поскольку определяются элементами матрицы оператора переноса  $\varphi$ , действующего на слой  $V_{\pi(p)}$ .

Горизонтальное подпространство  $T_p^h$  может быть задано уравнением

$$\omega_p(t^h) = 0, \quad t^h \in T_p^h,$$

где  $\omega$  — 1-форма на тотальном пространстве  $\text{tl } \lambda_G$  со значениями в алгебре Ли  $A_G$  группы  $G$ , определяемая следующим образом. Действие  $G$  в  $\text{tl } \lambda_G$  индуцирует вложение  $A_G$  в алгебру Ли векторных полей на  $\text{tl } \lambda_G$ , при котором каждому элементу  $I \in A_G$  ставится в соответствие фундаментальное векторное поле  $\tau_I$  (см. (2.5)). Для всякого вектора  $t \in T_p(\text{tl } \lambda_G)$  зададим  $\omega_p(t)$  так, что

$$\tau_{\omega(t)}(p) = t^v.$$

Форма  $\omega$  называется *1-формой связности* и удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega(\tau_I) = I,$$

$$\omega_{i,g}(\partial g) = \text{ad}(g^{-1})\omega_i, \quad p \in \text{tl } \lambda_G,$$

где  $\text{ad}$  означает присоединенное представление  $G$  в  $A_G$ :

$$\text{ad}(g)gI = g^{-1}I.$$

На областях тривиализации расслоения  $\lambda_G$  форму связности  $\omega$  на тотальном пространстве  $\text{tl } \lambda_G$  можно выразить через форму связности на базе  $X$ . Пусть  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  — атлас  $\lambda_G$ , и  $(\partial\psi_i)_p$  — касательное отображение к  $\psi_i$ :

$$T_p(\text{tl } \lambda_G) \rightarrow T_{\psi_i(p)}(U_i \times G).$$

Определим форму  $\omega_i = \psi(\partial\psi_i^{-1})$  на  $U_i \times G$ . Точками  $U_i \times G$  являются  $\psi_i(p) = y = (x, g)$ , и

$$T_y(U_i \times G) = T_x(U_i) \oplus T_g(G),$$

причем  $T_y^v = T_g(G)$ . Пусть  $t \in T_y(U_i \times G)$ . Тогда имеет место разложение

$$t = t_g + t_x^v + t_x^h, \quad t^v = t_g + t_x^v,$$

как это условно изображено на рис. 8. Согласно определению,

$$\omega_i(t) = \omega_i(t^v) = \omega_i(t_g) + \omega_i(t_x^v) = \theta(t_g) + \omega_i(t_x),$$

где  $\theta(I) = I \in A_G$  — *каноническая форма* на группе  $G$ , а  $\omega_i(t_x)$  представляет собой 1-форму на базе  $X$  со значениями в алгебре Ли  $A_G$ . Обозначим эту форму

$$A_i(x) = \omega(\partial\psi_i^{-1})_{(x,I)}.$$

Форма  $A_i(x)$  называется *локальной 1-формой связности* на базе  $X$ . При переходе с карты на карту

$$A_i = \text{ad}(\rho_{ij})A_j + (\partial\rho_{ij})\theta.$$

Поскольку каноническая форма  $\theta$  одна и та же для всех связностей, то специфику данной связности определяет форма  $A$ , и именно вектор  $t_x^v$ , как это видно из рис. 8, характеризует смещение точки слоя при параллельном переносе в направлении  $t_x$ .

Если задана связность на главном расслоении  $\lambda_G$ , она может быть перенесена и на ассоциированное с ним расслоение с данным типичным слоем  $V$ . *Вертикальное подпространство*  $T_p^v$  в  $T_p(\text{tl } \lambda)$ ,  $p \in \text{tl } \lambda$ , есть по определению касательное пространство к слою из  $\text{tl } \lambda$ , проходящему через точку  $p$ , а горизонтальное подпространство  $T_p^h$  задается как образ горизонтального подпространства  $T_p^h \subset T_p(\text{tl } \lambda_G)$  при отображении

$$\text{tl } \lambda_G \times V \rightarrow \text{tl } \lambda.$$

Связность на  $\lambda$  описывается той же локальной 1-формой связности  $A_i$ , что и на главном расслоении, которая в базисах  $\{dx^a\}$  расслоения  $T^*(X)$  и  $\{I_m\}$  алгебры Ли  $A_G$  имеет вид

$$A_i = A_x^a(x)I_m dx^a, \quad x \in U_i, \quad (4.1)$$

где  $I_m$  — генераторы в представлении  $A_G$  на пространстве  $V$ .

Если  $\lambda$  — векторное расслоение, т. е.  $A_G \subset \text{gl}(V)$ , преобразование формы связности  $A_i$  при переходе с карты на карту принимает вид

$$A_i = \rho_{ij}A_j\rho_{ij}^{-1} + \rho_{ij}d\rho_{ij}^{-1}. \quad (4.2)$$

При описании связности на расслоении формой связности может быть введен генератор параллельного переноса. Им является ковариантная производная  $D_i$  вдоль поля  $\tau$  на базе  $X$ , которая задается как производная Ли  $\partial_{\tau^h}$  вдоль горизонтального поднятия  $\tau^h$  поля  $\tau$  (см. рис. 8). Соответственно определяется внешний *ковариантный дифференциал*  $D$ , который в локальной записи имеет вид

$$D_i = 1 + A_i, \quad D_i = \rho_{ij}D_j\rho_{ij}^{-1}. \quad (4.3)$$

Он действует на пространстве *внешних дифференциальных форм*

со значениями в векторном расслоении  $\lambda$ , которые определяются как сечения расслоения  $\lambda_0 \otimes \lambda$ , где  $\lambda_0$  — ассоциированное с  $T(X)$  расслоение на антисимметричные полилинейные формы на касательных пространствах  $T_x(X)$ . Сечения  $\lambda_0$  — внешние дифференциальные формы на  $X$ .

Определяется 2-форма кривизны  $DD=F$ . В локальной записи

$$F_i = (d + A_i)(d + A_i) = dA_i + A_i \wedge A_i, \quad F_i = \rho_{ij} F_j \rho_{ij}^{-1}. \quad (4.4)$$

или, будучи выраженной через коэффициенты формы связности  $A_\mu^m$ ,

$$F_i = F_{\mu\nu}^m I_m dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

$$F_{\mu\nu}^m = \partial_\mu A_\nu^m - \partial_\nu A_\mu^m + C_{nk}^m A_\mu^n A_\nu^k, \quad (4.5)$$

где  $C_{nk}^m$  — структурные константы алгебры Ли  $A_G$ . Справедливо второе тождество Бианки  $DF=0$ .

**Пример 4.1.** Приведем вариант связности на расслоении  $\lambda_n$ , описанном в примере 3.5. Пусть она задается локальными 1-формами связности  $A_+$  на  $U_+$  и  $A_-$  на  $U_-$ . Согласно (3.1) и (4.2) формы  $A_+$  и  $A_-$  связаны между собой соотношением

$$A_+ = A_- - \text{ind } \varphi.$$

В частности, можно выбрать

$$A_\pm = in/2 (\cos \theta \pm 1) d\varphi, \quad (4.6)$$

где  $I=i$  — генератор группы  $U(1)$ . Формы  $A_+$  и  $A_-$  определены каждая на своей полусфере  $U_+$  и  $U_-$ , но по отдельности не могут быть регулярно делена фактор-группа

$$F = dA_\pm = in/2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \quad (4.7)$$

определена на всей сфере  $S^2$ , поскольку согласно (3.1) и (4.4)  $F_+ = F_-$ .

В заключение рассмотрим пример расслоений, связность на которых однозначно определяется самой структурой расслоения. Это накрытия.

**Пример 4.2.** *Накрытием* называется локально тривиальное расслоение над связной базой, слои которого являются дискретными пространствами; структурная группа накрытия дискретна. Примеры накрытий над окружностью  $S^1$  со структурными группами

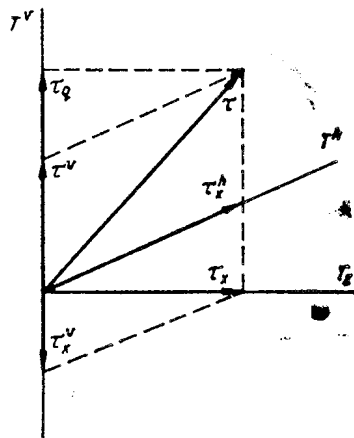


Рис. 8

$Z$  и  $Z_2$  изображены на рис. 9. Тотальное пространство накрытия называется *накрывающим пространством* и предполагается *связным*. На рис. 9, а — это спираль, на рис. 9, б — края листа Мёбиуса (см. пример 3.6). Все слои накрытия, как локально тривиального расслоения, имеют одну и ту же мощность; она называется числом листов накрытия. У накрытия на рис. 9, а число листов счетно, у накрытия на рис. 9, б равно двум. *Накрытие с числом листов, большим единицы, нетривиально*. Действительно, тотальное пространство тривиального расслоения гомеоморфно произведению базы на слой. Поэтому оно не может быть связным, если слой дискретен и состоит более чем из одной точки.

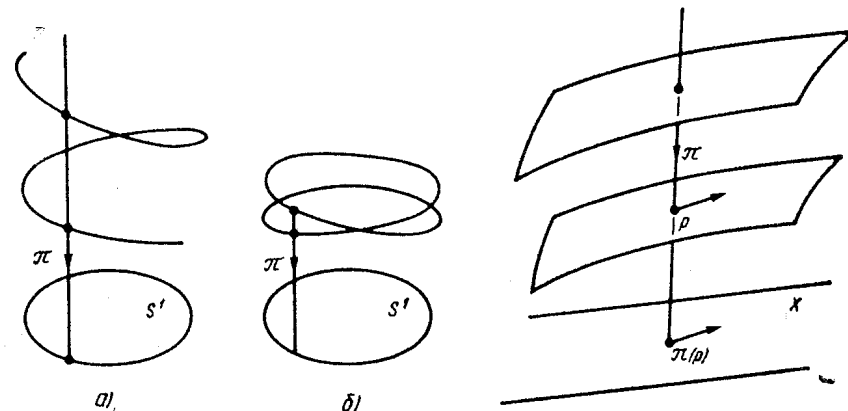


Рис. 9

Рис. 10

*Нетривиальное накрытие не допускает глобального сечения*. Это наглядно видно из рис. 9 (см. также пример 3.6), а доказательство будет приведено ниже в примере 9.10. Пусть  $p$  — некоторая точка тотального пространства  $\pi^{-1}\lambda$  накрытия  $\lambda$ . Тогда путь в базе накрытия  $X$ , выходящий из точки  $\pi(p)$ , может иметь только единственный накрывающий путь в  $\pi^{-1}\lambda$ , выходящий из  $p$ , как это показано на рис. 10. Это и обуславливает единственность связности на накрытии.

## Глава II. Калибровочная теория классических полей

В этой главе рассматривается калибровочная теория групп только внутренних симметрий, т. е. без пространственно-временных преобразований.

В § 5 излагается традиционная янг-миллсовская (компенсаци-

онная) формулировка калибровочной теории, основанная на принципе локальной инвариантности. В § 6 проводится формализация теории классических полей расслоениями, а в § 7, 8 приведены примеры распространения геометрических методов на описание калибровочных антисимметричных тензорных полей и полевые модели протяженных объектов (струн) и фермионных полей антисимметричными тензорами.

### § 3. ТЕОРИЯ ЯНГА — МИЛЛСА

**Калибровочный принцип.** Исходным принципом теории калибровочных полей в ее традиционной формулировке, которая была дана в пионерских работах Ч. Янга и Р. Миллса (1954) и Р. Утиямы (1956), является **принцип локальной инвариантности**, называемый также **калибровочным принципом**. Он требует инвариантности функционала действия теории

$$S = \int L d^4x$$

(а для внутренних симметрий — лагранжиана  $L$ ) относительно локальных, т. е. зависящих от пространственно-временной точки преобразований симметрий.

Задолго до Ч. Янга и Р. Миллса калибровочный принцип фактически применил Г. Вейль в своей единой теории гравитации и электромагнетизма 1918 г., когда по аналогии с введением гравитационного поля для обеспечения инвариантности теории относительно общих ковариантных преобразований/ введение электромагнитного потенциала связывалось с обеспечением инвариантности относительно локальных масштабных преобразований (умножений на действительное число). Однако теория Вейля 1918 г. привела не к описанию электромагнетизма, а к конформной теории гравитации и геометрии Вейля. Подход Вейля был впоследствии применен к электромагнетизму, но с заменой группы масштабных преобразований на группу фазовых преобразований  $U(1)$  (В. Паули, 1941).

Пусть  $\varphi(x)$  — волновая функция некоторого классического поля, лагранжиан которого инвариантен относительно группы  $U(1)$  фазовых преобразований

$$U(1) \ni g: \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \exp(i\alpha) \varphi(x).$$

Предположим теперь, что параметр этих преобразований  $\alpha$  является некоторой функцией точки  $x \in X$ , т. е. рассмотрим локальные фазовые преобразования

$$g(x): \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \exp(i\alpha(x)) \varphi(x). \quad (5.1)$$

Лагранжиан  $L$  поля  $\varphi$  в общем случае уже не будет инвариантен относительно таких преобразований, поскольку оператор  $g(x)$  в

отличие от оператора глобального преобразования  $g$  не коммутирует с оператором частных производных  $\partial_\mu$ :

$$\partial_\mu g(x) = g(x) \partial_\mu + (\partial_\mu g(x)).$$

**Пример 5.1.** Пусть  $\varphi$  — скалярное поле с лагранжианом

$$L(\varphi) = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi),$$

где  $\eta^{\mu\nu}$  — метрика Минковского. В результате преобразования (5.1) этот лагранжиан принимает вид

$$L'(\varphi') = L(\varphi) + \frac{1}{2} \varphi^* \varphi (\partial_\mu \alpha) \partial^\mu \alpha + \frac{i}{2} [(\partial_\mu \varphi^*) \varphi - \varphi^* \partial_\mu \varphi] \partial^\mu \alpha.$$

Инвариантность  $L$  по  $g(x)$  может быть обеспечена путем введения дополнительного векторного поля  $A_\mu$ , интерпретируемого как электромагнитный потенциал, с законом локальных преобразований

$$g(x): A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \quad (5.2)$$

и путем замены в  $L$  операторов частных производных  $\partial_\mu$  на обобщенные

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \quad (5.3)$$

Включение поля  $A$  в состав обобщенной производной (5.3) позволяет компенсировать член вида  $\partial_\mu g(x)$ , возникающий при локальных преобразованиях под знаком производных

$$D'_\mu \varphi' = (\partial_\mu + iA'_\mu) \varphi'(x) = \exp(i\alpha(x)) D_\mu \varphi.$$

В результате лагранжиан  $L$  инвариантен

$$L'(\varphi', A') = L(\varphi, A) = L(\varphi', A'),$$

как лагранжиан полей  $\{\varphi, A\}$  относительно преобразований (5.1), (5.2), которые представляют собой известные калибровочные преобразования электродинамики, но становится ковариантным

$$L(\varphi', A) \neq L(\varphi, A) = L'(\varphi', A')$$

как лагранжиан полей  $\{\varphi\}$ .

$$f(\varphi) = f'(\varphi') = f(\varphi'),$$

Поясним, что функция  $f(\varphi)$  считается ковариантной относительно преобразований  $\varphi \rightarrow \varphi'$ , если ее значение не меняется:  $f(\varphi) = f'(\varphi')$ . Если же сохраняется и вид функции:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu,$$

то она называется инвариантной. Например, релятивистский ин-

тервал  $ds^2$  ковариантен относительно произвольных общих ковариантных преобразований

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta},$$

$$f(\varphi, \sigma) = f_\sigma(\varphi)$$

а инвариантен только относительно преобразований Лоренца, когда  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Если функция  $f$  зависит, например, от двух величин  $\varphi$  и  $\sigma$ , то одну из них можно рассматривать в качестве параметра, задающего вид функции

$$f'(\varphi', \sigma') = f(\varphi', \sigma')$$

как функции только одного аргумента  $\varphi$ . В этом случае  $f$ , будучи инвариантной

$$f'_{\sigma'}(\varphi') = f_{\sigma'}(\varphi') \neq f_\sigma(\varphi')$$

как функция от  $\varphi$  и  $\sigma$ , оказывается ковариантной

$$g(x) = (\hat{1} + I_m \delta \omega^m(x))$$

как функция только от  $\varphi$ .

Предложенный В. Паули способ введения электромагнитного поля для электродинамики ничего существенно нового, однако, не давал, и ему (не) придали значения.

Решающий шаг в становлении калибровочной теории сделали Ч. Янг и Р. Миллс в 1954 г. Они анализировали инвариантность взаимодействия нуклонов относительно вращений изоспина (группа  $SU(2)$ ), которая приводит к закону сохранения изоспина и означает, что ориентация изоспина не имеет физического смысла и должна быть произвольной. Однако, если исходить из обычной (глобальной) симметрии, этот произвол ограничен тем, что если ориентация изоспина задана в одной точке пространства-времени, свобода выбора ее в других точках сразу пропадает. Но такое положение не совместимо хотя бы с основными принципами релятивизма. Это побудило Ч. Янга и Р. Миллса рассматривать независимые вращения изоспина во всех точках пространства-времени и потребовать инвариантность теории относительно таких вращений.

Аналогичные рассуждения применимы к любым внутренним симметриям, и уже в работе Р. Утиямы 1956 г. была приведена общая схема калибровочной теории для групп внутренних симметрий.

Пусть  $\{\varphi^a(x)\}$  — мультиплет классических полей на пространстве Минковского  $M^4$ , описываемый лагранжианом  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ . Применяя калибровочный принцип, потребуем, чтобы  $L$  был инвариантен относительно локальных преобразований симметрий, параметры которых зависят от точки  $x \in M^4$ . Эти преобразования об-

разуют группу  $G(M^4)$ , которая называется группой локальных преобразований или калибровочной группой.

Следует, однако, различать два рода калибровочных преобразований: преобразования системы отсчета (базиса внутреннего пространства) и преобразования самих полей при фиксированной системе отсчета. Как видно из приведенного выше обоснования Ч. Янгом и Р. Миллсом принципа локальной инвариантности, последний требует инвариантности относительно калибровочных преобразований именно первого рода. Однако в случае внутренних преобразований для всякого преобразования полей  $q \rightarrow q'$  можно найти преобразование системы отсчета  $\Psi \rightarrow \Psi'$  такое, что  $q$  выглядит относительно  $\Psi'$  так же, как  $q'$  выглядит относительно  $\Psi$ , т. е.  $\Psi' q = \Psi q'$  (обратное, вообще говоря, неверно). Поэтому, будучи инвариантным относительно преобразований первого рода, лагранжиан калибровочной теории оказывается инвариантным и относительно имеющих тот же вид калибровочных преобразований второго рода. Именно преобразования второго рода обычно понимают под калибровочными преобразованиями в янг-миллсовской формулировке калибровочной теории.

Удобно ограничиться инфинитезимальными локальными преобразованиями

$$g(x): \varphi^a \rightarrow \varphi'^a = \varphi^a + \delta \varphi^a,$$

из  $G(M^4)$ , где  $I_m$  — генераторы группы  $G$ , образующие базис ее алгебры Ли  $A_G$ ,  $\delta \omega^m(x)$  — функции малых параметров группы  $G(M^4)$ , и

$$\delta \varphi^a = I_m^a b^{\varphi^b} \delta \omega^m(x). \quad (5.4)$$

Требование инвариантности лагранжиана  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$  относительно преобразований (5.4)  $\delta L = 0$  выражается тождествами (см. (П. I.8)) второй теоремы Нетер (см. приложение I), которые в данном случае  $\varphi^a = q^a$ ,  $b_m^{a\varphi} = 0$  имеют вид

$$\partial J_m^a = 0, \quad J_m^a = 0, \quad (5.5)$$

где

$$J_m^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i^a} I_m^a b^{\varphi^b} \quad (5.6)$$

— ток симметрии (см. (П. I.3)) полей  $\varphi$ . Тождества (5.5) можно рассматривать как функциональные уравнения на локально инвариантный лагранжиан  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ , решение которых для кинетической части  $L$ , однако, только тривиально.

Нетривиальное решение для  $L$  получается, если предположить, что лагранжиан зависит от полей, закон локальных преобразований которых включает производные от параметров преобразований, как (5.2). Можно показать, что такими полями с необходимостью являются векторные поля  $A_\mu^m$ , принимающие значения в



алгебре Ли  $A_G$ , с нетензорным (нелинейным) законом локальных преобразований

$$G(M^4) \ni g: A_\mu^m I_m \rightarrow A_\mu^m I_m = g A_\mu^m I_m g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, \quad (5.7)$$

или в инфинитезимальном виде

$$\delta A_\mu^m = A_\mu^m - A_\mu^n = C_{nk}^m A_\mu^k \delta \omega^n(x) - \partial_\mu \delta \omega^m(x), \quad (5.8)$$

где  $C_{nk}^m$  — структурные константы алгебры Ли  $A_G$ . В лангранжиан  $L$  эти поля должны входить в составе оператора обобщенной производной

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^m I_m \quad (5.9)$$

или величины

$$F_{\mu\nu}^n = \partial_\mu A_\nu^n - \partial_\nu A_\mu^n + C_{nk}^n A_\mu^k A_\nu^k \quad (5.10)$$

с тензорным законом локальных преобразований

$$\delta F_{\mu\nu}^n = C_{nk}^m \delta \omega^n(x) F_{\mu\nu}^k,$$

называемой *тензором напряженности* поля  $A_\mu^m$ .

**Пример 5.2.** Пусть  $G$  — группа  $SU(2)$ . Ее алгебра Ли  $SU(2)$  порождена тремя генераторами  $I_1, I_2, I_3$  с коммутационными соотношениями

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

В фундаментальном представлении на 2-компонентных спинорах  $\psi$  генераторы  $I$  имеют вид

$$I_j = -\frac{i}{2} \tau_j,$$

где  $\tau_j$  — матрицы Паули. Калибровочная теория полей  $\Psi$  с группой симметрий  $SU(2)$  включает поля  $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$  в составе обобщенных производных

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^k \tau_k,$$

и тензора напряженности

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + \varepsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k.$$

В случае абелевой группы  $G=U(1)$ , имеющей единственный генератор  $I=i$  и  $C_{nk}^m=0$ , выражения (5.4), (5.8), (5.9) полностью совпадают с выражениями (5.1), (5.2), (5.3), а величина (5.10) — с тензором напряженности электромагнитного поля. Это дает основания рассматривать преобразования (5.4), (5.8) как обобщение калибровочных преобразований (5.1), (5.2) в электродинамике на неабелевы группы симметрий. Поэтому они тоже были названы *калибровочными преобразованиями*, а поля  $A_\mu^m$  — *калибровочными полями*.

Другое название  $A_\mu^m$  — *компенсирующие поля*. Оно прямо указывает на роль, которую эти поля играют в составе обобщенной производной  $D_\mu$  — компенсировать члены вида  $\partial_\mu g(x)$ ,  $g(x) \in G(M^4)$ , возникающие при локальных преобразованиях полей под знаком производных. В результате закон локальных преобразований имеет тензорный вид

$$D_\mu \varphi' = \partial_\mu \varphi' + A_\mu^m I_m \varphi' = g \partial_\mu \varphi + (\partial_\mu g) \varphi + g A_\mu^m I_m \varphi - (\partial_\mu g) \varphi = g D_\mu \varphi$$

(ср. с  $\partial_\mu \varphi' = g \partial_\mu \varphi$ , когда  $g \in G$ ).

Таким образом,  $G(M^4)$ -инвариантный лангранжиан полей  $\varphi$  можно построить непосредственно из обычного  $G$ -инвариантного лагранжиана  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$  простой заменой производных  $\partial_\mu \varphi$  на обобщенные  $D_\mu \varphi$ . Поэтому производные  $D_\mu$  также называют *компенсирующими*, а приведенную здесь янг-миллсовскую схему построения калибровочной теории — компенсационной. Она аналогична построению электродинамики, исходя из условия инвариантности относительно локальных фазовых преобразований. Калибровочная теория создавалась ее авторами именно как обобщение электродинамики на неабелевы симметрии так, чтобы в частном случае  $G=U(1)$  она полностью воспроизводила электродинамику.

Таким образом, для построения локально инвариантной теории мультиплет исходных полей  $\{\varphi^a\}$ , называемых обычно *материальными полями*, следует дополнить калибровочными полями  $\{A_\mu^m\}$ , отвечающими данной группе симметрий  $G$ , с законом калибровочных преобразований (5.8). Полная система полей  $\{\varphi^a, A_\mu^m\}$  описывается лагранжианом

$$L = L_\varphi(\varphi, D_\mu \varphi) + f_A, \quad (5.11)$$

где лагранжиан материальных полей  $L_\varphi$  строится указанной выше заменой  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  из лагранжиана  $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$  свободных полей  $\varphi$ , а  $f_A$  — лагранжиан калибровочных полей.

Последний по аналогии с лагранжианом электромагнитного поля выбирается в виде

$$L_A = \frac{1}{8\epsilon^2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} g_{mn} F_{\mu\nu}^m F_{\alpha\beta}^n, \quad (5.12)$$

где  $g_{mn}$  — некоторая невырожденная  $G$ -инвариантная билинейная форма на алгебре Ли  $A_G$ . Например, если  $G$  — полупроста, такой формой выбирается форма Киллинга  $g_{mn} = C_{mk}^l C_{nl}^k$ . Если  $G$  — компактная группа, форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры  $A_G$ , в котором она принимает вид  $g_{mn} = -2\delta_{mn}$ . В калибровочной теории внутренних симметрий обычно ограничиваются моделями с компактными группами симметрий, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга гарантирует положительную определенность гамильтониана (оператора энергии) калибровочных полей в таких моделях.

Вариация лагранжиана (5.11) по материальным полям  $\varphi^a$  и калибровочным полям  $A_\mu^m$  приводит к уравнениям поля

$$D_\mu \left[ \frac{\partial L_\varphi(\varphi, D_\nu \varphi)}{\partial D_\mu \varphi^a} \right] - \frac{\partial L_\varphi(\varphi, D_\nu \varphi)}{\partial \varphi^a} = 0,$$

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} g_{mn} D_\nu F^{\mu\nu} - \frac{\partial L_\varphi}{\partial A_\mu^m} = 0 \quad (5.13)$$

Лагранжиан (5.11) и уравнения поля (5.13) имеют вид лагранжиана и уравнений материальных полей  $\varphi$ , взаимодействующих посредством калибровочных полей  $A$ . Причем, поскольку поля  $A$  входят в лагранжиан  $L_\varphi$  только в составе производных  $D_\mu$  и следовательно,

$$\frac{\partial L_\varphi}{\partial A_\mu^m} = \frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi^a} J_{mb}^a \varphi^b = J_{\varphi m}^\mu,$$

источником калибровочных полей являются токи симметрий  $J_\varphi$  материальных полей  $\varphi$ . Это позволяет интерпретировать калибровочные поля  $A_\mu^m$  как потенциалы взаимодействия с группой симметрий  $G$  и константой взаимодействия  $\varepsilon$ . Последняя переобозначением калибровочных полей

$$A_\mu^m \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} A_\mu^m$$

может быть убрана внутрь компенсирующей производной

$$D_\mu = \partial_\mu + \varepsilon A_\mu^m J_m.$$

При этом, если группа  $G$  является прямым произведением двух подгрупп  $G = G_1 \times G_2$ , константа  $\varepsilon$  может быть выбрана различной для калибровочных полей, отвечающих разным группам.

Калибровочная инвариантность лагранжиана (5.11) приводит к следующим законам сохранения — тождествам второй теоремы Нетер (П. 1.8)

$$\partial_\mu (J_{\varphi m}^\mu + J_{Am}^\mu) = 0, \quad (5.14a)$$

$$J_{\varphi m}^\mu + J_{Am}^\mu + \frac{\partial L}{\partial A_\mu^m} = 0, \quad (5.14b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu^m} + \frac{\partial L}{\partial A_\nu^m} = 0, \quad (5.14b)$$

где  $J_\varphi$  и  $J_A$  — токи симметрий полей  $\varphi$  и  $A$ . Тожества (5.14b) и (5.14b) являются сильными, тогда как тождество (5.14a) — слабое, т. е. выполняется только на экстремальных — полях, являющихся решениями полевых уравнений. Заметим, что если материаль-

ные поля  $\varphi$  рассматриваются во внешнем калибровочном поле, то законы сохранения (5.14) сводятся к выражению

$$D_\mu J_{\varphi m}^\mu = 0.$$

Картина взаимодействия посредством калибровочных полей подобна той, которая имеет место в электродинамике, когда заряженные частицы взаимодействуют посредством порождаемого ими электромагнитного поля. Отличие состоит в том, что сами электромагнитные поля между собой не взаимодействуют, а неабелевы калибровочные поля взаимодействуют, поскольку из-за наличия в выражении (5.10) для напряженности калибровочного поля квадратичной по  $A$  составляющей  $C^m{}_{nk} A_\mu^k A_\nu^k$  лагранжиан (5.12) калибровочного поля содержит члены взаимодействия типа  $A^2 \partial A$  и  $A^4$ .

Таким образом, простое требование перехода к инвариантности относительно локальных преобразований симметрий оказалось универсальным средством построения потенциалов взаимодействия в системах с самыми разными симметриями. Это и обусловило чрезвычайно широкое применение методов калибровочной теории в современной теории поля и элементарных частиц.

**Пример 5.3.** Объединенная модель слабых и электромагнитных взаимодействий строится как калибровочная модель группы  $U(1) \times SU(2)$ . В этой модели левоспиральный электрон  $e_L$  и нейтрино  $\nu$  объединяются в  $SU(2)$ -дублет  $l = \begin{pmatrix} e_L \\ \nu \end{pmatrix}$ , а правый электрон вому синглету — «гиперзаряд»  $Y = -2$ , чтобы сохранить универсальность выражения для электрического заряда

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}.$$

связанной с симметрией  $U(1)$  «гиперзаряд»  $Y = 1$ , а правый электрон образует  $SU(2)$ -синглет  $r$ . Кроме того, левым частицам приписываются калибровочными полями в этой модели являются изовекторный триплет калибровочных полей  $A_\mu^i$  группы  $SU(2)$  и синглет  $B_\mu$  группы  $U(1)$ . Калибровочно инвариантный лагранжиан модели имеет вид

$$L = i\bar{l}\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau_j A_\mu^j + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) l + i\bar{r}\gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) r + L_A + L_B, \quad (5.15)$$

где  $g$  и  $g'$  — константы взаимодействия с калибровочными полями  $A$  и  $B$ .

Модель с лагранжианом (5.15), однако, не является реалистичной, поскольку и лептоны, и калибровочные поля (промежуточные бозоны) в этом лагранжиане не имеют массы. Дело в том, что условие калибровочной инвариантности исключает из лагранжиана калибровочных полей массовый член  $m^2 A_\mu^k A_\mu^k$  и калибровоч-

ные поля, как и электромагнитное поле, оказываются безмассовыми.

Обойти эту трудность позволяет предложенный П. Хиггсом (1964) механизм, основанный на так называемом *спонтанном нарушении симметрии*. Суть его состоит в том, что в схему калибровочной теории помимо материальных полей  $\varphi$  и калибровочных потенциалов  $A$  вводится еще хиггс-голдстоновское поле  $\sigma$ . Это позволяет учесть в квантовой калибровочной теории неинвариантность физического вакуума, взаимодействие с которым полей  $\varphi$  и  $A$ , эффективно описываемое как их взаимодействие с полем  $\sigma$ , приводит к таким эффектам, как генерация массы у калибровочных и материальных полей.

Еще один тип полей — так называемых *духи Фаддеева — Попова* — возникают в квантовой калибровочной теории. Дело в том, что согласно второй теореме Нетер (см. приложение I) калибровочная инвариантность функционала действия теории приводит к условиям связи (см. (П. I.7))

$$D_\mu \frac{\delta L}{\delta A_\mu^a} \equiv 0, \quad q^a = A_\mu^a, \quad b_{\nu m}^{n\mu} = \delta_m^n \delta_\nu^\mu \quad (5.16)$$

на уравнения полей, которые тем самым не являются независимыми и их решение при заданных начальных и граничных условиях неоднозначно. Оно включает в себя класс полей ( $\varphi, A$ ), связанных между собой калибровочными преобразованиями и описывающих, как полагают, одно и то же физическое состояние системы. Неоднозначность устраняют введением дополнительных связей — калибровочных условий, выделяющих в каждом классе определенного представителя.

Все это характерно для систем со связями (первого рода). Такие системы общепринято описывать в гамильтоновом формализме (см. приложение II). То, что калибровочная теория действительно является теорией со связями, вытекает из третьего тождества (5.14в) второй теоремы Нетер. Из него следует, что лагранжиан калибровочной теории  $L$  не зависит от скоростей  $\partial_0 A_0^m$ , а тем самым возникают, например, условия связи

$$p_m^0 = \frac{\partial L}{\partial A_{0,0}^m} = 0 \quad (5.17)$$

на канонические импульсы, сопряженные переменным  $A_0^m$ .

Наличие связей (поскольку не все полевые переменные являются динамическими и интегрирование в производящем функционале квантовой калибровочной теории осуществляется по классам физически эквивалентных полей) существенно сказывается на процедуре квантования калибровочных полей и эффективно может быть учтено введением духов Фаддеева — Попова; при этом калибровочная симметрия расширяется до так называемой БРС-симметрии (см. § 18).

Таким образом, полный набор динамических переменных в калибровочных моделях составляют материальные поля, калибровочные потенциалы, хиггс-голдстоновские поля и духи Фаддеева — Попова.

**Вакуумные полевые конфигурации.** Рассмотрим теперь некоторые глобальные характеристики полевых конфигураций, на которые локальные вариации полей не влияют.

Например, если поле сосредоточено в некоторой пространственной области, такой характеристикой может быть тип вакуумного поля, к которому оно стремится на пространственной бесконечности.

Определение вакуума относится к области квантовой теории поля. Однако во многих моделях, например, с так называемым неинвариантным вакуумом квантование проводится в присутствии ненулевого классического фона. Поэтому оперируют также понятием *вакуумного классического поля*. Как правило, под ним понимают поле, минимизирующее гамильтониан (энергию  $E$ ) системы, т. е. описывающее ее основное состояние.

Рассмотрим пример вещественного скалярного поля  $\varphi$  с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi).$$

Его гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_0} \dot{\varphi}_0 - L \right) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + U(\varphi) \right). \quad (5.18)$$

Поскольку кинетический член в гамильтониане (5.18) всегда положителен, минимум гамильтониана достигается на полях

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)} = \text{const},$$

где  $\varphi^{(0)}$  — точки минимума функции  $U(\varphi)$ . Причем, поскольку в этих точках  $\partial U / \partial \varphi = 0$ , поле  $\varphi = \varphi^{(0)}$  является решением полевых уравнений.

**Пример 5.4.** Вещественное скалярное поле с потенциалом типа ямы

$$U(\varphi) = \mu^2 \varphi^2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^4.$$

Минимум  $U(\varphi)$  достигается при значениях  $\varphi^{(0)} = 0$ , и вакуумное поле является нулевым.

**Пример 5.5.** Вещественное скалярное поле с потенциалом типа двойной ямы

$$U(\varphi) = -\mu^2 \varphi^2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi^4 \quad (5.19)$$

(с «мнимой» массой). Минимум  $U(\varphi)$  достигается при значениях

$$\varphi^{(0)} = \pm \frac{\mu}{\lambda}, \quad (5.20)$$

и в модели имеется два ненулевых вакуумных поля

$$\varphi = \varphi^{(0)} = \pm \frac{\mu}{\lambda}.$$

Пример 5.6. Скалярное поле с внутренним индексом  $\varphi^a$  и потенциалом

$$U(\varphi) = -\mu^2 \varphi^a \varphi_a + \frac{\lambda^2}{2} (\varphi^a \varphi_a)^2. \quad (5.21)$$

Минимум  $U(\varphi)$  достигается при

$$\delta^{ab} \varphi_a^0 \varphi_b^{(0)} = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad (5.22)$$

и имеется континуум постоянных вакуумных полей  $\varphi^a = \varphi_a^{(0)}$ , квадрат которых удовлетворяет условию (5.22).

Заметим, что в примерах 5.5 и 5.6, в отличие от примера 5.4, энергия вакуумных состояний бесконечна. Это не всегда удобно, но, поскольку изменение потенциала на константу не меняет динамику системы, его можно всегда сделать таким, чтобы минимальное значение энергии равнялось нулю. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать потенциалы, подобная перенормировка которых уже проведена. В частности, для потенциала (5.19) из примера 5.5 она получается добавлением к нему величины  $\mu^4/(2\lambda^2)$ , после чего потенциал принимает вид

$$U(\varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \left( \varphi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right)^2 = \frac{1}{2} g^2 (\varphi^2 - a^2)^2. \quad (5.23)$$

Если функция  $U(\varphi)$  имеет не один минимум (как в примерах 5.5 и 5.6), вакуумное состояние называется вырожденным. Множество таких состояний играет важную роль для характеристики полевых конфигураций, сосредоточенных в некоторой пространственной области. Действительно, из (5.18) ясно, что значение энергии произвольной (невакуумной) конфигурации зависит от поведения поля  $\varphi(x)$  на пространственной бесконечности  $|x^i| \rightarrow \infty$ . В частности, энергия бесконечна для всех полей, кроме  $\varphi(x)$ , которые в любой момент времени  $x^0$  при  $|x^i| \rightarrow \infty$  стремятся к какой-либо вакуумной конфигурации. Для таких полей все три члена под интегралом (5.18) стремятся к нулю при  $|x^i| \rightarrow \infty$ , что необходимо, хотя и не достаточно, для сходимости  $E$ .

Рассмотрим пример скалярного поля на 2-мерном пространстве-времени. Тогда в классе решений с конечной энергией можно

найти устойчивые состояния, отвечающие локальным минимумам функционала (5.18). С этой целью запишем цепочку неравенств

$$E \geq \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + U(\varphi) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \varphi \mp \sqrt{2U})^2 \pm \sqrt{2U} \partial_x \varphi \right] \geq \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2U} \partial_x \varphi.$$

Равенство достигается на статических конфигурациях  $\varphi(x)$ , для которых выполнено

$$\partial_x \varphi = \pm \sqrt{2U(\varphi)}. \quad (5.24)$$

Переходя к квадратурам, находим эти конфигурации в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2U(\varphi)}} = \pm x + \text{const}. \quad (5.25)$$

Легко проверить, дифференцируя (5.24) по  $x$ , что

$$\partial_{xx}^2 \varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

т. е. это решение полевого уравнения. Энергия найденных состояний

$$E = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2U(\varphi)} \frac{d\varphi}{dx} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx U(\varphi) = \pm \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(+\infty)} d\varphi \sqrt{2U(\varphi)}. \quad (5.26)$$

Поскольку  $\varphi(-\infty) = \varphi^{(0)}$ ,  $\varphi(+\infty) = \varphi^{(0)'}$ , получаем (в случае, когда интеграл (5.26) конечен), что значения локальных минимумов энергии, достигаемых на полях (5.25), определяются вакуумной асимптотикой полевой конфигурации. В частности, если вакуумное состояние невырождено, то  $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty)$  и  $E=0$ , т. е. ненулевых локальных минимумов нет.

Пример 5.7. 2-мерная вещественная скалярная модель с потенциалом двойной ямы (5.23) имеет два вакуумных состояния  $\varphi_1^{(0)} = a$ ,  $\varphi_2^{(0)} = -a$  и нетривиальный локальный минимум энергии  $E = \frac{4}{3} g a^3$ , который достигается на решениях

$$\varphi = \pm a \cdot \text{th}(gax), \quad (5.27)$$

называемых кинками.

Вакуумная асимптотика полей определяет значения так называемых топологических зарядов, которые помимо обычных нетривиальных зарядов, связанных с некоторой группой симметрий (см. приложение I), характеризуют нелинейные полевые конфигурации.

Для конкретности возьмем опять скалярное поле на 2-мерном пространстве-времени. Для произвольного  $\varphi(x, t)$  определим

$$J^\mu = \lambda \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi,$$

где  $\varepsilon^{\mu\nu}$  — 2-мерный символ Леви — Чивита. Очевидно, что  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , и, следовательно (см. приложение I),

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x \varphi) = \lambda [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)] = \text{const} \quad (5.28)$$

для статических на пространственной бесконечности полей. Сохраняющаяся величина  $Q$  называется топологическим зарядом.

**Пример 5.8.** Пусть в скалярной 2-мерной модели

$$U(\varphi) = g(1 - \cos \varphi).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = g \sin \varphi,$$

и уравнение поля носит название *синус-Гордона*. Множество вакуумных состояний  $U(\varphi_n^{(0)}) = 0$  в данном случае счетно:

$$\varphi_n^{(0)} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и, выбирая в (5.28) нормировочную константу  $\lambda = (2\pi)^{-1}$ , найдем, что полевые конфигурации с конечной энергией характеризуются целочисленным топологическим зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} (\varphi_n^{(0)} - \varphi_m^{(0)}) = n - m.$$

Из (5.26) для  $Q = \pm 1$  получаем нетривиальный локальный минимум энергии  $E = 8g$ . Он реализуется на решениях полевого уравнения

$$\varphi(x) = 4 \arctg \{ \exp \{ \pm (x - x_0) \} \}, \quad (5.29)$$

которые представляют собой *солитоны уравнения синус-Гордона*.

В следующей главе будут рассмотрены модели в пространстве — времени размерности больше двух, а также будет исследована связь топологических зарядов с гомотопическими характеристиками голевых конфигураций.

В калибровочных моделях важными глобальными характеристиками являются так называемые характеристические классы (см. § 13). Они определяются замкнутыми калибровочно инвариантными (характеристическими) формами  $\Omega$ , такими, что функционалы  $C = \int \Omega$  имеют тождественную нулевую вариационную производную. Тем самым эти функционалы не меняются при локальных вариациях калибровочного поля  $A$  и их значение  $C$  опре-

деляется глобальными свойствами этого поля. Значение характеристического числа  $C$  определяет *характеристический класс* поля  $A$ .

**Пример 5.9.** Для электромагнитного поля  $A_\mu$  на 2-мерном многообразии такой калибровочно инвариантной формой является сама 2-форма напряженности

$$\frac{i}{2\pi} F = -\frac{1}{2\pi} \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Вариация функционала

$$C_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{X^2} F \quad (5.30)$$

приводит к тождеству  $0 = 0$ . В моделях монополей характеристическое число (5.30) равно заряду монополя (см. § 16).

**Пример 5.10.** Для калибровочного поля группы  $SU(n)$  на 4-мерном многообразии определена калибровочно инвариантная 4-форма

$$\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{4\pi^2} F^a \wedge F^a = -\frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a d^4x,$$

где

$$F^a = F_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$$

— 2-форма напряженности калибровочного поля. Рассмотрим функционал

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{X^4} \text{Tr}(F \wedge F). \quad (5.31)$$

Получаемые из него вариацией по  $A$  уравнения являются тождествами Бианки

$$D_{[\mu} F_{\nu\lambda]}^a = 0.$$

В инстантонных моделях характеристическое число (5.31) равно инстантону заряду (см. § 14).

Функционалы  $\Omega$  могут быть также добавлены к янг-милсовскому действию от лагранжиана (5.12). Они не меняют классических полевых уравнений, но, например, в квантовой теории поля позволяют учесть нетривиальную структуру вакуума.

Однако сколько-нибудь полное описание конфигураций калибровочных полей с ненулевыми глобальными характеристиками возможно только в рамках геометрической формулировки калибровочной теории на языке расслоений, поскольку нетривиальность этих характеристик обусловлена именно нетривиальностью соответствующих расслоений.

## § 6. КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ФОРМАЛИЗМЕ РАССЛОЕНИЯ

Обобщенная производная  $D_\mu$ , заменяющая в лагранжиане и уравнениях поля калибровочной теории частную производную  $\partial_\mu$ , по своей структуре напоминает ковариантную производную в теории гравитации, а в теории Вейля она трактовалась именно как ковариантная производная в геометрии, в которой роль связности, как полагал Г. Вейль, исполнял электромагнитный потенциал. В такой интерпретации лагранжиан (5.11) калибровочной теории выглядит как описывающий материальные поля  $\{\varphi\}$  в геометрии с ковариантной производной  $D_\mu$  (за ней закрепилось это название, которое в дальнейшем мы и будем использовать). Этой геометрией является геометрия расслоенного пространства, задаваемая калибровочными полями  $A_\mu^a$  как коэффициентами формы связности на расслоениях. Такая интерпретация  $D_\mu$  и  $A_\mu^a$  привела в середине 60-х годов к формулировке калибровочной теории в терминах расслоений.

Применение аппарата расслоений в теории поля основывается на математическом определении классических полей как сечений  $q$  некоторого локально тривиального дифференцируемого расслоения  $\varepsilon = (\text{tl } \varepsilon, \pi, X)$  с тотальным пространством  $\text{tl } \varepsilon$ , канонической проекцией  $\pi: \text{tl } \varepsilon \rightarrow X$  и базой — дифференцируемым ориентируемым паракомпактным многообразием  $X^4$  [9, 10]. Их лагранжиан  $L(q)$  может быть определен как вещественная функция  $L(y)$  на конечномерном многообразии струй  $J^1\varepsilon$  расслоения  $\varepsilon$ . Точками  $J^1\varepsilon$  являются классы

$$y = j_x^1 q, \quad x \in X,$$

сечений  $q$ , так что  $q$  и  $q'$  принадлежат одному классу  $j_x^1 q$ , если

$$q(x) = q'(x), \quad dq|_{T_x(X)} = dq'|_{T_x(X)},$$

где  $T_x(X)$  — слой касательного расслоения  $T(X)$  в  $x \in X$  и  $dq$  — отображение, касательное к  $q$  [11]. Всякое сечение  $q$  расслоения  $\varepsilon$  имеет продолжение до сечения

$$(j^1 q)(x) = j_x^1 q$$

расслоения  $\varepsilon_L = (J^1\varepsilon, \pi_L, X)$  с проекцией  $\pi_L: j_x^1 q \rightarrow x$ . Лагранжиан  $L(q)$  получается ограничением функции  $L(y)$  на подмножество  $(j^1 q)(X) \subset J^1\varepsilon$ . Координатные атласы  $\Psi_i$ , задающие структуру дифференцируемого многообразия на  $J^1\varepsilon$ , индуцируются атласами расслоения  $\varepsilon$  и  $T^*(X)$  и координатными атласами многообразия  $X$ .

Поскольку преобразования атласов  $\Psi_i$  представляют собой преобразования эквивалентности многообразия  $J^1\varepsilon$ , требование инвариантности лагранжиана  $L(q)$  относительно таких преобразований является вполне естественным. Таким образом, описание полей в формализме расслоений ведет непосредственно к калибро-

вочной теории, а принцип локальной инвариантности выступает как своего рода принцип относительности.

В калибровочной теории, как уже отмечалось, следует различать два рода калибровочных преобразований. К *первому роду* относятся упомянутые выше преобразования атласов. *Калибровочные преобразования второго рода* — это преобразования  $J^1\varepsilon$ , для каждого из которых в данном атласе  $\Psi_i$  существует калибровочное преобразование первого рода, такое, что  $\Psi_i q' = \Psi_i' q$ . Тогда лагранжиан  $L$ , инвариантный при калибровочных преобразованиях первого рода, будет инвариантен и при калибровочных преобразованиях второго рода.

Пусть  $\{\varphi(x)\}$  — некоторый мультиплет классических материальных полей на многообразии  $X^4$  со значениями в конечномерном векторном пространстве  $V$ , реализующем представление группы Ли  $G$ . В формализме расслоений поля  $\varphi$  описываются глобальными сечениями векторного дифференцируемого расслоения

$$\lambda = (E, \pi_\lambda, X, U, G)$$

с тотальным пространством  $\text{tl } \lambda = E$ , базой  $X$ , канонической проекцией  $\pi_\lambda E = X$ , типичным слоем  $V$  и структурной группой  $G$ .

Напомним (см. § 3), что, если задано ассоциированное с  $\lambda$  главное расслоение

$$\Lambda = (P, \pi, X, G)$$

с тотальным пространством  $P$ , тотальное пространство  $E$  изоморфно фактору  $(P \times V)/G$  пространства  $P \times V$  при отождествлении элементов  $(p, v)$  и  $(pg, g^{-1}v)$ ,  $g \in G$ . Сечение  $\varphi$  расслоения  $\lambda$  задается тогда  $V$ -значной функцией  $f_\varphi$  на  $P$ , такой, что

$$\varphi(\pi(p)) = [p]_V f_\varphi(p), \quad p \in P,$$

$$f_\varphi(pg) = g^{-1} f_\varphi(p), \quad g \in G,$$

где  $[p]_V$  обозначает ограничение канонического морфизма  $P \times V \rightarrow E$  на подпространство  $p \times V$ .

Если в главном расслоении  $\Lambda$  задана связность с 1-формой связности  $A$ , ковариантный дифференциал  $D\varphi$  сечения  $\varphi$  расслоения  $\lambda$  определяется следующим образом. Для всякого векторного поля  $\tau$  на  $X$  и его горизонтального поднятия  $\tau^H$  на  $P$ :

$$D\pi(\tau^H) = \tau, \quad A(\tau^H) = 0,$$

функция  $\tau^H f_\varphi$  отвечает сечению

$$D_\tau \varphi = (D\varphi)(\tau)$$

расслоения  $\lambda$ , которое представляет собой ковариантную производную  $\varphi$  вдоль  $\tau$ . Дифференциал  $D\varphi$  задает отображение

$$D: J^1\lambda \rightarrow \text{tl}(T^*(X) \otimes \lambda), \quad (6.1)$$

где  $J^1\lambda$  — многообразие струй расслоения  $\lambda$ .

В калибровочной теории атлас  $\Psi^A = \{U_i, \psi_i^A\}$  расслоения  $\lambda$ , где  $U_i$  и  $\psi_i^A$  — области и морфизмы тривиализации  $\lambda$ , определяет некоторую систему отсчета, в которой сечение  $\varphi$  представлено набором  $V$ -значных функций

$$\varphi_i(x) = \psi_i^A(x) \varphi(x) = \varphi_A(x) v^A,$$

где  $\{v^A\}$  — базис типичного слоя  $V$ . Атлас  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  главного расслоения  $\Lambda$  и атлас  $\Psi^A$  расслоения  $\lambda$  над одним и тем же покрытием  $\{U_i\}$  будем называть *ассоциированными*, если они определяются одним и тем же семейством  $\{z_i\}$  локальных сечений расслоения  $\Lambda$ , т. е.

$$z_i(\pi(p)) = p(\psi_i p)^{-1} = \psi_i^{-1}(\hat{1}_G),$$

$$\psi_i^A(x) = [z_i(x)]_V^{-1}, \quad x = \pi(p) \in U_i.$$

В частности, имеем

$$\varphi_i(x) = [z_i(x)]_V^{-1} \varphi(x) = f_\varphi(z_i(x)),$$

$$D\varphi_i = (d - A_i) \varphi_i,$$

где  $A_i = z_i^* A$  — локальная 1-форма связности, являющаяся преобразованием  $A$  относительно отображения  $z_i: U_i \rightarrow P$ , т. е.

$$A_i(t) = A(\partial z_i(t)), \quad t \in T(X), \quad \partial z_i(t) \in T(P).$$

В калибровочной теории коэффициенты  $A_{\mu}^m$  формы связности

$$A_i = A_{\mu}^m dx^\mu \quad x \in U_i,$$

записанной относительно некоторого базиса  $I_m$  алгебры Ли группы  $G$  и голономных базисов  $\{dx^\mu\}$  кокасательных пространств  $T_x^*(X)$ , отождествляются с калибровочными потенциалами. Закон калибровочных преобразований (4.2)

$$g(x): A_i \rightarrow g A_i g^{-1} + g dg^{-1}$$

формы связности  $A_i$  совпадает с законом калибровочных преобразований (5.7), а в инфинитезимальной форме — с (5.8). Оператор  $D_\mu$  идентичен компенсирующей производной (5.9), а коэффициенты 2-формы кривизны

$$F = DD = F_{\mu\nu}^m dx^\mu \wedge dx^\nu$$

совпадают с тензором напряженности (5.10) калибровочного поля.

Атлас  $\Psi^T = \{U_i, \psi_i^T\}$  касательного расслоения и ассоциированных с ним тензорных расслоений определяет пространственно-временную систему отсчета (см. § 20), так что в каждой точке  $x \in X$  задается репер

$$\{t(x)\} = (\psi_i^T(x))^{-1} \{t\}, \quad x \in U_i,$$

где  $\{t\}$  — фиксированный базис типичного слоя  $T = \mathbf{R}^4$  расслоения  $T(X)$ . Реперные функции  $t(x)$  представляют собой локальные сечения  $z_i(x)$  ассоциированного с  $T(X)$  главного расслоения — расслоения реперов  $LX^4$ , отвечающие атласу  $\Psi^T$ . Для голономного атласа реперы  $t_\mu(x) = \partial_\mu$  касательны к координатным линиям.

Координатный атлас  $\Psi_x$ , голономный атлас  $\Psi^T$  и атлас  $\Psi^A$  определяют на многообразии струй  $J^1\lambda$  систему локальных координат  $\{x^\mu, v_A, v_{A\mu}\}$ , где  $v_A$  — координаты относительно базиса  $\{v_A\}$  в типичном слое  $V$  расслоения  $\lambda$ . В такой системе координат поле  $\varphi(x)$  принадлежит классам  $y = j_x^1 \varphi$  с координатами

$$\{x^\mu(y) = x^\mu, \quad v_A(y) = \varphi_A(x), \quad v_{A\mu}(y) = \partial_\mu \varphi_A(x)\},$$

а отображение (6.1) принимает вид

$$\{x^\mu, v_A, v_{A\mu}\} \rightarrow \{x^\mu, (v_{A\mu} - A_{\mu A}^B(x) v^B)\},$$

где  $A_{\mu A}^B$  — компоненты локальной 1-формы связности.

В калибровочной теории в формализме расслоений калибровочные преобразования первого рода порождаются заменой атласов  $\Psi$  и  $\Psi^T$ .

При фиксированном покрытии  $\{U_i\}$  преобразования атласов

$$\Psi = \{\psi_i\} \rightarrow \Psi' = \{\psi'_i = g_i \psi_i\}, \quad g_i \in G(U_i),$$

$$\{z_i\} \rightarrow \{z'_i = z_i g_i^{-1}\} \quad (z_i = z_j \rho_{ji}),$$

где  $G(U_i)$  — группа  $G$ -значных функций на  $P$ , образуют группу — прямое произведение групп

$$G(\{U_i\}) = \text{PG}(U_i).$$

Все множество преобразований атласов  $\Psi$  составляет *калибровочную группу*  $G(X) = G(\{U_{im}\})$ , где  $\{U_{im}\}$  — покрытие для максимального атласа расслоения  $\Lambda$ . Преобразования атласов  $\Psi^T$  аналогично образуют калибровочную группу  $GL_+(4, \mathbf{R})(X)$ , которая содержит подгруппу голономных преобразований, сопровождаемых соответствующими преобразованиями координатных атласов (см. § 20). В дальнейшем будем считать, что для всех атласов фиксировано одно и то же покрытие  $\{U_i\}$ .

Калибровочные преобразования полевых функций  $\varphi_i$ , индуцируемые преобразованием атласа  $\Psi$ , имеют вид

$$g_i: \varphi_i = \psi_i \varphi \rightarrow \varphi'_i = \psi'_i \varphi = g_i \varphi_i.$$

Они не преобразуют само сечение  $\varphi$ , но меняют его запись локальными полевыми функциями  $\varphi_i$ .

Калибровочные преобразования второго рода в калибровочной теории внутренних симметрий (когда преобразования атласа  $\Psi^T$  не рассматриваются) порождаются изоморфизмами  $\rho$  расслоения  $\Lambda$ , проецируемыми на тождественный морфизм базы  $\rho_x = \text{Id}_x$ .

Морфизмом расслоения  $\varepsilon = (tl \varepsilon, \pi, X)$  в расслоение  $\varepsilon' = (tl \varepsilon', \pi', X')$  называется пара непрерывных (дифференцируемых) отображений

$$\rho: tl \rightarrow tl \varepsilon', \quad \rho_X: X \rightarrow X',$$

таких, что

$$\rho: \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi'^{-1}(\rho_X(x)),$$

т. е.  $\rho$  является послонным отображением. Отображение  $(\rho, \rho_X)$  называется *изоморфизмом* расслоений, если  $\rho$  и  $\rho_X$  — гомеоморфизмы (диффеоморфизмы для дифференцируемых расслоений), и эквивалентностью, если  $\rho_X = Id_X$ . Например, если  $\rho_X: X \rightarrow X'$  — диффеоморфизм многообразий, то

$$\rho = d\rho_X: T(X) \rightarrow T(X')$$

— изоморфизм касательных расслоений.

Изоморфизм  $\rho$  ( $\rho_X = Id_X$ ) главного расслоения удовлетворяет условию

$$\rho(Pg) = \rho(P)g, \quad g \in G,$$

и представим в виде

$$\rho(p) = pf_p(p), \quad p \in P, \quad (6.2)$$

где  $f_p(p)$  —  $G$ -значная функция на  $P$ , такая, что

$$f_p(pg) = g^{-1}f_p(p)g, \quad g \in G.$$

Отображение (6.2) индуцирует изоморфизм

$$(p \times V)/G \rightarrow (pf_p(p) \times V)/G$$

расслоения  $\lambda$ , продолжаемый на многообразии струй  $J^1\lambda$ .

Соответствующие преобразования полевых функций  $\varphi_i$  и  $A_i$  в заданном атласе  $\{z_i\}$ :

$$\varphi_i(x) = f_p(z_i(x)) \rightarrow \varphi'_i(x) = f_p(z_i(x) f_p(z_i(x))) = f_p(z_i(x)) \varphi_i(x),$$

$$A_i = z_i^* A \rightarrow z_i^* \rho^* A = (z_i^* \rho)^* A = A'_i,$$

выглядят как калибровочные преобразования первого рода, отвечающие переходу к новому атласу

$$\{z_i\} \rightarrow \{z'_i(x) = z_i(x) f_p(z_i(x))\}$$

с теми же функциями перехода

$$\rho'_{ij} = f_p(z_i) \rho_{ij} (f_p(z_j))^{-1} = \rho_{ij} f_p(z_i \rho_{ij}) (f_p(z_j))^{-1} = \rho_{ij},$$

что и  $\{z_i\}$ .

Существует взаимно однозначное соответствие между функциями  $f_p$ , задающими отображения  $\rho$ , и глобальными сечениями ассоциированного с  $\Lambda$  расслоения  $\Lambda$ , типичным слоем которого явля-

ется тоже группа  $G$ , но в котором, в отличие от главного расслоения, она действует не левыми сдвигами, а по присоединенному представлению

$$g: G \rightarrow gGg^{-1}, \quad g \in G.$$

Это определяет *группу калибровочных преобразований второго рода*  $G_2(X)$  как группу глобальных сечений расслоения  $\Lambda$ . В общем случае она отлична от группы  $G(X)$  калибровочных преобразований первого рода.

Группа  $G_2(X)$  может быть наделена структурой бесконечномерной группы Ли. Ее алгебра Ли состоит из сечений с компактным носителем ассоциированного с  $\Lambda$  расслоения  $ad P$  с типичным слоем — алгеброй Ли группы  $G$ . Задано ее дифференцируемое действие в пространстве связностей на главном расслоении, а пространство классов калибровочно эквивалентных связностей обладает структурой дифференцируемого многообразия (см. приложение V).

В случае пространственно-временных симметрий (когда  $\lambda$  — тензорное расслоение) глобальные сечения  $T(X)$  образуют алгебру Ли векторных полей и надо ограничиться изоморфизмами  $T(X)$ , индуцирующими изоморфизмы этой алгебры. Такие порождаются диффеоморфизмами  $\rho_X$  базы  $X$  и приводят к известным общековариантным преобразованиям тензорных полей

$$d\rho_X: \tau(x) \rightarrow \tau'(\rho_X(x)) = (d\rho_X \tau)(x),$$

которые в данном голономном атласе  $\Psi^T$  выглядят как голономные преобразования.

Полные калибровочные преобразования второго рода образуют группу  $Diff_X \Lambda$  изоморфизмов  $\rho$  расслоения  $\Lambda$ , проектируемых на диффеоморфизмы  $\rho_X$  базы  $X$ . Но не всякий диффеоморфизм базы может быть поднят до изоморфизма расслоения. Исключением является случай касательного и ассоциированных с ним расслоений, когда  $\rho = d\rho_X$ .

Особый тип калибровочных преобразований может быть определен на множестве сечений  $\varphi$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = (\rho\varphi)(\rho_X^{-1}(x)), \quad \rho \in Div f_X \Lambda.$$

Например, в случае пространственно-временных симметрий получаем

$$\rho_L: \tau(x) \rightarrow \tau'(x) = (d\rho_X \tau)(\rho_X^{-1}(x)).$$

Если диффеоморфизм  $\rho_X$  порождается потоком  $\rho_X(x) = \rho_{s=1}(x)$  вдоль интегральных кривых  $x(s)$  некоторого векторного поля  $\gamma(x)$  на  $X$ , генератором  $\rho_L$  является производная Ли. Лагранжиан  $L(\varphi)$



не инвариантен относительно  $\rho_{sL}$ , но инвариантен функционал действия

$$S = \int_U L \sqrt{-g} d^4x, \quad U \subset X,$$

и уравнения поля, если  $\rho_s(U) = U$ . Например,

$$\delta \int_U L \sqrt{-g} d^4x \rightarrow \int_U \partial_\mu (\gamma^\mu L \sqrt{-g}) d^4x = \int_{\partial U} \gamma^\mu L \sqrt{-g} ds_\mu = 0,$$

так как поле  $\gamma^\mu$  или равно нулю на  $\partial U$ , или касательно к  $\partial U$ , если  $\rho_s(U) = U$ .

В заключение опишем калибровочные поля, подобно другим классическим полям, как сечения некоторого расслоения. Рассмотрим расслоение

$$\Lambda_2 = (J^1\Lambda, \pi_2, P),$$

определяемое проекцией

$$\pi_2: J^1q \rightarrow q(x).$$

Это аффинное расслоение над векторным расслоением

$$\pi^*(T^*(X) \otimes VP),$$

где  $VP$  — расслоение вертикальных касательных векторов к  $P$ . Его типичный слой является аффинным пространством.

Пространство  $W$  называется *аффинным пространством* над векторным пространством  $V$ , если имеется отображение  $\alpha$  произведения  $W \times W$  в пространство  $V$  такое, что для любой точки  $a \in W$  отображение  $w \rightarrow \alpha(a, w)$  является биекцией  $W$  на  $V$  и для всех  $w_1, w_2, w_3 \in W$  выполняется соотношение

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_2, w_3) + \alpha(w_3, w_1) = 0.$$

Возьмем фактор

$$C = \Lambda_2/G = (J^1\Lambda/G \rightarrow X).$$

Это аффинное расслоение над векторным расслоением

$$T^*(X) \otimes \text{ad}P, \quad \text{ad}P = VP/G.$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между связностями  $A$  на расслоении  $\Lambda$  и сечениями  $A^c$  расслоения  $C$ , каждое из которых сопоставляет всякому вектору из  $T(X)$  его  $G$ -инвариантное горизонтальное поднятие на  $P$ . В фиксированном атласе сечения  $A^c$  имеют вид

$$A_i^c = \theta_X - A_i,$$

где  $\theta_X$  — каноническая 1-форма на  $X$  со значениями в  $T(X)$  такая, что  $\theta_X(\partial_\mu) = \partial_\mu$ , а  $A_i$  — калибровочные потенциалы.

## § 7. КАЛИБРОВОЧНЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ

Успешное применение аппарата внешних дифференциальных форм в теории калибровочных полей побудило рассмотреть в качестве потенциалов взаимодействия не только векторные, но и более высокого ранга антисимметричные тензорные поля. Оказывается, что такие поля естественно возникают в *моделях струн* как переносчики взаимодействия между протяженными объектами. Струнные модели, зародившиеся на базе дуальных резонансных моделей возбуждений элементарных частиц, в 80-е годы стали серьезно претендовать на объединение фундаментальных взаимодействий [12].

Рассмотрим сначала элементы физической теории антисимметричных тензорных полей, а затем дадим их геометрическое описание.

Пусть  $x^\mu$  — локальные координаты точечной частицы в пространстве Минковского  $M^4$ . При движении материальная точка описывает мировую линию  $\Sigma^1$  в  $M^4$ . Вводя подходящий параметр  $\tau$ , будем локально описывать эту линию системой гладких функций  $\{x^\mu(\tau)\}$ . Как известно, в релятивистской механике свободное действие классической частицы массы  $m_p$  есть по существу псевдоевклидова длина мировой линии

$$S_p = -m_p \int_{\Sigma^1} d\tau (-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} \quad (7.1)$$

где точка означает дифференцирование по  $\tau$ . Действие (7.1) инвариантно относительно произвольных преобразований перепараметризации  $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ . Если частица имеет заряд  $e$ , она может породить электромагнитное поле  $A_\mu$  и взаимодействовать посредством этого поля с другими заряженными частицами. При этом в действие (7.1) добавляется член взаимодействия

$$S_{\text{int}} = e \int_{\Sigma^1} d\tau A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} = e \int_{\Sigma^1} A_\mu dx^\mu, \quad (7.2)$$

где  $A_\mu dx^\mu$  — 1-форма электромагнитного потенциала  $A$ .

Самосогласованная динамика заряженной частицы и электромагнитного поля задается полным действием

$$S = S_p + S_{\text{int}} + \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (7.3)$$

Варьирование (7.3) по  $A_\mu$  дает уравнения Максвелла с источником

$$J^\mu(x) = e \int_{\Sigma^1} dx^\mu \delta^4(x - x_p), \quad (7.4)$$

а варьирование по  $x_p$  приводит к релятивистским уравнениям движения частицы под действием силы Лоренца.

Полное действие (7.3) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varphi$$

при условии сохранения тока (7.4), т. е.  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

Аналогичным образом строится теория взаимодействующих классических протяженных объектов: струн, оболочек и т. д., т. е. поверхностей пространственной размерности  $r = 1, 2, \dots, n-1$  в  $n$ -мерном пространстве Минковского  $M^n$  с сигнатурой  $(+ - \dots -)$ . Пространство Минковского берется  $n$ -мерным, поскольку в объединенных теориях элементарных частиц струнные модели — многомерные.

Начнем с рассмотрения замкнутых струн ( $r=1$ ). Струна, в отличие от точки, имеет размер и внутренний параметр  $\sigma \in [0, 1]$ , который определяет положение точек на струне. В координатах пространства  $M^n$  струна задается системой функций  $\{x_S^\mu(\sigma)\}$ , причем  $x_S^\mu(0) = x_S^\mu(1)$  (струна замкнута). При движении струна описывает в  $M^n$  мировую (2-мерную) поверхность  $\Sigma^2$ . С помощью эволюционного параметра  $\tau$  эта поверхность определяется функциями  $x_S^\mu(\sigma, \tau)$ . Динамика классической свободной струны задается действием Намбу, которое по существу совпадает с площадью мировой поверхности

$$S_S = -T \int_{\Sigma^2} d\tau d\sigma (-\det g_{ab})^{1/2}, \quad (7.5)$$

где константа  $T$  — аналог массы  $m_p$ ,

$$g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x_S^\mu \partial x_S^\nu}{\partial z^a \partial z^b}, \quad z^1 = \sigma, \quad z^2 = \tau, \quad a, b = 1, 2,$$

— индуцированная 2-метрика на  $\Sigma^2$ . Действие (7.5) (аналогично действию (7.1)) инвариантно относительно произвольной перепараметризации  $z^a \rightarrow z'^a(z^b)$ .

По аналогии с (7.2) взаимодействие струн естественно определить, вводя в качестве переносчика взаимодействия 2-форму

$$A = 1/2 A_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Член взаимодействия запишем как интеграл

$$S_{\text{int}} = q \int_{\Sigma^2} A = q \int_{\Sigma^2} d\tau d\sigma 1/2 A_{\mu\nu}(x_S(\sigma, \tau)) \frac{dx_S^\mu dx_S^\nu}{d\tau d\sigma}.$$

где  $q$  — константа связи. Внешний дифференциал  $F = dA$  формы  $A$  называется напряженностью антисимметричного поля  $A_{\mu\nu}$  с компонентами

$$\tilde{F}_{\mu,\lambda} = \partial_\mu A_{\nu,\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda,\mu} + \partial_\lambda A_{\mu,\nu}.$$

Динамика свободного поля  $A_{\mu\nu}$  определяется лагранжианом максвелловского типа, так что полное действие аналогично (7.3):

$$S = S_S + S_{\text{int}} + \int d^n x \left( -\frac{1}{12} \tilde{F}_{\mu,\lambda} \tilde{F}^{\mu,\lambda} \right).$$

Оно инвариантно относительно обобщенных калибровочных преобразований

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A_{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu,$$

т. е.  $A \rightarrow A + d\varphi$ , где  $\varphi = \varphi_\mu dx^\mu$  — 1-форма, если соответствующий струнный ток

$$J^{\mu\nu}(x) = q \int_{\Sigma^2} dx_S^\mu \wedge dx_S^\nu \delta^n(x - x_S)$$

сохраняется  $\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$ .

Обобщение на случай произвольного классического протяженного объекта — замкнутой поверхности размерности  $r$  — теперь очевидно. Полное действие для таких систем имеет вид

$$S = -T \int_{\Sigma^{r+1}} d\tau d\sigma^r (-\det g_{ab})^{1/2} + q \int_{\Sigma^{r+1}} A + \int d^n x \left( -\frac{1}{2(r+2)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{r+2}} F^{\mu_1 \dots \mu_{r+2}} \right), \quad (7.6)$$

где  $T$  — константа;  $\sigma^1, \dots, \sigma^r$  — внутренние координаты протяженного объекта;  $z^a = (\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^r)$ ,  $a, b = 0, 1, \dots, r$  — координаты на мировой гиперповерхности  $\Sigma^{r+1}$ , которую замечает объект при движении в  $M^n$ ;

$$A = \frac{1}{(r+1)!} A_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{r+1}}.$$

—  $(r+1)$ -форма (антисимметричное тензорное поле) — переносчик взаимодействия;  $F = dA$  — напряженность антисимметричного калибровочного поля.

Действие (7.6) инвариантно относительно перепараметризации гиперповерхности  $\Sigma^{r+1}$  и обобщенных калибровочных преобразований

$$A \rightarrow A + d\varphi, \quad (7.7)$$

где  $\varphi$  — произвольная  $r$ -форма. Действие (7.6) описывает механику протяженных «заряженных»  $r$ -мерных объектов, взаимодейст-

вующих посредством антисимметричного калибровочного поля

$$A_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}}.$$

Действие свободного поля  $A$  имеет вид

$$S[A] = -\frac{1}{2} \int *dA \wedge dA.$$

Его вариация по  $A$  (учитывая, что из условия

$$\int A \wedge B = 0,$$

справедливого при любых  $B$ , следует  $*A = 0$ ) приводит к уравнению

$$*d*dA = \delta dA = 0, \quad (7.8)$$

где  $\delta$  — кодифференциал (2.6). Наличие калибровочной свободы (7.7) не позволяет найти однозначное решение (7.8). Необходимо, как и в электродинамике, наложить калибровочное условие. Наиболее естественной для свободного поля является обобщенная калибровка Лоренца

$$\delta A = 0,$$

с учетом которой (7.8) перейдет в уравнение

$$\square_r A = 0,$$

где

$$\square_r = d\delta + \delta d$$

— оператор Лапласа — Бельтрами, определенный на  $r$ -формах.

Интересно, что можно установить (локальную) эквивалентность теорий калибровочных  $r$ -форм и  $(n-r-2)$ -форм. Чтобы показать это, перейдем к так называемому *формализму первого порядка*, вводя вспомогательное поле —  $(n-r-1)$ -форму  $\omega$ . Действие первого порядка

$$S[A, \omega] = \int \left( \omega \wedge dA - \frac{1}{2} \omega \wedge * \omega \right)$$

при варьировании по  $A$  и  $\omega$  приводит к системе уравнений

$$*d\omega = 0, \quad (7.9a)$$

$$\omega = *dA, \quad (7.9b)$$

которая эквивалентна уравнению (7.8). Однако согласно лемме Пуанкаре из уравнения (7.9a) получаем, что существует (локально)  $(n-r-2)$ -форма  $\varphi$ , такая, что  $\omega = d\varphi$ . Подставляя это выражение в уравнение (7.9b) и исключая  $A$  действием на обе части уравнения оператором  $*d*$ , находим

$$\delta d\varphi = 0, \quad (7.10)$$

Это уравнение является уравнение Эйлера — Лагранжа в теории антисимметричного тензорного поля  $\varphi$  ранга  $(n-r-2)$  со стандартным максвелловским действием

$$S[\varphi] = -\frac{1}{2} \int *d\varphi \wedge d\varphi.$$

Поле  $A$  в такой двойственной формулировке через поле  $\varphi$  находится из уравнения (7.9b), если известно решение уравнения (7.10).

**Пример 7.1.** Пусть  $M^4$  — 4-мерное пространство — время Минковского. На нем определены свободные антисимметричные тензорные поля рангов 0 (скалярное), 1 (электромагнитное), 2 (струнное), 3 и 4. Установленная выше двойственность показывает, что антисимметричное поле  $A_{\mu\nu}$  дает двойственное описание скалярных частиц, тогда как теории 3- и 4-форм эквивалентны несуществующим  $(-1)$ - и  $(-2)$ -формам, т. е. динамика этих полей тривиальна.

Введя указанным образом калибровочные антисимметричные поля в механике протяженных объектов, перейдем теперь к полевой теории взаимодействующих протяженных объектов, когда динамическими переменными являются не координаты объекта, вложенного в многомерное пространство Минковского (в обычной механике это координаты точки), а поля на пространстве этих объектов (в стандартной теории поля это функции на 4-мерном пространстве Минковского). Следуя общему методу описания полевых систем расслоениями, такие поля можно представить как сечения некоторого расслоения  $\lambda$  со структурной группой  $U(1)$  и базой — пространством  $\Omega^r M^n$  всех  $r$ -мерных замкнутых подмногообразий в  $M^n$ , а калибровочные антисимметричные поля — как коэффициенты связности на этом расслоении.

Ограничимся в дальнейшем теорией струн ( $r=1$ ). Множество  $\Omega M^n$  замкнутых путей в  $n$ -мерном пространстве Минковского  $M^n$  (которое является евклидовым как метрическое и топологическое пространство) может быть снабжено функцией расстояния, топологией и структурой многообразия в смысле определенной аппроксимативной процедуры (см. приложение III). Так, касательным пространством к  $\Omega M^n$  в точке  $\gamma \in \Omega M^n$  является пространство  $T_\gamma \Omega$  всех векторных полей  $v^\mu(x_\tau(\sigma))$  на  $M^n$  вдоль (т. е. в точках)  $\gamma$ . Для записи различных выражений удобно в  $T_\gamma \Omega$ , как в обычном касательном пространстве, ввести формальный базис

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\tau^\mu(\sigma)} \right\}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad \sigma \in [0, 1], \quad (7.11)$$

который при аппроксимации  $\Omega M^n$  посредством  $n(k+1)$ -мерного многообразия

$$\Omega(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma_0) = \mathbf{R}^{n(k+1)}$$

аппроксимируется голономным базисом

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i^\mu}, \mu=0, \dots, n-1, i=0, 1, \dots, k \right\}$$

касательного пространства к  $\Omega(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  в точке с координатами  $\{x_i^\mu = x_i^\mu(\sigma_i)\}$  (см. приложение III).

Рассмотрим, например, скалярное поле  $F(\gamma)$  на пространстве  $\Omega M^n$ . Определена его производная  $\partial_\nu F(\gamma)$  по направлению  $\nu \in T_\gamma \Omega$  в  $\Omega M^n$ . В базисе (7.11) она принимает вид

$$\partial_\nu F(\gamma) = \left( \int_0^1 d\sigma v_\nu^\mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial x_i^\mu(\sigma)} \right) F(\gamma), \quad (7.12)$$

где интеграл по  $\sigma$  имеет смысл суммы по индексу  $\sigma$ , принимающему континуум значений.

**Пример 7.2.** Скалярное поле  $F(\gamma)$  на  $\Omega M^n$  может, в частности, порождаться векторным полем  $F_\mu(x)$  на  $M^n$ :

$$E(\gamma) = \int_\gamma F_\mu(x) dx^\mu = \int_0^1 d\sigma F_\mu(x_\gamma(\sigma)) \frac{dx_\gamma^\mu}{d\sigma}. \quad (7.13)$$

Его производная  $\partial_\nu F(\gamma)$  по направлению  $\nu$  согласно (П. III.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\nu F(\gamma) &= \frac{\partial}{\partial V} \left[ \int_0^1 d\sigma F_\mu(x_\gamma(\sigma) + v_\nu(\sigma) u) \frac{d}{d\sigma} (x_\gamma^\mu(\sigma) + v_\nu^\mu(\sigma) u) \right]_{n=0} = \\ &= \int_0^1 d\sigma \left[ \partial_\nu F_\mu(x_\gamma(\sigma)) v_\nu^\mu(\sigma) \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma)}{d\sigma} + F_\mu(x_\gamma(\sigma)) \frac{dv_\nu^\mu(\sigma)}{d\sigma} \right] = \\ &= \int_0^1 d\sigma (\partial_\nu F_\mu - \partial_\mu F_\nu) \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma)}{d\sigma} v_\nu^\mu(\sigma). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Сравнивая (7.12) и (7.14), получаем полезное выражение для оператора производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x_i^\mu(\sigma)} &= \int_0^1 d\sigma' \left[ \frac{\partial F_\mu(x_\gamma(\sigma'))}{\partial x_i^\mu(\sigma')} \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma')}{d\sigma'} + F_\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu(\sigma)} \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma')}{d\sigma'} \right] = \\ &= \int_0^1 d\sigma' \left[ \partial_\nu F_\mu(x_\gamma(\sigma')) \delta(\sigma - \sigma') \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma')}{d\sigma'} + F_\mu(x_\gamma(\sigma')) \delta_\nu^\mu \frac{\partial(\sigma - \sigma')}{\partial \sigma'} \right] = \\ &= (\partial_\nu F_\mu - \partial_\mu F_\nu) \frac{dx_\gamma^\mu(\sigma)}{d\sigma}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Калибровочное поле определяется как коэффициенты локальной  $u(1)$ -значной 1-формы связности  $A$  на  $\Omega M^n$  ( $u(1)$ -алгебра Ли группы  $U(1)$ ). В точке  $\gamma \in \Omega M^n$  форма  $A(\gamma)$  представляет собой  $u(1)$ -значное ковекторное поле  $A_\mu^\nu(\sigma)$  на  $M^n$  вдоль  $\gamma$  и в базисе

$\{dx_\gamma^\mu(\sigma), \mu=0, 1, \dots, n-1, \sigma \in [0, 1]\}$ , дуальном базису (7.11), принимает вид

$$A = \int_0^1 i A_\mu^\nu(\sigma) dx_\gamma^\mu(\sigma) d\sigma,$$

где интегрирование по  $\sigma$  имеет тот же смысл, что и в выражении (7.12). В частности, точная форма  $A$  записывается как

$$A = i \int_0^1 \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x_i^\mu(\sigma)} dx_\gamma^\mu(\sigma) d\sigma. \quad (7.16)$$

Подобно тому как скалярное поле на  $\Omega M^n$  может порождаться векторным полем на  $M^n$  (см. пример 7.2), 1-форма на  $\Omega M^n$  может порождаться 2-формой  $A_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  на  $M^n$ :

$$A_\mu^\nu(\sigma) = \int_0^1 A_{\mu\nu}(x_\gamma(\sigma')) \frac{dx_\gamma^\nu(\sigma')}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') d\sigma',$$

$$A = i \int_0^1 A_{\mu\nu}(x_\gamma(\sigma)) \frac{dx_\gamma^\nu(\sigma)}{d\sigma} dx_\gamma^\mu(\sigma) d\sigma. \quad (7.17)$$

В случае точной формы это выражение переходит в выражения (7.15) и (7.16).

При калибровочном преобразовании

$$F(\gamma) \rightarrow \exp(i\alpha(\gamma)) F(\gamma)$$

форма связности преобразуется по закону

$$A(\gamma) \rightarrow A(\gamma) + i d\alpha(\gamma). \quad (7.18)$$

Если форма  $A(\gamma)$  представима в виде (7.17), а функция  $\alpha(\gamma)$  — в виде (7.13), калибровочное преобразование (7.18) сводится к калибровочному преобразованию (7.7) 2-формы  $A$ , т. е.

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A_{\mu\nu} + \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu.$$

Таким образом, калибровочное антисимметричное тензорное поле ранга 2 на  $M^n$  может играть роль калибровочного поля в теории струн на пространстве путей  $\Omega M^n$ .

В заключение выпишем фазовый множитель, который в случае струн приобретает волновая функция при параллельном переносе.

В электродинамике в результате интегрирования уравнения параллельного переноса

$$\partial_\mu \varphi - i A_\mu \varphi = 0$$

вдоль пути  $\gamma$  находим, что волновая функция умножается на фазовый множитель

$$\exp\left(i \int_\gamma A_\mu dx^\mu\right). \quad (7.19)$$

(см. пример 12.3). Путь  $\Gamma$  в пространстве  $\Omega M^n$  представляет собой трубчатую 2-мерную поверхность  $x_p(\sigma, \tau)$ , которую замечает струна при движении в пространстве  $M^n$ . При параллельном переносе вдоль этого пути получаем аналогичный (7.19) фазовый множитель  $\exp(i\alpha(\Gamma))$ , где

$$\alpha(\Gamma) = \int_\Gamma A_{\mu\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\sigma A_{\mu\nu}(x_p(\sigma, \tau)) \frac{dx_p^\mu(\sigma, \tau)}{d\tau} \frac{dx_p^\nu(\sigma, \tau)}{d\sigma}.$$

Фазовые множители типа (7.19) играют ключевую роль в эффектах типа Ааронова — Бома и квантования магнитного потока (см. § 12).

## § 8. СПИНОРЫ В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

Физическим источником калибровочных полей является фермионная материя. В большинстве моделей она описывается с помощью спиноров, реализующих двузначные представления ортогональных групп пространственно-временных вращений. В математическую литературу спиноры были введены в 1913 г. Э. Картаном и затем были независимо переоткрыты П. Дираком в 1928 г. в попытках описать поведение частиц с полужелым спином в магнитном поле. Дираковские спиноры успешно используются в квантовой теории поля, однако они не имеют наглядной интерпретации как геометрические объекты. В частности, это приводит к неоднозначности определения спиноров на произвольных топологически нетривиальных многообразиях. Существует несколько неэквивалентных способов введения спинорных структур на искривленном пространстве — времени, и в настоящее время до конца неясно, какой из них соответствует физике.

В данном параграфе мы рассмотрим спиноры в 4-мерном пространстве — времени, опираясь на теорию представлений алгебр Клиффорда, и, к сожалению, мы не имеем здесь возможности проследить интересные закономерности свойств спиноров в пространствах произвольной размерности и сигнатуры метрики.

Выше мы видели, что аппарат внешних форм дает удобный способ описания калибровочных полей, включая антисимметричные

тензорные поля. Оказывается, его можно успешно применять также в теории фермионов. Пусть  $M^4$  — пространство — время Минковского с метрикой  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ . На нем определена алгебра внешних форм

$$\Lambda^*(M^4) = \bigoplus_{p=0}^4 \Lambda^p(M^4),$$

элементами которой являются неоднородные дифференциальные формы — формальные суммы внешних форм степеней от  $p=0$  до  $p=4$ ,

$$\Phi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (8.1)$$

где  $\{dx^\mu\}$  — базис 1-форм в кокасательном расслоении  $T^*(M^4)$ , дуальный к координатному базису  $\{\partial_\mu\}$ . Алгебраической операцией является внешнее произведение. В  $\Lambda^*(M^4)$  определены два дифференциальных оператора — внешний дифференциал  $d$  и кодифференциал  $\delta$ . Напомним, что для  $p$ -формы

$$\psi = \frac{1}{p!} \psi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

$$d\psi = \frac{1}{p!} (\partial_\mu \psi_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}) dx^\mu \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+1}},$$

$$\delta\psi = -\frac{1}{(p-1)!} (\partial^\nu \psi_{\nu \mu_1 \dots \mu_{p-1}}) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}.$$

Кодифференциал  $\delta$  является сопряженным к  $d$  оператором относительно естественного скалярного произведения  $p$ -форм

$$(\omega, \varphi) = \int_{M^4} \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_p} d^4x$$

и может быть записан иначе:  $\delta = *d*$ , где  $*$ :  $\Lambda^p \rightarrow \Lambda^{4-p}$  — оператор Ходжа.

Очевидными свойствами этих операторов являются

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= 0, \quad \delta^2 = 0, \\ - (d\delta + \delta d) &= \square = \partial_\mu \partial^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

В физических моделях коэффициенты внешних форм в (8.1) выбираются комплексными антисимметричными тензорными полями. Комплексное сопряжение будем обозначать чертой над соответствующим полем

$$\bar{\Phi} = \sum_p \frac{1}{p!} \bar{\varphi}_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

В 1928 г. независимо от Дирака в работе Иваненко и Ландау [13] было установлено релятивистское волновое уравнение для полей вида (8.1), которое правильно описывает свойства частиц со спином 1/2 во внешнем магнитном поле. Это уравнение

$$i(\not{d} - \delta) - m \Phi = 0 \quad (8.3)$$

было в 1960 г. переоткрыто математиком Келером и известно в литературе под названием **уравнения Дирака — Келера**.

Ниже мы покажем, что (8.3) тесно связано с обычным спинорным уравнением Дирака. Что такая связь существует, вытекает из следующих элементарных соображений. Как известно, уравнение Дирака возникает из задачи «извлечения квадратного корня» из релятивистского оператора Клейна — Гордона. То же самое справедливо для (8.3). Действительно, подействовав на (8.3) сопряженным оператором Дирака — Келера

$$i(\not{d} - \delta) + m,$$

получим, что все компоненты  $\Phi$  удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона

$$(\square + m^2)\Phi = 0$$

в силу свойств (8.2). Более строгое обоснование упомянутой связи получает в рамках теории представлений алгебр Клиффорда.

Прежде чем перейти к их рассмотрению, заметим, что существует естественное соответствие между внешней алгеброй и алгеброй Клиффорда пространства  $M^4$ . А именно,  $\Lambda^*(M^4)$  можно явным образом превратить в комплексную алгебру Клиффорда  $C_{1,3}(M^4)$  пространства Минковского с метрикой сигнатуры (1,3), если ввести еще одну алгебраическую операцию — *клиффордово произведение* внешних форм. Зададим его сначала на базисе  $dx^\mu$  соотношением

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \vee dx^\nu + \eta_{\mu\nu}. \quad (8.4)$$

Тогда в силу косої симметрии  $\Phi$  любую комплексную неоднородную внешнюю форму (8.1) можно записать как элемент алгебры Клиффорда

$$\Phi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \vee \dots \vee dx^{\mu_p}. \quad (8.5)$$

Алгебра  $C_{1,3}(M^4)$  определяется как формальная алгебра относительно клиффордова произведения  $\vee$ , натянутая на базисные элементы

$$\{1, dx^\mu, \dots, dx^{\mu_1} \vee \dots \vee dx^{\mu_r}, \dots, dx^0 \vee dx^1 \vee dx^2 \vee dx^3\}, \quad (8.6)$$

построенные из образующих  $dx^\mu$ , которые в силу (8.4) удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$dx^\mu \vee dx^\nu + dx^\nu \vee dx^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (8.7)$$

Очевидно, размерность алгебры Клиффорда  $C_{1,3}(M^4)$ , как и размерность  $\Lambda^*(M^4)$ , равна  $2^4 = 16$ .

Используя определение (8.4), уравнение Дирака — Келера можно переписать в виде

$$(i dx^\mu \vee \partial_\mu - m) \vee \Phi = 0. \quad (8.8)$$

Из (8.7) и (8.8) тогда вытекает соответствие между образующими  $dx^\mu$  и матрицами Дирака  $\gamma_\mu$  и между произведением Клиффорда  $\vee$  и обычным матричным произведением. Однако, как известно, дираковский спинор имеет четыре комплексных компоненты, тогда как поле (8.6) имеет  $\dim C_{1,3} = 16$  компонент. Можно показать, что уравнение Дирака — Келера (8.3), (8.8) можно разложить в плоском пространстве  $M^4$  на четыре независимых уравнения Дирака. В искривленном пространстве — времени это в общем случае неверно.

Рассмотрим теперь более последовательно теорию спиноров в  $M^4$  в рамках теории представлений алгебр Клиффорда. При этом нам будет более удобно работать с вещественными алгебрами Клиффорда.

Пусть  $N^4$  — векторное 4-мерное пространство, снабженное метрикой  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Мы будем отличать его от пространства — метрики Минковского  $M^4$ . Пусть  $\{e_\mu\}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , — ортонормированный базис в  $N^4$ . Вещественную алгебру Клиффорда  $R_{1,3}(N^4)$  пространства  $N^4$  мы определим как алгебру, натянутую на базисные элементы

$$\{1, e_\mu, \dots, e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}, \dots, e_0 e_1 e_2 e_3\}, \quad (8.9)$$

$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$ ,  $p = 0, 1, 2, 3, 4$ , которые строятся с помощью алгебраической операции, задаваемой на базисе как

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (8.10)$$

Произвольный элемент  $Y \in R_{1,3}(N^4)$  имеет вид

$$Y = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} y^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}, \quad (8.11)$$

где  $y^{\mu_1 \dots \mu_p}$  — полностью антисимметричные вещественные тензоры.

Пусть теперь  $N^5$  — вещественное 5-мерное векторное пространство с метрикой  $\hat{\eta}_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, +1)$  и  $\hat{e}_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, 4$ , — ортонормированный репер в  $N^5$ . Вложим  $N^4$  в  $N^5$  так, чтобы базис  $e_\mu$  совпадал с первыми четырьмя векторами базиса  $\hat{e}_\alpha$ . С  $N^5$  связана вещественная алгебра Клиффорда  $R_{2,3}(N^5)$ , ко-

торая строится так же, как  $R_{1,3}(N^4)$ . Формально в (8.9), (8.10) надо  $\mu, \nu, \dots$  заменить на  $\alpha, \beta, \dots$ , а  $\hat{e}_\mu, \hat{\eta}$  — на  $\hat{e}_\alpha, \eta$  и считать, что  $p$  в (8.11) пробегает от 0 до 5. Нетрудно видеть, что  $R_{2,3}$  изоморфна прямой сумме

$$R_{2,3} \approx R_{1,3} \oplus R_{1,3}.$$

Действительно, обозначим

$$i = -\hat{e}_0 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4 = -\hat{e}_0 \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \hat{e}_4. \quad (8.12)$$

Очевидно, что  $i$  лежит в центре  $R_{2,3}$ , т. е. коммутирует с любым вектором базиса  $i \hat{e}_\alpha = \hat{e}_\alpha i$ , и следовательно, с любым элементом алгебры  $R_{2,3}$ . С учетом того, что

$$\hat{e}_0^2 = \hat{e}_4^2 = 1, \quad \hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = -1,$$

вычисление квадрата элемента (8.12) дает

$$i^2 = -1.$$

Тем самым элемент максимальной степени (8.12) играет в алгебре Клиффорда  $R_{2,3}$  роль мнимой единицы.

Введем еще одно обозначение

$$e_5 = e_0 e_1 e_2 e_3. \quad (8.13)$$

Квадрат этого элемента (максимальной степени в  $R_{1,3}$ ), как вытекает из (8.10), равен  $e_5^2 = -1$ . Поэтому из (8.12) находим

$$\hat{e}_4 = i e_5,$$

и произвольный элемент  $\hat{Y} \in R_{2,3}(N^5)$  можно переписать в следующем виде:

$$\hat{Y} = \sum_{p=0}^5 \frac{1}{p!} \hat{y}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \hat{e}_{\alpha_1} \dots \hat{e}_{\alpha_p} = Y + i\Psi, \quad (8.14)$$

где  $Y$  задается формулой (8.11), в которой  $y^{\mu_1 \dots \mu_p} = \hat{y}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ .

$$\Psi = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \psi^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p},$$

где коэффициенты

$$\psi^{\mu_1 \dots \mu_p} = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{(5-p)!} \hat{e}^{\mu_1 \dots \mu_p} \alpha_1 \dots \alpha_{5-p} \hat{y}^{\alpha_1 \dots \alpha_{5-p}}.$$

Символ Леви—Чивита в 5-мерном пространстве  $\epsilon$  определяется так, что  $\epsilon^{01234} = +1$ . Заметим, что индексы из начала греческого алфавита  $\alpha, \beta, \dots$  пробегают значения 0, 1, ..., 4, а греческие индексы из середины алфавита — 4-мерные:  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ .

Таким образом, мы видим, что любой элемент 5-мерной вещест-

венной алгебры Клиффорда  $R_{2,3}(N^5)$  можно представить в виде формальной суммы (8.14), в которой «вещественная» и «мнимая» части  $Y, \Psi$  суть элементы  $R_{1,3}(N^4)$ . Или иначе, мы доказали, что  $R_{2,3}(N^5) \approx C_{1,3}(N^4)$ .

Пусть  $A$  — алгебра Клиффорда. Подмножество  $S \subset A$  называется левым идеалом, если для любых  $a \in A, s \in S$  выполнено  $as \in S$ . Левый идеал называется минимальным, если в нем не содержится нетривиальных левых идеалов. Для того чтобы выделить левый идеал в алгебре, надо задать идемпотентный элемент  $P \in A$ , такой, что  $P^2 = P$ . Тогда  $S = AP$ . Два идемпотента называются ортогональными, если  $PP' = P'P = 0$ , и идемпотент называется примитивным, если его нельзя представить как сумму двух ортогональных идемпотентов. Каждому примитивному идемпотенту отвечает минимальный левый идеал. В любой алгебре Клиффорда можно построить полный набор примитивных идемпотентов  $\{P_i\}$ , таких, что

$$\left. \begin{aligned} P_i P_j &= 0 \text{ при } i \neq j, \\ P_i P_i &= P_i \text{ (нет суммирования)}, \\ \sum_i P_i &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Эти свойства позволяют представить алгебру  $A$  в виде набора минимальных левых идеалов

$$A = \sum_i S_i, \quad S_i = AP_i. \quad (8.16)$$

Левое умножение на элементы алгебры  $A$  определяет линейные представления алгебры Клиффорда на минимальных левых идеалах

$$\begin{aligned} A \times S_i &\rightarrow S_i, \\ a \in A, s \in S_i &\rightarrow as \in S_i. \end{aligned}$$

По построению эти представления неприводимы.

Осталось найти полный набор примитивных идемпотентов. Ясно, что их бесконечно много. Действительно, если имеется полный набор  $\{P_i\}$ , то с помощью произвольного обратимого элемента  $u \in A$  получим набор  $P'_i = u P_i u^{-1}$ , для которого выполнены свойства (8.15). Более того, всегда можно подобрать такой элемент  $u_{ij}$ , что  $P_i = u_{ij} P_j u_{ij}^{-1}$ . Тем самым все представления алгебры Клиффорда на минимальных левых идеалах эквивалентны.

Можно показать, что в вещественной алгебре  $R_{p,q}(N^{p+q})$  имеются  $k = q - r(q-p)$  элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , которые коммутируют друг с другом и имеют единичный квадрат  $\lambda_a^2 = 1, a = 1, \dots, k$ . Здесь  $r(n)$  — число Гурвица — Радона, которое определено для лю-

бого  $n \in \mathbb{Z}$  рекуррентным соотношением

$$r(n+8) = r(n) + 4,$$

причем

$$r(0) = 0, r(1) = 1, r(2) = r(3) = 2,$$

$$r(4) = r(5) = r(6) = r(7) = 3.$$

Ясно, что

$$P^a = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_a \lambda_a), \quad \varepsilon_a = \pm 1, \quad a = 1, \dots, k,$$

являются идемпотентными элементами, а

$$P_i = P_1^{\varepsilon_1} P_2^{\varepsilon_2} \dots P_k^{\varepsilon_k} \quad (8.17)$$

— примитивные идемпотенты. Их полное число определяется числом различных комбинаций знаковых коэффициентов  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  и равно  $2^k$ . Для рассматриваемого случая  $\mathbb{R}_{2,3}(N^5)$  находим

$$q - p = 1, \quad r(q - p) = 1, \quad k = 3 - 1 = 2,$$

и следовательно, существуют четыре примитивных идемпотента.

В качестве двух независимых коммутирующих элементов выберем

$$\lambda_1 = i e_3, \quad \lambda_2 = i e_1, \quad e_3.$$

В силу определения (8.12) — это то же самое, что

$$\lambda_1 = -e_0 e_1 e_2 \hat{e}_4, \quad \lambda_2 = e_0 e_3 \hat{e}_4,$$

однако более удобно использовать первую форму, поскольку явное выделение «мнимой единицы»  $i$ , коммутирующей со всеми элементами алгебры, значительно упрощает все вычисления. Ясно, что  $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \lambda_1$ ,  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ . Конечно, это не единственный выбор  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , другие варианты получаются при преобразовании подобия  $\lambda_a \rightarrow u \lambda_a u^{-1}$ . Для найденных  $\lambda_a$  получаем набор идемпотентов (8.17):

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{4} (1 + i e_3)(1 + i e_1 e_2), & P_2 &= \frac{1}{4} (1 - i e_3)(1 + i e_1 e_2), \\ P_3 &= \frac{1}{4} (1 + i e_3)(1 - i e_1 e_2), & P_4 &= \frac{1}{4} (1 - i e_3)(1 - i e_1 e_2). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Легко проверить, что все свойства (8.15) выполнены.

**Упражнение 8.1.** Доказать, что

$$e_0 P_1 = P_2 e_0, \quad e_1 P_1 = P_4 e_1, \quad e_3 e_1 P_1 = P_3 e_0 e_1, \quad (8.19a)$$

$$e_0 P_2 = P_1 e_0, \quad e_1 P_2 = P_3 e_1, \quad e_3 e_1 P_2 = P_4 e_0 e_1, \quad (8.19б)$$

$$e_0 P_3 = P_4 e_0, \quad e_2 P_3 = P_2 e_1, \quad e_0 e_1 P_3 = P_{10} e_1, \quad (8.19в)$$

$$e_0 P_4 = P_3 e_0, \quad e_1 P_4 = P_1 e_1, \quad e_0 e_1 P_4 = P_2 e_0 e_1. \quad (8.19г)$$

Из соотношения (8.19) получается явный вид элементов  $u_{ij}$ , с помощью которых осуществляются преобразования эквивалентности, связывающие различные минимальные левые идеалы.

Выпишем, как выглядят минимальные левые идеалы, отвечающие проекторам (8.18). Для этого подействуем на произвольный элемент  $\mathbb{R}_{2,3}(N^5)$  справа  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Представим  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}_{2,3}(N^5)$  в виде (8.14) как элемент комплексной алгебры  $S_{1,3}(N^4)$ . После несложных вычислений найдем

$$\left. \begin{aligned} Y_{(i)} &= Y P_i \in S_1 = \mathbb{R}_{2,3}(N^5) P_i, \\ Y_{(i)} &= [\psi_{(i)}^1 + \psi_{(i)}^2 e_0 e_1 + \psi_{(i)}^3 e_0 + \psi_{(i)}^4 e_1] P_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

где  $\psi_{(i)}^j$  — «комплексные» коэффициенты, построенные из антисимметричных компонент элемента (8.14).

**Упражнение 8.2.** Обозначим «комплексные» компоненты в (8.14)

$$\hat{Y} = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}$$

через

$$\varphi^{\mu_1 \dots \mu_p} = y^{\mu_1 \dots \mu_p} + i \psi^{\mu_1 \dots \mu_p}.$$

Показать, что в (8.20) коэффициенты  $\psi_{(i)}^j$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(1)}^1 &= \varphi - i \varphi^3 - i \varphi^{12} - \varphi^{123}, & \psi_{(1)}^2 &= \varphi^{01} - i \varphi^{013} + i \varphi^{02} + \varphi^{023}, \\ \psi_{(1)}^3 &= \varphi^0 - i \varphi^3 - i \varphi^{012} - \varphi^{013}, & \psi_{(1)}^4 &= \varphi^1 - i \varphi^{13} + i \varphi^2 + \varphi^{23}, \end{aligned} \right\} \quad (8.21a)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(2)}^1 &= \varphi + i \varphi^3 - i \varphi^{12} + \varphi^{123}, & \psi_{(2)}^2 &= \varphi^{01} + i \varphi^{013} + i \varphi^{02} - \varphi^{023}, \\ \psi_{(2)}^3 &= \varphi^0 + i \varphi^{03} - i \varphi^{012} + \varphi^{0123}, & \psi_{(2)}^4 &= \varphi^1 + i \varphi^{13} + i \varphi^2 - \varphi^{23}, \end{aligned} \right\} \quad (8.21б)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(3)}^1 &= \varphi - i \varphi^3 + i \varphi^{12} + \varphi^{123}, & \psi_{(3)}^2 &= \varphi^{01} - i \varphi^{013} - i \varphi^{02} - \varphi^{023}, \\ \psi_{(3)}^3 &= \varphi^0 - i \varphi^{03} + i \varphi^{012} + \varphi^{0123}, & \psi_{(3)}^4 &= \varphi^1 - i \varphi^{13} - i \varphi^2 - \varphi^{23}, \end{aligned} \right\} \quad (8.21в)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(4)}^1 &= \varphi + i \varphi^3 + i \varphi^{12} - \varphi^{123}, & \psi_{(4)}^2 &= \varphi^{01} + i \varphi^{013} - i \varphi^{02} + \varphi^{023}, \\ \psi_{(4)}^3 &= \varphi^0 + i \varphi^{03} + i \varphi^{012} - \varphi^{0123}, & \psi_{(4)}^4 &= \varphi^1 + i \varphi^{13} - i \varphi^2 + \varphi^{23}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21г)$$

В  $i$ -м минимальном левом идеале элементы

$$1 \cdot P_i, \quad e_0 e_1 P_i, \quad e_3 P_i, \quad e_1 P_i \quad (8.22)$$



можно рассматривать как базис 4-мерного комплексного линейного векторного пространства  $S_i$ . Соответственно величины  $\psi^{(i)}$  естественно интерпретируются как компоненты произвольных элементов  $Y_{(i)}$  в  $S_i$  относительно базиса (8.22).

Любой из (эквивалентных) минимальных левых идеалов  $S_i$  называется *спинорным пространством*. Его комплексная размерность равна  $2^{4/2}=4$ . Из (8.20) и (8.22) видно, что  $S$  изоморфно комплексной алгебре Клиффорда  $C_{1,1}$  вспомогательного 2-мерного пространства (натянутого на векторы  $e_0, e_1$ ). Данный факт является частным случаем общей теории представлений алгебры Клиффорда, в которой спинорное представление  $C_{2m}$  обычно реализуется на  $C_m$  [14, 15]. Элементы спинорного пространства называются *спинорами*. Компоненты последних удобно собрать в столбец

$$\psi_{(i)} = \begin{pmatrix} \psi_{(i)}^1 \\ \psi_{(i)}^2 \\ \psi_{(i)}^3 \\ \psi_{(i)}^4 \end{pmatrix}, \quad (8.23)$$

где индекс  $(i)$  указывает, в каком минимальном левом идеале лежит данный спинор.

Нетрудно выписать матричную реализацию представления алгебры  $C_{1,3} \approx R_{2,3}$  на спинорном пространстве. Для этого достаточно рассмотреть, как (слева) действуют образующие  $\hat{e}_\alpha$  на базис  $S$ . Для (8.22) получаем, что векторам  $\hat{e}_\mu, \mu=0, 1, 2, 3, \hat{e}_4$  отвечают  $4 \times 4$ -матрицы

$$\hat{e}_0: E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.24a)$$

$$\hat{e}_1: E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.24б)$$

$$\hat{e}_2: \pm E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.24в)$$

$$\hat{e}_3: \pm E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad (8.24г)$$

$$\hat{e}_3: E_4 = iE_5 = iE_0E_1E_2E_3. \quad (8.24д)$$

Знаки в (8.24в) и (8.24г) зависят от выбора минимального левого идеала: в (8.24в) для  $S_1, S_2$  надо брать плюс, а для  $S_3, S_4$  минус; в (8.24г) для  $S_1, S_3$  плюс, для  $S_2, S_4$  минус.

Матрицы (8.24) удовлетворяют

$$E_\alpha E_\beta + E_\beta E_\alpha = 2\hat{\eta}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta=0, 1, \dots, 4 \quad (8.25)$$

и реализуют один из возможных выборов матриц Дирака. Действие произвольного элемента алгебры Клиффорда (8.14) на спиноры (8.23) в выбранном базисе (8.22) задается как простое матричное умножение слева на  $4 \times 4$ -матрицу  $Y$ , которая определяется из (8.14) заменой  $\hat{e}_\alpha$  на  $E_\alpha$  из (8.24).

Покажем, что описанное представление алгебры Клиффорда дает также спинорное представление ортогональной группы. Для этого заметим, что множество «вещественных» элементов алгебры  $R_{2,3}(N^5)$ , которые имеют вид (8.14) с  $\Psi=0$ , образуют подалгебру в  $R_{2,3}(N^5)$ . Ясно, что эта подалгебра есть не что иное, как вещественная алгебра Клиффорда  $R_{1,3}(N^4)$ , из которой мы исходили (см. (8.9)–(8.11)). Построенное представление  $R_{2,3}$  на ее минимальных левых идеалах тем самым задает представление  $R_{1,3}(N^4)$  на  $S$ . Соответствующая матричная реализация получается простой заменой в (8.11) векторов  $e_\mu$  на матрицы  $E_\mu$  из (8.24а)–(8.24г).

Рассмотрим в  $R_{1,3}(N^4)$  подмножество обратимых элементов  $Y$ , таких, что существует  $Y^{-1}$  ( $YY^{-1}=1$ ). Они определяют внутренние автоморфизмы алгебры Клиффорда посредством

$$R_{1,3} \rightarrow YR_{1,3}Y^{-1}.$$

По построению пространство Минковского  $N^4$  вложено в  $R_{1,3}(N^4)$  как множество элементов вида  $X=x^\mu e_\mu$ . Группой Клиффорда  $G_C(N^4)$  пространства  $N^4$  называется множество обратимых элементов алгебры Клиффорда  $R_{1,3}(N^4)$ , таких, что задаваемые ими внутренние автоморфизмы оставляют  $N^4 \subset R_{1,3}(N^4)$  инвариантными, т. е.

$$G_C(N^4) = \{Y \in R_{1,3}(N^4) | YXY^{-1} \in N^4, \quad \forall X = x^\mu e_\mu \in N^4\}.$$

В частности, раскладывая результат преобразования  $Ye_\mu Y^{-1}$  по исходному базису, имеем

$$Ye_\mu Y^{-1} = \Lambda_\mu^\nu e_\nu, \quad (8.26)$$

где  $\Lambda_\mu^\nu$  — некоторые вещественные числа. Возводя (8.26) в квадрат, найдем

$$Y e_\mu e_\nu Y^{-1} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta e_\alpha e_\beta,$$

откуда для симметричной части в силу (8.10) получим

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, матрица  $\Lambda_\mu^\nu \in O(1,3)$ , а отображение (8.26) осуществляет гомоморфизм группы Клиффорда в ортогональную группу. Это отображение неоднозначно: любому элементу луча  $\{aY\}$ , где  $a \in \mathbb{R}$ , уравнение (8.26) сопоставляет ту же самую  $\Lambda_\mu^\nu$ . Поэтому обычно вводят дополнительное условие нормировки. Чтобы его сформулировать, нам потребуются инволютивные операции в алгебре Клиффорда.

В  $\mathbb{R}_{1,3}(N^4)$  (как и в произвольной алгебре Клиффорда) определены: *основная инволюция*  $\alpha$ , переводящая (8.11) в

$$\alpha(Y) = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} (-1)^p y^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}, \quad (8.27)$$

и *основная антиинволюция*  $\beta$

$$\beta(Y) = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} y^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_p} \dots e_{\mu_1} = \sum_{p=0}^4 \frac{1}{p!} (-1)^{p(p-1)/2} y^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}. \quad (8.28)$$

Следующие свойства очевидны:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \text{id}, \quad \alpha(Y^{-1}) = (\alpha(Y))^{-1}, \quad \beta(Y^{-1}) = (\beta(Y))^{-1},$$

$$\alpha(Y Y') = \alpha(Y) \alpha(Y'), \quad \beta(Y Y') = \beta(Y') \beta(Y), \quad Y Y' \in \mathbb{R}_{1,3}.$$

Применим антиинволюцию  $\beta$  к (8.26):

$$\beta(Y^{-1}) e_\mu \beta(Y) = \Lambda_\mu^\nu e_\nu.$$

Вычитая отсюда (8.26), после несложных преобразований найдем

$$\beta(Y) Y e_\mu = e_\mu \beta(Y) Y. \quad (8.29)$$

**Упражнение 8.3.** Показать, что для алгебры Клиффорда четномерного пространства (в частности, для  $\mathbb{R}_{1,3}(N^4)$ ) центр — множество элементов, коммутирующих со всеми другими элементами алгебры — состоит из скаляров  $\{a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Из (8.29) получаем, что  $\beta(Y) Y$  является скаляром. Поэтому в группе Клиффорда  $G_C(N^4)$  можно выделить подмножество элементов, нормированных согласно

$$\beta(Y) Y = 1 \quad (8.30)$$

Это множество является подгруппой в  $G_C(N^4)$ . Оно называется *спинорной группой*

$$Pin(N^4) = \{Y \in G_C(N^4) | \beta(Y) Y = 1\}. \quad (8.31)$$

Уравнение (8.26) осуществляет гомоморфизм

$$Pin(N^4) \rightarrow D(1,3).$$

Причем теперь соответствие является двузначным: *любому ортогональному вращению  $\Lambda_\mu^\nu$  отвечают ровно два элемента  $\pm Y$  спинорной группы.*

Прямой проверкой можно убедиться, что нечетные элементы из  $Pin(N^4)$  отвечают несобственным преобразованиям из  $O(1,3)$ .

**Пример 8.1.** Пусть  $Y_1 = e_0$ ,  $Y_2 = e_1$ ,  $Y_{1,2} \in Pin(N^4)$ . Имеем  $Y_1^{-1} = e_0$ ,  $Y_2^{-1} = -e_1$ . Отсюда из (8.26) находим

$$\Lambda_{1\mu}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{2\mu}^\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  отвечают  $Y_1$  и  $Y_2$  соответственно.

Рассмотрим поэтому в  $Pin(N^4)$  подмножество четных элементов, т. е. таких  $Y$ , что  $\alpha(Y) = Y$ . Они образуют подгруппу, называемую *специальной спинорной группой*

$$Spin(N^4) = \{Y \in Pin(N^4) | \alpha(Y) = Y\}. \quad (8.32)$$

(иногда  $Spin(N^4)$  тоже называют спинорной группой). В этом случае оказывается, что  $\det \Lambda_\mu^\nu = +1$  и (8.26) задает гомоморфизм

$$Spin(N^4) \rightarrow SO(1,3).$$

С помощью этого двузначного соответствия мы получаем представление группы Лоренца  $SO(1,3)$  на пространстве спиноров  $S$  посредством элементов  $Spin(N^4) \subset \mathbb{R}_{1,3}(N^4)$ . Это и есть искомые двузначные спинорные представления группы 4-вращений пространства Минковского  $N^4$ .

**Пример 8.2.** Для бесконечно малого преобразования Лоренца

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu},$$

из (8.26) находим

$$Y = 1 + \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} e_\mu e_\nu.$$

Соответствующая матричная реализация преобразования спиноров (8.20), (8.23) в базисе (8.22) задается  $4 \times 4$ -матрицей

$$Y = \hat{1} + \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} E_\mu E_\nu,$$

где  $E_\mu$  определяется из (8.24).

Спинорное представление  $SO(1, 3)$  на  $S (=S_i)$  приводимо. Действительно, элемент (8.13) коммутирует со всеми  $Y \in Spin(N^4)$ . Поэтому  $S$  распадается на два инвариантных подпространства, которые удобно определить с помощью проекторов

$$\frac{1}{2}(1 \pm ie_5).$$

Элементы пространства

$$S_+ = \frac{1}{2}(1 + ie_5)S$$

и пространства

$$S_- = \frac{1}{2}(1 - ie_5)S$$

называются *вейлевскими* соответственно *левыми* и *правыми спинорами*. Они реализуют неприводимые двузначные представления  $SO(1, 3)$ .

В стандартных курсах по квантовой теории поля матрицы (8.24a) — (8.24г) называются *матрицами Дирака* и обозначаются  $\gamma_\mu$ . Соответственно  $-E_4 = -iE_5$  обозначается как  $\gamma_5$ . Обычно отмечают неоднозначность выбора матриц Дирака, как и возможность перейти к другому набору  $\gamma$ -матриц посредством преобразования подобия. В описанном выше подходе мы выяснили геометрический смысл этой процедуры — переход к другим  $\gamma$ -матрицам означает переход к другому минимальному левому идеалу в алгебре Клиффорда  $C_{1,3} = R_{2,3}(N^5)$ .

Возвращаясь теперь к уравнению Дирака — Келера (8.3), (8.8), мы замечаем, что поле (8.5) реализует конкретный случай (8.14). Абстрактное пространство  $N^4$  можно теперь отождествить с  $M^4$ , а образующие  $e_\mu$  и соотношения (8.9), (8.10) — соответственно с  $dx^\mu$  и с (8.6), (8.7). Тогда все, что говорилось выше о спинорах и спинорных представлениях, применимо к теории Дирака — Келера. В частности, набор идемпотентов (8.18), где  $e_3 = dx^3$ ,  $e_1 e_2 = dx^1 \wedge dx^2$ , можно использовать для того, чтобы разложить  $\Phi$  (8.5) в сумму четырех спинорных полей  $\Phi_{(i)} = \Phi P_i$ , а действуя справа  $P_i$  на уравнение Дирака — Келера (8.8), получим четыре независимых спинорных уравнения

$$(i dx^\mu \wedge \partial_\mu - m) \wedge \Phi_{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (8.33)$$

Переходя к матричной реализации (8.33) в базисе (8.22), найдем

$$(i E^\mu \partial_\mu - m) \Psi_{(i)} = 0, \quad (8.34)$$

т. е. уравнение Дирака — Келера свелось к четырем независимым уравнениям Дирака относительно спиноров (8.23), лежащих в раз-

ных минимальных левых идеалах. Аналогичный результат имеет место и в присутствии электромагнитного поля.

В заключение сделаем несколько замечаний об писании фермионов в искривленном пространстве — времени. Следует отметить, что нет единственного рецепта введения спиноров на многообразиях. Дело в том, что в общем случае пространство — время не имеет группы симметрий типа группы Лоренца для пространства Минковского и спинор теряет смысл как геометрический объект. Наибольшее распространение получил подход, в котором спинорное поле связывается с реализацией локальной группы Лоренца в касательном пространстве как группы 4-вращений локальных ортореперов (неголономных, вообще говоря). Это накладывает довольно жесткие ограничения на геометрию и топологию пространства — времени, поскольку на нем требуется гладко ввести расслоение ортореперов со структурной группой  $SO(1, 3)$  и задать покрывающее его главное расслоение спин-реперов со структурной группой  $Spin(N^4)$ . Необходимым и достаточным условием существования этой (так называемой *стандартной*) спинорной структуры является обращение в 0 классов Штиффеля — Уитни (см. § 13)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  касательного расслоения над пространством — временем. Не для всех физически интересных многообразий такие условия выполнены: например, на гравитационном инстантоне  $CP^2$  может быть непрерывно деформирован в точку, а из нее в образ можно попытаться задать спиноры на нетривиальных многообразиях по-иному. Так, для многообразий с почти комплексной структурой определено *расслоение Шевалле*, типичный слой которого изоморфен спинорному пространству  $S$  с заданным на нем действием алгебры Клиффорда [16]. Соответствующая *нестандартная* спинорная структура неэквивалентна стандартной (там, где заданы обе) и существует, например, на всех комплексных проективных пространствах  $CP^{2m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Наконец, имеется еще один подход — на основе Дирака — Келера. Поскольку по построению (8.3) общековариантно, поля  $\Phi$  и уравнение Дирака — Келера существуют на произвольных многообразиях. Можно назвать  $\Phi$  *обобщенным спинорным полем*. Его, однако, в общем случае не удастся разложить на элементарные спиноры, поскольку произвольное многообразие не допускает ковариантно постоянные идемпотентные поля [17]. Тем не менее, когда это возможно, получающаяся спинорная структура также отлична от стандартной.

### Глава III. Топологические характеристики в теории поля

Формализация теории классических полей расслоениями имеет важное практическое значение. Стало возможным описывать гло-

бальные свойства полевых конфигураций, используя методы алгебраической топологии.

Эти методы позволяют оперировать с категориями объектов — топологических пространств, многообразий, расслоений и др., которые, если пытаться выделить каждый объект, являются необозримыми. Суть их состоит в установлении определенного отношения эквивалентности объектов в такой категории и в рассмотрении их классов эквивалентности путем сопоставления им некоторых алгебраических (групповых) и даже числовых характеристик. В физических приложениях такие характеристики выступают в качестве всевозможных «топологических» чисел и зарядов.

Настоящая глава посвящена применению этих характеристик в полевых моделях: солитонов, монополей, инстантонов и других полевых образований, обязанных своим существованием нелинейному взаимодействию полей и не описываемых по теории возмущений. Необходимый математический аппарат излагается в § 9, 11, 13, 17.

### § 9. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В алгебраической топологии основной рассматриваемой категорией является категория топологических пространств, а отношением эквивалентности в ней — гомотопическая эквивалентность.

Пусть  $Y$  и  $X$  — топологические пространства и  $f$  и  $f'$  — непрерывные отображения  $Y$  в  $X$ . Эти отображения называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение  $g: [0, 1] \times Y \rightarrow X$ , что

$$g \downarrow \{0\} \times Y = f, \quad g \downarrow \{1\} \times Y = f'.$$

Наглядно гомотопные отображения  $f$  и  $f'$  можно представить себе как такие, образы которых  $f(Y)$  и  $f'(Y)$  в  $X$  могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией через промежуточные образы  $g(\{r\} \times Y)$ ,  $r \in ]0, 1[$ .

**Пример 9.1.** Пусть  $Y$  — окружность  $S^1$ , а  $X$  — плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Все непрерывные отображения  $S^1$  в  $\mathbb{R}^2$  являются гомотопными.

**Пример 9.2.** Пусть теперь  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  — плоскость без точки. Тогда отображения  $f, f', f'': S^1 \rightarrow X$ , образы которых  $f(S^1), f'(S^1), f''(S^1)$  изображены на рис. 11, представляют собой пример негомотопных отображений.

Топологическое пространство  $X$  называется *стягиваемым*, если его тождественное отображение на себя  $\text{Id}_X$  гомотопно отображению  $X$  в некоторую свою точку  $X \rightarrow x_0 \in X$ , т. е. наглядно, если  $X$  может быть непрерывно стянуто в точку. Примером стягиваемых пространств могут служить евклидовы пространства  $\mathbb{R}^n$ , а нестягиваемых — сферы  $S^n$ .

Можно показать, что если пространство  $X$  стягиваемо, то всякие два непрерывных отображения  $f$  и  $f'$  любого топологического пространства  $Y$  в  $X$  гомотопны. Действительно, поскольку  $X$  стягиваемо, образ  $f(Y)$  первого отображения  $f$  как подмножество  $X$  может быть непрерывно деформирован в точку, а из нее в образ  $f'(Y)$  второго отображения в  $X$ .

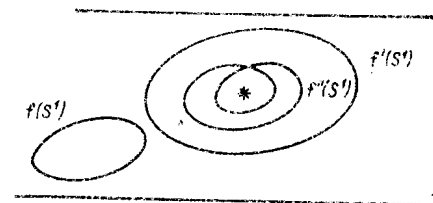


Рис. 11

Легко проверить, что понятие гомотопности отображений определяет отношение эквивалентности  $\mathbf{R}$  на множестве непрерывных отображений топологического пространства  $Y$  в пространство  $X$ . Классы эквивалентности, на которые оно разбивает это множество, называются *гомотопическими классами*, и множество этих классов обозначается  $\pi(Y, X)$ .

В частности, если  $X$  стягиваемо, то множество  $\pi(Y, X)$  для любого  $Y$  состоит из одного элемента.

**Пример 9.3.** Множество  $\pi(Y, X)$  для  $Y$  и  $X$  из примера 9.2 счетно. Гомотопический класс отображения

$$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

определяется тем, сколько раз линия  $f(S^1)$  «обернута» вокруг точки  $\{0\}$ .

Пусть  $f$  — непрерывное отображение  $Y \rightarrow X$ . Непрерывное отображение  $g: X \rightarrow Y$  называется *гомотопически обратным*, если композиция  $gf$  гомотопна тождественному отображению  $\text{Id}_Y$ , а  $fg$  — гомотопна  $\text{Id}_X$ . Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, именуется *гомотопической эквивалентностью*. Если существует гомотопическая эквивалентность  $Y \rightarrow X$ , то пространства  $Y$  и  $X$  называются *гомотопически эквивалентными*.

Очевидно, *гомеоморфизм топологических пространств есть гомотопическая эквивалентность*. Примером негомеоморфных, но гомотопически эквивалентных пространств служат стягиваемое пространство и его точка.

Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на гомотопические типы и множество таких типов уже оказывается обозримым. Для этого достаточно фиксировать некоторый набор стандартных пространств  $Y_1, Y_2, \dots$  и характеризо-

вать гомотопический тип всякого топологического пространства  $X$  гомотопическими классами непрерывных отображений  $Y_i$  в  $X$ . В качестве таких стандартных пространств были выбраны сферы  $S^n$ .

Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $x_0 \in X$ . Пару  $(X, x_0)$  называют *пространством с отмеченной точкой*. Часто, когда конкретный выбор точки несуществен, пространство с отмеченной точкой обозначают  $(X, \cdot)$ .

*Отображением пространства с отмеченной точкой  $(Y, y_0)$  в пространство с отмеченной точкой  $(X, x_0)$*  называется непрерывное отображение  $f: Y \rightarrow X$ , такое, что  $f(y_0) = x_0$ . Ясно, что множество таких отображений составляет подмножество всех непрерывных отображений и на нем определено отношение гомотопности отображений.

$$(ff')(y) = \begin{cases} f(y^2), & \text{Im } y \geq 0, \\ f'(y^2), & \text{Im } y \leq 0, \end{cases}$$

Рассмотрим всевозможные отображения окружности с отмеченной точкой  $(S^1, \cdot)$ . Образами этих отображений являются замкнутые пути в  $X$ , выходящие и входящие в точку  $x_0$ , и на этом множестве можно ввести операцию *произведения отображений* где  $y = \exp(i\alpha)$  — комплексная координата, параметризующая окружность  $S^1$ . Эта операция наследуется при переходе к гомотопическим классам отображений  $(S^1, \cdot)$  в  $(X, x_0)$  и индуцирует на множестве этих классов структуру группы. Она называется *фундаментальной группой пространства  $X$  в точке  $x_0$*  и обозначается  $\pi_1(X, x_0)$ . В частности, фундаментальная группа стягиваемого пространства тривиальна.

**Пример 9.4.** Группа  $\pi_1(X, \cdot)$  для пространства  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  из примера 9.2 изоморфна группе  $\mathbb{Z}$  целых чисел по сложению. Элементу  $n \in \mathbb{Z}$  отвечает кривая, обернутая  $n$  раз вокруг точки  $\{0\}$  в определенном направлении, а элементу  $(-n)$  — кривая, обернутая столько же раз, но в противоположном направлении.

Обобщая определение группы  $\pi_1(X, \cdot)$ , рассмотрим  $n$ -мерную сферу с отмеченной точкой  $(S^n, \cdot)$  и множество  $\pi_n(X, x_0)$  гомотопических классов отображений  $(S^n, \cdot)$  в пространство с отмеченной точкой  $(X, x_0)$ . На  $\pi_n(X, \cdot)$  тоже может быть определена структура группы, которая называется  *$n$ -мерной гомотопической группой пространства  $X$  в точке  $x_0$* . По аналогии группа  $\pi_1(X, \cdot)$  часто именуется одномерной гомотопической группой и формально определяется множеством  $\pi_0(X)$ , совпадающее с множеством компонент связности пространства  $X$ . Группы  $\pi_n(X, \cdot)$ ,  $n > 1$ , называются *высшими гомотопическими группами*. Они коммутативны.

**Пример 9.5.** Группы  $\pi_r(S^n)$ ,  $r < n$ , тривиальны, а  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .

В случае связного пространства  $X$  все гомотопические группы  $\pi_n(X, \cdot)$  в разных точках изоморфны между собой при любом  $n$ , и можно говорить о гомотопической группе  $\pi_n(X)$  (как абстрактной группе) пространства  $X$  без отмеченной точки.

**Пример 9.6.** Выполняется правило

$$\pi_n(X \times X') = \pi_n(X) \times \pi_n(X').$$

В частности, для тора  $T^2 = S^1 \times S^1$  находим

$$\pi_2(T^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Некоторые гомотопические группы, часто встречающиеся в физических приложениях, приведены в таблице.

$X$	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_n$
$S^1$	$\mathbb{Z}$	0	0
$S^2$	0	$\mathbb{Z}$	0
$S^3$	0	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^1$	$\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{R}P^n, n > 1$	$\mathbb{Z}_2$	$\pi_2(S^n)$	$\pi_2(S^n)$
$SO(4)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$SO(3)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
$U(n), n > 1$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$

Топологическое пространство  $X$  называется  *$k$ -связным* ( $0 \leq k < \infty$ ), если все гомотопические группы  $\pi_n(X)$  с  $n \leq k$  тривиальны. Это эквивалентно тому, что образ всякого непрерывного отображения  $n$ -мерной сферы  $S^n$  в  $X$  при  $n \leq k$  стягиваем в  $X$  точку. Например, из таблицы видно, что сфера  $S^2$  односвязна, т. е. любая замкнутая кривая на сфере стягиваема в точку.

Пусть  $Y$  — топологическое пространство с гомотопическими группами  $\{\pi_n(Y)\}$ , а  $X$  — топологическое пространство с гомотопическими группами  $\{\pi_n(X)\}$ . Всякое непрерывное отображение  $f: Y \rightarrow X$  индуцирует гомоморфизмы

$$f_n^*: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X)$$

гомотопических групп. Если отображения

$$f, f': Y \rightarrow X$$

гомотопны, то  $f_n^* = f_n'^*$  при любом  $n$ . Если  $f$  — гомотопическая эквивалентность, то  $f_n^*$  — изоморфизмы.

Таким образом, *топологические пространства, принадлежащие одному и тому же гомотопическому типу, имеют одинаковый набор гомотопических групп*.

Непрерывное отображение  $f$  топологического пространства  $Y$  в топологическое пространство  $X$  называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если гомоморфизмы

$$f_n^* : \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X)$$

являются изоморфизмами при любом  $n$ . Однако сам по себе изоморфизм всех гомотопических групп пространств  $X$  и  $Y$  не гарантирует даже слабую гомотопическую эквивалентность этих пространств, поскольку может не существовать непрерывного отображения  $Y$  в  $X$ , реализующего этот изоморфизм.

Гомотопические группы являются примером тополого-алгебраических характеристик, которые постоянны на слабо гомотопически эквивалентных пространствах.

Естественно возникает вопрос о существовании пространства с наперед заданными гомотопическими группами. Ответ положителен в подкатегории клеточных пространств.

*Клеточным пространством*  $X$  называется отделимое топологическое пространство, наделенное *клеточным разбиением*, т. е. разбиением

$$X = \bigcup_i e_i, \quad e_i \cap e_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

на множестве элементов которого  $\{e\}$  определена функция  $d(e)$  с натуральными значениями такая, что для каждого элемента  $e$  этого разбиения существует непрерывное отображение  $d(e)$ -мерного шара  $D^{d(e)}$  в  $X$  с двумя свойствами:

оно изоморфно отображает внутренность шара  $\text{Int } D^{d(e)}$  на  $e$ ;

оно отображает границу  $S^{d(e)-1}$  шара  $D^{d(e)}$  в объединение элементов разбиения, на которых  $d$  принимает значения, меньшие  $d(e)$ .

Элементы клеточного разбиения называются *клетками*.

**Пример 9.7.** Каноническое клеточное разбиение сферы  $S^n$  состоит из 0-мерной клетки — некоторой точки  $x \in S^n$  — и  $n$ -мерной клетки  $S^n \setminus \{x\}$ .

**Теорема.** Каковы бы ни были группа  $G_1$  и абелевы группы  $G_2, G_3, \dots$ , существует связное клеточное пространство  $X$  с  $\pi_n(X) = G_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Приведем утверждения, которые позволяют в теории гомотопий вместо всей категории топологических пространств ограничиваться часто подкатегорией клеточных пространств, а именно:

всякое компактное многообразие гомотопически эквивалентно конечному (по числу элементов разбиения) клеточному пространству;

для всякого топологического пространства  $X$  существует его *клеточная аппроксимация*, т. е. клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное  $X$ .

При определении гомотопических групп мы рассматривали гомотопические классы отображений пространства с выделенной точкой в пространство с выделенной точкой. Обобщая, можно определить гомотопические классы непрерывных отображений пары  $(Y, U)$  пространства  $Y$  и его подмножества  $U$  в пару  $(X, A)$  топологического пространства  $X$  и его подмножества  $A$ , при которых  $U$  отображается в  $A$ . Если в качестве  $Y$  взять шар  $D^i$ , а в качестве  $U$  — его граничную сферу  $S^{i-1}$  с выделенной точкой  $s_0 \in S^{i-1}$ , то гомотопические классы отображений пары  $(D^i, S^{i-1}, s_0)$  с выделенной точкой  $s_0$  в пару  $(X, A, x_0)$  с выделенной точкой  $x_0 \in A \subset X$  образуют при  $i > 1$  группу, которая называется *относительной гомотопической группой*  $\pi_i(X, A, x_0)$ . Она коммутативна при  $i > 2$ .

Если  $A = x_0$ , то относительная гомотопическая группа  $\pi_i(X, x_0)$  совпадает с абсолютной  $\pi_i(X, x_0)$ . Действительно, в этом случае отображение  $D^i$  в  $X$ , при котором сфера  $S^{i-1}$  переводится в точку  $x_0$ , можно представить как композицию канонического отображения  $D^i \rightarrow S^i$  (при котором  $S^{i-1}$  стягивается в точку) и  $S^i \rightarrow X$ . Гомотопические классы последнего и образуют группу  $\pi_i(X, \cdot)$ .

Существует связь между гомотопическими группами  $\pi_i(X, A, x_0)$ ,  $\pi_i(X, x_0)$  и  $\pi_{i-1}(A, x_0)$ . Она задается следующими тремя гомоморфизмами.

Непрерывное отображение  $f$  пары с выделенной точкой  $(X, A, x_0)$  в  $(X', A', x'_0)$  индуцирует гомоморфизм

$$f_* : \pi_i(X, (X, A, x_0)) \rightarrow \pi_i(X', (X', A', x'_0))$$

относительных гомотопических групп. Поэтому отображение

$$X \rightarrow X, \quad x_0 \rightarrow A, \quad x_0 \rightarrow x_0$$

индуцирует гомоморфизм

$$j : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(X, A, x_0). \quad (9.1)$$

Включение  $A \rightarrow X$  порождает гомоморфизм

$$i : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0). \quad (9.2)$$

Наконец, всякое отображение

$$f : D^i \rightarrow X, \quad S^{i-1} \rightarrow A, \quad s_0 \rightarrow x_0,$$

представляющее собой элемент из  $\pi_i(X, A, x_0)$ , включает отображение границы

$$\partial f = f|_{\partial D^i} : S^{i-1} \rightarrow A, \quad s_0 \rightarrow x_0.$$

Поскольку гомотопным отображениям  $f$  соответствуют гомотопные отображения границы, всякому элементу  $a$  группы  $\pi_i(X, A, x_0)$  соответствует некоторый элемент  $da$  группы  $\pi_{i-1}(A, x_0)$ . При этом произведение в группе  $\pi_i(X, A, x_0)$  содержит в себе произведение

гомотопических классов отображений границы, так что отображение

$$\partial: \pi_i(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{i-1}(A, x_0) \quad (9.3)$$

является гомоморфизмом групп.

С помощью гомоморфизмов (9.1), (9.2), (9.3) можно записать последовательность гомотопических групп для пары  $(X, A)$

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (9.4)$$

Причем эта последовательность *точна*, поскольку ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма, а именно:

$$\text{Ker } \partial = \text{Im } j, \text{ Ker } j = \text{Im } i, \text{ Ker } i = \text{Im } \partial.$$

**Пример 9.8.** Если  $X$  стягиваемо, то  $\pi_i(X, x_0) = 0$ ,  $i > 0$ , и  $\text{Im } j = 0$ , а значит,  $\text{Ker } \partial = 0$  и

$$\pi_i(X, A, x_0) = \pi_{i-1}(A, x_0).$$

**Пример 9.9.** Рассмотрим в качестве пары  $(X, A)$  тотальное пространство  $X = \text{tl } \lambda$  и слой  $A = V$  с отмеченной точкой  $p \in V \subset \text{tl } \lambda$  некоторого расслоения *Серра*, каковым является всякое локально тривиальное расслоение  $\lambda = (\text{tl } \lambda, \text{bs } \lambda, \pi)$ . Имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\text{tl } \lambda, V, p) = \pi_n(\text{bs } \lambda, \pi(p), n > 0,$$

с учетом которого последовательность (9.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_i(V, p) \xrightarrow{i} \pi_i(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{j} (\text{bs } \lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(V, p) \rightarrow \dots \\ \dots \xrightarrow{j} \pi_1(\text{bs } \lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(V, p) \xrightarrow{i} \pi_0(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{j} \pi_0(\text{bs } \lambda, \pi(p)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Последовательность (9.5) называется *гомотопической последовательностью расслоения*  $\lambda$  и будет использована в ряде моделей.

**Пример 9.10.** Пусть  $\lambda$  — покрытие с дискретной группой  $G$  (см. пример 4.2). Рассмотрим для такого расслоения точную последовательность гомотопических групп (9.5). Поскольку его слой  $V$  — дискретное пространство, а база  $X$  и тотальное пространство  $\text{tl } \lambda$  связны, имеем

$$\pi_n(V, p) = 0, n > 0; \pi_0(V, p) = V,$$

$$\pi_0(\text{tl } \lambda, p) = 0, \pi_0(X, \pi(p)) = 0, p \in V \subset \text{tl } \lambda.$$

В результате точная последовательность (9.5) распадается на короткие последовательности

$$0 \rightarrow \pi_{n+1}(\text{tl } \lambda, p) \rightarrow \pi_{n+1}(X, \pi(p)) \rightarrow 0, n > 0, \quad (9.6)$$

$$0 \rightarrow \pi_1(\text{tl } \lambda, p) \rightarrow \pi_1(X, \pi(p)) \rightarrow V \rightarrow 0. \quad (9.7)$$

Последовательность (9.6) устанавливает, что все высшие гомотопические группы  $\text{tl } \lambda$  и  $X$  изоморфны. Из последовательности (9.7) следует, что отображение

$$\pi_1(\text{tl } \lambda, p) \rightarrow \pi_1(X, \pi(p)) \quad (9.8)$$

— вложение, а изоморфизм

$$\pi_1(X, \pi(p)) \rightarrow \pi_0(V, p) = V \quad (9.9)$$

— проекция. Из последовательности (9.7) следует также, что нетривиальное накрытие не допускает глобального сечения. Действительно, если  $s$  — глобальное сечение, то композиция отображений  $\pi s = \text{Id}_X$  порождает изоморфизм групп

$$\pi_1(X, \pi(p)) \xrightarrow{s^*} \pi_1(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{\pi^*} \pi_1(X, \pi(p)).$$

Но если  $\pi_1(\text{tl } \lambda, p)$  и  $\pi_1(X, \pi(p))$  изоморфны, то в силу точности (9.7) слой  $V$  состоит из одного элемента, т. е. накрытие  $\lambda$  — тривиально.

## § 10. СОЛИТОНЫ

Солитон можно наглядно представить себе как локализованный самоподдерживающийся волновой пакет, образованный в результате баланса двух конкурирующих явлений — расплывания волнового пакета вследствие дисперсии (зависимости скорости распространения волн от их длины) и сжатия пакета вследствие нелинейности. Общепринятое определение солитонов до сих пор отсутствует. Разные авторы предлагают свои не совсем совпадающие варианты. Например, различают солитоны и уединенные волны, локализованность определяют в терминах самих волновых полей и в терминах плотности энергии, требуют или не требуют пространственно-временную зависимость плотности энергии вида  $E(x-ut)$  и т. д.

В теории поля, исходя из того, что элементарные частицы в природе также представляют собой локализованные пакеты энергии, усматривают определенное соответствие между классическими солитонными решениями и состояниями протяженных частиц в квантовой теории поля. Оно устанавливается процедурой «квантования солитонов» на основе квазиклассического разложения.

Разработано несколько эффективных и сложных методов ис-

следования решений нелинейных волновых уравнений. Однако мы далеко бы отошли от основной темы данной книги, если бы стали их излагать или попытались бы сколько-нибудь полно описать имеющиеся солитонные решения. Наша цель другая — продемонстрировать применение тополого-алгебраических методов для анализа нелинейных полевых конфигураций [18]. Для этого достаточно использовать один из признаков локализованных полевых конфигураций, а именно, что их пространственной асимптотикой служат вакуумные классические поля.

В § 5 вакуумные поля определялись как решения уравнений поля, минимизирующие гамильтониан модели. Причем перенормировкой на константу гамильтониан всегда может быть сделан таким, что минимальное значение энергии будет равно нулю. Локализованные поля ищутся среди решений полевых уравнений, для которых граничными условиями на пространственной бесконечности служат вакуумные поля.

Пусть  $V$  — пространство, в котором могут принимать значения волновые функции  $\varphi$ , описывающие локализованную полевую конфигурацию на  $(d+1)$ -мерном пространстве — времени  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ . Пусть  $W$  — подпространство  $V$  значений вакуумных полевых функций. Ограничимся случаем статических полей. Тогда поле  $\varphi$  представляет собой отображение  $\mathbf{R}^d$  в  $V$  такое, что при присоединении к  $\mathbf{R}^d$  бесконечноудаленной сферы  $S_{\infty}^{d-1}$  и непрерывном продолжении  $\varphi$  на  $S_{\infty}^{d-1}$  последняя будет отображаться в  $W$ . В ходе эволюции полевой конфигурации отображение  $\varphi$  может меняться, но при этом будет оставаться гомотопным исходному. Это побуждает характеризовать полевую конфигурацию гомотопическим классом отображения  $\varphi$ , который не зависит от ее непрерывной деформации.

С другой стороны, рассмотрим всевозможные непрерывные отображения  $\varphi$  пары  $(D^d, S^{d-1})$   $d$ -мерного шара  $D^d$ , гомотопически эквивалентного пространству  $\mathbf{R}^d$  с присоединенной сферой  $S_{\infty}^{d-1}$ , и его границы  $S^{d-1}$  в пару  $(V, W)$ . Назовем гомотопические классы этих отображений *топологическими солитонами*. При  $d > 1$  они представляются элементами относительной гомотопической группы  $\pi_d(V, W)$ , а если пространство  $V$  стягиваемо, то элементами гомотопической группы  $\pi_{d-1}(W)$ . Случай  $d=1$  требует специального рассмотрения из-за особого определения групп  $\pi_0$ .

Таким образом, спектр топологических солитонов определяется только размерностью пространства — времени и гомотопическим типом пространств  $V$  и  $W$ . Поэтому ясно, что *не всякому топологическому солитону может отвечать какое-либо солитонное решение самой модели*. Однако знание спектра топологических солитонов позволяет определить множество гомотопически неэквивалентных классов всевозможных солитонных решений в модели.

При этом солитонные решения, принадлежащие различным го-

мотопическим классам, могут различаться значениями топологических зарядов

$$Q = \int_x J^0 dx$$

от *ненетеровских сильно сохраняющихся токов*  $J^a$  (пример такого тока приведен в § 5). Поскольку  $\partial_\mu J^a = 0$ , значения этих зарядов определяются поведением полей  $\varphi$  на бесконечно удаленной пространственной сфере и являются для *солитонных решений гомотопическими инвариантами*.

Приведем примеры некоторых солитонных моделей, начав с размерности  $d=1$ . В этом случае пара  $(D^1, \partial D^1)$  — отрезок с выделенными концами.

Модель кинков. Это двумерная вещественная скалярная модель из примера 5.7. В этой модели  $V = \mathbf{R}$ ,  $W$  — точки  $\pm 1$  в  $\mathbf{R}$ , и топологические солитоны — это гомотопические классы отображений отрезка  $D^1$  в  $\mathbf{R}$  таких, что концы отрезка переходят в  $\pm 1$ . Поскольку пространство  $\mathbf{R}$  стягиваемо, ясно, что гомотопические классы рассматриваемых отображений определяются отображениями границы  $D^1$  в точки  $\pm 1$ . Нетрудно проверить, что таких классов всего четыре. Два из них ( $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty)$ ) соответствуют вакуумному состоянию, а два других ( $\varphi(\infty) = -\varphi(-\infty)$ ) — солитонным решениям (5.27) — кинкам, характеризуемым ненулевыми значениями топологического заряда (5.28).

Пусть теперь в этой модели  $\varphi$  — комплексное поле или пусть оно снабжено, как в примере 5.6, внутренним индексом  $a$ , так чтобы пространства  $V$  и  $W$  были связными. Например, если  $\varphi$  — комплексное поле, то  $V = W = S^1$ . Тогда множество  $\pi(D^1, S^1)$  содержит только один элемент. Однако это не означает, что в такой модели нет солитонных решений. Например, когда поле  $\varphi$  вещественно, это те же кинки. Но непрерывной деформацией они могут быть переведены (эволюционировать) в вакуумное состояние, что можно рассматривать как предпосылку неустойчивости солитонных решений в этой модели. Такие солитоны называются *нетопологическими*.

Из выражений (5.26) и (5.28) следует, что в двумерных моделях одного вещественного скалярного поля невакуумные статические решения обязательно являются топологическими с  $Q \neq 0$ .

Модель синус-Гордона. Это двумерная вещественная скалярная модель из примера 5.8 с  $V = \mathbf{R}$  и  $W = \mathbf{Z}$ . Множество топологических солитонов этой модели счетно и параметризуется парой чисел

$$m = \frac{1}{2\pi} \varphi(\infty), \quad n = \frac{1}{2\pi} \varphi(-\infty),$$

в которые отображаются концы отрезка  $D^1$ . Эти числа определяют значение  $Q = m - n = 0, \pm 1, \dots$ , топологического заряда (5.28).



В частности, для  $m = \pm 1, n = 0$  ( $Q = \pm 1$ ) солитонные решения имеют вид (5.29). Эти решения топологически неэквивалентны. Можно считать, что они относятся друг к другу как солитон и антисолитон.

Заметим, что одно и то же значение топологического заряда может соответствовать топологически неэквивалентным солитонам. Например, заряд  $Q = -1$  ( $m = 0, n = -1$ ) имеет также солитон

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{arctg} [\exp(-x - x_0)].$$

Рассмотрим теперь солитоны в пространствах с размерностью  $d > 1$ . Используя теорему вириала, нетрудно показать, что в этих размерностях в скалярных моделях с потенциалами  $U(\varphi)$  отсутствуют статические локализованные решения (хотя топологические солитоны существуют).

Хорошими кандидатами на наличие солитонных решений оказались калибровочные модели, простейшим примером которых является модель Нильсена — Олесена.

Модель Нильсена — Олесена. Это модель скалярной электродинамики в  $(2+1)$ -мерном пространстве — времени с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} g^2 (\varphi - a)^2, \quad (10.1)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ . Функционал энергии принимает минимальное значение на полях, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$E_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \varphi = 0, \quad \varphi^2 = a^2. \quad (10.2)$$

Их решения имеют вид

$$\varphi = a \exp(i\alpha(x)), \quad A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (10.3)$$

Они являются также решениями уравнений поля

$$D_\mu D^* \varphi = g^2 (\varphi^2 - a^2) \varphi, \quad (10.4)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{i}{2} e (\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi (D_\mu \varphi)^*)$$

и представляют собой вакуумные поля модели.

Калибровочными преобразованиями вакуумные решения (10.3) могут быть приведены к виду  $\varphi = a, A_\mu = 0$ . Однако, когда поля (10.3) используются в качестве граничных условий для поиска локализованных решений уравнений (10.4), они не должны подвергаться калибровочным преобразованиям. Причем, поскольку определяющим в паре  $(\varphi, A)$  вакуумных полей (10.3) является поле  $\varphi$ , топологические солитоны можно классифицировать по гомотопическим классам именно полей  $\varphi$ .

Пространством значений  $V$  этих полей является комплексная плоскость  $\mathbf{R}^2$ , а пространством значений  $W$  вакуумных полей — окружность  $S^1$  в  $V$ . Поэтому топологические солитоны модели представляются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(\mathbf{R}^2, S^1, \cdot) = \pi_1(S^1, \cdot) = \mathbf{Z}.$$

Класс  $n \in \mathbf{Z}$  включает отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , при котором первая окружность  $n$  раз «обертывается» вокруг второй окружности (см. рис. 12, на котором образ первой окружности изображен сплошной линией, а вторая окружность — штриховой). Для гладких отображений  $n$  совпадает со степенью отображения  $S^1 \rightarrow S^1$ , например,

$$\theta_2 = \exp(in\theta_1).$$

Для нахождения солитонного решения уравнений (10.4) выберем калибровку, в которой  $A_0 = 0$ , а в качестве граничных усло-

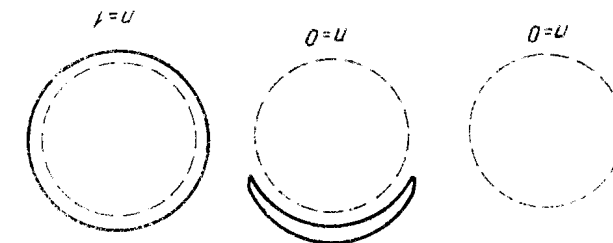


Рис. 12

вий — вакуумную асимптотику на пространственной бесконечности. Введем полярные координаты  $(r, \theta)$ . Выберем в качестве граничных условий при  $r \rightarrow \infty$  вакуумные решения вида

$$\varphi = a \exp(in\theta), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{n}{er}.$$

Солитонные решения ищут в форме

$$\varphi(r, \theta) = F(r) \exp(in\theta), \quad A_0 = A_r = 0, \quad A_\theta = A(r).$$

При произвольном  $a$  дифференциальные уравнения для  $F(r)$  и  $A(r)$  аналитического решения не имеют, но численные расчеты подтверждают существование несингулярного решения с асимптотическим поведением:

$$A_\theta = A(r) \rightarrow \frac{n}{er} + \frac{A}{\sqrt{r}} \exp(-ear),$$

$$E(r) \rightarrow a + F \exp(-\sqrt{2} gar), \quad (10.5)$$

где  $A, F$  — константы. Заметим, что решения имеют «конечный

размер», поскольку при возрастании  $r$  они экспоненциально быстро приближаются к вакуумной асимптотике.

Модель Нильсена — Олесена является 2-мерным (по пространственной размерности) релятивистским аналогом модели Гинзбурга — Ландау поля куперовских пар в сверхпроводниках, когда температура ниже критической, сверхпроводящая система симметрична вдоль оси  $z$ , и солитонные решения (10.5) отвечают возникающим в такой системе трубкам тока.

Можно рассмотреть модель (10.1) при  $d=3$ , т. е. в реальном пространстве — времени. Однако, поскольку  $\pi(S^2, S^1) = \pi_2(S^1) = 0$ , топологические солитоны в такой модели отсутствуют. В поисках солитонных решений в (3+1)-мерном пространстве — времени следует обратиться к неабелевым калибровочным моделям.

Модель т'Хуфта — Полякова. Это  $SU(2)$  калибровочная модель изотриплета скалярных полей  $\varphi^a$ ,  $a=1, 2, 3$ , с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^a)^2 - \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi^a - a^2)^2,$$

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c. \quad (10.6)$$

Вакуумные поля модели удовлетворяют тем же условиям (10.2), что и в модели Нильсена — Олесена. В частности,  $\varphi^a \varphi^a = a^2$ , откуда следует, что пространство значений вакуумных полей  $W$  образует сферу  $S^2$  в изопространстве  $V = \mathbb{R}^3$ . В результате топологические солитоны модели образуют группу  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ .

Модель обладает статическим солитонным решением при  $n=1$ , которое в калибровке  $A_0^a = 0$  ищется в виде

$$\varphi^a = \frac{x^a}{r} \varphi(r), \quad A_i^a = \varepsilon^{aij} x^j A(r) \quad (10.7)$$

с асимптотикой

$$\varphi(r) \rightarrow a, \quad A(r) \rightarrow \frac{1}{gr}. \quad (10.8)$$

В пределе  $\lambda \rightarrow 0$  решение можно получить в аналитической форме

$$\varphi(r) = \frac{a}{\text{th}(gar)} - \frac{1}{ar}, \quad A(r) = \frac{1}{gr} - \frac{a}{\text{sh}(gar)}. \quad (10.9)$$

Используя гомотопическую классификацию, можно сделать и некоторые общие выводы о возможном спектре солитонов в 4-мерной модели в зависимости от ее свойств симметрии. Пусть  $G$  — группа всех глобальных преобразований симметрий модели. Пусть  $\varphi(x)$  — некоторое вакуумное поле. Тогда для любого  $g \in G$  поле  $g\varphi(x)$  — тоже вакуумное. Это означает, что если  $\omega_0 \in W$ , то для любого  $g \in G$  элемент  $\omega = g\omega_0$  тоже принадлежит  $W$ , и  $W = G/H$ , где  $H$  — подгруппа  $G$ , оставляющая инвариантным элемент  $\omega_0$ .

Она называется стабилизатором  $\omega_0$ . Например, стабилизатором элемента  $\omega = g\omega_0$  является подгруппа  $gHg^{-1}$ . Если  $H \neq G$ , группа  $G$  не оставляет инвариантным ни один элемент из  $W$  и, следовательно, ни одно вакуумное состояние.

Если подпространство  $V$  стягиваемо, то спектр топологических солитонов модели определяется элементами гомотопической группы  $\pi_2(G/H, \cdot)$ . Если  $H$  — связная подгруппа топологической группы  $G$ , то  $G \rightarrow G/H$  — расслоение Серра со слоем  $H$ . Для такого расслоения имеет место точная последовательность гомотопических групп (9.5)

$$\dots \rightarrow \pi_2(G) \rightarrow \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \dots$$

Если  $G$  — группа Ли, то  $\pi_2(G) = 0$  и гомоморфизм

$$\pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H)$$

— вложение. Поэтому для существования топологических солитонов, в частности, необходимо, чтобы  $\pi_1(H) \neq 0$ , т. е. чтобы группа  $H$  не сводилась к единичному элементу, не была дискретна или односвязна.

Группа  $H$  не должна быть инвариантной подгруппой Ли в  $G$ , поскольку в этом случае  $G/H$  — группа Ли и  $\pi_2(G/H) = 0$ . Например, если  $G$  — абелева, то всякая ее подгруппа Ли является инвариантной и топологические солитоны в абелевой калибровочной модели при  $d=3$ , как мы отмечали на примере модели Нильсена — Олесена, отсутствуют.

Для определения спектра топологических солитонов полезно также отметить, что если группа Ли  $G$  односвязна (т. е.  $\pi_1(G) = 0$ ), то вложение

$$\pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H)$$

является также проекцией и  $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ .

## § 11. ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ

**Гомологии комплексов.** Основные тополого-алгебраические характеристики, применяемые в физических моделях, определяются теориями гомологий и когомологий.

Существуют различные теории гомологий, но для них всех характерна следующая алгебраическая конструкция. Пусть

$$B = \{B_p, \partial_p, p=0, \pm 1, \dots\}$$

— семейство абелевых групп  $B_p$  и гомоморфизмов

$$\partial_p: B_p \rightarrow B_{p-1}$$

таких, что  $\partial_p \partial_{p+1} = 0$ . Последнее условие эквивалентно утверждению, что образ  $\text{Im } \partial_{p+1}$  гомоморфизма  $\partial_{p+1}$ , т. е.  $\partial_{p+1} B_{p+1}$  содержит-

ся в ядре  $\text{Ker } \partial_p$  отображения  $\partial_p$ , т. е. в  $\partial_p^{-1}(0 \in B_{p-1})$ . Проиллюстрируем это рис. 13, где  $AD = \text{Ker } \partial_p$ ,  $CB = \text{Im } \partial_{p+1}$ .

Семейство  $B$  можно представить в виде последовательности

$$\dots \xleftarrow{\partial_{p-1}} B_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} B_p \xleftarrow{\partial_{p+1}} B_{p+1} \xleftarrow{\dots} \quad (11.1)$$

в которой композиция любых двух последовательных морфизмов равна нулю. Такая последовательность называется *цепным комплексом*. Элементы группы  $B_p$  комплекса называются *p-мерными цепями*, из них элементы из  $\text{Ker } \partial_p$  называются *p-мерными циклами*, а элементы из  $\text{Im } \partial_{p+1}$  — *p-мерными границами*. Поскольку  $\partial_p$  — гомоморфизм,  $\text{Im } \partial_{p+1}$  — подгруппа группы  $\text{Ker } \partial_p$  и определены на всю сферу. В то же время форма кривизны

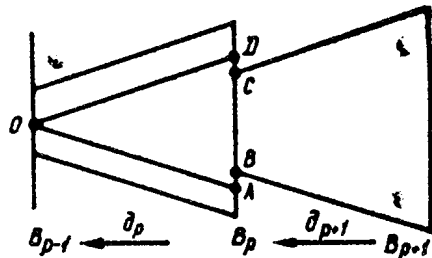


Рис. 13

$$H_p(B) = \text{Ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1},$$

которая называется *p-мерной группой гомологии комплекса B*. Два цикла из  $B_p$  принадлежат одному и тому же смежному классу из  $H_p(B)$  тогда и только тогда, когда их разность есть некоторая p-граница.

Из теорий гомологий в физических приложениях нам понадобятся в основном только так называемые *сингулярные гомологии*.

Пусть  $X$  —  $n$ -мерное дифференцируемое ориентируемое многообразие. Определим следующий цепной комплекс  $B(X)$ . Рассмотрим ориентируемые компактные  $p$ -мерные подмногообразия  $M$  многообразия  $X^n$ . Выберем  $p$ -цепями комплекса  $B(X)$  всевозможные формальные конечные суммы  $M = \sum k_i M_i$  с числовыми коэффициентами  $k_i$ . Они образуют бесконечную свободную группу  $B_p(X)$  относительно сложения. Причем считается, что  $(-M)$  — это многообразие  $M$  с обратной ориентацией. Введем оператор  $\partial$  взятия *ориентированной границы* компактного многообразия, считая по определению

$$\partial \left( \sum_i k_i M_i \right) = \sum_i k_i \partial M_i.$$

Он отображает  $B_p(X)$  в  $B_{p-1}(X)$ .

**Пример 11.1а.** Пусть  $M$  — полый ограниченный цилиндр в  $\mathbb{R}^3$ , изображенный на рис. 14. Его границей является несвязное объединение двух окружностей  $S_1 \cup S_2$ , образующих края цилиндра, а ориентированной границей  $\partial M$  — формальная сумма этих окружностей, наделенных определенной ориентацией.

**Пример 11.1б.** Рассмотрим теперь отображение  $\rho$  этого цилинд-

ра на тор  $T^2$ , получаемое отождествлением его краев (рис. 15, а). Подчеркнем, что  $\rho(M)$  как образ многообразия с границей — это не тор, а тор с границей  $S$ . Однако его ориентированная граница

$$\partial \rho(M) = S_1 + S_2 = S - S = 0.$$

**Пример 11.1в.** Пусть  $\rho'$  — отображение цилиндра  $M$  на бутылку Клейна  $K^2$  в  $\mathbb{R}^4$ , получаемое тоже отождествлением его краев (рис. 15, б). Хотя сама бутылка Клейна — неориентируемое многообра-

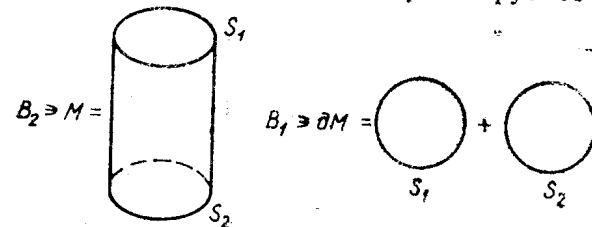


Рис. 14

ние, образ  $\rho'(M)$  является ориентируемым многообразием с границей  $S$  и ориентированной границей

$$\partial \rho'(M) = S_1 + S_2 = 2S.$$

Группы гомологий комплекса  $B(X) = \{M^p, \partial\}$  называются *группами ориентируемых бордизмов*  $\Omega_p(X, K)$ . Подчеркнем, что они зависят от числового кольца  $K$ , из которого берутся коэффициенты  $k_i$ . Так, в примере 11.1в окружность  $S$  на бутылке Клейна, будучи циклом  $\partial S = 0$ , является границей

$$S = \partial(1/2\rho'(M)),$$

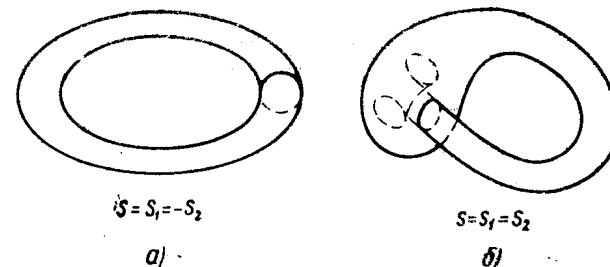


Рис. 15

если коэффициенты  $k_i$  принимают значения в поле рациональных чисел, и  $S$  не есть граница, если  $K = \mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел.

Группы  $\Omega_p(X, K)$  являются гомотопическими инвариантами, т. е. они одни и те же для гомотопически эквивалентных прост-

ранств  $X$  и  $X'$ . Однако группы бордизмов оказываются не совсем удобными характеристиками, поскольку (например,  $\Omega_4$ ) могут быть нетривиальными даже для стягиваемого пространства (точки). Дело в том, что эти группы определяются по всем возможным замкнутым подмногообразиям, например, вложенным в  $\mathbb{R}^n$ , и среди них могут найтись такие, которые сами не являются границами.

Чтобы более точно характеризовать структуру самого пространства  $X$ , можно, подобно тому как это делается при определении гомотопических групп, выбрать какой-либо «эталонный» класс подмногообразий. В теории сингулярных гомологий это образы всевозможных непрерывных отображений в топологическое прост-

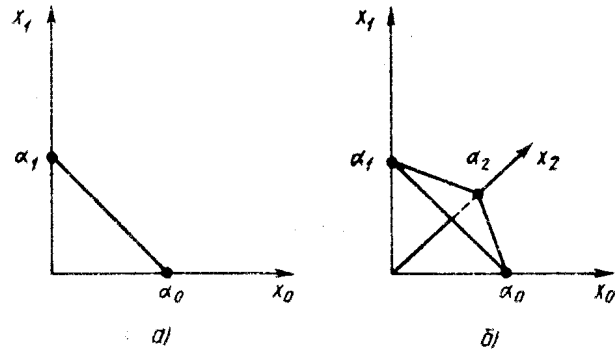


Рис. 16

ранство  $X$  стандартных  $p$ -мерных полиэдров (симплексов).

**Сингулярные гомологии.** Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^{p+1}$ , наделенное декартовой системой координат. Отметим на каждой координатной оси  $x_i$  точку  $\alpha_i$  с координатой 1. Проведем через все эти точки гиперплоскость

$$x^0 + \dots + x^p = 1$$

в  $\mathbb{R}^{p+1}$ . **Стандартным  $p$ -мерным симплексом  $\sigma^p$**  называется пересечение этой гиперплоскости с положительным ортантом  $\{x^i \geq 0\}$ . Такой симплекс представляет собой выпуклый  $p$ -мерный полиэдр с вершинами  $[\alpha_0 \dots \alpha_p]$ . В частности,

- $\sigma^0 = [\alpha_0]$  — это точка;
- $\sigma^1 = [\alpha_0 \alpha_1]$  — это отрезок (рис. 16, а);
- $\sigma^2 = [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2]$  — правильный треугольник (рис. 16, б);
- $\sigma^3 = [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$  — тетраэдр.

**Граница  $p$ -мерного симплекса  $\sigma^p = [\alpha_0 \dots \alpha_p]$**  образована  $(p-1)$ -мерными гранями — симплексами

$$\sigma_i^{p-1} = [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p],$$

где  $\alpha_i$  означает, что вершина  $\alpha_i$  удалена. Ориентированная граница симплекса

$$\sigma^p = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p]$$

есть формальная линейная комбинация его граней вида

$$\partial \sigma^p = \sum_i (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p] = \sum_i (-1)^i \sigma_i^{p-1}.$$

Например,

$$\partial [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2] = [\alpha_1 \alpha_2] - [\alpha_0 \alpha_2] + [\alpha_0 \alpha_1].$$

Прямым вычислением можно убедиться, что  $\partial \partial \sigma^p = 0$ .

Пусть  $X$  — любое топологическое пространство. **Сингулярными  $p$ -мерными симплексами** называются пары  $(\sigma^p, f)$ , где

$$f: \sigma^p \rightarrow X$$

— непрерывное отображение стандартного  $p$ -мерного симплекса  $\sigma^p$  в пространство  $X$ , т. е. наглядно образы всевозможных непрерывных отображений  $p$ -мерных полиэдров в  $X$ . **Сингулярной  $p$ -мерной цепью** называется формальная конечная сумма

$$c_p = \sum_i k_i (\sigma_i^p, f_i)$$

сингулярных симплексов с коэффициентами  $k_i$  из числового кольца  $K$ . В дальнейшем, допуская некоторую вольность, мы будем отождествлять сингулярный симплекс  $(\sigma, f)$  с образом  $f(\sigma)$  в  $X$ .

**Граница сингулярного симплекса** задается как формальная сумма

$$\partial f(\sigma^p) = \partial(\sigma^p, f) = \sum_i (-1)^i (\sigma_i^{p-1}, f|_{\sigma_i^{p-1}}) = \sum_i (-1)^i f(\sigma_i^{p-1}) \quad (11.2)$$

образов граней  $\sigma_i^{p-1}$  стандартного симплекса  $\sigma^p$  при отображении  $f$ . **Граница сингулярной цепи**, как и выше, имеет по определению вид

$$\partial c_p = \sum_i k_i \partial f_i(\sigma_i^p)$$

и удовлетворяет условию  $\partial \partial c_p = 0$ . В частности, если образ полиэдра  $f(\sigma^p)$  — многообразия, то оператор границы (11.2) совпадает с оператором взятия ориентированной границы многообразия.

Сингулярные  $p$ -мерные цепи образуют группу  $C_p$  относительно операции формальной суммы, и оператор  $\partial$  — гомоморфизм. Группы сингулярных цепей  $C_p$  и гомоморфизм  $\partial$  составляют цепной комплекс (11.1), группы гомологий которого называются **сингулярными гомологиями  $H_n(X, K)$**  пространства  $X$  с коэффициентами в  $K$ .

Группы сингулярных гомологий обычно определяются с коэффициентами в  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ . Часто под группами сингулярных гомологий понимают именно группы с целочисленными коэффициентами из  $\mathbf{Z}$ . Мы будем их обозначать просто  $H_p(X)$ , а весь набор  $\{H_p(X)\}$  как  $H_*(X)$ .

Элементами группы гомологий  $H_p(X)$  являются классы эквивалентности  $p$ -мерных сингулярных циклов (это цепи такие, что  $\partial c_p = 0$ ) с точностью до границы ( $c_p = \partial c_{p+1}$ ). Примером сингулярного  $p$ -цикла в топологическом пространстве

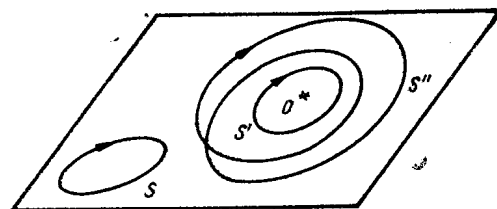


Рис. 17

$X$  служит  $p$ -мерная сфера  $S^p$ , которая является образом в  $X$   $p$ -мерного полиэдра, все грани которого обращаются при отображении в  $X$  в точку.

**Пример 11.2.** Пусть  $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  — плоскость без точки. На рис. 17 кривыми  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  изображены представители трех классов эквивалентности 1-мерных сингулярных циклов в  $X$ . Цикл  $S$  является границей и его класс эквивалентности соответствует нулю группы  $H_1(X)$ . Цикл  $S''$  эквивалентен циклу  $2S'$ , и можно проверить, что любой цикл в  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  эквивалентен некоторому циклу  $nS'$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , так что  $H_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbf{Z}$ .

**Пример 11.3.** На торе  $T^2$  всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbf{Z}$$

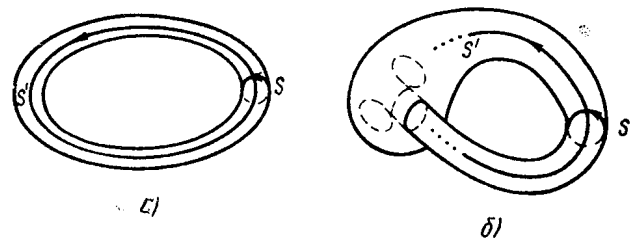


Рис. 18

(рис. 18, а) и  $H_1(T^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ .

**Пример 11.4.** На бутылке Клейна  $K^2$  всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbf{Z},$$

но (рис. 18, б) цикл  $2S$  является границей, т. е. эквивалентен  $0S$ . Поэтому  $H_1(K^2) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$ .

**Пример 11.5.** Пусть  $X = S^2$  — сфера. Очевидно, что  $H_1(S^2) = 0$ . Рассмотрим  $H_2(S^2)$ . Примеры ненулевого 2-мерного цикла на  $S^2$  является сама сфера  $S^2$ . Примером других неэквивалентных 2-мерных циклов на  $S^2$  могут быть получены отображения  $f$  сферы  $S^2$  на  $X = S^2$ , различающимися степенью отображения  $\deg f$ . Наглядно  $\deg f$  — это сколько раз образ  $f(S^2)$  обертывает  $S^2$ . Цикл  $f(S^2)$  эквивалентен циклу  $\deg f \cdot S^2$ , и  $H_2(S^2) = \mathbf{Z}$ .

Отметим важное преимущество сингулярных гомологий в сравнении, например, с бордизмами. Поскольку граница (11.2) сингулярного симплекса  $f(X)$  в топологическом пространстве  $X$  определяется, грубо говоря, как образ

$$\partial f(\sigma) = f(\partial\sigma)$$

границы стандартного симплекса в  $\mathbf{R}^n$ , построение такой границы в  $X$  и тем самым задание цепного комплекса не требует какой-либо добавочной структуры на  $X$ , например структуры многообразия, как в случае бордизмов. Поэтому сингулярные гомологии могут быть определены для любого топологического пространства. В частности, если  $X$  ориентируемое многообразие, имеется эпиморфизм групп бордизмов  $\Omega_p(X, Q)$  на группы гомологий  $H_p(X, Q)$  с рациональными коэффициентами. Это означает, что всякий сингулярный цикл в ориентируемом многообразии  $X$ , будучи умноженным на некоторое рациональное число, представим подмногообразием в  $X$ .

Приведем некоторые свойства групп сингулярных гомологий  $H_p(X, K)$ . Они абелевы.

Образующими элементами группы  $H_0(X, K)$  являются компоненты линейной связности пространства  $X$  и для 1-связного пространства  $H_0(X, K) = K$ .

Если  $X$  — стягиваемое пространство,  $H_p(X, K) = 0$ ,  $p > 0$ .

Если  $X^n$  — замкнутое связное  $n$ -мерное многообразие,

$H_p(X^n, K) = 0$  при  $p > n$ ;

$H_n(X^n, K) = K$ , если  $X^n$  ориентируемо;

$H_n(X^n) = 0$ , если  $X^n$  неориентируемо.

**Пример 11.6.** Гомологии сфер:

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbf{Z};$$

$$H_p(S^n) = 0, \quad p \neq 0, n.$$

**Пример 11.7.** Гомологии проективных пространств:

$$H_0(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}_2$$

$$H_n(\mathbf{R}P^n) = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ \mathbf{Z}_2, & n = 2l + 1; \end{cases}$$

$$H_p(\mathbf{R}P^n) = \begin{cases} 0, & p = 2\lambda \\ \mathbf{Z}_2, & p = 2l + 2\lambda + 1, \quad 0 < p < n. \end{cases}$$

Группы гомологий, с которыми приходится иметь дело в приложениях, обладают конечным числом образующих элементов и поэтому изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологий содержит *циклическую подгруппу* (т. е. такой элемент  $h$ , что  $h^k=1$  для некоторого натурального  $k$ ), то говорят, что она содержит *кручение*, например, группа

$$H_1(K^2) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$$

из примера 11.4 и группы

$$H_{2l+1}(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{Z}_2$$

из примера 11.7. Как уже отмечалось (см. примеры 11.1в, 11.4), *класс эквивалентности цикла может зависеть от выбора кольца коэффициентов  $K$* . Например, если группа

$$H_1(K^2) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$$

имеет два образующих элемента, то группа

$$H_2(K^2, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$$

имеет один образующий элемент. В случае  $K = \mathbf{Q}, \mathbf{R}$

$$H_p(X, \mathbf{Q}) = H_p(X) \otimes \mathbf{Q},$$

$$H_p(X, \mathbf{R}) = H_p(X) \otimes \mathbf{R}.$$

Напомним, что *тензорным произведением двух абелевых групп  $A \otimes B$*  называются всевозможные конечные суммы вида

$$\sum_i a_i \otimes b_i, \quad a_i \in A, \quad b_i \in B,$$

при условии, что

$$(a_1 + a_2) \otimes (b_1 + b_2) = a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_1 + a_1 \otimes b_2 + a_2 \otimes b_2.$$

Можно показать, что тензорное произведение любой конечной группы на группу  $\mathbf{Q}$  или  $\mathbf{R}$  равно нулю. Отсюда, в частности, следует, что группы гомологий  $H_p(X, \mathbf{Q})$  и  $H_p(X, \mathbf{R})$  не содержат кручения.

Сравнивая гомотопические группы и группы сингулярных гомологий для плоскости без точки (см. примеры 9.4 и 11.2), для сфер (см. примеры 9.5 и 11.6), можно предположить наличие некоторой связи между ними. Существует *гомоморфизм Гуревича*

$$h_n: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X).$$

При  $n=1$  его ядром является *коммутант группы  $\pi_1(X)$*  (т. е. подгруппа, порождаемая элементами вида  $a^{-1}b^{-1}ab$  из  $\pi_1(X)$ ), а если  $\pi_1(X)$  коммутативна, она изоморфна  $H_1(X)$ . Если  $\pi_i(X) = 0$  для

всех  $i < n$  ( $n > 1$ ), гомоморфизм  $h_n$  является изоморфизмом, а  $h_{n+1}$  — эпиморфизмом.

Непрерывное отображение топологических пространств  $f: X \rightarrow Y$  порождает гомоморфизм групп сингулярных гомологий

$$f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

и они, как и гомотопические группы, являются гомотопическими инвариантами, т. е. изоморфны для гомотопически эквивалентных пространств.

Если группы гомологий  $H_p(X, \mathbf{R})$  конечнопорожденные и нетривиальны для не более чем конечного числа значений  $p$ , можно ввести числовые гомотопические инвариантные характеристики пространства  $X$  — *числа Бетти*

$$b_p = \dim H_p(X, \mathbf{R}),$$

и *эйлерову характеристику*

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

Для пространств, гомотопически эквивалентных конечным клеточным разбиениям определенного класса (конечным *CW-пространствам*), эйлерова характеристика приобретает наглядный смысл

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \gamma_p,$$

где  $\gamma_p$  — число  $p$ -мерных клеток разбиения. Например, эйлерова характеристика сфер

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

**Когомологии.** Двойственной к гомологиям конструкцией являются когомологии. Пусть  $B$  — цепной комплекс (11.1) и  $K$  — числовое кольцо. Обозначим  $B^p$  абелеву группу всех гомоморфизмов  $f^p: B_p \rightarrow K$  и введем гомоморфизм

$$d^p: B^p \rightarrow B^{p+1},$$

определяемый следующим образом:

$$d^p f^p = (-1)^{p+1} f^p d_{p+1}: B_{p+1} \rightarrow K.$$

Легко убедиться, что

$$d^{p+1} d^p f^p = -f^p d_{p+1} d_{p+2} = 0$$

для всех  $f^p \in B^p$ . Таким образом, последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^{p-1}} B^p \xrightarrow{d^p} B^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \dots \quad (11.3)$$

определяет комплекс абелевых групп, который называется *коцепным комплексом*. Элементы  $c^p$  группы  $B^p$  называются *p-мерными*

коцепями, элементы из  $\text{Ker } d^p \subset B^p$  (т. е. такие, что  $d^p c^p = 0$ ) называются  $p$ -мерными коциклами, а элементы из  $\text{Im } d^{p-1} \subset B^p$  (т. е. такие, что  $c^p = d^{p-1} c^{p-1}$ ) —  $p$ -мерными кограницами. Фактор-группы

$$\text{Ker } d^p / \text{Im } d^{p-1},$$

элементами которых являются классы эквивалентности  $p$ -мерных коциклов с точностью до кограниц, называются группами когомологий  $H^p$  комплекса (11.3).

Когомологиями, двойственными сингулярным гомологиям, являются когомологии де Рама внешних дифференциальных форм на многообразиях. Пусть

$$\Omega(X) = \bigoplus_p \Omega^p(X)$$

— градуированная алгебра внешних дифференциальных форм на  $n$ -мерном многообразии  $X$ . Оператор внешнего дифференцирования определяет гомоморфизм

$$d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1},$$

такой, что  $dd=0$ . Это наделяет алгебру  $\Omega$  структурой коцепного комплекса

$$0 \xrightarrow{i^n} \mathbf{R}^{i^n} \xrightarrow{i^n} \Omega^0 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \rightarrow \dots \quad (11.4)$$

Он называется комплексом де Рама. Его  $p$ -мерными коцепями являются  $p$ -формы  $\sigma$ , коциклами — замкнутые формы, а кограницами — точные формы. Группы когомологий этого комплекса именуется группами когомологий де Рама  $H^p(X^n)$  дифференциальных форм на многообразии  $X^n$ . Они образованы классами эквивалентности замкнутых форм, разность которых является точной формой, т. е.  $\sigma$  и  $\sigma'$  считаются эквивалентными, если  $\sigma' = \sigma + d\sigma''$ . В частности, группа  $H^0(X^n)$  есть линейное пространство, размерность которого равна числу компонент связности многообразия  $X^n$ . Очевидно также, что  $H^p(X^n) = 0$ ,  $p > n$ .

**Пример 11.8.** Если многообразие  $X^n$  стягиваемое,  $H^p(X^n) = 0$ ,  $p > 0$ . Это является выражением известной леммы Пунакаре, гласящей, что в евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной. В частности, если  $X = \mathbf{R}^3$  и  $\sigma$  — 1-форма (ковекторное поле), условие замкнутости означает, что  $\text{rot } \sigma = 0$ , откуда получается известное следствие, что  $\sigma = \text{grad } \varphi$ , где  $\varphi$  — некоторая вещественная функция на  $X$ . Напротив, на нестягиваемом многообразии могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0.

**Пример 11.9.** Примером такого поля на плоскости без точки  $X^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  является

$$\sigma = \left( \sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{\Phi}{r} \right) = \left( \sigma_x = \frac{\Phi_y}{x^2 + y^2}, \sigma_y = \frac{-\Phi_x}{x^2 + y^2} \right), \quad (11.5)$$

записанное соответственно в полярных и декартовых координатах с началом в точке  $\{0\}$ .

Двойственность групп когомологий де Рама  $H^*(X)$  многообразия  $X$  и групп сингулярных гомологий  $H_*(X, \mathbf{R})$  устанавливается билинейной формой — интегрированием замкнутых  $p$ -форм  $\sigma^p$  по  $p$ -мерным циклам  $c_p$ , реализуемым подмногообразиями  $X$ :

$$\langle \sigma^p | c_p \rangle = \int_{c_p} \sigma^p. \quad (11.6)$$

При этом в силу теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \langle \sigma^p + d\sigma^{p-1} | c_p \rangle &= \int_{c_p} (\sigma^p + d\sigma^{p-1}) = \int_{c_p} \sigma^p + \int_{\partial c_p} \sigma^{p-1} = \\ &= \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle, \\ \langle \sigma^p | c_p + \partial c_{p+1} \rangle + \int_{c_p + \partial c_{p+1}} \sigma^p &= \int_{c_p} \sigma^p + \int_{c_{p+1}} d\sigma^p = \\ &= \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle, \end{aligned}$$

т. е. билинейная форма (11.6) зависит только от когомологического класса  $\sigma^p$  и гомологического класса  $c_p$ , а тем самым определяет билинейную форму

$$\langle \{ \} \rangle : H^p(X) \otimes H_p(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R},$$

где  $\otimes$  означает тензорное произведение векторных пространств. Таким образом, имеет место теорема двойственности де Рама.

**Теорема.** Группа когомологий де Рама  $H^p(X)$  отождествляется при помощи билинейной формы (11.6) с пространством линейных форм на  $H_p(X, \mathbf{R})$ , и следовательно,  $H^p(X)$  и  $H_p(X, \mathbf{R})$  изоморфны как вещественные векторные пространства.

Отсюда, в частности, следует, что как и сингулярные гомологии, когомологии де Рама являются гомотопическими инвариантами. Например, через них выражается эйлерова характеристика многообразия

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X).$$

Заметим, что группы сингулярных гомологий  $H_p(X, \mathbf{R})$  можно было бы, не прибегая к громоздким геометрическим конструкциям, определить просто как пространства, дуальные к  $H^p(X)$ . Однако

таким способом нельзя однозначно восстановить целочисленные группы гомологий  $H_p(X)$ , а только с точностью до кручения.

В случае, когда  $X$  — замкнутое ориентируемое многообразие, для групп когомологий  $H^*(X)$  (они конечнопорожденные) и гомологий  $H_*(X, \mathbf{R})$  имеет место также двойственная Пуанкаре. Ее можно реализовать следующей билинейной формой:

$$Q(\sigma^p, \sigma^{n-p}) = \int_X \sigma^p \wedge \sigma^{n-p},$$

которая, как легко проверить, зависит только от когомологических классов форм  $\sigma^p$  и  $\sigma^{n-p}$  и является тем самым билинейной формой на группах когомологий

$$Q(\cdot, \cdot): H^p(X) \otimes H^{n-p}(X) \rightarrow \mathbf{R}. \quad (11.7)$$

Это определяет изоморфизм  $H^p(X)$  и  $H^{n-p}(X)$  и в силу двойственности де Рама изоморфизм  $H^p(X, \mathbf{R})$  и  $H_{n-p}(X, \mathbf{R})$ .

В частности, отсюда следует соотношение  $b_p = b_{n-p}$  для чисел Бetti замкнутого ориентируемого многообразия  $X$ , и, если  $\dim X$  нечетна, эйлерова характеристика  $X$  равна 0.

Двойственность Пуанкаре

$$H_p(X, \mathbf{R}) = H_{n-p}(X, \mathbf{R})$$

имеет место и для компактных многообразий с краем. Следствием является то, что если  $X^n$  — такое многообразие, то

$$\chi(\partial X^n) = (1 - (-1)^n) \chi(X^n).$$

В частности, эйлерова характеристика границы всегда четна.

Билинейная форма (11.7) приводит к еще одной числовой гомотопически инвариантной характеристике — *сигнатуре многообразия*. Пусть  $n = 4l$  и  $p = 2l$ , тогда форма  $Q(\cdot, \cdot)$  является симметричной на вещественном векторном пространстве  $H^{2l}(X^n)$  и может быть приведена к диагональному виду. Сигнатура замкнутого ориентированного многообразия определяется как сигнатура этой формы (разность между числом положительных и отрицательных диагональных элементов). Заметим, что она зависит от ориентации.

Важным примером теории когомологий являются также когомологии со значениями в пучках. Их описание приведено в приложении IV. Для гладкого (паракомпактного) многообразия  $X$  имеет место изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbf{R}) \quad (11.8)$$

групп когомологий де Рама и групп когомологий  $H^p(X, \mathbf{R})$  пространства  $X$  с коэффициентами в постоянном пучке  $\mathbf{R}$ . Этот изоморфизм является ключом к применению методов алгебраической топологии в теории поля, поскольку позволяет выразить топологию

алгебраические характеристики расслоений, представляемые элементами групп когомологий

$$H^p(X, \mathbf{Z}) \subset H^p(X, \mathbf{R})$$

с коэффициентами в постоянном пучке  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$  (см. § 13), через когомологические классы де Рама дифференциальных форм, построенных из форм кривизны связностей на расслоениях.

## § 12. ЭФФЕКТ ААРОНОВА — БОМА

**Вакуумные калибровочные поля.** Следуя критериям вакуумного поля классической полевой модели (см. § 5, 10), вакуумными называются калибровочные поля, имеющие всюду нулевую напряженность. В § 10 они рассматривались в качестве граничного (на пространственной бесконечности) условия для солитонных решений.

Если форма напряженности  $F = DA$  калибровочного поля  $A$  равна нулю в некоторой стягиваемой области  $U$  пространства  $X$ , то поле  $A$  в этой области представимо в виде

$$A = g(x) = dg^{-1}(x), \quad (12.1)$$

где  $g(x)$  — некоторый элемент калибровочной группы  $G(U)$ . В случае абелевой группы, когда на калибровочных полях  $D = d$ , это является прямым следствием леммы Пуанкаре, что на стягиваемой области замкнутая форма является точной. Отсюда следует, что на стягиваемой области вакуумное калибровочное поле всегда может быть устранено калибровкой, т. е. приведено к виду  $A = 0$ .

Это перестает быть справедливым для всего пространства  $X$ , если оно не стягиваемо. Например, группа когомологий де Рама  $H^1(X)$  такого пространства не обязательно тривиальна, и ее ненулевые элементы представляют собой классы именно замкнутых, но не точных форм. Таким образом, на нестягиваемых пространствах могут существовать калибровочные поля, напряженность которых всюду равна нулю, но сами они не устраняются калибровкой. Они вызывают эффекты типа Ааронова — Бомы и квантования магнитного потока — образование флаксонов [19]. Рассмотрим абелев случай электромагнитного поля.

В классической механике заряженных тел в уравнения движения зарядов входят только компоненты тензора напряженности электромагнитного поля, а его вектор-потенциал рассматривается как нефизическая величина, которая не проявляется в наблюдаемых эффектах. В квантовой механике и теории поля электромагнитный потенциал  $A_\mu$  непосредственно содержится в уравнениях движения в составе оператора обобщенного импульса

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu),$$



Однако и здесь вопрос о наблюдаемости потенциала  $A$  остается до конца не ясным.

Чтобы выделить эффекты, обусловленные не напряженностью, а потенциалом электромагнитного поля, казалось бы, можно рассмотреть процессы, например, рассеяния в электромагнитном поле, напряженность которого равна нулю. Такие эффекты — эффекты Ааронова — Бома — были предсказаны и экспериментально исследовались. Однако, как уже отмечалось, поле  $A$ , не устранимое калибровкой, может иметь нулевую напряженность (не будем касаться проблемы практического создания такого поля) только в некоторой нестягиваемой области, на границе которой напряженность поля обязательно отлична от нуля. В какой мере оба эти обстоятельства — топологическая нетривиальность области с  $F=0$  и граничные условия  $F \neq 0$  на  $\partial U$  — сказываются в эффектах Ааронова — Бома? Существует мнение, что физически значимыми являются не локальные (в точке) значения потенциала  $A$ , а только калибровочно-инвариантные величины — интегралы от потенциала  $A$  по всевозможным замкнутым контурам, которые в случае стягивания контуров в точку выражаются через локальные значения напряженности поля.

Мы здесь не будем касаться этих проблем сколько-нибудь глубоко, что увело бы далеко в сторону от целей данной книги, а рассмотрим сами вакуумные калибровочные поля. Поскольку они могут существовать только на топологически нетривиальных многообразиях, в их описании и классификации должны участвовать глобальные топологические характеристики этих многообразий.

**Пример 12.1.** Пусть  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho=0\}$  — 3-мерное пространство  $\mathbb{R}^3$  без оси  $z$  (в цилиндрических  $(\rho, \alpha, z)$  или декартовых координатах). Рассмотрим на нем электромагнитный потенциал  $A$ , аналогичный (11.5) из примера 11.9:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} d\alpha = \frac{\Phi_y}{x^2 + y^2} dx - \frac{\Phi_x}{x^2 + y^2} dy, \quad (12.2)$$

Напряженность этого поля  $F = dA$  во всех точках  $X$  равна нулю, и поле  $A$  является градиентным

$$A = df, \quad f = \frac{\Phi_\alpha}{2\pi}, \quad (12.3)$$

на всякой стягиваемой области пространства  $X$ , например, при  $0 < \varepsilon < \alpha < 2\pi - \varepsilon$ , но не на всем  $X$ . Форма (12.2) является представителем некоторого ненулевого элемента группы когомологий де Рама  $H^1(X) = \mathbb{R}$  пространства  $X$ . Элементы этой группы, будучи представленными формами (12.2), отличаются друг от друга коэффициентами  $\Phi$  и могут быть параметризованы ими  $[\Phi] \in \mathbb{R} = H^1(X)$ , так что будет выполняться групповая операция

$$[\Phi] + [\Phi'] = [\Phi + \Phi'].$$

В классе обобщенных функций поле (12.2) может быть продолжено на все пространство  $\mathbb{R}^3$ . В этом случае при вычислении напряженности поля (12.2) в точках  $\rho=0$  ( $x=y=0$ ) надо придерживаться особых правил дифференцирования функций, имеющих полюс. Они таковы, что выполняется формула Стокса

$$\int_{\partial S} A = \int_0^{2\pi} A_\alpha \rho' d\alpha = \int_S F_\alpha d\rho d\alpha = \Phi, \quad (12.4)$$

где  $S$  — круг в плоскости  $z=0$  с центром в точке  $\rho=0$ . Откуда находим

$$F = \Phi \delta(x) \delta(y) dx \wedge dy = \frac{\Phi}{2} \delta(\rho^2) d\rho \wedge d\alpha, \quad (12.5)$$

т. е. вдоль оси  $z$  имеется ненулевое магнитное поле  $H_z$ , поток которого (12.4) равен  $\Phi$ . Подобные сосредоточенные магнитные потоки называются *флаксонами*.

Поле (12.2) из примера 12.1 может быть создано бесконечно длинным и бесконечно тонким соленоидом, магнитный поток которого равен  $\Phi$ . Эффекты Ааронова — Бома в большинстве работ рассчитываются именно для этого поля, хотя оно — недостижимая идеализация. Идеализацией является именно бесконечная длина соленоида. Поле  $A$  бесконечно длинного соленоида конечного радиуса  $b$  в области  $\rho > b$  совпадает с вакуумным полем (12.2), а будучи продолженным на все пространство  $\mathbb{R}^3$ , имеет вид

$$A_\alpha(\rho) = \frac{1 - \theta(\rho - b)}{\rho} \int_0^\rho H(\rho') \rho' d\rho' d\alpha + \frac{\Phi}{2\pi\rho} \theta(\rho - b), \quad (12.6)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция,

$$H_\rho = 0, \quad H_z = H(\rho) \theta(b - \rho), \quad H_x = 0 \quad (12.7)$$

— поле внутри соленоида, а

$$\Phi = 2\pi \int_0^b H(\rho) d\rho$$

— его поток. Поле (12.6) порождается током

$$j_\rho = j_z = 0, \quad j_\alpha(\rho) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{dH}{d\rho} (1 + \theta(\rho - b)) + H(b) \delta(\rho - b) \right].$$

Можно показать, что любой ток вида

$$\vec{j} = (0, j_z(\rho), 0),$$

сосредоточенный в некоторой цилиндрической области  $\mathbf{R} \times U$ , вне этой области порождает вакуумное электромагнитное поле.

Другим примером возникновения вакуумного электромагнитного поля является ситуация, когда в нестягиваемой области реализуется вакуумное решение какой-либо квантовой или полевой модели, например, Гинзбурга — Ландау или Нильсена — Олесена.

**Пример 12.2.** Пусть в пространстве  $\mathbf{R}^3$  в области  $\rho > b$  реализуется решение

$$\varphi(\mathbf{a}) = a \exp\left(-\frac{i a \Phi}{2\pi l}\right), \quad A_z = \frac{\Phi}{2\pi \rho}, \quad A_\rho = A_\varphi = 0 \quad (12.8)$$

вакуумных уравнений (10.2). Поскольку волновая функция  $\varphi(\mathbf{a})$  должна быть однозначной (т. е.  $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a} + 2\pi)$ ), амплитуда  $\Phi$  поля  $A$  в самосогласованном решении (12.8), в отличие от поля в примере 12.1, не произвольна, а принимает дискретные значения

$$\Phi = 2\pi n e, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решения вида (12.8) реализуются в кольцевом сверхпроводнике и приводят к тому, что магнитный поток

$$\int_0^{2\pi} A_z(\rho) \rho d\alpha = 2\pi n e$$

через отверстие кольца принимает только дискретный набор значений. Это известный в физике сверхпроводников эффект *квантования магнитного потока*.

Рассмотрим теперь общее математическое условие существования вакуумных калибровочных полей. Оно сводится к утверждению, что множество классов калибровочно эквивалентных (относительно преобразований второго рода) вакуумных калибровочных полей группы  $G$  на связном паракомпактном многообразии  $X$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженных в  $G$  гомоморфизмов фундаментальной группы  $\pi_1(X)$  многообразия  $X$  в группу  $G$  (напомним, что элементы  $a$  и  $a'$  группы называются сопряженными в  $G$ , если существует такой элемент  $g \in G$ , что  $ga = a'g$ ) [20]. Поясним, как возникает это соответствие.

Пусть  $\lambda$  — расслоение над связной паракомпактной базой  $X$  со структурной группой  $G$ , наделенное связностью  $A$ . Выберем некоторую точку  $x \in X$  и рассмотрим параллельные переносы слоя  $\pi^{-1}(x)$  вдоль всевозможных замкнутых путей  $\gamma$ , начинающихся и заканчивающихся в точке  $x$  (пути должны быть кусочно гладкими, и это вносит немало сложностей, на которых мы не будем

останавливаться (см. [5])). Каждому такому переносу будет соответствовать некоторый изоморфизм  $g_\gamma$  слоя  $\pi^{-1}(x)$  на себя. Множество  $\Gamma_x$  замкнутых путей  $\gamma$  наделено структурой группы (см. § 10), и, как это следует из свойств параллельного переноса (см. § 4), соответствие  $\gamma \rightarrow g_\gamma$  является гомоморфизмом группы  $\Gamma_x$  в группу изоморфизмов слоя  $\pi^{-1}(x)$ . Образ этого гомоморфизма  $K_x$  называется *группой голономии связности* в точке  $x \in X$ . Группы голономии  $K_x$  в разных точках изоморфны, поэтому можно говорить об абстрактной группе голономии  $K$ .

Группа  $\Gamma_x$  содержит инвариантную подгруппу  $\Gamma_x^0$ , состоящую из путей  $\gamma$ , стягиваемых к точке  $x$ . При гомоморфизме  $\Gamma_x \rightarrow K_x$  подгруппа  $\Gamma_x^0$  отображается в подгруппу  $K_x^0 \subset K_x$ , именуемую *ограниченной группой голономии в точке  $x \in X$* , и соответственно определен гомоморфизм фактор-группы

$$\Gamma_x / \Gamma_x^0 = \pi_1(X, x)$$

на фактор-группу  $K_x / K_x^0$ . Далее, имеется изоморфизм группы голономии  $K_x$  на подгруппу структурной группы  $G$ . Пусть  $\lambda_G$  — главное расслоение. Фиксируем элемент  $\rho \in \pi^{-1}(x)$  и всякому  $g_\gamma(\rho)$  сопоставим элемент  $g \in G$ , такой, что  $g_\gamma(\rho) = \rho g$ . Обозначим  $K_\rho$  образ  $K_x$  в  $G$  при таком сопоставлении. Если выбрать другой элемент  $\rho' \in \pi^{-1}(x)$ , такой, что  $\rho' = \rho g_0$ ,  $g_0 \in G$ , то подгруппы  $K_\rho$  и  $K_{\rho'}$  сопряжены в  $G$ , т. е.

$$K_{\rho'} = g_0^{-1} K_\rho g_0.$$

Таким образом, связность  $A$  определяет гомоморфизмы группы замкнутых путей  $\Gamma_x$  на подгруппы группы  $G$ , сопряженные в  $G$ .

**Пример 12.3.** Рассмотрим  $U(1)$ -расслоение, в слоях которого группа  $U(1)$  действует как группа умножений на фазовый множитель  $\exp(i\alpha)$ . Пусть  $iA$  — локальная 1-форма связности на этом расслоении ( $I = i$  — генератор группы  $U(1)$  в данном представлении). Дифференциальное условие параллельного переноса  $U(1)$ -связностью  $iA$  имеет вид

$$Dv = (d + iA(x))v = 0, \quad (12.9)$$

где  $v$  — элемент слоя  $\pi^{-1}(x)$ . Проинтегрируем это уравнение вдоль некоторого пути  $\gamma$ . Пусть  $v(\sigma)$  — сечение  $U(1)$ -расслоения вдоль пути  $\gamma([0, 1])$ , получаемое параллельным переносом элемента  $v(\gamma(0))$ . Тогда условие (12.9) принимает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dv(\sigma)}{d\sigma} + iA_\mu(\gamma(\sigma)) \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} v(\sigma) = 0. \quad (12.10)$$

Подчеркнем, что, поскольку  $A$  — локальная 1-форма связности, уравнения (12.9) и (12.10) определены отдельно на каждой карте

атласа расслоения. Если путь  $\gamma$  уместается на одной карте, то решением уравнения (12.10) является

$$v(\sigma) = v(0) \exp(-i \int_0^\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma).$$

Отсюда получаем, что при параллельном переносе вдоль пути  $\gamma$  элемент  $v \in \pi^{-1}(\gamma(0))$  умножается на фазовый множитель

$$v(\gamma(1)) = g_\gamma v(\gamma(0)) = \exp(-i \int_\gamma A) v(\gamma(0)). \quad (12.11)$$

Если путь  $\gamma$  пересекает несколько карт, то его можно представить как композицию путей  $\gamma_i$ , уменьшающихся на каждой карте, для каждого из которых справедливо выражение (12.11). Но при переходе с карты на карту надо учесть функции перехода  $\rho_{i,i+1}$ . В результате преобразование параллельного переноса  $g_\gamma$  вдоль такого пути имеет вид

$$g_\gamma = \exp(-i \int_{\gamma_k} A) \rho_{k-1,k} \dots \rho_{23} \exp(-i \int_{\gamma_2} A) \rho_{12} \exp(-i \int_{\gamma_1} A). \quad (12.12)$$

В дальнейшем мы сохраним для  $g_\gamma$  запись (12.11), подразумевая учет функций перехода  $\rho_{i,i+1}$  при взятии интеграла  $\int_\gamma A$ . Фиксируем точку  $x \in X$  и ограничимся замкнутыми путями из группы  $\Gamma_x$ . Тогда множество преобразований  $g_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma_x$ , образует группу голономии  $K_x$  с групповой операцией

$$\begin{aligned} g_\gamma g_{\gamma'} &= \exp(-i \int_\gamma A) \exp(-i \int_{\gamma'} A) = \\ &= \exp(-i \int_\gamma A - i \int_{\gamma'} A) = \exp(-i \int_{\gamma\gamma'} A) = g_{\gamma\gamma'}. \end{aligned}$$

В слое главного  $U(1)$ -расслоения отображение параллельного переноса представляет собой сдвиг группового параметра

$$a \rightarrow (a + a_\gamma) \bmod 2\pi, \quad a_\gamma = - \int_\gamma A, \quad (12.13)$$

и отображение

$$\gamma \rightarrow a_\gamma \bmod 2\pi$$

есть гомоморфизм  $\Gamma_x$  на группу голономии  $K_a$  — подгруппу структурной группы  $U(1)$ . Поскольку  $U(1)$  коммутативна,  $K_a = K_a$ .

Пусть связность  $A$  плоская, т. е. ее кривизна  $F$  во всех точках равна нулю. Тогда ограниченные группы голономии  $K_p^0$  и  $K_x^0$  тривиальны. Это следует из теорем, что группа голономии  $K_p^0$  является связной подгруппой Ли группы  $G$  и что ее алгебра Ли оп-

ределяется значениями, принимаемыми формой кривизны связности  $A$  в точках многообразия  $X$ . Мы проиллюстрируем этот факт с помощью следующей конструкции, подобной которой широко применяются для приближенных расчетов в калибровочных моделях на решетках.

**Пример 12.4.** Всякий стягиваемый в точку  $x$  путь  $\gamma$  можно представить как образ границы квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$  при некотором его отображении  $f$  в  $X$ . Разобьем квадрат на  $m \times m$  клеток, как изображено на рис. 19, и обозначим  $\lambda(i, j)$  отмеченный на нем путь. Образ этого пути  $\gamma(i, j)$  в пространстве  $X$  при отображении  $f$  называется *лассо*. Тогда легко проверить, что путь  $\gamma$  может быть представлен как композиция таких лассо

$$\gamma(m, m) \dots \gamma(1, m) \dots \gamma(m, 2) \dots \gamma(1, 2) \dots \gamma(m, 1) \dots \gamma(1, 1). \quad (12.14)$$

Пусть теперь число элементов неограниченно возрастает. Тогда вклад каждого лассо в оператор параллельного переноса имеет вид

$$g^{-1} \exp(1/2 F_\mu \Delta S^\mu) g,$$

где  $g$  — оператор параллельного переноса до петли лассо,  $F$  — кривизна в некоторой точке внутри петли лассо, а  $\Delta S$  — элемент площади петли лассо. Если  $F=0$  во всех точках,  $g_\gamma$  — тождественное преобразование.

Когда связность плоская, ограниченная группа голономии тривиальна и гомоморфизм фундаментальной группы  $\pi_1(X, x)$  на  $K_x/K_x^0$  превращается в гомоморфизм на  $K_x$ , а тем самым определены гомоморфизмы  $\pi_1(X, x)$  на сопряженные подгруппы структурной группы  $G$ .

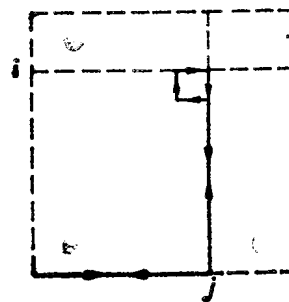


Рис. 19

**Пример 12.5.** Рассмотрим тривиальное  $U(1)$ -расслоение над пространством  $\mathbb{R}^3 \setminus \{p=0\}$  из примера 12.1 и на нем плоскую связность, задаваемую формой (12.2). Интеграл от этой формы по стягиваемому контуру равен нулю. Чтобы это показать, представим, следуя конструкции из примера 12.4, стягиваемый путь как композицию лассо  $\gamma(i, j)$ , таких, что петля каждого лассо принадлежит стягиваемой области в  $X$ . Тогда в каждой такой области форма (12.2) является точной и интеграл от формы  $A$  вдоль петли каждого лассо, а тем самым вдоль каждого лассо и, следовательно, вдоль рассматриваемого пути  $\gamma$  равен 0. Таким образом, интеграл от формы (12.2) по замкнутому пути  $\gamma$  зависит только от гомотопического класса этого пути. Выберем в качестве представителя каждого класса  $n \in$

ружности  $\rho = \text{const}$  в плоскости  $z = \text{const}$ . Тогда

$$\int_{\Gamma_n} A = \Phi n,$$

и, согласно (12.13), имеется гомоморфизм группы  $\pi_1(X)$  на подгруппу группы  $U(1)$ , состоящую из элементов  $U(1)$  с параметрами

$$a_n = (\Phi n) \bmod 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Как видим, два вакуумных поля (12.2) задают один и тот же гомоморфизм

$$\pi_1(X) \rightarrow U(1),$$

если их коэффициенты  $\Phi$  и  $\Phi'$  отличаются на  $2\pi k$ . Но такие поля связаны калибровочным преобразованием

$$\frac{i\Phi}{2\pi\rho} \rightarrow \frac{i\Phi'}{2\pi\rho} + e^{-ikr} \frac{1}{\rho} \partial_r^{1ka}. \quad (12.15)$$

**Пример 12.6.** Расслоениями, связность на которых всегда плоская, являются накрытия (см. пример 4.2). В этом случае всякий путь, выходящий из точки  $x \in X$ , допускает единственный возможный накрывающий путь, выходящий из каждой точки  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Поэтому группа  $\Gamma_x$  единственным образом порождает группу голономии  $K_p$  на накрытии. При этом пути, выходящие из  $p$  и накрывающие гомотопные пути из  $\Gamma_x$ , должны оканчиваться в одной и той же точке из  $\pi^{-1}(x)$ . Действительно, пути, оканчивающиеся в разных точках дискретного слоя  $\pi^{-1}(x)$ , не могут быть стянуты друг в друга. В частности, пути, выходящие из  $p$  и накрывающие стягиваемые пути из  $\Gamma_x$ , оканчиваются в самой точке  $p$ . Отсюда следует, что группу голономии  $K_p$  на накрытии порождает гомотопическая группа  $\pi_1(X, \pi(p))$ , и, если накрытие допускает структурную группу  $G$ , имеется гомоморфизм  $\pi_1(X, \pi(p)) \rightarrow G$ .

Пусть теперь, обратно, задан гомоморфизм  $\pi_1(X)$  в  $G$  с ядром  $N$ . Можно показать (см. пример 13.2), что над  $X$  существует главное расслоение  $\lambda_N$ , структурной группой которого (она же группа голономии) является  $\pi_1(X)/N$ . Поэтому над  $X$  можно построить расслоение  $\lambda$  со структурной группой  $G$ , редуцированной к  $\pi_1(X)/N$ , которое ассоциировано с  $\lambda_N$ , т. е. имеет атлас  $\Psi_0$ , чьими функциями перехода являются постоянные функции со значениями в образе  $\pi_1(X)$  в  $G$ .

Зададим локальную 1-форму связности  $A$ , которая в атласе  $\Psi_0$  имеет вид  $A=0$ . Это можно сделать, так как все функции  $\rho_{ij} = \text{const}$  и

$$A_i = \rho_{ij} A_j \rho_{ij}^{-1} + \rho_{ij} d\rho_{ij}^{-1} = 0,$$

если  $A_j = 0$ . Хотя форма связности  $A=0$  в атласе  $\Psi_0$ , это не означает, что группа голономии связности тривиальна, поскольку при параллельном переносе слои будут преобразовываться под действием функций перехода атласа  $\Psi_0$  (см. выражение (12.12)). При переходе к другому атласу форма  $A$  примет вид

$$A_i = g_i dg_i^{-1},$$

а ее форма кривизны остается равной нулю во всех точках.

Атлас  $\Psi_0$  задан не однозначно, а с точностью до калибровочных преобразований первого рода  $g_i$ , сохраняющих функции перехода атласа  $\Psi_0$ . Если в другом таком атласе  $\Psi_0'$  определить форму связности  $A'=0$ , то при переходе к атласу  $\Psi_0$  получим

$$A'_i = g_i dg_i^{-1},$$

т. е.  $A$  и  $A'$  связаны калибровочным преобразованием второго рода. Таким образом, гомоморфизм  $\pi_1(X)$  в  $G$  определяет вакуумное калибровочное поле с точностью до калибровочной эквивалентности.

**Пример 12.7.** Пусть  $X$  — то же пространство, что и в примере 12.5,  $G=U(1)$  и задан гомоморфизм

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} \ni n \rightarrow a = (\pi n) \bmod 2\pi \in U(1).$$

Построим над  $X$  тривиальное  $U(1)$ -расслоение, как в примере 12.5, и зададим его атлас

$$\Psi_0 = \{U_1, U_2, \rho_{12}, \rho_{21}\},$$

$$U_1 = \left\{ \rho, 0 < \alpha_1 < \frac{3\pi}{2}, z \right\}, \quad U_2 = \left\{ \rho, \pi < \alpha_2 < \frac{5\pi}{2}, z \right\},$$

$$U_1 \cap U_2 = V_1 \cup V_2 = \left\{ \pi < \alpha_1 = \alpha_2 < \frac{3\pi}{2} \right\} \cup \left\{ 0 < \alpha_1 = \alpha_2 - 2\pi < \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\rho_{12}(x) = 1, \quad x \in V_1, \quad \rho_{21}(x) = -1, \quad x \in V_2.$$

Определим в атласе  $\Psi_0$  локальную 1-форму связности  $A=0$ . Однако ее группа голономии не тривиальна, поскольку при параллельном переносе вдоль пути  $\gamma_n$  (см. пример 12.5) в результате  $n$ -кратного действия функций перехода  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$ , согласно (12.12), получаем  $g_1 = (-1)^n$ . Перейдем калибровочным преобразованием

$$g_1 = \exp(-ia_1/2), \quad g_2 = \exp(-ia_2/2),$$

к атласу

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho'_{12}, \rho'_{21}\}$$

с тождественными функциями перехода

$$\rho'_{12} = g_1 \rho_{12} g_2^{-1} = \exp(-ia_1/2) \exp(ia_1/2) = 1,$$

$$\rho'_{21} = g_2 \rho_{21} g_1^{-1} = \exp\left(-i \frac{(a_1 + 2\pi)}{2}\right) (-1) \exp(i a_1 / 2) = 1.$$

В этом атласе поле  $A$  принимает вид (12.2)

$$A_1 = g_1 d g_1^{-1} = A_2 = g_2 d g_2^{-1} = \frac{i}{2} da.$$

При совершении калибровочных преобразований в моделях на нестягиваемых топологических пространствах надо, однако, проявлять осторожность. Дело в том, что *такие преобразования не всегда оставляют инвариантными интегральные величины*. Проиллюстрируем это опять на примере абелева калибровочного поля. Пусть  $X$  — снова пространство  $\mathbf{R}^3 \setminus \{p=0\}$ ,  $\lambda$  — тривиальное  $U(1)$ -расслоение над  $X$  и

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho_{12} = \rho_{21} = 1\}$$

— его атлас с тождественными функциями перехода, как в примерах 12.5 и 12.7. Рассмотрим калибровочное преобразование второго рода

$$g = \exp(ina).$$

Оно определено на всем пространстве  $X$ , поскольку

$$g(a_1) = g(a_2), \quad a_1 = a_2 \in V_1, \quad a_1 + 2\pi = a_2 \in V_2,$$

и устанавливает калибровочную эквивалентность (12.15), например, между полями  $A=0$  и  $A' = \text{ind } a$ . Однако интеграл по нестягиваемому замкнутому контуру  $\gamma_1$  от формы  $A$  равен нулю, а от формы  $A'$  равен  $i2\pi n$ . Причина в том, что форма  $g(a) dg^{-1}(a)$ , на которую изменяется 1-форма связности  $A$  при таком калибровочном преобразовании, не является точной, поскольку

$$g(a_1) dg^{-1}(a_1) = in da_1 = in da_2 = g(a_2) dg^{-1}(a_2),$$

но  $a_1 \neq a_2$ . В частности, в примере 12.2 поля  $A=0$  и  $A' = \text{ind } a$  приводят к различным значениям магнитного потока  $0$  и  $-2\pi ne$ . Для описания таких эффектов, как образование флаксонов и квантование магнитного потока, необходимо рассматривать вакуумные электромагнитные поля с учетом их когомологической эквивалентности. Сделаем это, привлекая понятие относительных гомологий и когомологий [5].

**Относительные гомологии и когомологии.** Пусть  $Y$  — топологическое пространство, а  $X$  — его подпространство. Тогда группы сингулярных цепей  $C_k(X)$  лежат в группах  $C_k(Y)$ . Назовем *группой относительных цепей* фактор-группу

$$C_k(Y, X) = C_k(Y) / C_k(X).$$

Граничный оператор  $\partial$  переводит  $C_k(X)$  в  $C_{k-1}(X)$ , поэтому он определяет некоторый граничный оператор

$$C_k(Y, X) \rightarrow C_{k-1}(Y, X).$$

Элементами  $C_k(Y, X)$  являются классы  $\tilde{c}_k$   $k$ -цепей  $c_k$  в  $Y$ , отличающиеся на  $k$ -цепи в  $X$ .

Как и раньше, определим *относительные циклы*, для которых  $\partial \tilde{c}_k = 0$  (это классы  $k$ -цепей  $c_k$  в  $Y$ , имеющие границы  $\partial c_k$  в  $X$ ), и *относительные границы*

$$\tilde{c}_k = \partial \tilde{c}_{k+1}$$

(это классы  $k$ -цепей  $c_k$  в  $Y$ , отличающиеся от границ  $c_k = \partial c_{k+1}$  в  $Y$  на некоторую  $k$ -цепь в  $X$ ). *Группой относительных гомологий*  $H_k(Y, X)$  называется фактор-группа относительных  $k$ -циклов по относительным  $k$ -границам. Как и для гомотопических групп, для *групп гомологий пары*  $(Y, X)$  имеет место *точная последовательность*

$$\dots \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, X) \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow \dots \quad (12.16)$$

**Пример 12.8.** Если  $Y$  — стягиваемое пространство, то  $H_k(Y) = 0$ ,  $k > 0$ . Тогда точная последовательность (12.16) разбивается на короткие последовательности

$$0 \rightarrow H_{k+1}(Y, X) \rightarrow H_k(X) \rightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H_{k+1}(Y, X) = H_k(X), \quad k > 0.$$

Аналогично относительно гомологиям можно определить *относительные когомологии*. Пусть  $X$  — подмногообразие многообразия  $Y$ . Рассмотрим гомоморфизм ограничения  $k$ -форм

$$\Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(X).$$

Ядро этого гомоморфизма называется *группой относительных  $k$ -мерных коцепей*  $\Omega^k(Y, X)$  пары  $(Y, X)$ . Она состоит из  $k$ -форм  $\sigma^k$  на  $Y$ , которые на  $X \subset Y$  равны нулю. Будем обозначать такие формы  $\sigma^k$ . На  $\Omega^k(Y, X)$  действует тот же оператор внешнего дифференцирования  $d$ , что и на  $\Omega^k(Y)$ , и определены *относительные коциклы* и *кограницы*, представляемые замкнутыми ( $d\sigma^k = 0$ ) и точными ( $\sigma^k = d\sigma^{k-1}$ ) формами. При этом *относительный коцикл обычной границей*, т. е.  $\sigma^k = d\sigma^{k-1}$ , *может не быть относительной границей*, т. е. не найдется нулевая на  $X$  форма  $\sigma^{k-1}$ , такая, что  $\sigma^k = d\sigma^{k-1}$ .

*Группами относительных когомологий*  $H^k(Y, X)$  называются фактор-группы замкнутых  $k$ -форм  $\sigma^k$  по точным  $k$ -формам  $\sigma^k$ . Как и для групп гомологий, для *групп когомологий пары*  $(Y, X)$  имеет место *точная последовательность*

$$\dots H^k(Y, X) \rightarrow H^k(Y) \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^{k+1}(Y, X) \rightarrow \dots \quad (12.17)$$

**Пример 12.9.** Если  $Y$  — стягиваемое пространство, то  $H^k(Y) =$

$=0, k > 0$ . Тогда точная последовательность (12.17) разбивается на короткие последовательности

$$0 \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^{k+1}(Y, X) \rightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad k > 0.$$

Применим эти конструкции к интересующему нас случаю вакуумных электромагнитных полей. Пусть  $Y$  — многообразие, некоторое подмногообразие которого  $X$  допускает вакуумное электромагнитное поле. Тогда группа относительных кохомологий  $H^2(Y, X)$  определяет множество типов магнитных полей в  $Y \setminus X$ , образующих флаксоны.

Поток такого поля  $\sigma^2$  (это коцикл в  $\Omega^2(Y, X)$ ) через поверхность  $\tilde{c}_2$  в  $Y$ , граница которой принадлежит  $X$  ( $\tilde{c}_2$  — цикл в  $C_2(Y, X)$ ), определяется интегралом

$$\Phi = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2,$$

который зависит только от класса относительных кохомологий  $H^2(Y, X)$  формы  $\tilde{\sigma}^2$  и класса относительных гомологий  $H_2(Y, X)$  поверхности  $\tilde{c}_2$ . Действительно,

$$\int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 = \int_{\tilde{c}_2} (\tilde{\sigma}^2 + d\tilde{\sigma}^1) = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int_{\partial\tilde{c}_2 \subset X} \tilde{\sigma}^1 = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2,$$

$$\int_{\tilde{c}_2'} \tilde{\sigma}^2 = \int_{\tilde{c}_2 + \partial\tilde{c}_2 + \Delta} \tilde{\sigma}^2 + \int_{\partial\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int_{\Delta} \tilde{\sigma}^2 = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 + \int_{\tilde{c}_2} d\tilde{\sigma}^2 = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2.$$

Если  $Y$  — стягиваемое пространство (например,  $Y = \mathbb{R}^3$ , а  $X$  — конфигурация, образованная сверхпроводником), то всякая замкнутая форма  $\tilde{\sigma}^2$  является точной на  $Y$ , т. е.  $\tilde{\sigma}^2 = d\tilde{\sigma}^1$ , где  $\tilde{\sigma}^1$  — замкнутая форма при ограничении на  $X$ . Тогда значение интеграла

$$\Phi = \int_{\tilde{c}_2} \tilde{\sigma}^2 = \int_{\tilde{c}_2} d\tilde{\sigma}^1 = \int_{\partial\tilde{c}_2 \subset X} \tilde{\sigma}^1 \quad (12.18)$$

определяется классом кохомологий  $H^1(X)$  формы  $\tilde{\sigma}^1$  и классом гомологий  $H_1(X)$  контура  $\partial\tilde{c}_2$ . Это является следствием изоморфизмов

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad H_{k+1}(Y, X) = H_k(X),$$

для стягиваемого пространства  $Y$ . Частным случаем равенства (12.18), когда

$$Y = \mathbb{R}^3, \quad X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\},$$

служит выражение для магнитного потока (12.5) в примере 12.1.

Можно заметить, что, приведя общее математическое описание вакуумных калибровочных полей, рассмотрение конкретных моделей мы ограничились случаем только абелева поля. Дело в том, что вакуумные калибровочные поля на пространствах с абелевой группой  $\pi_1(X)$  не могут порождать неабелеву группу голономии  $\tilde{K}$  в силу изоморфизма  $\pi_1(X) = K$ , а пространства с некоммутативными фундаментальными группами устроены довольно сложно. Одним из простейших примеров таких пространств является плоскость с ручкой, или, что эквивалентно, тор без точки (рис. 20, где пути

Можно рассмотреть калибровочную модель неабелевой группы  $G$  на пространстве  $X$  с коммутативной группой  $\pi_1(X)$ . Однако вакуумные калибровочные поля группы  $G$  на таком пространстве

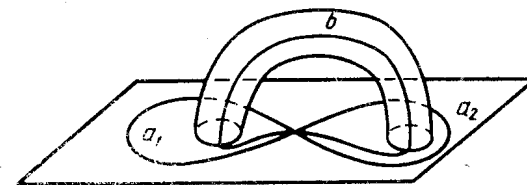


Рис. 20

фактически будут калибровочными полями некоторой абелевой подгруппы группы  $G$ . Например, в ряде работ исследовался эффект Ааронова — Бома в модели

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}, \quad G = \text{SU}(2)$$

( $\text{SU}(2)$  — группа преобразований изоспина). Выбором калибровки вакуумное калибровочное поле в этой модели может быть приведено к виду

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{i\Phi}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. представляет собой калибровочное поле абелевой подгруппы  $U(1)$  группы  $\text{SU}(2)$ , состоящей из матриц

$$\exp(i\alpha)\tau_3 = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha) & 0 \\ 0 & -\exp(i\alpha) \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что в моделях вакуумных калибровочных полей, как и в солитонных моделях § 10, рассматривались тривиальные расслоения. Более того, само наличие плоской связности предполагает если не тривиальность, то редукцию структурной группы расслоения к дискретной подгруппе. Это следует из того, что если расслоение со структурной группой  $G$  над связ-

ной паракомпактной базой допускает связность, абстрактная группа голономии которой изоморфна подгруппе  $K$ , то структурная группа расслоения редуцирована к этой подгруппе. Обратное неверно, например, тривиальность расслоения не накладывает ограничений на группу голономии.

Перейдем теперь к рассмотрению тополого-алгебраических характеристик, которые в отличие от уже использовавшихся для вакуумных калибровочных полей и солитонов вызваны именно нетривиальностью расслоений, описывающих ту или иную полевую систему.

### § 13. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ РАССЛОЕНИЙ

**Классификационная теорема.** Большинство топологических чисел и зарядов, фигурирующих в полевых моделях, представляют собой тополого-алгебраические характеристики, описывающие различные классы ассоциированных расслоений. Поэтому обратимся к задаче классификации расслоений с данной структурной группой  $G$  над топологическим пространством  $X$ .

В общем виде эта задача решается **классификационной теоремой**, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами ассоциированных расслоений над  $X$  и гомотопическими классами отображений базы  $X$  в некоторое специальное классифицирующее пространство, зависящее только от структурной группы.

Обозначим  $S(X, G)$  множество классов ассоциированных расслоений над топологическим пространством  $X$  со структурной топологической группой  $G$ . Рассмотрим действие на это множество операций сужения структурной группы и индуцирования.

Пусть  $G'$  — подгруппа группы  $G$ . Тогда вложение  $G' \rightarrow G$  порождает естественное вложение множества  $S(X, G')$  в множество  $S(X, G)$ , образами которого являются классы расслоений над  $X$ , структурная группа которых редуцирована к подгруппе  $G'$ . В частности, если база  $X$  паракомпактна,  $G$  — группа Ли, а  $G'$  — ее максимальная компактная подгруппа, то

$$S(X, G) = S(X, G'),$$

поскольку в этом случае структурная группа расслоений над  $X$  всегда редуцирована к  $G'$  (см. § 3).

**Пример 13.1.** Укажем важные для физических приложений случаи совпадения

$$S(X, G) = S(X, G' \subset G),$$

когда

$$G = \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad G' = \text{U}(n);$$

$$G = \text{Gl}(n, \mathbb{R}), \quad G' = \text{O}(n);$$

$$G = \text{GL}^+(n, \mathbb{R}), \quad G' = \text{SO}(n);$$

$$G = \text{SO}(3, 1), \quad G' = \text{SO}(3).$$

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Для всякого расслоения  $\lambda$  над  $Y$  оно индуцирует расслоение  $f^*\lambda$  над  $X$ . Его тотальным пространством является подпространство произведения  $X \times \text{tl}\lambda$ , составленное из точек  $(x, p)$  с  $f(x) = \pi(p)$ , т. е. наглядно оно получается «приклеиванием» к каждой точке  $x \in X$  слоя  $V_{f(x)}$  расслоения  $\lambda$ . Проекцией  $\text{tl} f^*\lambda$  на базу  $X$  является проекция

$$X \times \text{tl} \rightarrow X,$$

ограниченная на  $\text{tl} f^*\lambda \subset \text{tl}\lambda$ .

Индукционное расслоение  $f^*\lambda$  наследует структурную группу  $G$  расслоения  $\lambda$ . Поэтому отображение  $f$  порождает морфизм

$$f^*: S(Y, G) \rightarrow S(X, G).$$

Для клеточных пространств и паракомпактных пространств морфизм  $f^*$  зависит только от гомотопического класса отображения  $f$  и тем самым определяет морфизм

$$\pi(X, Y) \rightarrow S(X, G).$$

Если бы нашлось такое пространство  $Y$ , что отображение  $f: X \rightarrow Y$  индуцирует биекцию  $\pi(X, Y)$  на  $S(X, G)$ , это позволило бы описать множество  $S(X, G)$  классов  $G$ -расслоений над  $X$ . Для клеточных пространств  $X$  такое пространство существует.

Расслоение  $\Lambda$  со структурной группой  $G$ , типичным слоем  $V$  и базой  $\text{bs } \Lambda = Y$  называется **универсальным**, если:

а) для всякого расслоения  $\lambda$  с клеточной базой  $X$  и слоем  $V$  существует такое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , что расслоение  $f^*\Lambda$  эквивалентно  $\lambda$ ;

б) всякие два непрерывные отображения  $f_1$  и  $f_2$  клеточного пространства в  $Y$ , индуцирующие эквивалентные расслоения  $f_1^*\Lambda$  и  $f_2^*\Lambda$ , гомотопны.

База универсального расслоения  $\Lambda$  со структурной группой  $G$  одновременно является базой универсальных расслоений со структурной группой  $G$  и всевозможными другими типичными слоями и в этом смысле не зависит от типичного слоя. Она называется **классифицирующим пространством** группы  $G$ .

Теорема, устанавливающая существование классифицирующих пространств, называется **классификационной теоремой**.

**Теорема.** Для всякой топологической группы  $G$  существует топологическое пространство  $B(G)$ , являющееся классифицирующим для всех расслоений со структурной группой  $G$  над клеточными пространствами  $X$ , т. е.

$$S(X, G) = \pi(X, B(G)).$$

Из классификационной теоремы следует, что для данной группы  $G$  множество  $S(X, G)$  зависит только от гомотопического типа пространства  $X$  и является тем самым гомотопическим инвариантом. Это и позволяет решать задачу классификации расслоений методами алгебраической топологии. Для некоторых типов топологических групп  $G$  классификационная теорема справедлива для расслоений не только с клеточной базой.

**Пример 13.2.** Чтобы проиллюстрировать действие классификационной теоремы, приведем классификацию расслоений с дискретной структурной группой  $G$ . Главное расслоение  $\lambda$  с дискретной структурной группой образует накрытие (см. пример 4.2). Рассмотрим для этого расслоения, как и в примере 9.10, точную последовательность гомотопических групп (9.5), которая распадается на короткие точные последовательности (9.6) и (9.7). При этом в случае главного расслоения проекция (9.9) — это гомоморфизм фундаментальной группы через порождаемую ею группу голономии  $K_p$  (см. пример 12.6) на  $G$  как на структурную группу. Отсюда следует, что  $K_p = G$  и образ  $\pi_1(\pi\lambda, p)$  в  $\pi_1(X, \pi(p))$  при мономорфизме (9.8) — это некоторая подгруппа  $N$  группы  $\pi_1(X, \pi(p))$ . Таким образом, для существования над связным пространством  $X$  расслоения со структурной группой  $G$  необходимо, чтобы в  $\pi_1(X, \cdot)$  существовала такая инвариантная подгруппа  $N$ , что факторгруппа  $\pi_1(X, \cdot)/N$  изоморфна  $G$ . Для широкого класса пространств  $X$ , например, связных локально стягиваемых (когда всякая окрестность точки содержит стягиваемую окрестность), это условие является достаточным. Классифицирующим пространством  $Y$  дискретной группы  $G$  является, например, связное локально стягиваемое пространство с гомотопическими группами

$$\pi_1(X) = G, \quad \pi_n(X) = 0, \quad n > 1.$$

Действительно, в этом случае гомотопический тип отображения  $X \rightarrow Y$  определяется только ядром гомоморфизма

$$\pi_1(X, \cdot) \rightarrow \pi_1(Y, \cdot) = G.$$

Для физических приложений наибольший интерес представляют векторные конечномерные расслоения над многообразиями со структурными группами  $GL(n, \mathbf{C})$  или  $GL(n, \mathbf{R})$ , редуцированными соответственно к  $U(n)$  и  $O(n)$ . Классифицирующими пространствами этих групп служат

$$B(U(n)) = \varinjlim_{N \rightarrow \infty} G(n, N; \mathbf{C}),$$

$$B(O(n)) = \varinjlim_{N \rightarrow \infty} G(n, N; \mathbf{R}),$$

где  $G(n, N; \mathbf{C})$  и  $G(n, N; \mathbf{R})$  — многообразие Грассмана  $n$ -мерных плоскостей в  $\mathbf{C}^N$  и  $\mathbf{R}^N$ . Знание классифицирующих пространств

позволяет классифицировать  $U(n)$ - и  $O(n)$ -расслоения над многообразиями (и над более широким классом пространств) с помощью характеристических классов — элементов групп когомологий  $H^*(X, \mathbf{Z})$  со значениями в постоянном пучке  $\mathbf{Z}$  (см. приложение V).

Мы в основном будем иметь дело со следующими характеристическими классами:

- классами Чженя  $c_i \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$  для  $U(n)$ -расслоений;
- классами Понтрягина  $p_i \in H^{4i}(X, \mathbf{Z})$  для  $O(n)$ -расслоений;
- классом Эйлера  $e \in H^n(X, \mathbf{Z})$  для  $SO(n)$ -расслоений;
- классами Штифеля — Уитни  $w_i \in H^i(X, \mathbf{Z}_2)$  для касательных расслоений.

**Классы Чженя.** Начнем с классов Чженя  $U(n)$ -расслоений. Возможны различные пути описания классов Чженя и определения их свойств. Воспользовавшись вложением

$$H^*(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbf{R})$$

(по модулю кручения) и изоморфизмом  $H^*(X, \mathbf{R})$  и групп когомологий де Рама  $H^*(X)$  (см. приложение V), мы будем строить классы Чженя как классы когомологий некоторых форм на  $X$ .

Пусть  $A$  — комплексная  $(k \times k)$ -матрица и  $P(A)$  — полином из компонент матрицы  $A$ . Полином  $P(A)$  называется *характеристическим*, если

$$P(A) = P(gAg^{-1})$$

для всех  $g \in GL(k, \mathbf{C})$ . Если  $A$  имеет собственные значения  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , то  $P(A)$  представляет собой симметричную функцию этих значений. Обозначим  $S_j(a)$  следующий симметричный полином от  $a_i$  степени  $j$ :

$$S_j(a) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} a_{i_1} \dots a_{i_j}. \quad (13.1)$$

Тогда  $P(A)$  представим как полином

$$P(A) = b + cS_1(a) + dS_2(a) + \dots$$

от  $S_j(a)$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

**Пример 13.3.**  $\text{Det}(1+A)$ , где  $1$  — единичная матрица, является характеристическим полиномом и

$$\text{Det}(1+A) = 1 + S_1(a) + S_2(a) + \dots + S_k(a).$$

Пусть  $P(A)$  — характеристический полином. Подставим в него вместо  $A$  матричнозначную 2-форму кривизны  $P$  некоторой связности на векторном расслоении. Тогда, как можно показать, форма  $P(F)$  обладает следующими свойствами:



- а)  $P(F)$  — замкнутая форма, т. е.  $dP(F) = 0$ ;  
 б)  $P(F) - P(F')$ , где  $F$  и  $F'$  — формы кривизны двух любых связностей на расслоении, является точной формой.

Последнее означает, что *характеристический полином, взятый от различных форм кривизны на данном расслоении, имеет один и тот же кохомологический класс де Рама*, который тем самым может служить характеристикой этого расслоения. Это действительно так, и характеристические классы расслоений представляются кохомологическими классами характеристических полиномов от форм кривизны на расслоении.

Пусть  $\lambda$  — комплексное векторное расслоение над  $n$ -мерным многообразием  $X$  со структурной группой  $GL(n, \mathbb{C})$  и  $F$  — форма кривизны на  $\lambda$ . *Полной формой Чженя* называется следующий характеристический полином от  $F$ :

$$c(F) = \text{Det} \left( \hat{1} + \frac{1}{2\pi} F \right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots \quad (13.2)$$

Составляющие его  $(2i)$ -формы  $c_i(F)$  называются *формами Чженя* и являются полиномами степени  $i$  от  $F$ :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{2\pi} \text{Tr} F, \\ c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \{ \text{Tr}(F \wedge F) - \text{Tr} F \wedge \text{Tr} F \}. \quad (13.3)$$

Все формы Чженя  $c_i(F)$  замкнуты, и их кохомологические классы отождествляются с характеристическими классами Чженя расслоения  $\lambda$ , будучи образами  $c_i(\lambda) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$  при отображении

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R}) = H^*(X).$$

**Пример 13.4.** Построим полную форму Чженя (13.2) от формы кривизны (4.7) на  $U(1)$ -расслоении  $\lambda_n$  над сферой  $S^2$  из примера 4.1:

$$c = \text{Det} \left( \hat{1} + \frac{1}{2\pi} F \right) = 1 + c_1(F), \\ c_1(F) = \frac{1}{2\pi} \text{Tr} F = -\frac{n}{4\pi} \sin \theta \int \omega \wedge d\varphi. \quad (13.4)$$

Для  $U(1)$ -расслоения форма Чженя  $c_1(F)$  совпадает с характеристической формой из примера 5.9.

**Пример 13.5.** Запишем полную форму Чженя для  $SU(2)$ -расслоения над многообразием  $X^4$ . Форма кривизны на таком расслоении имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k F^i F^j, \quad \text{Tr} F = 0,$$

где  $\tau_a$  — матрицы Паули. Тогда

$$c(F) = \text{Det} \left( \hat{1} + \frac{1}{4\pi} \tau_a F^a \right) = 1 + c_1(F) + c_2(F), \\ c_1(F) = 0, \quad c_2(F) = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{(4\pi)^2} F^a \wedge F^a. \quad (13.5)$$

Для  $SU(k)$ -расслоений форма  $c_2(F)$  совпадает с характеристической формой из примера 5.10.

Представление классов Чженя формами Чженя позволяет легко получить свойства этих классов:

$$A1) \quad c_i(\lambda) = 0, \quad 2i > n = \dim X; \\ A2) \quad c_i(\lambda) = 0, \quad i > k; \\ A3) \quad c(\lambda \oplus \lambda') = c(\lambda) c(\lambda'); \\ A4) \quad c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L'), \quad \text{где } L, L' \text{ — линейные (1-мерные) } U(1)\text{-расслоения.} \quad (13.6)$$

Отметим также, что если  $f^*\lambda$  — индуцированное отображением  $f: X \rightarrow Y$  расслоение, то

$$c(f^*\lambda) = f^*c(\lambda),$$

где

$$f^*: H^*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$$

— порождаемый отображением  $f$  гомоморфизм групп кохомологий (см. приложение IV).

Эффективно использовать это свойство и свойство (A3) позволяет следующая теорема.

**Теорема.** Для всякого главного  $U(k)$ -расслоения  $\lambda$  над многообразием  $X$  существует пространство  $Y$  и непрерывное отображение  $f: Y \rightarrow X$ , такие, что:

- а)  $f^*\lambda$  есть сумма Уитни  $U(1)$ -расслоений;  
 б)  $f^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Z})$  — вложение.

Она дает возможность в целом ряде случаев классы Чженя гладких  $U(k)$ -расслоений выражать через классы Чженя  $U(1)$ -расслоений, или на примере этих случаев исследовать общие свойства классов Чженя. Это называется *принципом расщепления*. Согласно этому принципу

$$c(\lambda) = c(L_1 \oplus \dots \oplus L_n) = c(L_1) \cdot \dots \cdot c(L_n) = \\ = (1 + a_1) \dots (1 + a_n), \quad (13.7)$$

где  $a_i = c_1(L_i)$  — класс Чженя расслоения  $L_i$ . Из (13.7) находим

$$c_1 = \sum_i a_i,$$

$$c_2 = \sum_{i_1 < i_2} a_{i_1} a_{i_2}, \quad (13.8)$$

$$c_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} a_{i_1} \dots a_{i_j}.$$

Выражение (13.8) идентично выражению (13.1), и это не случайно, поскольку  $a_i$  представляют собой компоненты диагонализированной формы кривизны

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_k \end{pmatrix}, \quad a_j = \frac{1}{2\pi} F_j,$$

на расслоении  $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ .

**Пример 13.8.** Пусть  $\lambda^*$  — дуальное к  $\lambda$  расслоение. Тогда, согласно принципу расщепления,

$$c(\lambda^*) = c(L_1^*) \times \dots \times c(L_k^*) = (1 + a_1^*) \dots (1 + a_k^*).$$

Поскольку переход к операторам и генераторам группы  $U(1)$  в дуальном представлении состоит в операции комплексного сопряжения, т. е.  $F^* = -F$ , имеет место соотношение  $a_i^* = -a_i$ . Откуда легко получить свойство классов Чженя дуального расслоения

$$c_i(\lambda^*) = (-1)^i c_i(\lambda). \quad (13.9)$$

Если база  $X$  расслоения  $\lambda$  — замкнутое  $n$ -мерное многообразие, из форм Чженя можно составить  $n$ -формы и рассмотреть их интегралы по многообразию  $X$ . Значения последних будут зависеть только от кохомологических классов построенных  $n$ -форм, т. е. от кохомологических классов форм Чженя. Тем самым они оказываются характеристическими для данного расслоения  $\lambda$ . Например, для  $n=4$  имеется два таких числа Чженя

$$C_2(\lambda) = \int_X c_2, \quad C_1^2(\lambda) = \int_X c_1 \wedge c_1. \quad (13.10)$$

Отметим, что поскольку классы Чженя являются элементами целочисленных групп кохомологий, числа Чженя оказываются целыми.

**Пример 13.7.** В случае  $U(1)$ -расслоения  $\lambda_n$  над  $S^2$  из примеров 3.5, 4.1, 13.4 получаем число Чженя

$$C_1 = \int_{S^2} c_1 = -\frac{n}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -n \quad (13.11)$$

Оно действительно является характеристическим для расслоения

$\lambda_n$ , поскольку расслоения  $\lambda_n$  с различными  $n$  неэквивалентны и число  $n$  параметризует классы эквивалентности  $U(1)$ -расслоений над  $S^2$ . Показательно, что для тривиального расслоения  $\lambda_0$  число Чженя (13.11) равно нулю.

Для  $U(k)$ -расслоений помимо классов Чженя могут быть определены и другие характеристические классы, выражаемые через классы Чженя.

*Характер Чженя*  $\text{ch}(\lambda)$  задается характеристическим полиномом

$$\text{ch}(A) = \text{Tr} \exp \left( \frac{i}{2\pi} A \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \text{Tr} \left( \frac{i}{2\pi} A \right)^m \quad (13.12)$$

и обладает свойствами

$$\text{ch}(\lambda \oplus \lambda') = \text{ch}(\lambda) + \text{ch}(\lambda'),$$

$$\text{ch}(\lambda \otimes \lambda') = \text{ch}(\lambda) \cdot \text{ch}(\lambda').$$

Его выражение через классы Чженя можно установить, используя принцип расщепления:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\lambda) &= \text{ch}(L_1 \oplus \dots \oplus L_k) = \text{ch}(L_1) + \dots + \text{ch}(L_k) = \exp a_1 + \dots \\ &\dots + \exp a_k = k + \sum_i a_i + \frac{1}{2} \sum_i a_i^2 + \dots = k + \sum_i a_i + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_i a_i^2 - 2 \sum_{i_1 < i_2} a_{i_1} a_{i_2} \right) + \dots \right] = k + c_1(\lambda) + \frac{1}{2} [c_1^2(\lambda) - 2c_2(\lambda)] + \dots \end{aligned}$$

*Класс Тодда*  $U(k)$ -расслоения следующим образом определяется через классы Чженя, используя принцип расщепления:

$$\text{tg}(\lambda) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1 - \exp(-a_i)} = 1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) + \dots \quad (13.13)$$

Он обладает свойством

$$\text{tg}(\lambda \oplus \lambda') = \text{tg} \lambda \cdot \text{tg} \lambda'.$$

**Классы Понтрягина.** Перейдем теперь к характеристическим классам вещественного  $k$ -мерного векторного расслоения  $\lambda$ , имеющего структурную группу  $O(k)$ .

Опишем *классы Понтрягина* такого расслоения кохомологическими классами компонент характеристического полинома

$$p(F) = \text{Det} \left( \tilde{1} - \frac{1}{2\pi} F \right) = 1 + p_1 + p_2 + \dots \quad (13.14)$$

от формы кривизны  $F$  на  $\lambda$ , принимающей значения в алгебре Ли  $O(k)$ . Поскольку в представлении на  $\mathbb{R}^k$  генераторы  $O(k)$  таковы, что

$$(I)_b^a = -(I)_a^b,$$

в разложении (13.14) отличны от нуля компоненты только четной по  $F$  степени, и, таким образом,  $p_i \in H^{4i}(X)$ . Классы Понтрягина обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{Б1)} \quad p_i(\lambda) &= 0, \quad 4i > n = \dim X; \\ \text{Б2)} \quad p_i(\lambda) &= 0, \quad 2i > k; \\ \text{Б3)} \quad p(\lambda \oplus \lambda') &= p(\lambda) + p(\lambda'). \end{aligned} \quad (13.15)$$

Отметим, что в отличие от комплексного случая, хотя характеристические классы расслоений со структурными группами  $O(k)$  и  $GL(k, \mathbb{R})$  совпадают ( $GL(k, \mathbb{R})$  всегда редуцирована к  $O(k)$ ), характеристические формы для них, вообще говоря, различны. Например, если  $F$  — форма кривизны, принимающая значения в алгебре Ли  $gl(k, \mathbb{R})$ , то в разложении (13.12) могут возникнуть компоненты нечетной степени по  $F$ . Поэтому во избежание недоразумений характеристические формы, отвечающие классам Понтрягина, следует строить только из  $O(k)$ -значных форм кривизны.

**Пример 13.8.** Рассмотрим касательное расслоение над многообразием  $X^4$ . Для него имеется единственный класс Понтрягина  $p_1 \in H^4(X)$ , характеристическая форма для которого может быть построена из формы кривизны  $F$  некоторой римановой метрики на  $X$ :

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr } F \wedge F = -\frac{1}{8\pi^2} F_b^a \wedge F_a^b.$$

Аксиоматически классы Понтрягина  $O(k)$ -расслоений могут быть введены через классы Чженя  $U(k)$ -расслоений. Для этого воспользуемся следующими коммутативными диаграммами вложений:

$$\begin{array}{ccc} U(k) & \rightarrow & O(2k), \\ \downarrow & & \\ GL(k, \mathbb{C}) & \rightarrow & GL(2k, \mathbb{R}), \end{array} \quad (13.16)$$

$$\begin{array}{ccc} O(k) & \rightarrow & U(k), \\ \downarrow & & \\ GL(k, \mathbb{R}) & \rightarrow & GL(k, \mathbb{C}). \end{array} \quad (13.17)$$

В диаграмме (13.16) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если линейное преобразование пространства  $\mathbb{C}^k$  с комплексными координатами  $z^1, \dots, z^k$  представить как линей-

ное преобразование вещественного пространства  $\mathbb{R}^{2k}$  с координатами  $x^1, \dots, x^{2k}$ , положив

$$z^i = x^i + ix^{k+i}.$$

В диаграмме (13.17) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если матрицы с вещественными коэффициентами рассматривать как частный случай матриц с комплексными коэффициентами.

Диаграмма (13.17) определяет вложение

$$\varphi: S(X, O(k)) \rightarrow S(X, U(k)),$$

и для  $O(k)$ -расслоений над  $X$  положим

$$p_i(\lambda) = (-1)^i c_{2i}(\varphi(\lambda)), \quad p(\lambda) = \sum_i p_i(\lambda). \quad (13.18)$$

Элементы  $p_i(\lambda) \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$  называются  $i$ -ми классами Понтрягина, а  $p(\lambda)$  — полным классом Понтрягина расслоения  $\lambda$ . Их образами в когомологиях де Рама  $H^*(X)$  являются классы Понтрягина, определяемые через характеристический полином (13.14). Отметим, однако, что для классов Понтрягина (13.18) свойство (Б2) верно по модулю элементов порядка 2 в  $H^*(X, \mathbb{Z})$ .

Диаграмма (13.16) определяет вложение

$$\rho: S(X, U(k)) \rightarrow S(X, O(2k)),$$

а композиция  $\rho \circ \varphi$  — цепочку вложений

$$S(X, U(k)) \rightarrow S(X, O(2k)) \rightarrow S(X, U(2k)).$$

Таким образом, если  $\lambda$  есть  $U(k)$ -расслоение над  $X$ , то  $\rho(\lambda)$  есть  $O(2k)$ -расслоение над  $X$ , а  $\varphi(\rho(\lambda))$  — это  $U(2k)$ -расслоение над  $X$ . При этом элемент  $A \in U(k)$  вложениями

$$U(k) \rightarrow O(2k) \rightarrow U(2k)$$

переводится в элементы

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Re } A & -\text{Im } A \\ \text{Im } A & \text{Re } A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^* \end{pmatrix}$$

в комплексных координатах  $z^i$  пространства  $\mathbb{C}^k$ , в вещественных координатах

$$x^i = \text{Re } z^i, \quad x^{k+i} = \text{Im } z^i$$

пространства  $\mathbb{R}^{2k}$  и в комплексных координатах

$$z^i = x^i + ix^{k+i}, \quad z^{k+i} = x^i - ix^{k+i}$$

пространства  $\mathbb{C}^{2k}$ .

Поскольку элемент  $A$  унитарен, матрица  $A^*$  совпадает с транс-

понированной обратной. Следовательно, расслоение  $\varphi(\lambda)$  является суммой Уитни расслоения  $\lambda$  и дуального расслоения  $\lambda^*$ , и согласно свойству (A3)

$$c(\varphi(\lambda)) = c(\lambda) c(\lambda^*).$$

Отсюда, используя (13.18) и (13.9), получаем соотношение

$$\sum_i (-1)^i p_i(\varphi(\lambda)) = c(\varphi(\lambda)) = c(\lambda) c(\lambda^*) = \left[ \sum_i c_i(\lambda) \right] \left[ \sum_j (-1)^j c_j(\lambda) \right] \quad (13.19)$$

между классами Чженя  $U(k)$ -расслоения  $\lambda$  и классами Понтрягина  $O(2k)$ -расслоения  $\rho(\lambda)$ . Используем это соотношение в следующей конструкции.

Классами Понтрягина  $p_i(X)$  вещественного многообразия  $X$  называются классы Понтрягина касательного расслоения  $T(X)$ .

Пусть многообразие  $X$  ориентировано и  $\dim X = 2m$ . Пусть структурная группа  $GL(2m, \mathbb{R})$  касательного расслоения  $T(X)$  допускает редукцию к образу вложения  $GL(m, \mathbb{C})$  в  $GL(2m, \mathbb{R})$ , т. е. расслоение  $T(X)$  имеет структуру некоторого  $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоения (почти комплексную структуру), т. е. ассоциировано с некоторым  $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоением. Тогда классами Чженя такого вещественного многообразия  $X^{2m}$  называются классы Чженя расслоения  $T(X)$  как  $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоения т. е.

$$c_i(X) = c_i(T(X)).$$

Отсюда, используя соотношение (13.19), определяем связь между классами Понтрягина и классами Чженя многообразия с почти комплексной структурой

$$\sum_i (-1)^i p_i(X) = \left[ \sum_i c_i(X) \right] \left[ \sum_j (-1)^j c_j(X) \right].$$

В частности,

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2, \quad p_2 = c_2^2 - 2c_1 c_3 + 2c_4, \quad (13.20)$$

или, используя принцип расщепления,

$$p_1 = \sum_i a_i^2, \quad p_2 = \sum_{i < j} a_i^2 a_j^2.$$

**Пример 13.9.** Многообразием с почти комплексной структурой является всякое пространственно-временное многообразие  $X^4$ . Это 4-мерное ориентируемое многообразие, на котором задана некоторая псевдориманова метрика  $g$ . Такая метрика существует тогда и только тогда, когда структурная группа  $GL(4, \mathbb{R})$ -расслоения  $T(X^4)$  редуцирована к группе Лоренца (см. гл. IV). Группа Лоренца  $SO(3, 1)$  как известной принадлежит образу группы  $SL(2, \mathbb{C})$  в  $GL(4, \mathbb{R})$  ( $SL(2, \mathbb{C})$  является двулистным накрытием над

$SO(3, 1)$ ). Поэтому редукция структурной группы расслоения  $T(X^4)$  к группе Лоренца означает, что  $T(X^4)$  ассоциировано с некоторым  $SL(2, \mathbb{C})$ -расслоением, следовательно, с  $SU(2)$ -расслоением. Поэтому, наряду с классом Понтрягина  $p_1(X^4)$  пространственно-временного многообразия  $X^4$  определены еще классы Чженя  $c_1(X^4)$  и  $c_2(X^4)$ , связанные с  $p_1(X^4)$  соотношением (13.20). Однако, поскольку класс Чженя  $c_1$  для  $SU(2)$ -расслоения равен нулю (см. пример 13.5), класс  $c_1(X^4)$  тоже равен нулю.

Если структурная группа  $O(k)$ -расслоения  $\lambda$  редуцирована к  $SO(k)$ , для такого расслоения определен класс Эйлера  $e(\lambda)$ . Он может быть построен аксиоматически как элемент группы  $H^k(X, \mathbb{Z})$ , обладающий следующими свойствами:

$$B1) \quad 2e(\lambda) = 0, \quad \text{если } k \text{ нечетно}$$

$$B2) \quad e(f^*\lambda) = f^*e(\lambda);$$

$$B3) \quad e(\lambda \oplus \lambda') = e(\lambda) e(\lambda');$$

$$B4) \quad e(\lambda) = c_1(\lambda), \quad \text{если } k=2.$$

(13.21)

Последнее свойство обусловлено изоморфизмом групп  $SO(2)$  и  $U(1)$ .

Установим теперь связь класса Эйлера с классами Понтрягина и Чженя. Пусть  $\lambda$  —  $U(k)$ -расслоение над  $X$  и  $\rho(\lambda)$  —  $SO(2k)$ -расслоение над  $X$ . Тогда, применяя принцип расщепления и свойства (B3), (B4), получаем

$$e(\rho(\lambda)) = e(\rho(L_1) \oplus \dots \oplus \rho(L_k)) = e(\rho(L_1)) \times \dots \times e(\rho(L_k)) = \prod c_1(L_i) \dots c_1(L_k) = a_1 \dots a_k = c_k(\lambda). \quad (13.22)$$

В свою очередь, из (13.19) следует, что

$$p_k(\rho(\lambda)) = c_k^2(\rho(\lambda)),$$

и, таким образом, для всякого  $SO(2k)$ -расслоения  $\lambda$

$$e(\lambda) = [p_k(\lambda)]^{1/2}. \quad (13.23)$$

Исходя из этого соотношения, можно построить характеристическую форму Эйлера для  $SO(2k)$ -расслоений. Из свойства (13.21) следует, что форма Эйлера для  $SO(2)$ -расслоений должна быть когомологична нулю.

**Пример 13.10.** Пусть  $X^4$  — ориентируемое многообразие. Тогда структурная группа касательного расслоения  $T(X^4)$  редуцирована к  $SO(4)$ . Определим форму Эйлера для  $T(X^4)$ , выставляя в качестве  $F$  форму кривизны некоторой римановой метрики на  $X^4$ . Воспользуемся соотношением (13.23), найдя

$$p_2 = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \wedge \mathbb{1}$$

из разложения (13.14). В результате

$$\epsilon(F) = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd}. \quad (13.24)$$

Заметим, что при смене ориентации  $X^4$  форма Эйлера меняет знак.

**Теорема Гаусса — Бонне.** Если  $X$  — четномерное замкнутое ориентируемое многообразие, имеет место следующая связь класса Эйлера и эйлеровой характеристики многообразия  $X$ :

$$\chi(X) = \int_X \epsilon(\Gamma(X)). \quad (13.25)$$

**Пример 13.11.** Необходимым и достаточным условием существования псевдоримановой метрики на ориентируемом многообразии  $X^4$  является равенство нулю класса Эйлера его касательного расслоения  $T(X^4)$ . К таковым относятся все некомпактные многообразия ( $H^4(X^4, \mathbf{Z}) = 0$ ) и замкнутые многообразия с нулевой эйлеровой характеристикой.

В заключение укажем еще на классы Штифеля — Уитни  $w_i \in H^i(X, \mathbf{Z}_2)$  касательного расслоения над многообразием  $X$ . Так, многообразие  $X$  является ориентируемым тогда и только тогда, когда  $w_1 = 0$ , а если  $X$  допускает комплексную структуру, то

$$w_{2i+1} = 0, \quad w_{2i} = c_i \pmod{2}.$$

В отличие от ранее рассмотренных классов Штифеля — Уитни не представимы как когомологические классы каких-либо характеристических форм.

#### § 14. ИНСТАНТЫ

Инстантами называются регулярные решения классических уравнений Янга — Миллса в евклидовом пространстве — времени, на которых функционал действия принимает конечное значение. Интерес к решениям уравнений различных полей (не только в калибровочной теории) в 4-мерном пространстве  $M$  с метрикой евклидовой сигнатуры  $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$  связан с их интерпретацией при квантовании как процессов туннелирования между состояниями, разделенными классическим барьером. В данном параграфе мы познакомимся с простейшими инстантами для группы  $SU(2)$ , а в следующем разделе рассмотрим общее решение с произвольным значением топологического заряда.

Пусть

$$A(x) = A_\mu dx^\mu = A_\mu^a t_a dx^\mu$$

— 1-форма связности (калибровочное поле) на  $SU(2)$ -расслоении

над  $M$ . Удобно выбрать базис  $t_a$  алгебры Ли группы  $SU(2)$  в виде антиэрмитовых  $2 \times 2$ -матриц

$$t_a = -\frac{i}{2} \tau_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

где  $\tau_a$  — матрицы Паули;  $t_a$  удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} t_a t_b - t_b t_a &= \epsilon_{abc} t_c, \\ t_a t_b + t_b t_a &= -\frac{1}{2} \delta_{ab} \hat{1}, \\ \text{Tr}(t_a t_b) &= -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Отметим, что  $t_a$  являются образующими элементами алгебры так называемых кватернионов  $Q$ , которые можно представить как  $2 \times 2$ -матрицы вида

$$Q = Q_0 \sigma^0 + Q_1 \sigma^1 + Q_2 \sigma^2 + Q_3 \sigma^3 = Q_\mu \sigma^\mu, \quad (14.2)$$

где  $\sigma^\mu$  — обобщенные матрицы Паули

$$\sigma^0 = 1, \quad \sigma^a = -2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

а  $Q_\mu$  — комплексные числа. Вещественные кватернионы имеют действительные коэффициенты  $Q_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ , а подалгебра чисто мнимых кватернионов, для которых  $Q_0 = 0$ , совпадает с алгеброй Ли группы  $SU(2)$ .

Сопряженным к  $Q$  кватернионом считается  $\bar{Q} = Q^\dagger$ . При этом

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 = 1, \quad \bar{\sigma}^a = -\sigma^a = 2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu &= \delta_{\mu\nu} \hat{1} + \eta_{\mu\nu} \sigma^\lambda, \\ \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu &= \delta_{\mu\nu} \hat{1} + \eta_{\mu\nu} \sigma^\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

где  $\eta$  — так называемые тензоры  $\tau'$  Хуффа

$$\left. \begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \lambda_{\lambda\mu} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\lambda} + \epsilon_{\lambda\mu\nu}, \\ \eta_{\mu\nu} &= \lambda_{\lambda\mu} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\mu} \delta_{\nu\lambda} + \epsilon_{\lambda\mu\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (14.4)$$

а  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — полностью антисимметричный тензор Леви — Чивита в евклидовом пространстве, т. е.  $\epsilon_{0123} = \epsilon^{0123} = 1$ . Легко установить, что

$\eta_{0\mu\nu}=0$  и существенными компонентами являются только  $\eta_{a\mu\nu}$ ,  $a=1, 2, 3$ . Причем

$$\left. \begin{aligned} \eta_{(ab)}^{(\pm)} &= -\eta_{(ab)}^{(\pm)} = \mp \delta_{ab}, \\ \eta_{[bc]}^{(\pm)} &= \varepsilon_{abc}, \quad a, b, c=1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

а из (14.4) следует (анти)самодуальность тензоров г'Хуфта:

$$\eta_{a\mu\nu}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_a^{\alpha\beta} \quad (14.6)$$

Из (14.3) легко получить

$$\bar{Q}Q = Q\bar{Q} = \det Q \cdot \hat{1} = Q_\mu Q^\mu \cdot \hat{1},$$

и следовательно, для всякого ненулевого кватерниона определен обратный элемент

$$Q^{-1} = \bar{Q} (Q_\mu Q^\mu)^{-1}.$$

Множество кватернионов единичной длины  $\bar{Q}Q=1$  образует группу (относительно матричного умножения), которая изоморфна группе  $SU(2)$ . В дальнейшем мы будем часто использовать этот факт, представляя матрицы калибровочных преобразований  $g \in SU(2)$  единичными кватернионами (14.2). Также  $SU(2)$ -калибровочное поле  $A_\mu$  можно рассматривать как чисто мнимое кватернионное поле на  $M$ .

Рассмотрим модель евклидова янг-миллсовского поля  $A_\mu$  без источников. Его функционал действия

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \quad (14.7)$$

является положительно определенным, и поэтому для того чтобы он был конечным, калибровочное поле должно достаточно быстро

$$E_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (14.8)$$

Поскольку  $M$  — евклидово пространство, как и в солитонных моделях (см. § 10), из (14.8) получаем, что калибровочный потенциал для поля с конечным действием есть чистая калибровка (вакуумное калибровочное поле)

$$A_\mu(x) \rightarrow g \partial_\mu g^{-1}, \quad g(x) \in SU(2), \quad (14.9)$$

на бесконечности  $|x| \rightarrow \infty$ .

Бесконечность в  $M$  будем описывать как сферу  $S^3_\infty$  с радиусом  $R = x_\mu x^\mu \rightarrow \infty$ , рассматривая ее как границу евклидова пространства  $\partial M = S^3_\infty$ . Тогда (14.8) — (14.9) задают граничные условия для конфигураций калибровочного поля на  $M$ . Как уже отмечалось

в § 5, нетривиальное поведение полей на границе характеризуется топологическими зарядами, которые наряду с обычными (нетеровскими) законами сохранения позволяют провести классификацию классических решений уравнений поля. В данном случае поля на  $\partial M$  определяются отображениями

$$g: S^3_\infty \rightarrow SU(2),$$

множество которых распадается на классы гомотопически эквивалентных калибровочных преобразований. Поскольку  $SU(2) \approx S^3$ , гомотопическая группа

$$\pi_3(SU(2)) = \mathbf{Z},$$

и классы эквивалентности полей на границе можно характеризовать целым числом  $n \in \mathbf{Z}$ . Последнее естественно ввести как степень отображения  $S^3 \rightarrow S^3$ .

Для этого перейдем в  $M$  к 4-мерным сферическим координатам

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= r \cos \chi, & x^1 &= r \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \\ x^2 &= r \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & x^3 &= r \sin \chi \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

Тогда координаты на  $S^3_\infty$  (при  $r=R \rightarrow \infty$ ) задаются углами

$$0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (14.11)$$

Обозначим  $y^1 = \chi, y^2 = \theta, y^3 = \varphi$ .

Аналогично введем параметризацию матриц  $g \in SU(2)$ , рассматриваемых как вещественные единичные кватернионы

$$g = g_\mu \tau^\mu, \quad g_\mu g^\mu = 1,$$

посредством трех углов

$$\hat{y}^i = \{\hat{\chi}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}, \quad i=1, 2, 3,$$

таким образом, что

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \cos \hat{\chi}, & g_1 &= \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\varphi}, \\ g_2 &= \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\varphi}, & g_3 &= \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta}. \end{aligned} \right\}$$

Тогда произвольное  $SU(2)$ -калибровочное преобразование можно записать в виде

$$g = \left( \begin{array}{c|c} \cos \hat{\chi} + i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}} \\ \hline -\sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}} & \cos \hat{\chi} - i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} \end{array} \right). \quad (14.12)$$

На границе  $S^3_\infty$  евклидова пространства  $M$  функции  $\hat{y}(y)$  определяют отображение  $S^3 \rightarrow S^3$ , степень которого  $\deg \hat{y}(y)$  показывает, сколько раз координаты  $\hat{y}^i$  пробегают интервалы (14.11), т. е. зна-

чения на сфере  $S^3 \approx SU(2)$ , когда координаты  $y^i$  один раз пробегают значения на сфере  $S^3_\infty$ . Поскольку

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} ds = 1,$$

степень отображения определяется из соотношения

$$n = \deg \hat{y}(y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} d^3 \hat{y} \sin^2 \hat{\chi} \sin \hat{\theta} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} d^3 y \sin^2 \hat{\chi} \sin \theta |J|, \quad (14.13)$$

где

$$J = \det(\partial y^i / \partial y^j)$$

— якобиан отображения  $\hat{y}(y)$ , а  $\int_{S^3}$  — область интегрирования по переменным  $\hat{y}$ . Отметим, что степень  $n=1$  имеет тождественное отображение  $\hat{\chi}=\chi$ ,  $\hat{\theta}=\theta$ ,  $\hat{\varphi}=\varphi$ , тогда как произвольное значение  $n$  достигается отображением

$$\hat{\chi}=\chi, \quad \hat{\theta}=\theta, \quad \hat{\varphi}=n\varphi$$

(т. е. сфера  $S^3_\infty$  «накручивается»  $n$  раз на  $S^3 \approx SU(2)$  вокруг оси  $x^3=z$ ).

Пользуясь (14.12), выпишем в явном виде соответствующие  $SU(2)$ -матрицы. Для отображения с  $n=1$  имеем

$$g = \frac{\sigma^\mu x_\mu}{(x_\nu x^\nu)^{1/2}} = \left( \begin{array}{c|c} \cos \chi + i \sin \chi \cos \theta & \sin \chi \sin \theta e^{i\varphi} \\ \hline -\sin \chi \sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \chi - i \sin \chi \cos \theta \end{array} \right), \quad (14.14)$$

а в случае произвольного  $n$  (когда  $\varphi=n\varphi$ )

$$g = (g)^n.$$

Аналогичное  $n$ -кратное «накручивание» может иметь место вокруг любой другой оси, например, при отображениях  $\hat{\chi}=n\chi$ ,  $\hat{\theta}=\theta$ ,  $\hat{\varphi}=\varphi$ , или  $\hat{\chi}=\chi$ ,  $\hat{\theta}=n\theta$ ,  $\hat{\varphi}=\varphi$ . Степень  $n=0$  получается, когда вся сфера  $S^3_\infty$  отображается в одну точку из  $SU(2)$ , например, при  $\hat{\chi}=0$ ,  $\hat{\theta}=\hat{\varphi}$ . Тогда соответствующая  $SU(2)$ -матрица  $g=1$ .

Как известно, степень отображения является гомотопическим инвариантом, поэтому произвольное  $SU(2)$ -преобразование с заданным  $n$  можно получить из описанных выше примеров посредством гомотопии.

Формула (14.13) определяет топологический инвариант  $n$  для случая, когда матрица  $SU(2)$  параметризуется углами  $\hat{y}^i$  согласно (14.12), а граничная сфера  $S^3_\infty$  описывается координатами (14.10). Перепишем (14.13) в инвариантной форме, которая не зависит ни

от выбора параметризации на группе  $SU(2)$ , ни от координат в  $M$ . Для этого заметим, что из (14.12) можно получить

$$g^+ = g^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\cos \hat{\chi} - i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta}}{\sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}}} & \frac{-\sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{i\hat{\varphi}}}{\cos \hat{\chi} + i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta}} \\ \hline & \end{array} \right),$$

откуда после сложных вычислений находим

$$\sin^2 \hat{\chi} \sin \hat{\theta} = \frac{1}{2} \text{Tr} [(g\partial_1 g^{-1})(g\partial_2 g^{-1})(g\partial_3 g^{-1})], \quad (14.15)$$

где мы обозначили

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i=1, 2, 3.$$

Подставляя (14.15) и выражение для якобиана

$$J = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial \hat{y}^j}{\partial y^i} \frac{\partial \hat{y}^k}{\partial y^i} \frac{\partial \hat{y}^3}{\partial y^k}$$

в (14.13), получаем

$$n = \frac{1}{48\pi^2} \int_{S^3_\infty} d^3 y \varepsilon^{ijk} \text{Tr} [(g\partial_i g^{-1})(g\partial_j g^{-1})(g\partial_k g^{-1})], \quad (14.16)$$

где фактор  $1/6$  учитывает  $3!$  одинаковых членов под интегралом в (14.16). Принимая во внимание  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}$ , выводим из (14.16) искомого инвариантное выражение

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} d\sigma_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \text{Tr} [(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})(g\partial_\mu g^{-1})], \quad (14.17)$$

где  $d\sigma_\mu$  — элемент поверхности  $S^3_\infty$ ,  $\mu, \nu, \alpha, \beta=0, \dots, 3$ . Оно имеет один и тот же вид в любых координатах в пространстве  $M$ .

Полезно доказать следующее свойство аддитивности величины (14.17). Обозначим

$$I^\mu [g] = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \text{Tr} [(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})(g\partial_\mu g^{-1})].$$

Несложно убедиться, что для  $g=g_1 g_2$  имеет место тождество

$$I^\mu [g_1 g_2] = I^\mu [g_1] + I^\mu [g_2] - 3\partial_\nu \{ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [(g_1^{-1} \partial_\alpha g_1)(g_2^{-1} \partial_\beta g_2)] \}.$$

Тогда, поскольку из (14.17) следует

$$n [g] = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} d\sigma_\mu I^\mu [g],$$

находим, что для произведения калибровочных преобразований степени отображений складываются:

$$n[\tau_1 g_2] = n[\tau_1] + n[g_2]. \quad (14.18)$$

Вернемся теперь к калибровочным полям на  $M$ . Согласно (14.9) поведение поля на бесконечной сфере  $S^3_\infty = \partial M$  описывается калибровочным преобразованием  $g(x)$ ,  $x \in S^3_\infty$ . Следовательно, конфигурация поля на границе характеризуется целым числом — топологическим зарядом (14.16). Это число  $n$  классифицирует калибровочные поля и внутри  $S^3_\infty$ , т. е. на всем пространстве  $M$ . Действительно, пусть поля  $A_n$  и  $A_{n'}$  на  $M$  характеризуются на бесконечности числами  $n$  и  $n' \neq n$ . Тогда они принадлежат разным гомотопическим классам, т. е. их нельзя непрерывным образом деформировать друг в друга, поскольку это приводило бы к гомотопии соответствующих калибровочных преобразований на  $S^3_\infty$ , а это невозможно в силу  $n' \neq n$ .

Данный факт можно установить иначе, переписав выражение (14.17) в виде интеграла по  $M$  от характеристической формы Чженя  $c_2$  (см. пример 13.5). Для этого заметим, что форма

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F)$$

является внешним дифференциалом  $c_1 = dC$  от так называемого вторичного характеристического класса Чженя — Саймонса

$$C = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \left( A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (14.19)$$

Интеграл от формы  $c_2$  по шару  $D^3$  внутри сферы  $S^3_\infty$  называется индексом Понтрягина (числом Чженя  $q$  многообразия  $D^3$  с границей), и с помощью (14.19) по теореме Стокса находим

$$q = - \int_M c_2 = - \int_{\partial M} C = \int_{S^3_\infty} \text{Tr} \left( \frac{1}{3} dg g^{-1} \wedge (g dg^{-1}) \wedge (g dg^{-1}) \right), \quad (14.20)$$

где учтено, что  $F=0$  и  $A = g dg^{-1}$  на  $S^3_\infty$ . Сравнивая (14.20) с (14.17), получаем  $q = n$ . Таким образом, топологический заряд инстантонных решений является целочисленным и равен степени отображения

$$g(x): S^3_\infty \rightarrow \text{SU}(2).$$

Поскольку классы Чженя являются топологическими инвариантами, вариация  $\delta c_2 = 0$  для произвольных локальных деформаций поля  $\delta A$  внутри  $S^3_\infty$ .

Полезно записать приведенные выше величины в координатах в  $M$ :

$$c_2 = \frac{1}{32\pi^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} d^4x,$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu J^\mu,$$

где векторное поле

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left( A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right) \quad (14.21)$$

является дуальным к 3-форме Чженя — Саймонса  $C$  (с точностью до постоянного множителя).

Прежде чем приступить к рассмотрению простейших инстантонных решений, необходимо сделать важное замечание. Мы определяли инстантон как регулярное решение уравнений Янга — Миллса. Регулярность в данном случае понимается как существование на  $M$  гладкой 2-формы  $F$  напряженности калибровочного поля, что гарантирует возможность вычисления действия  $S$  и топологического заряда  $q$  на таких решениях. При этом 1-форма потенциала  $A$ , которая не считается в отличие от  $F$  физической наблюдаемой, не обязательно существует всюду внутри  $S^3_\infty$ . Однако условия конечности действия и регулярности  $F$  приводят к тому, что в точках сингулярности  $A$  напряженность  $F$  должна обращаться в 0, т. е. потенциал имеет вид чистой калибровки  $A \sim g dg^{-1}$  с некоторой сингулярной в данной точке матрицей  $g(x)$ .

Выше при выводе (14.20) мы предполагали, что  $A$ , так же как и  $F$ , регулярна всюду на  $M$ . Если учесть сделанное замечание, то приходим к выводу, что форма  $C$  также может не существовать всюду на  $M$  в отличие от формы  $c_2$ , которая не содержит  $A$ . Поэтому, применяя в (14.20) теорему Стокса, надо включить в границу  $\partial M$  не только бесконечную сферу  $S^3_\infty$ , но и поверхность  $\Sigma$ , являющуюся объединением сфер малого радиуса, внутри которых содержатся сингулярные точки  $A$ , т. е.

$$\begin{aligned} q &= - \int_M c_2 = \int_M d^4x \frac{1}{64\pi^2} F_{\alpha\mu\nu}^a F_{\alpha\alpha\beta}^a \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} \text{Tr} (g dg^{-1} \wedge g dg^{-1} \wedge g dg^{-1}) + \\ &+ \frac{1}{24\pi^2} \int_\Sigma \text{Tr} (\tilde{g} d\tilde{g}^{-1} \wedge \tilde{g} d\tilde{g}^{-1} \wedge \tilde{g} d\tilde{g}^{-1}). \end{aligned} \quad (14.22)$$

При получении последнего члена был использован тот факт, что



$A \sim \tilde{g} d\tilde{g}^{-1}$  на сфере  $\Sigma$  (или объединении сфер), имеющей исчезающе малый радиус вокруг сингулярной точки.

Формула (14.22) делает возможным использование всюду в  $M$  произвольных калибровочных преобразований, что часто упрощает вычисления. Левая часть (14.22) явно калибровочно инвариантна и гарантирует нам, что мы имеем дело с топологическим зарядом  $q$ . В то же время правая часть (14.22) предоставляет значительную свободу в интерпретации источника топологической нетривиальности решения.

С одной стороны, с помощью (сингулярного в общем случае) калибровочного преобразования

$$A \rightarrow g_1 A g_1^{-1} + g_1 d g_1^{-1}$$

всегда можно сделать поле  $A$  регулярным всюду внутри  $S^3_\infty$ . Тогда последний член в (14.22) равен нулю (т. е. приходим к (14.20)), и тем самым  $q$  целиком определяется нетривиальным поведением калибровочного поля на границе  $S^3_\infty$ .

С другой стороны (тоже в общем случае сингулярным), калибровочным преобразованием любое  $A$  на  $M$  можно привести к виду, когда на бесконечности  $A \sim g_0 d g_0^{-1}$ , где  $g_0$  — некоторая фиксированная (подчеркнем это) матрица, например  $g_0 = 1$ . Тогда допустимо стянуть  $S^3_\infty$  в точку и перейти к компактификации Александра  $M$  как 4-мерной сферы  $S^4$ . При этом нетривиальное значение  $q$  будет полностью определяться вторым слагаемым в (14.22), т. е. поведением калибровочного поля внутри  $S^3_\infty$ , или, эквивалентно, структурной расслоения над  $S^4$ . Последнее (замена плоского  $M$  на  $S^4$ ) удобно тем, что база расслоения становится компактным многообразием. Причем в силу конформной инвариантности действия (14.7) компактифицированное  $M$  не только гомеоморфно, но и изометрично  $S^4$ , что легко устанавливается посредством стереографической проекции.

Перейдем к построению инстантонных решетчатых. В общем случае задача их получения довольно сложна и будет рассмотрена в следующем параграфе. Здесь мы ограничимся исследованием некоторых простейших решетчатых.

Условие стационарности действия (14.7) приводит к уравнению Янга — Миллса

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \varepsilon_{abc} A_\mu^b F_\nu^c F^{\mu\nu} = 0.$$

Для решетчатых этих уравнений с конечным действием имеет место асимптотика (14.9). Предположим, что асимптотическое калибровочное преобразование характеризуется индексом  $n=1$ , т. е. задается матрицей (14.14). Обозначим  $\hat{x}^\mu = x^\mu (x_\nu x^\nu)^{-1/2}$ , так что  $\hat{x}_\mu \hat{x}^\mu = 1$ ; тогда  $g(x) = \hat{x}_\mu \sigma^\mu$ . Будем искать инстантонное решение в виде

$$A = f(x^\mu) g d g^{-1}, \quad (14.23)$$

где функция  $f(x^\mu)$  обладает на бесконечности  $|x| \rightarrow \infty$  асимптотической  $f \rightarrow 1$ . Анзац (14.23) еще не означает, что индекс Понтрягина на данной конфигурации равен 1, так как  $f$  может иметь сингулярности внутри  $S^3_\infty$ . Проиллюстрируем это для сферически симметричного случая.

Пусть  $f = f(x^2)$ ,  $x^2 = x_\mu x^\mu$  и  $A = A_\mu^a t_a dx^\mu$ . С учетом

$$g d g^{-1} = \frac{x^\mu}{x^2} \varepsilon^{(-)}_{\mu\alpha\nu} \hat{x}^\nu$$

(см. (14.3)) найдем коэффициенты  $SU(2)$  связности

$$A_\mu^a = h(x^2) \eta_{\mu\alpha\nu}^{(-)} x^\nu, \quad (14.24)$$

где введено обозначение  $h = 2fx^{-2}$ . Вычисление тензора напряженности

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

для калибровочного поля (14.24) упрощается при использовании тождества

$$\varepsilon^{abc} \eta_{bd\mu\nu} \eta_{c\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta^a - \delta_{\mu\beta} \eta^a_{\alpha\nu} - \delta_{\nu\alpha} \eta^a_{\mu\beta} + \delta_{\alpha\beta} \eta^a_{\mu\nu}, \quad (14.25)$$

где  $\eta$  — любой из тензоров т'Хуфта (14.4). В результате находим

$$F_{\mu\nu}^a = (h^2 x^2 - 2h) \eta^a_{\mu\nu} + (h^2 + 2h') x^\alpha (x_\mu \eta^a_{\nu\alpha} - x_\nu \eta^a_{\mu\alpha}), \quad (14.26)$$

где штрих обозначает производную по  $x^2$ , т. е.  $h' = \frac{dh}{dx^2}$ .

Подстановка (14.25), (14.26) в уравнения Янга — Миллса приводит к дифференциальному уравнению

$$x^2(2h'' - h^3) + 3(2h' + h^2) = 0. \quad (14.27)$$

Мы не станем искать общее решение данного нелинейного уравнения (отметим, что в соответствии со сделанными предположениями (14.23), (14.24) нам требуется решение, убывающее на бесконечности как  $h \sim \dots$ ). Однако легко проверить, что (14.27) удовлетворяют следующие три функции:

$$h_{(S)}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (14.28)$$

$$h_{(S')}^{\prime}(x) = \frac{2}{x^2 + C}, \quad (14.29)$$

$$h_{(S'')}^{\prime\prime}(x) = \frac{2c'}{x^2(x^2 + c')}, \quad (14.30)$$

где  $c$  и  $c'$  — произвольные константы. Исследуем свойства этих решений.

Решение (14.28) не является регулярным. Для него имеем

$$f(s) = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$A = \frac{1}{2} g^{(1)} dg^{(-1)}.$$

Хотя последнее равенство напоминает чистую калибровку, однако таковой не является, что видно из выражения для напряженности

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{x^2} \left\{ \eta_{\mu\nu}^{(-)} + \hat{x}^a (g_{\nu\mu}^a \hat{x}_\mu - \eta_{\mu\nu}^a \hat{x}_\nu) \right\}.$$

Действие  $S$  для такого поля расходуется как в нуле, так и на бесконечности, и следовательно,  $h(s)$  не дает нам искомого инстантонного решения. Примечательно, однако, сам факт существования таких простых (кулоновского типа) точных решений нелинейных уравнений Янга — Миллса.

Анализ решения (14.29) начнем со случая  $c=0$ . Тогда

$$h(r) = \frac{2}{x^2}, \quad f(r) = 1,$$

и калибровочный потенциал есть в точности чистая калибровка

$$A_\mu = g \partial_\mu g^{-1}.$$

Как следствие,  $F_{\mu\nu}^a = 0$  всюду на  $M$  и действие конечно (равно нулю), т. е. это инстантон. При этом форма Понтрягина тривиальна  $c_2 = 0$ , и значит,  $q=0$ . Последнее никак не противоречит тому, что  $A_\mu$  характеризуется на бесконечности калибровочным преобразованием  $g$  с индексом  $n=1$ , так как поле  $A_\mu^a$  сингулярно в  $x^\mu = 0$ . Задав  $\Sigma$  как сферу малого радиуса вокруг начала координат, получаем из (14.22), что  $q = 1 + (-1) = 0$  в полном согласии с  $c_2 = 0$ .

Пусть теперь  $c \neq 0$ , тогда

$$f(r) = \frac{x^2}{x^2 + C}.$$

При  $c < 0$  как потенциал (14.24), так и напряженность поля (14.26) имеют сингулярности на сфере  $x^2 = -c$ . В результате действие  $S$  расходится это не инстантон. Однако при  $c = \lambda^2 > 0$  поле всюду регулярно в  $M$  и описывается следующим потенциалом и тензором напряженности:

$$A = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} g^{(1)} dg^{(-1)}, \quad A_\mu^a = \frac{2}{x^2 + \lambda^2} \eta_{\mu\nu}^a x^\nu, \quad (14.31)$$

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{4\lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} \eta_{\mu\nu}^a. \quad (14.32)$$

Таким образом, применима формула (14.20), и находим индекс Понтрягина  $q = n = 1$ . Полученное решение называется *инстантоном Белавина — Полякова — Шварца — Тьюкина (БПШТ)* [21]. Нетрудно убедиться, что для него действие конечно и  $S = 8\pi^2$ .

Рассмотрим некоторые свойства инстантона БПШТ. Во-первых, из (14.32) становится понятным, почему он называется инстантоном: поле  $F_{\mu\nu}^a$  имеет максимум в  $x^\mu = 0$  и быстро спадает с ростом  $|x|$ , т. е. решение локализовано, причем как в пространстве, так и в минимуме времени. Параметр  $\lambda$  задает значение максимума поля. Далее, уравнения Янга — Миллса инвариантны относительно трансляций координат  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ . Поэтому потенциал

$$A = \frac{(x - x_1)^2}{(x - x_1)^2 + \lambda^2} g_1^{(1)} dg_1^{(-1)}, \quad (14.33)$$

где

$$g_1^{(1)} = \frac{(x^\mu - x_1^\mu) a_\mu}{|x - x_1|},$$

и  $x_1^\mu = \text{const}$ , также является решением уравнений Янга — Миллса и описывает инстантон, расположенный в точке с координатами  $x_1^\mu$ . Можно показать, что найденное таким образом *5-параметрическое семейство* (14.33) (параметры суть числа  $\lambda, x_1^\mu$ ) является наиболее общим инстантонным решением с зарядом  $q = 1$ .

Вообще, из физических соображений можно ожидать, что инстантон с произвольным  $q$  будет описываться полевой конфигурацией с выраженными максимумами в  $|q|$  точках пространства — времени  $x_1^\mu, \dots, x$  и быстрым убыванием при удалении от  $x_i^\mu, i = 1, \dots, |q|$ . Нетрудно подсчитать полное число параметров, задающих такую конфигурацию: это  $4|q|$  координат  $x_i^\mu$  максимумов,  $|q|$  параметров типа  $\lambda_i$ , задающих значения максимумов, и еще  $3|q|$  параметров, определяющих «направление» вектора напряженности  $F_{\mu\nu}^a$  (по индексу  $a=1, 2, 3$ ) в изотопическом пространстве в каждом из максимумов. Итого получили  $8|q|$  параметров, но из них надо вычесть 3, отвечающих глобальному калибровочному преобразованию, при котором, очевидно, не меняется физика конфигурации. Таким образом, наш подсчет показывает, что общее  $q$ -инстантонное решение уравнений Янга — Миллса зависит от  $8|q| - 3$  произвольных параметров (более строго это число обосновывается в работах [22, 23]).

Другим важным свойством инстантона БПШТ является то, что напряженность поля оказывается (антисимметричным тензором

$$F_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}^* = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (14.34)$$

где знак минус отвечает решению (14.31) с  $q = +1$ , а знак плюс соответствует  $q = -1$ . Это следует из свойств тензоров Г'Хуфта

(14.6). Уравнение (14.34) называется *уравнением самодуальности*, и оно играет фундаментальную роль в построении общих инстантонных решений. Действительно, используя тождество

$$(F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu}^*)^2 = 2F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \pm \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

действие (14.7) при фиксированном  $q$  можно оценить снизу  $S \geq \mp 8\pi^2 q$ , и минимумы действия, на которых достигается равенство  $S = 8\pi^2 |q|$ , реализуются на (анти)самодуальных конфигурациях, удовлетворяющих (14.34). Более того, в силу тождества Бианки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\nu F_{\alpha\beta} = 0$$

любое решение (14.34) автоматически является решением уравнений Янга — Миллса  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ . Таким образом, задача получения инстантонов естественно сводится к рассмотрению уравнений самодуальности. Это приводит к значительным техническим упрощениям, поскольку (14.34) суть уравнения первого порядка в отличие от уравнений Янга — Миллса. Отметим, что пока не существует доказательства отсутствия иных (не самодуальных) решений с конечным действием. Тем не менее, поскольку все известные инстантонные решения самодуальны, мы в дальнейшем основное внимание уделим уравнению (14.34). Отметим, что все сказанное в данном абзаце относится и к калибровочным теориям с произвольной компактной группой  $G$ , не только  $SU(2)$ .

Замечательным следствием свойства самодуальности инстантонных полей является то (см. (14.34)), что тензор энергии — импульса

$$T^{\mu\nu} = -\text{Tr}(F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\delta^{\mu\nu} = 0$$

тождественно равен нулю на инстантонных конфигурациях. Данный факт обуславливает важную роль инстантонов в структуре вакуума калибровочных полей.

Поле 1-инстантона (14.33) регулярно всюду внутри  $S^3_\infty$ , а нетривиальное значение топологического заряда  $q=1$  объясняется его поведением на бесконечности. Перейдем, однако, к так называемой *сингулярной калибровке*

$$A' = gAg^{-1} + g dg^{-1}$$

с помощью преобразования  $g = g_1^{-1}$ . Нетрудно видеть, что в этой калибровке

$$A' = \frac{\lambda^2}{(x-x_1)^2 + \lambda^2} g_1^{-1} dg_1, \quad (14.35)$$

на бесконечности  $A' \sim g dg^{-1} = 0$ , тогда как в  $x=x_1$  потенциал сингулярен и имеет вид чистой калибровки  $A' \approx g_1^{-1} dg_1$ . При этом по-прежнему  $q = \pm 1$ , только это значение обеспечивается теперь вто-

рым слагаемым в правой части (14.22) — интегралом по сфере  $\Sigma$  вокруг сингулярности.

Калибровка (14.35) удобна тем, что  $M$  можно компактифицировать до  $S^4$ , отображая  $S^3_\infty$  с помощью стереографической проекции в один из полюсов  $S^4$ . Кроме того, в данной калибровке легче строить мультиинстантонные решения. Переходя к компонентной записи  $A' = A'_\mu{}^a t_a dx^\mu$ , находим для (14.35):

$$A'_\mu{}^a = \frac{2\lambda^2 \eta_{\mu\nu}^{(+)} (x^\nu - x_1^\nu)}{(x-x_1)^2 [(x-x_1)^2 + \lambda^2]} = -\eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial^\nu \ln \left( 1 + \frac{\lambda^2}{(x-x_1)^2} \right). \quad (14.36)$$

Хотя в формуле (14.36) появился самодуальный тензор т'Хуфта  $\eta$  (ср. с (14.31) — (14.32)), данное поле остается (антисамодуальным, как и (14.33)). В этом можно убедиться, дуализуя соответствующий тензор напряженности:

$$F'^a_{\mu\nu} = -\frac{4\lambda^2}{[(x-x_1)^2 + \lambda^2]} \times \\ \times \left\{ \eta_{\mu\nu}^{(+)} + \frac{2(x^\alpha - x_1^\alpha)}{(x-x_1)^2} [(x_\mu - x_{1\mu}) \eta_{\nu\alpha}^{(+)} - (x_\nu - x_{1\nu}) \eta_{\mu\alpha}^{(+)}] \right\}.$$

Прежде чем выписать мультиинстантонные решения, обратимся к решению (14.30). Сравнивая его с (14.36) (и полагая  $\lambda^2 = c'$ ), обнаруживаем, что (14.30) представляет собой самодуальный инстантон в сингулярной калибровке с  $q = -1$ . Таким образом, сферически симметричный анзац (14.23) — (14.24) позволил нам одновременно получить все инстантонные решения с низшими значениями топологического заряда  $q = 0, \pm 1$  (14.28) — (14.30).

$$\Phi = 1 + \frac{\lambda^2}{(x-x_1)^2}.$$

Тогда инстантон БПШТ в сингулярной калибровке имеет вид

$$A'_\mu{}^a = -\eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial^\nu \ln \Phi. \quad (14.37)$$

(пока мы всего лишь переписали еще раз (14.36), опустив штрих и переобозначив выражение под логарифмом). Подставляя (14.37) в уравнение Янга — Миллса, находим

$$\nabla_\mu F'^{\mu\nu a} = \eta_{\mu\nu}^{(+)} \dots [\partial_\mu (\Phi^{-1} \square \Phi) + 2\partial_\mu (\ln \Phi) \Phi^{-1} \square \Phi],$$

и эта величина обращается в нуль в силу того, что введенная скалярная функция удовлетворяет уравнению

$$\Phi^{-1} \square \Phi = 0. \quad (14.38)$$

Однако (14.33) имеет более общее решение, а именно:

$$\Phi = 1 + \sum_{i=1}^q \frac{\lambda_i^2}{(x - x_i)^2}, \quad (14.39)$$

$\lambda_i, x_i^{\mu}, i=1, \dots, q-5q$  построенных интегрирования. Потенциал (14.37), (14.39) называется *мультиинстанточным решением т'Хуфта* [51, 52]. Оно является естественным обобщением 1-инстантного БПШТ и описывает конфигурацию с  $q$  максимумами поля в точках  $x_1^{\mu}, \dots, x_2^{\mu}$ . Параметры  $\lambda_i$  задают значения этих максимумов.

Решение т'Хуфта сингулярно в точках  $x=x_i$ . Однако напряженность поля всюду регулярна, и сингулярности потенциала могут быть ликвидированы калибровочным преобразованием. Чтобы убедиться в этом, перелишем (14.37), (14.39) на языке форм

$$A = \sum_{i=1}^q \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x-x_i)^2} g_i^{-1} dg_i, \quad (14.40)$$

$$g_i = \frac{\sigma_i(x^{\mu} - x_i^{\mu})}{\Phi(x-x_i)^2} g_i^{-1} dg_i,$$

Анализ показывает, что на бесконечности  $A \sim 0$ , а в сингулярных точках поле есть чистая калибровка

$$A(x_i) \sim g_i^{-1} dg_i.$$

Используя это в (14.22), получаем, что нетривиальный топологический заряд возникает из второго интеграла в (14.22) по поверхности  $\Sigma$ , которая в данном случае является объединением сфер малого радиуса вокруг  $x_i^{\mu}$ . Тем самым  $5q$ -параметрическое решение т'Хуфта (14.37), (14.39), (14.40) имеет инстанточный заряд  $q$ . В отличие от случая  $q=1$  теперь сложнее показать, что тензор напряженности является антисамодуальным. Мы этого делать здесь не будем, а в следующем параграфе продемонстрируем, как решение т'Хуфта возникает в рамках общей конструкции Атья — Хиччина — Дринфельда — Манина (АХДМ), дающей все решения уравнений самодуальности.

В заключение покажем, что сингулярные решения т'Хуфта действительно могут быть устранены калибровочным преобразованием. Без ограничения общности рассмотрим случай  $q=2$ . Обозначим в (14.40)

$$a_i(x) = \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x-x_i)^2}, \quad i=1,2.$$

При  $x \rightarrow x_i$ , очевидно, имеем  $a_1 \rightarrow 1, a_2 \rightarrow 0$ , тогда как при  $x \rightarrow x_2$  аналогично  $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 1$ . При  $x \rightarrow \infty$  получаем  $a_i \rightarrow 0$ . Будем искать ка-

либровочное преобразование в виде  $g = g_2 g_* g_1$ , где  $g_*$  — некоторая постоянная  $SU(2)$ -матрица. Тогда для преобразованного потенциала  $A' = g A g^{-1} + g dg^{-1}$  находим

$$A' = (1 - a_1 - a_2) g dg^{-1} + a_1 g_2 g_2^{-1} + a_2 g_2 g_* g_1 g_2^{-1} d(g_2 g_1^{-1} g_*^{-1} g_2^{-1}). \quad (14.41)$$

Отмеченное выше поведение  $a_i(x)$  обуславливает, что при  $x \rightarrow \infty$  потенциал ведет себя как чистая калибровка  $A' \sim g dg^{-1}$ , при  $x \rightarrow x_1$  он регулярен

$$A'|_{x=x_1} \sim g_2 dg_2^{-1},$$

а при  $x \rightarrow x_2$  особенности  $A'$  описываются последним членом в (14.41). Однако регулярность  $A'$  в  $x=x_2$  можно обеспечить, выбрав постоянную матрицу

$$g_*^{-1} = g_1(x_2) = \frac{\sigma_1(x_1^{\mu} - x_2^{\mu})}{|x_1 - x_2|}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что  $A'$  регулярен всюду внутри  $S^4_{\infty}$ , а нетривиальное значение топологического заряда  $q=2$  теперь объясняется поведением на бесконечности  $A' \sim g dg^{-1}$ . В силу свойства (14.18) имеем  $n[g] = n[g_2 g_* g_1] = 2$ . Аналогично строятся калибровочные преобразования, устраняющие сингулярности потенциала т'Хуфта для произвольного  $q$ .

Решение (14.37) — (14.39) можно обобщить до так называемого  $(5q+4)$ -параметрического конформного семейства инстантов т'Хуфта [24], однако и тогда данное решение остается частным случаем общего  $(8q-3)$ -параметрического мультиинстанточного решения уравнений Янга — Миллса.

## § 15. АЛГЕБРАЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ИНСТАНТОНОВ

Как уже отмечалось, инстантоны играют существенную роль в квантовой теории калибровочных полей. Поэтому очень важно знать общее решение уравнений самодуальности (14.34) для произвольного значения топологического заряда  $q$ . Процедура построения таких решений была разработана Атья, Хиччином, Дринфельдом и Маниным [25] для любых компактных классических групп. В этом параграфе мы дадим элементарное введение в формализм АХДМ и применим его в калибровочной теории с группой  $SU(2)$ .

Отправным пунктом конструкции АХДМ является замечательное наблюдение Уорда [26], позволяющее связать самодуальное калибровочное поле с существованием некоторого векторского расслоения над пространством антисамодуальных плоскостей в комплексифи-

цированном компактифицированном 4-мерном евклидовом пространстве. Но прежде чем перейти к точным формулировкам, нам необходимо провести определенную вспомогательную работу, в частности, ознакомиться со *спинорами*.

### 15.1. Спиноры в евклидовом пространстве

Пусть  $M$  — 4-мерное евклидово пространство. Расстояние между точками  $M$ , задающимися четверкой чисел  $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ , определяется постоянной метрикой  $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ . Евклидова группа Лоренца  $SO(4)$  определяется обычным образом как группа линейных преобразований в  $M$ , оставляющая инвариантным расстояние

$$|x|^2 = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu. \quad (15.1)$$

На координатах  $M$  группа  $SO(4)$  реализуется векторным представлением посредством ортогональных матриц  $4 \times 4$ :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \Lambda^T \Lambda = \hat{1}. \quad (15.2)$$

*Спинорное пространство* определяется как 2-мерное комплексное векторное пространство  $S_2$ . Его элементами являются 2-компонентные спиноры

$$\psi^A = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad A=1,2.$$

Всюду далее индексы, обозначающиеся прописными латинскими буквами  $A, B, C, D, \dots$  пробегают значения 1,2. В пространстве  $S_2$  введено билинейное несингулярное внутреннее произведение  $S_2 \times S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , задаваемое антисимметричной матрицей

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда линейные преобразования  $S_2$ , оставляющие инвариантной форму

$$(\psi, \eta) = \varepsilon_{AB} \psi^A \eta^B = \psi^1 \eta^2 - \psi^2 \eta^1,$$

образуют группу  $SL(2, \mathbb{C})$  комплексных  $2 \times 2$ -матриц с определителем равным 1:

$$\psi^A \rightarrow \psi'^A = L^A_B \psi^B, \quad \det L = 1. \quad (15.3)$$

Элементы дуального спинорного пространства  $S_2^*$  — ковариантные спиноры  $\psi_A$  — преобразуются под действием  $L^{-1} \in SL(2, \mathbb{C})$ . Инвариантный спинор  $\varepsilon_{AB}$  позволяет установить изоморфизм  $S_2$  и  $S_2^*$ , который осуществляется посредством операции опускания и поднятия индексов

$$\psi_A = \psi^B \varepsilon_{BA}, \quad \psi^A = \varepsilon^{AB} \psi_B. \quad (15.4)$$

Здесь

$$\varepsilon^{AB} = -\varepsilon^{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и поскольку

$$\varepsilon^{A\bar{C}} \varepsilon_{BC} = \delta_B^A = \varepsilon_{CB} \varepsilon^{CA}, \quad (15.5)$$

условимся всегда придерживаться правила: понятие спинорного индекса осуществляется путем свертки с последним индексом  $\varepsilon^{AB}$ , а опускание — с помощью свертки с первым индексом  $\varepsilon_{AB}$ , как в выражении (15.4).

**Упражнение 15.1.** Доказать тождества

$$\varepsilon^{A\bar{B}} \varepsilon_{CD} = \delta_{CB}^A - \delta_{CD}^A \delta_B^D, \quad (15.6)$$

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC} \varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} = 0. \quad (15.7)$$

Определим дополнительно пространство  $\bar{S}_2$ , которое назовем сопряженным спинорным пространством. Его элементы — комплексно-сопряженные величины к спинорам из  $S_2$ . Обозначим их  $\psi^{\bar{A}} = (\psi^A)^*$  (это так называемые *пунктированные*, или *штрихованные*, спиноры). В  $\bar{S}_2$  также существует билинейное антисимметричное внутреннее произведение, естественно задаваемое матрицей  $\varepsilon_{\bar{A}\bar{B}} = (\varepsilon_{AB})^*$ .

Спиноры высших рангов определяются как элементы тензорных произведений

$$S_1 \otimes \dots \otimes S_2 \otimes \dots \otimes \bar{S}_2$$

и преобразуются под действием  $LS(2, \mathbb{C})$  как произведения 2-спиноров первого ранга.

Группа  $SL(2, \mathbb{C})$  является универсальной, покрывающей  $SO(4)$ , что дает возможность установить соответствие между законами преобразования (15.2) и (15.3) и тем самым придать спинорам смысл геометрических объектов на евклидовом пространстве — времени  $M$ . Такая связь задается с помощью фундаментального изоморфизма пространства  $S_2 \otimes \bar{S}_2$  и пространства  $M$ , описанного ниже.

Введем специальные объекты — спин-тензоры, представляющие собой компоненты обобщенных матриц Паули

$$\sigma_{A\bar{B}}^0 = \{\hat{1}, i\vec{v}\}, \quad (15.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{AB'}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_{A\bar{B}'}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_{AB'}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_{A\bar{B}'}^3 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

(здесь  $\hat{1}$  — единичная матрица,  $\vec{\tau}$  — обычные матрицы Паули). Введенные величины удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_{A'}^{\mu} \sigma^{\nu B C'} = \delta^{\mu\nu} \delta_{A'}^B + S_{A'}^{\mu\nu B} \quad (15.10)$$

$$\sigma_{A'}^{\mu} \sigma^{\nu B' C'} = \delta^{\mu\nu} \delta_{A'}^{B'} + S_{A'}^{\mu\nu B'} \quad (15.11)$$

где антисимметричные по  $\mu, \nu$  спин-тензоры  $S$  имеют следующие симметрии:

$$S_{AB}^{(-)} = S_{BA'}^{(-)}, \quad S_{A'B'}^{(+)} = S_{B'A'}^{(+)} \quad (15.12)$$

$$S_{AB}^{(-)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta AB}^{(-)} \quad (15.13)$$

$$S_{A'B'}^{(+)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta A'B'}^{(+)} \quad (15.14)$$

Используя определение (15.8)–(15.9), нетрудно получить  $S$  в явном виде

$$S_{AB}^{(-)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad S_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{AB}^{(03)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.15)$$

а остальные компоненты находятся из (15.13). Аналогично,

$$S_{A'B'}^{(+)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad S_{A'B'}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{A'B'}^{(03)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.16)$$

Соотношения (15.10)–(15.14) обычно принимают за исходные постулаты для установления изоморфизма  $S_2 \otimes \bar{S}_2$  и  $M$ . Последний позволяет определить любой 4-вектор из  $M$  как линейную комбинацию пар спиноров  $\psi^A \eta_{B'}$ . Так, точке  $x^\mu \in M$  сопоставляем спин-тензор

$$x_{AB'} = x_\mu \sigma_{AB'}^\mu \in S_2 \otimes \bar{S}_2 \quad (15.17)$$

и, наоборот, любому элементу  $\psi_{AB'} \in S_2 \otimes \bar{S}_2$  отвечает точка в  $M$  с координатами

$$\psi^\mu = \frac{1}{2} \sigma_{AB'}^\lambda \psi^{AB'} \in M. \quad (15.18)$$

Коэффициент  $1/2$  в (15.18) подобран так, чтобы отображения (15.17) и (15.18) были взаимно обратными, в частности, используя (15.10) и (15.11), можно убедиться, что

$$x^\mu = \frac{1}{2} \sigma_{AB'}^\mu x^{AB'} = \frac{1}{2} \sigma_{AB'}^\mu \sigma^{\nu AB'} x_\nu = x^\mu. \quad (15.19)$$

Полезно привести явный вид  $x_{AB'}$  для конкретного выбора спин-тензоров (15.9):

$$x_{AB'} = \begin{pmatrix} x^0 + ix^1 & x^2 + ix^3 \\ -x^2 + ix^3 & x^0 - ix^1 \end{pmatrix}. \quad (15.20)$$

При этом определитель матрицы  $x_{AB'}$  равен  $|x|^2 = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$  — длины вектора  $x^\mu$ . Это справедливо также и для любого другого выбора обобщенных матриц Паули, удовлетворяющих постулатам (15.10)–(15.14), поскольку

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{AB'CD'} x_{AC'} x_{BD'} = |x|^2. \quad (15.21)$$

Данный факт позволяет окончательно установить связь между сохраняющими  $|x|^2$  преобразованиями (15.2) группы  $SO(4)$  в  $M$  и сохраняющими определитель  $x_{AB'}$  преобразованиями (15.3) группы  $SL(2, C)$  в спинорном пространстве.

Из (15.10)–(15.14) можно вывести формулы для произведений  $\sigma$  и  $S$  спин-тензоров. Так, имеем

$$S_{A'}^{\mu\nu} \sigma_{CB'}^\lambda = (\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}) \sigma_{\rho AB'} \quad (15.22)$$

$$S_{B'}^{\mu\nu} \sigma_{AC'}^\lambda = (\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}) \sigma_{\rho AB'} \quad (15.23)$$

$$S_A \cdot S_{C'}^{(\pm)} = (\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}) \delta_A^\rho + \delta^{\alpha\nu} S_A^{\mu\beta} - \delta^{\mu\alpha} S_A^{\nu\beta} - \delta^{\nu\beta} S_A^{\mu\alpha} + \delta^{\mu\alpha} S_A^{\nu\beta} \quad (15.24)$$

$$S_{A'}^{\mu\nu} \cdot S_{C'}^{(\pm)} = (\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}) \delta_{A'}^\rho + \delta^{\alpha\nu} S_{A'}^{\mu\beta} - \delta^{\mu\alpha} S_{A'}^{\nu\beta} - \delta^{\nu\beta} S_{A'}^{\mu\alpha} + \delta^{\mu\alpha} S_{A'}^{\nu\beta} \quad (15.25)$$

**Упражнение 15.2.** Доказать соотношения (15.22)–(15.25).  
Указание: сравнивая (15.9) с (15.15), убедиться, что

$$S_{A'}^{\mu\nu} = \eta^{a\mu\nu} \sigma_a,$$

где  $a=1, 2, 3$  и  $\sigma_a = i\tau_a$ , а  $\eta^{a\mu\nu}$  — уже известный самодуальный тензор г'Хуфта (14.4).

Из (15.24) и (15.25) вытекает, что

$$\frac{1}{2} S_{A'}^{\mu\nu} \sigma_a, \quad \frac{1}{2} S_{A'}^{\nu\mu} \sigma_a \quad (15.26)$$

можно рассматривать как генераторы представлений группы Лоренца  $SO(4)$  соответственно на пространствах штрихованных и не-

штрихованных спиноров. При этом, складывая (15.22) с (15.23), получаем тождество

$$(\delta^{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta^{\nu\lambda}\delta_{\rho\lambda})(\sigma_{AB}^{\nu} + \frac{1}{2}S_{A'}^{(\nu)\mu\nu C}\sigma_{CB}^{\lambda} + \frac{1}{2}C_{B'}^{(\mu\nu C)\lambda}\sigma_{AC}^{\lambda}) = 0, \quad (15.27)$$

которое показывает, что фундаментальные спин-тензоры являются инвариантными объектами относительно преобразований Лоренца.

Более подробно со спинорами в пространстве Минковского можно познакомиться в работе [27], а евклидов вариант спинорной теории рассматривается в [26]. Прежде чем мы перейдем к следующему разделу, необходимо, однако, сделать несколько замечаний.

Во-первых, установленное выше соответствие между спинорами и точками пространства  $M$ , легко обобщается на соответствие между спинорными полями и тензорными полями на  $M$ . Последнее, как известно, можно рассматривать как сечения тензорных производений касательных и кокасательных расслоений над  $M$ . Аналогично, спинорные поля (например,  $\psi_A(x)$ ,  $x \in M$ ) естественно интерпретируются как сечения спинорного расслоения над  $M$  со структурной группой  $SL(2, \mathbb{C})$  и типичным слоем  $S_2$ . Поскольку метрика  $\delta_{\mu\nu}$  является абсолютным элементом ( $M$  — плоское и гравитационное поле отсутствует) и  $T_x(M) \approx M$ , изоморфизм между  $(S_2 \otimes \bar{S}_2)_x$  и  $T_x(M)$  устанавливается с помощью тех же (постоянных на  $M$ ) обобщенных матриц Паули (15.8) — (15.9). В частности, векторам голономного базиса  $\partial_\mu$  можно сопоставить спинорные дифференциальные операторы

$$\partial_{AB'} = \sigma_{AB'}^{\mu} \partial_\mu.$$

Если над  $M$  задано векторное расслоение, сечениями которого являются материальные поля, преобразующиеся под действием калибровочной группы  $G$ , и  $A_\mu$  — соответствующее калибровочное поле (принимая значения в алгебре Ли группы  $G$ ), то ковариантной производной  $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  сопоставляется оператор

$$\nabla_{AB'} = \sigma_{AB'}^{\mu} \nabla_\mu, \quad (15.28)$$

который действует на спинорные поля, преобразующиеся дополнительно по представлению группы  $G$ .

Другое замечание касается пространства  $M$ . Как нетрудно видеть, мы нигде выше не оговаривали, что координаты  $x^\mu$  вещественные. В первую очередь это связано с тем, что в рассматриваемой далее конструкции АХДМ используется комплексифицированное  $M$ . Кроме того, ясно, что отображения (15.17) и (15.18) не являются изоморфизмом для вещественного  $M$ . Условие вещественности вектора  $\psi^\mu$  легко найти: для этого матрица

$$\psi = [\psi^{AB}] \in S_2 \otimes \bar{S}_2$$

должна удовлетворять условию  $\epsilon\psi^*\epsilon = -\psi$ , где  $*$  — комплексное сопряжение, а  $\epsilon = \|\epsilon_{AB}\|$ . Напомним, что в псевдоевклидовом случае с помощью обобщенных матриц Паули устанавливается изоморфизм пространства Минковского и подпространства эрмитовых матриц из  $S_2 \otimes \bar{S}_2$ .

**Упражнение 15.3.** Доказать следующие тождества для свертков спин-тензоров  $\sigma$  и  $S$ :

$$\sigma_{AB'}^{\mu} \sigma_{\mu C D'} = 2\epsilon_{AC} \epsilon_{B' D'}, \quad (15.29)$$

$$S_{A'}^{(\nu)\mu\nu C} S_{\mu\nu C}^{(D)} = 4(\epsilon_{AC} \epsilon^{ED} + \delta_A^D \delta_C^E), \quad (15.30)$$

$$S_{A'}^{(\mu\nu C)\lambda} S_{\mu\nu C}^{(D')} = 4(\epsilon_{A' C'} \epsilon_{B' D'} + \delta_{A'}^{D'} \delta_{C'}^E). \quad (15.31)$$

## 15.2. Самодуальные плоскости и метод Уорда

Рассмотрим в комплексном пространстве  $M$  произвольную плоскость. Эта 2-мерная поверхность задается в 4-мерном евклидовом пространстве системой линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= a_{11}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3, \\ b_2 &= a_{21}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3, \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

где  $b$  и  $a$  — постоянные коэффициенты. Найдем общий вид этих коэффициентов (и следовательно, форму уравнений (15.32)), для которых плоскость является (анти)самодуальной. Последнее условие означает, что бивектор площади  $V_1^\mu V_2^\nu - V_2^\mu V_1^\nu$ , построенный как внешнее произведение двух линейно независимых векторов  $V_1^\mu$  и  $V_2^\mu$ , касательных к плоскости, является (анти)самодуальным, т. е.

$$V_1^\mu V_2^\nu - V_2^\mu V_1^\nu = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (V_1^\alpha V_2^\beta - V_2^\alpha V_1^\beta). \quad (15.33)$$

Сворачивая (15.33) с  $V_1$  и  $V_2$  и учитывая их линейную независимость, получаем, что

$$V_1^\mu V_{1\mu} = V_2^\mu V_{2\mu} = V_1^\mu V_{2\mu} = 0 \quad (15.34)$$

Таким образом, любая (анти)самодуальная плоскость является изотропной, т. е. произвольный вектор, лежащий на ней, имеет нулевую евклидову длину. Поскольку в вещественном  $M$  такой вектор сам равен нулю, мы и приходим к необходимости рассматривать комплексифицированное  $M$ , координаты которого  $x^\mu$  суть четверки комплексных чисел.

Матрица  $2 \times 4$ , составленная из коэффициентов  $a_{1\mu}$ ,  $a_{2\mu}$  в (15.32), очевидно, имеет ранг 2 (поскольку в противном случае первая строка  $a_{1\mu}$  пропорциональна  $a_{2\mu}$ , и (15.32) тогда не определяет плоскость). Без ограничения общности предположим, что отличен от

нуля минор, составленный из коэффициентов при  $x^0$  и  $x^3$ . Запишем (15.32) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{13} \\ a_{20} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (15.35)$$

Поскольку матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{13} \\ a_{20} & a_{23} \end{pmatrix}$$

невырождена, домножим (15.35) на  $A^{-1}$  и разрешим в явном виде относительно  $x^0$  и  $x^3$ :

$$\begin{aligned} x^0 &= ax^1 + bx^2 + c, \\ x^3 &= \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma, \end{aligned} \quad (15.36)$$

где  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  — некоторые постоянные. Таким образом, переменные  $x^1$  и  $x^2$  можно выбрать за внутренние координаты плоскости, и линейно независимые векторы касательных будут иметь компоненты

$$V_1^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^1} = (a, 1, 0, \alpha), \quad (15.37)$$

$$V_2^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^2} = (b, 0, 1, \beta). \quad (15.38)$$

Внешнее произведение (15.37) и (15.38) легко вычисляется, и условия (анти)самодуальности (15.33) приводят к

$$a = \pm \beta, \quad b = \mp \alpha, \quad a^2 - ab = \pm 1, \quad (15.39)$$

где верхний (нижний) знак отвечает самодуальной (антисамодуальной) плоскости, т. е. верхнему (нижнему) знаку в (15.33). Подставляя первых два соотношения в последнее, находим (для обоих случаев)

$$a^2 + b^2 = -1. \quad (15.40)$$

Общее решение (15.40) удобно выразить через произвольный параметр  $\delta$  в виде

$$a = \frac{i}{2} (\delta + \delta^{-1}), \quad b = \frac{1}{2} (\delta - \delta^{-1}). \quad (15.41)$$

Заметим, что значения  $\delta = 0$  и  $\delta = \infty$ , формально приводящие к расходящимся  $a$  и  $b$ , тем не менее допустимы, поскольку система (15.39) — (15.40) тождественно удовлетворяется на (15.41). Таким образом, мы нашли общий вид уравнений (анти)самодуальных

плоскостей в  $M$ . Запишем их в несколько иной, более удобной, форме.

Для этого подставим найденные  $a, b, \alpha, \beta$  ((15.41), (15.39)) в (15.36). После несложных тождественных преобразований находим для самодуального случая

$$\begin{pmatrix} \frac{x^1 - ix^3}{x^1 + ix^3} \mid \frac{x^2 - ix^1}{x^2 + ix^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(c - i\gamma) \\ c + i\gamma \end{pmatrix} \quad (15.42)$$

и соответственно для антисамодуальных плоскостей

$$\begin{pmatrix} \frac{x^1 + ix^3}{x^1 - ix^3} \mid \frac{-x^2 + ix^1}{x^2 - ix^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta(c + i\gamma) \\ c - i\gamma \end{pmatrix}. \quad (15.43)$$

Пусть  $\eta_A$  — ковариантный (штрихованный) спинор, такой, что

$$\delta = \eta/\gamma_2.$$

Тогда (15.42) можно окончательно записать в виде

$$x^{AB} \eta_B = \chi^A, \quad (15.44)$$

где  $\chi_A$  — некоторый контравариантный спинор. В силу произвольности  $\delta, c, \gamma, \chi^A$  — произвольный (в том числе может быть и нулевым), а  $\eta_A$  — произвольный ненулевой спинор (однако одна из его компонент может обращаться в нуль, что отвечает  $\delta = 0$  или  $\delta = \infty$ ). Аналогично вводя контравариантный спинор  $\eta^A$  с компонентами

$$\delta = -\eta^1/\eta^2,$$

уравнение (15.43) можно записать в виде

$$\chi_{AB} \eta^A = \chi_B, \quad (15.45)$$

где опять  $\chi_B$  — произвольный спинор, а  $\eta^A$  — любой ненулевой спинор.

Таким образом, множество самодуальных плоскостей в  $M$  можно параметризовать парой спиноров  $(\eta_B, \chi^A)$ , а множество антисамодуальных плоскостей — соответственно  $(\eta^A, \chi_B)$ . Для любой такой фиксированной пары плоскость определяется как решение спинорного уравнения (15.44) или (15.45). Такое описание плоскостей неоднозначно. Пару уравнений (15.32) можно «перемешать» посредством общего линейного преобразования, действуя слева матрицей  $GL(2, \mathbb{C})$  — и это будет все та же плоскость. На спинорном языке в (15.44), (15.45) этот произвол сводится к возможности домножить систему на любое ненулевое комплексное число и к  $SL(2, \mathbb{C})$ -произволу в задании спиноров (15.3). Последнее несущественно, поскольку это отвечает лоренцевой  $SO(4)$  инвариантности в  $M$ . В итоге мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством (анти)самодуальных плоскостей в  $M$  и классами эквивалентности

$$[\theta] = \left\{ \lambda \theta, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \eta \neq 0 \right\}, \quad (15.46)$$



т. е. точками комплексного проективного пространства  $CP_3$ ,  $CP_1$ . Вычитание связано с условием  $n \neq 0$  и отвечает отбрасыванию проективной линии на бесконечности в  $CP_3$ . При рассмотрении инстантов условия на бесконечности в  $CP_3$  позволяют перейти к компактифицированному евклидову пространству. Можно показать, что в этом случае множество (анти)самодуальных плоскостей изоморфно  $CP_3$ . В теории Пенроуза [33] (в пространстве Минковского) два построенных пространства  $CP_3$  называются *проективными твисторными пространствами*.

Остановимся теперь коротко на описании касательных векторов к плоскостям (15.44), (15.45). Если задана параметризация плоскости внутренними координатами  $t_1, t_2$ , так что  $x^a(t_1, t_2)$  тождественно удовлетворяет (15.44) или (15.45), очевидно, что касательные векторы

$$V_{1,2}^a = \frac{\partial x^a}{\partial t_{1,2}}$$

удовлетворяют условию

$$V_{1,2}^a \sigma_a^{AB} \eta_B = 0 \quad (15.47)$$

или условию

$$V_{1,2}^a \sigma_{aAB} \eta^A = 0. \quad (15.48)$$

Переход к другим координатам (или к неголомомному реперу) не изменяет условий (15.47), (15.48) на касательные векторы. В частности, легко видеть, что пара векторов

$$e_A^a = \sigma_a^{AB} \eta^B, \quad A=1,2, \quad (15.49)$$

является касательной к самодуальной плоскости, задаваемой спинорами  $(\eta^A, \chi^A)$  и уравнением (15.44). Действительно, имеем

$$e_{A'}^a \sigma_a^{B'} \eta_{B'} = \sigma_{A'B'}^a \sigma_a^{B'C'} \eta^{C'} \eta_{B'} = 0$$

(в силу (15.11)) и  $\eta_{A'} \eta^{A'} = -\eta^A \eta_A = 0$ . Свободный спинорный индекс  $A$  в (15.49) играет здесь роль номера вектора в данной касательной диаде. Нетрудно убедиться также, что пара векторов (15.49) определяет самодуальный бивектор площади:

$$\begin{aligned} e_1^a e_2^b - e_2^a e_1^b &= (\sigma_a^{AB} \sigma_b^{C'} - \sigma_b^{AB} \sigma_a^{C'}) \eta^B \eta^{C'} = \\ &= \varepsilon^{AD} \sigma_{AB}^a \sigma_D^b \eta^B \eta^{C'} = S_{D'C'}^{(+)} \eta^B \eta^{C'} \end{aligned}$$

из-за (15.11), что явно самодуально ввиду (15.14). Аналогично, векторы

$$e_{A'}^a = \sigma_a^{A'B} \eta^B, \quad A'=1,2, \quad (15.50)$$

касательны к антисамодуальной плоскости (15.41):

$$e_{A'}^a \sigma_{aBC} \eta^C = 0,$$

и определяют антисамодуальный бивектор

$$e_1^a e_2^b - e_2^a e_1^b = S_{AB}^{(-)} \eta^A \eta^B.$$

**Метод Уорда.** Вернемся теперь к калибровочной теории и рассмотрим основную идею метода Уорда [28] описания самодуальных решений уравнений Янга — Миллса. Пусть  $A = A_\mu^a t_a$  — калибровочное поле на  $M$ , где  $t_a$  — базис алгебры Ли калибровочной группы  $G$ . Если  $t_a$  заданы  $N \times N$  матрицами,  $A_\mu$  можно рассматривать как связность в  $N$ -мерном векторном расслоении  $V$ , сечениями которого являются  $N$ -компонентные поля  $\psi(x)$ , преобразующиеся по некоторому представлению группы  $G$ . Поле  $A_\mu$  определяет параллельный перенос  $\psi(x)$ , или, иначе, задает ковариантную производную  $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ . Пусть калибровочное поле самодуально, т. е. тензор напряженности

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

удовлетворяет

$$F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Тогда  $F_{\mu\nu}$  исчезает на антисамодуальных плоскостях в  $M$ , и поэтому форма связности на последних имеет вид чистой калибровки

$$A_\mu dx^\mu = g \partial_\mu \tau^{-1} dx^\mu, \quad (15.51)$$

где  $g \in G$  и  $x^\mu$  лежит на некоторой антисамодуальной плоскости  $[0]$ , так что  $dx^\mu = V^a \cdot dt$  удовлетворяет (15.48).

Мы можем проинтегрировать (15.51) для любых двух точек на данной плоскости  $x, y \in [0]$ , получив элемент группы как  $P$ -упорядоченную экспоненту

$$S_{[0]}(y, x) = P \exp \left( \int_x^y dx^\mu A_\mu \right), \quad (15.52)$$

где интеграл берется вдоль произвольной кривой  $x^\mu(\tau)$  между  $x$  и  $y$ . В силу равенства нулю  $F_{\mu\nu}$  на  $[0]$  (15.52) зависит только от начальной и конечной точек, но не зависит от соединяющего их пути. Зафиксируем точку  $x = x_0$  и рассмотрим слой над ней  $\Psi_0$ . С помощью (15.52) каждой точке слоя  $\psi(x_0) \in \Psi_0$  подставим в соответствие точку  $\psi(x)$  слоя над  $x \in [0]$ :

$$\psi(x) = g_{[0]}(x, x_0) \psi(x_0). \quad (15.53)$$

Тем самым над  $[0]$  естественным образом определено  $N$ -мерное векторное пространство  $E_0$ , элементами которого  $\psi_0$  являются ковариантно постоянные поля (15.53) над  $[0]$ , а следовательно, над пространством антисамодуальных плоскостей  $CP_3$ ,  $CP_1$  построено

$N$ -мерное векторное расслоение  $E$  с типичным слоем  $\Psi$  и структурной группой  $G$ . Вся конструкция изображена на рис. 21.

В этом и заключается наблюдение Уорда [28]: существование самодуального калибровочного поля (связности на  $V$ ) позволяет

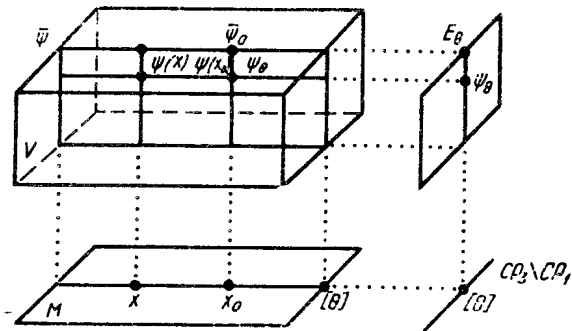


Рис. 21

определить расслоение  $E$  над  $CP_3$ ,  $CP_1$ . Вся информация об  $A_\mu$  теперь закодирована в структуре расслоения  $E$ . Координаты в  $E$  задаются следующим образом. Пусть выбран некоторый атлас базы  $CP_3$ ,  $CP_1$ . Тогда для каждого открытого множества  $U \subset CP_3$ ,  $CP_1$  морфизмы тривиализации определим как фиксацию выделенной точки  $x_0$  на каждой плоскости  $\{0\} \in U$ , так что координаты для слоя  $E_0$  вводятся как координаты слоя  $\Psi_0$ . На пересечениях  $U \cap U'$  функции перехода являются элементами структурной группы  $g(x_0, x_0')$ , связывающими координаты слоев выделенных точек:

$$\psi(x_0) = g_{[g]}(x_0, x_0') \psi(x_0').$$

Таким образом, функции перехода (15.52) расслоения  $E$  содержат информацию о самодуальном калибровочном поле. Эта информация полная: если задано  $N$ -мерное векторное расслоение  $E$  над  $CP_3$ ,  $CP_1$ , потенциал  $A_\mu$  самодуального калибровочного поля можно восстановить с точностью до обычного калибровочного произведения [23, 25].

### 15.3. Конструкция Атья — Хитчина — Дринфельда — Манина

В конструкции АХДМ методами линейной алгебры строятся произвольные расслоения  $E$  над  $CP_3$ ,  $CP_1$ . В результате, используя твисторную геометрическую интерпретацию Уорда, можно получить общее решение уравнений самодуальности. Основными объектами в подходе АХДМ являются три линейных векторных пространства  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и отображения  $f(\theta) : A \rightarrow B$  и  $\varphi(\theta) : B \rightarrow C$ , такие, что  $\varphi(\theta) \cdot f(\theta) = 0$ . Семейство отображений  $f$ ,  $\varphi$  параметризуется точками  $\{0\} \in CP_3$ ,  $CP_1$ , и слой в  $N$ -мерном векторном расслоении  $E$  ковариантно постоянных полей задается как

$$E_\theta = \text{Ker } \varphi(\theta) / \text{Im } f(\theta).$$

Рассмотрим, опираясь на работы [28, 29], основные этапы построения пространств и отображений  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $f$ ,  $\varphi$ .

**Векторное пространство  $C$ .** Базис пространства  $C$  образован линейно независимыми решениями уравнения Дирака

$$\nabla_{AB'} \psi^{B'} = 0. \quad (15.54)$$

Для  $SU(N)$  калибровочного самодуального поля  $A_\mu$ , являющегося чистой калибровкой на бесконечности  $M$  ( $A_\mu \sim g \partial_\mu g^{-1}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ), решения (15.54) имеют асимптотическое поведение

$$\psi^{B'}(x) \sim g(x) \frac{\gamma_A x^{AB'}}{|x|^4}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (15.55)$$

где  $\gamma_A$  — постоянный спинор и  $g \in G$  определяется асимптотикой  $A_\mu$ . Пусть  $A_\mu$  характеризуется инстантным числом  $q$  (14.20). Тогда уравнение (15.54) имеет ровно  $q$  линейно независимых решений  $\psi_{(\alpha)}^{B'}$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ . Легче всего это получить из теоремы об индексе оператора Дирака (см. § 17).

Индекс оператора Дирака в инстантном поле равен топологическому числу  $q$  и определяется как разность числа нулевых мод с отрицательной и положительной спиральностью. Нулевые моды с положительной спиральностью определяются уравнением  $\nabla_{AB'} \psi^A = 0$  и, поскольку

$$\begin{aligned} \nabla^{CB'} \nabla_{AB'} \psi^A &= x^{CB'} \partial_{AB'}^2 \nabla_\mu \nabla^\mu \psi^A = \\ &= \nabla_\mu \nabla^\mu \psi^C + \frac{1}{2} S_A^{(-)} F_{\mu\nu} \psi^A = \nabla_\mu \nabla^\mu \psi^C \end{aligned}$$

(в силу (15.11) и самодуальности), ясно, что нормируемых решений с асимптотическим поведением (15.55) не существует ввиду положительной определенности оператора  $-\nabla_\mu \nabla^\mu$  на  $M$ . Тем самым число нулевых мод с отрицательной спиральностью (15.51) равно  $q$ .

Итак, векторы из  $C$  описываются  $q$  компонентами  $v^\alpha$ :

$$\psi^{A'} = v^\alpha \psi_{(\alpha)}^{A'} \quad (15.56)$$

в разложении произвольного решения (15.54) по базису линейно независимых спиноров

**Векторное пространство  $B$ .** Аналогично элементы линейного пространства  $B$  задаются своими компонентами  $u^a$  в разложении по базису

$$(\Omega_{(a)}, \Omega_{(a)}^{AB'}, \Omega_{(a)A'})$$

независимых решений уравнений

$$\nabla^{AB'} \Omega_{(a)} = \Omega_{(a)}^{AB'} + x^{AC'} \Omega_{(a)C'}, \quad (15.57)$$

$$\nabla_{AB} \Omega_{(a)C}^{B'} = 0, \quad (15.58)$$

$$\nabla_{AB} \hat{\Omega}_{(a)}^{B'} = 0. \quad (15.59)$$

Определим размерность  $B$  (т. е. число значений, которые пробегает индекс  $a$ ). Для этого заметим, что не все из уравнений (15.57) — (15.59) независимы. Действительно, действуем оператором  $\nabla_{CB}$  на (15.57). Поскольку

$$\nabla_{CB} \nabla^{AB'} = \delta_C^A \nabla_B \nabla^{B'}$$

(для самодуального калибровочного поля), находим

$$\nabla_B \nabla^B \Omega_{(a)} = 2 \Omega_{(a)B}^{B'} \quad (15.60)$$

Таким образом, имея решение  $\Omega_{(a)C}^{B'}$  уравнения (15.58), мы затем находим  $\Omega_{(a)}$  из (15.60) и, наконец, определяем  $\Omega_{(a)A}^{B'}$  из (15.57). Уравнение (15.59) при этом удовлетворяется тождественно. Теперь нетрудно найти  $\dim B$ . Рассматривая

$$\nabla_{AB} \Omega_{(a)}^{B'} = 0$$

как уравнение Дирака (15.54) для поля, имеющего дополнительный индекс  $C' = 1, 2$ , находим, что число независимых решений равно  $2q$ . Кроме того, обращая  $\nabla_\mu \nabla^\mu$  в (15.60), при получении общего решения для  $\Omega$  надо учесть независимые решения однородного уравнения

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Omega = 0.$$

Таковых имеется  $N$ , что определяется их асимптотическим поведением  $\Omega \sim g(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , где  $g$  то же, что и в (15.55). В результате  $\dim B = 2q + N$ , и векторы из  $B$  представляют собой наборы функций

$$(\Omega, \Omega^{AB'}, \Omega_{A'}^{B'}) = u^a (\Omega_{(a)}, \Omega_{(a)}^{AB'}, \Omega_{(a)A'}^{B'}). \quad (15.61)$$

Для определения отображения  $\varphi: B \rightarrow C$  заметим, что в силу полноты пространства  $C$  базисные решения уравнений (15.58), (15.59) можно представить в виде

$$\Omega_{(a)}^{AB'} = K_{(a)}^{(z)A} \psi_{(z)}^{B'}, \quad (15.62)$$

$$\Omega_{(a)C'}^{B'} = K_{(a)C'}^{(z)B} \psi_{(z)}^{B'}, \quad (15.63)$$

где  $\psi_{(z)}^{B'}$  — базис  $C$  и постоянные коэффициенты  $K_{(a)}^{(z)}$  можно рассматривать как спинорзначные элементы  $q \times (2q + N)$ -матрицы, осуществляющей линейное отображение  $B \rightarrow C$ . Такие отображения удобно параметризовать точками из  $\mathbb{C}P_3 \times \mathbb{C}P_1$ . Если  $\{0\} = (\eta_A, \chi^{B'})$  — произвольная самодуальная плоскость, определим матрицу

$$A_a^{\leftarrow} = K_{(a)}^{(z)A} \eta_A - K_{(a)B'}^{(z)B} \chi^{B'}. \quad (15.64)$$

Тогда искомое отображение  $\varphi(0) : B \rightarrow C$  ставит в соответствие вектору  $u^a \in B$  вектор с компонентами

$$v^a = A_a^{\leftarrow} u^a, \quad v^a \in C. \quad (15.65)$$

Рассмотрим ядро данного отображения  $\text{Ker } \varphi(0)$ , которое состоит из таких векторов  $u^a \in B$ , для которых  $A_a^{\leftarrow} u^a = 0$ . Каждому такому вектору поставим в соответствие скалярную функцию на  $M$ :

$$\omega(x) = u^a \Omega_{(a)}(x). \quad (15.66)$$

Как было показано выше, два линейно независимых вектора, касательных к данной антисамодуальной плоскости  $\{0\} = (\eta_A, \chi^{B'})$ , имеют вид (15.50). Найдем с их помощью ковариантную производную поля  $\omega(x)$  вдоль плоскости  $\{0\}$ :

$$e_{B'}^{\mu} \nabla_{\mu} \omega = \eta^A \nabla_{AB'} \omega = u^a \eta^A \nabla_{AB'} \Omega_{(a)} =$$

$$= u^a \eta^A (K_{(a)A}^{(z)} - \chi_{A(z)} K_{(a)}^{(z)C'}) \psi_{(z)B'} = -A_a^{\leftarrow} u^a \psi_{(z)B'},$$

где мы использовали (15.57), (15.62), (15.63) и уравнение плоскости (15.45). Таким образом, любому вектору  $u^a \in \text{Ker } \varphi(0)$  отвечает скалярная функция (15.66), ковариантно постоянная на антисамодуальной плоскости  $\{0\}$ .

Это соответствие взаимно однозначно — любая ковариантно постоянная на  $\{0\}$  функция может быть представлена в виде (15.66). Последнее вытекает из сюръективности отображения (15.65). Действительно, пусть

$$\psi^{A'} = v^a \psi_{(z)}^{A'} \in C.$$

Покажем, что для любого  $v^a$  существует  $u^a \in B$  такой, что  $v^a = A_a^{\leftarrow} u^a$ . С этой целью рассмотрим ограниченное уравнение Дирака (15.54) на плоскость  $\{0\}$ , определяющую отображение  $\varphi(0)$ . Свертка (15.54) с  $\eta^A$  дает (ввиду (15.50))

$$e_{B'}^{\mu} \nabla_{\mu} \psi^{B'} = 0.$$

Следовательно, существует скалярная функция  $\tilde{\Lambda}$ , такая, что на данной плоскости

$$\psi^{B'} = e_{B'}^{\mu} \nabla_{\mu} \tilde{\Lambda}$$

(условие интегрируемости последнего уравнения на  $\{0\}$  имеет вид  $e_{B'}^{\mu} \nabla_{\mu} \psi^{B'} = 0$ ). Тем самым любая функция  $\psi^{B'} \in C$  представима в форме

$$\psi^{B'} = \eta_A \nabla^{AB'} \tilde{\Lambda} + \tilde{\Lambda}_{A'}^{B'} (\chi^{A'} + x^{CA'} \eta_C), \quad (15.67)$$

где  $\tilde{\Lambda}(x)$  и  $\tilde{\Lambda}_{A'}^{B'}(x)$  — некоторые функции на  $M$ . Это представление неоднозначно, поскольку преобразование

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Lambda} &= \Lambda - v_{B'} (\chi^{B'} + x^{AB'} \eta_A), \\ \tilde{\Lambda}_{A'}^{B'} &= \Lambda_{A'}^{B'} + \eta_A \nabla^{AB'} v_{A'}, \end{aligned} \right\} \quad (15.68)$$

где  $\psi_{A'}(\tau)$  — произвольная спинорная функция, оставляет вид (15.67) неизменным, а  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  на плоскости [0].

Поскольку  $\psi^{B'} \in C$ , уравнение Дирака (15.54) накладывает ограничения на вид функций  $\Lambda$ ,  $\Lambda_{A'}^{B'}$ . А именно, воспользовавшись произволом (15.68), перейдем к представлению

$$\psi^{B'} = \eta_{A'} \nabla^{AB'} \Lambda + \Lambda_{A'}^{B'} (\chi^{A'} + x^{CA'} \eta_C), \quad (15.69)$$

в котором  $\Lambda_{A'}^{B'}$  удовлетворяет

$$\Delta_{CB'} \Lambda_{A'}^{B'} = 0. \quad (15.70)$$

Тогда, подставляя (15.69) в (15.54), находим

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \Lambda = 2\Lambda_{B'}^{B'}. \quad (15.71)$$

Определяя теперь дополнительное поле

$$\Lambda^{AB'} = \nabla^{AB'} \Lambda - x^{AC'} \Lambda_{C'}^{B'},$$

получаем из (15.70) — (15.71), что система спиноров  $(\Lambda, \Lambda^{AB'}, \Lambda_{A'}^{B'})$  удовлетворяет (15.57) — (15.59) и, следовательно, принадлежит пространству  $B$ . Пусть

$$(\Lambda, \Lambda^{AB'}, \Lambda_{A'}^{B'}) = u^{\alpha} (\Omega_{(\alpha)}, \Omega_{(\alpha)}^{AB'}, \Omega_{(\alpha)A'}^{B'}), \quad (15.72)$$

тогда из (15.69) вытекает, что  $v^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha} u^{\alpha}$ . Таким образом, сюръективность отображения  $\varphi(\theta)$  доказана.

Пусть теперь  $\tilde{\omega}$  — скалярная функция на  $M$ , ковариантно постоянная на [0]. Последнее означает, что существуют такие функции  $\tilde{\omega}_{A'}^{B'}(x)$ , что

$$\eta_{A'} \nabla^{AB'} \tilde{\omega} + \tilde{\omega}_{A'}^{B'} (\chi^{A'} + x^{CA'} \eta_C) = 0.$$

Сравнивая с (15.67), находим, что поля  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega}_{A'}^{B'}$  определяют нулевой вектор в пространстве  $C$ , и, повторяя цепочку рассуждений (15.68) — (15.72), получаем окончательно, что существует вектор  $u^{\alpha} \in \text{Ker } \varphi(\theta)$ , такой, что  $\tilde{\omega} = u^{\alpha} \Omega_{(\alpha)}$  и  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$  на рассматриваемой плоскости [0].

**Векторное пространство  $A$ .** Перейдем теперь к построению пространства  $A$  и отображения  $f(\theta) : A \rightarrow B$ . Базис  $A$  составляет набор линейно независимых решений  $\lambda_{(a)}^{A'}$  уравнения

$$\nabla_{AB'} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{A'} = 0 \quad (15.73)$$

с асимптотическим поведением

$$\lambda^{B'} \sim g(x) \frac{e_{\mu} x^{A \mu}}{|x|^4}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (15.74)$$

Размерность

$$\dim A = \dim C = q,$$

так что произвольный вектор из  $A$  имеет вид  $\lambda^{B'} = v^{\alpha} \lambda_{(a)}^{B'}$ , где  $v^{\alpha}$  — координаты в выбранном базисе решений.

Пусть пара  $(\eta^A, \gamma_B)$  задает антисамодуальную плоскость [0]. Рассмотрим скалярную функцию

$$\Xi_{(a)} = (\eta^A x_{A\alpha} - \chi_C) \lambda_{(a)}^{C'}. \quad (15.75)$$

Для любого  $a = 1, \dots, q$  она равна нулю, когда  $x^{\mu}$  лежит на плоскости [0], но для произвольных  $x$  это нетривиальная величина. Вычислим ковариантную производную (15.75). Имеем

$$\begin{aligned} \nabla^{AB'} \Xi_{(a)} &= \nabla^{AB'} (\chi^{C'} \lambda_{(a)C'}) + 2\eta^A \lambda_{(a)}^{B'} + \\ &+ \eta^A x_{C\alpha} \nabla^{B'} \lambda_{(a)}^{C'} + x^{AD'} \eta_C \nabla^{CB'} \lambda_{(a)D'}, \end{aligned} \quad (15.76)$$

где были использованы тождества (15.10), (15.7) и (15.29). Добавив и вычтя из правой части (15.76) величину

$$\frac{1}{2} (\chi_{D'} - \eta^D x_{BD'}) x^{AD'} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{B'}$$

и перегруппировав члены, получим

$$\nabla^{AB'} \Xi_{(a)} = \Xi_{(a)}^{AB'} + x^{AC'} \Xi_{(a)C'}^{B'}, \quad (15.77)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} \Xi_{(a)}^{AB'} &= \chi_{C'} \left( -\nabla^{AB'} \lambda_{(a)C'}^{C'} + \frac{1}{2} x^{AC'} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{B'} \right) + \\ &+ \eta^A \left( x^{D'} \nabla_C \lambda_{(a)D'}^{B'} + 2\lambda_{(a)}^{B'} - \frac{1}{2} x^2 \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{B'} \right). \end{aligned} \quad (15.78)$$

$$\Xi_{(a)C'}^{B'} = \frac{1}{2} \chi_{C'} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{B'} + \eta^A \left( -\nabla_A \lambda_{(a)C'}^{B'} + \frac{1}{2} x_{AC'} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \lambda_{(a)}^{B'} \right). \quad (15.79)$$

Нетрудно убедиться, что введенные спиноры тождественно удовлетворяют равенствам

$$\nabla_{AB'} \Xi_{(a)}^{C'} = 0, \quad \nabla_{AB'} \Xi_{(a)A'}^{B'} = 0. \quad (15.80)$$

Таким образом, построенная тройка функций  $(\Xi_{(a)}, \Xi_{(a)}^{AB'}, \Xi_{(a)A'}^{B'})$  по определению (15.57) — (15.59) принадлежит пространству  $B$ . В силу полноты последнего существует такая матрица  $\tilde{A}_{\alpha}^{\alpha}$ , что

$$(\Xi_{(a)}, \Xi_{(a)}^{AB'}, \Xi_{(a)A'}^{B'}) = \tilde{A}_{\alpha}^{\alpha} (\Omega_{(a)}, \Omega_{(a)}^{AB'}, \Omega_{(a)A'}^{B'}).$$

Эта матрица задает отображение  $f(\theta) : A \rightarrow B$ , когда вектору  $v^{\alpha} \in A$  ставится в соответствие вектор

$$u^{\alpha} = \tilde{A}_{\alpha}^{\alpha} v^{\alpha}, \quad u^{\alpha} \in B. \quad (15.81)$$

Элементы прямоугольной  $(2q+N) \times q$ -матрицы можно найти в явном виде, зная базис решений  $\tilde{\lambda}_{(z)}^{\mu}$  пространства  $A$ , из уравнений (15.75), (15.78) и (15.79). Мы этого делать не будем, однако отметим, что построенное отображение линейно по  $(\eta^A, \chi^B)$  и поэтому, аналогично (15.64), матрицу (15.81) можно представить в виде

$$\tilde{A}_1^a = \tilde{K}_{(z)}^{(a)A} \eta_A - \tilde{K}_{(z)B}^{(a)} \chi^B, \quad (15.82)$$

где постоянные спинорнозначные матрицы  $\tilde{K}$  не зависят от выбора плоскости [0].

Построенные отображения удовлетворяют  $\varphi(\theta) \mid f(\theta) = 0$ . Действительно, последнее означает, что

$$\text{Im } f(\theta) \subseteq \text{Ker } \varphi(\theta) \subseteq B.$$

Однако выше было показано, что ядро  $\text{Ker } \varphi(\theta)$  изоморфно пространству ковариантно постоянных на [0] скалярных функций. Поэтому для доказательства  $\varphi \mid f = 0$  достаточно убедиться, что образом  $f(\theta)$  являются ковариантно постоянные на [0] функции. Это очевидно из построения  $\Xi_{(a)}$ , поскольку свертка (15.76) с  $\eta_A$  приводит к

$$\eta_A \nabla^{AB} \Xi_{(a)} = \epsilon_A^B \nabla^B \Xi_{(a)} = (\chi_C - \eta^D \chi_{DC}) \eta^A \nabla^B \lambda_{(a)}^C = 0$$

на [0]. Более того, выше мы отмечали, что функции  $\Xi_{(a)}$  сами равны нулю на [0]. Покажем, что они исчерпывают множество голей, ковариантно постоянных и обращающихся в нуль на плоскости [3].

Пусть

$$(\Omega, \Omega^{AB}, \Omega_C^B) \in \text{Ker } \varphi(\theta)$$

и  $\Omega = 0$  на [0]. Последнее означает, что существуют такие  $\lambda^A$ , что

$$\Omega = \tilde{\lambda}^A (\chi_A - \chi_{BA} \eta^B).$$

Подставляя это в (15.57) с учетом

$$\eta_A \Omega^{AB} = \chi^B \Omega_C^B$$

(так как находимся в  $\text{Ker } \varphi(\theta)$ ), получим

$$\eta_A \nabla^{AB} \tilde{\lambda}_B - \Omega_C^B + \tilde{P}^B (\chi_C - \chi_{DC} \eta^D) = 0, \quad (15.83)$$

где  $\tilde{P}^B(x)$  — некоторые функции на  $M$ . Подобно (15.67), данное уравнение можно рассматривать как представление спиноров  $\Omega_C^B$  из ядра отображения  $\varphi(\theta)$ . Легко заметить, что оно тоже неоднозначно и допускает преобразования

$$\tilde{\lambda}_B = \lambda_B + \mu (\chi_B - \chi_{AB} \eta^A), \quad (15.84)$$

$$\tilde{P}^B = P^B - \eta_A \nabla^{AB} \mu, \quad (15.85)$$

которое не затрагивает вид  $\Omega$ . Используя произвол (15.83) — (15.85),

выберем функцию  $\mu(x)$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\nabla_{AB} P^B = 0. \quad (15.86)$$

Окончательно величины  $\lambda_C$  и  $P^B$  в представлении (15.83) теперь фиксируем с помощью уравнений (15.58), которым по определению удовлетворяет  $\Omega_C^B$ . Отсюда находим

$$\nabla_A \nabla^A \lambda_C + 2P_C = 0, \quad (15.87)$$

и следовательно, ввиду (15.86)  $\lambda_C$  удовлетворяет (15.73), т. е.  $\lambda^C \in A$ . Рассматривая теперь преобразование  $f(\theta)$  для данного  $\lambda^C$  (см. (15.75), (15.78), (15.79)), на основе (15.83) убеждаемся, что  $\Xi = \Omega$ ,  $\Xi_C^B = \Omega_C^B$ ,  $\Xi^{AB} = \Omega^{AB}$ .

Таким образом, мы показали, что любые

$$(\Omega, \Omega^{AB}, \Omega_C^B) \in \text{Ker } \varphi(\theta)$$

при  $\Omega = 0$  на [0] лежат в  $\text{Im } f(\theta)$ . Это завершает построение пространств  $A, B, C$  и отображений  $f, \varphi$  в методе АХДМ. Очевидно, что

$$E_3 = \text{Ker } \varphi(\theta) / \text{Im } f(\theta)$$

зависит только от [0], и это позволяет построить искомое расслоение  $E$  над  $\mathbb{C}P_2 \times \mathbb{C}P_1$ .

#### 15.4. Общие инстантонные решения для $SU(2)$

Конструкция АХДМ содержит всю информацию, необходимую для получения самодуальных калибровочных полей. Эта информация «закодирована» прежде всего в структуре отображений  $\varphi(\theta)$  и  $f(\theta)$ . Построение же собственно пространств  $A, B, C$  (т. е. базисов решений соответствующих дифференциальных уравнений) играет второстепенную роль. Можно показать, что выбор иного набора базисных решений соответствует калибровочному преобразованию поля  $A_\mu$ .

Пусть базисы  $A, B, C$  зафиксированы. Тогда отображения  $\varphi(\theta)$  и  $f(\theta)$  задаются соответственно матрицами (15.64) и (15.82). Коэффициенты  $K, \tilde{K}$  в этих формулах не зависят от координат плоскости [0], т. е. являются универсальными (они определяются только выбором базисов в  $A, B, C$ ). Из условия  $\varphi(\theta) \mid f(\theta) = 0$  вытекает матричный эквивалент

$$A_{(a)}^i \tilde{A}_{(b)}^j = 0, \quad (15.88)$$

из которого находим некоторые тождественные соотношения между  $K$  и  $\tilde{K}$  (используя произвольность  $\eta_A, \chi^B$ ):

$$K_{(a)}^{(1)} K_{(b)}^{(2)} = \lambda_{ab}^2, \quad K_{(a)1}^{(1)} \tilde{K}_{(b)2}^{(1)} = b_{ab}^2 \lambda_{ab} = b_{ab}^2 \lambda_{A'B'}, \quad (15.89)$$

$$K_{(a)}^{(1)} \tilde{K}_{(b)2}^{(2)} + K_{(a)2}^{(1)} \tilde{K}_{(b)}^{(1)} = 0, \quad (15.90)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые  $q \times q$ -матрицы.

Определим с помощью  $K$  и  $\bar{K}$  линейно зависящие от  $x$  матрицы

$$\Delta_{(a)}^{(1)1} = K_{(a)}^{(1)1} + x^{AB} K_{(a)B}^{(1)A}, \quad (15.91)$$

$$\bar{\Delta}_{(a)}^{(1)1} = \bar{K}_{(a)}^{(1)1} + x^{AB} \bar{K}_{(a)B}^{(1)A}. \quad (15.92)$$

Используя (15.89) — (15.90), легко видеть, что они удовлетворяют

$$\Delta_{(a)}^{(1)1} \bar{\Delta}_{(a)}^{(1)2} = c_{12}^1 \varepsilon^{12}, \quad (15.93)$$

$$c_{12}^1 = a_{12}^1 + x^2 b_{12}^1 + x^{AB} K_{(a)A}^{(1)1} \bar{K}_{(a)B}^{(1)2}. \quad (15.94)$$

Можно показать, что матрица  $c_{12}^1$  невырождена. Доказательство этого факта приводится в работе [28], в которой также показано, что базисы пространств  $A, B, C$  всегда можно выбрать таким образом, что

$$\Omega_{(a)} \Omega^{(a)+} = 1, \quad (15.95)$$

$$\bar{\Delta} = \Delta^+. \quad (15.96)$$

Знак плюс означает здесь эрмитово сопряжение (т. е. транспонирование и комплексное сопряжение), а 1 — единичный оператор в пространстве представлений группы  $G$ , по которому преобразуются скалярные поля  $\Omega$ . Всюду в дальнейшем выбран именно такой специальный базис. В частности, из (15.93) тогда следует, что элементы матрицы  $c_{12}^1$  вещественны.

Рассмотрим теперь процедуру восстановления калибровочного поля  $A_\mu$ . Во-первых, из определения отображения  $f(0): A \rightarrow B$  (15.75), (15.81) имеем в силу произвольности  $(\eta_A, \chi^{B'})$ :

$$x_{AB} \lambda_{(1)}^{(1)A} + \bar{K}_{(1)A}^{(1)1} \Omega_{(a)} = 0, \quad \lambda_{(1)}^{B'} + \bar{K}_{(1)A}^{(1)A} \Omega_{(a)} = 0,$$

откуда получаем

$$\Omega_{(a)} \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)A} = 0. \quad (15.97)$$

Эрмитово сопряженное соотношение имеет вид

$$\Delta_{(1)}^{(1)1} \Omega^{(a)+} = 0 \quad (15.98)$$

Используя (15.62) — (15.63), нетрудно преобразовать (15.57) к

$$\nabla^{AB} \Omega^{(a)} = \Delta_{(a)}^{(1)1} \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)B'},$$

откуда с учетом (15.98) находим

$$(\Delta_\mu \Omega_{(a)}) \Omega^{(a)+} = 0,$$

и, исходя из определения ковариантной производной  $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ , окончательно получаем (ввиду (15.95))

$$A_\mu = -(\partial_\mu \Omega_{(a)}) \Omega^{(a)+} = \Omega_{(a)} \partial_\mu \Omega^{(a)+}. \quad (15.99)$$

Это и есть искомое выражение для калибровочного поля. По построению оно самодуально.

Рассмотрим тензор напряженности для (15.99):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu = \partial_\mu \Omega_{(a)} [\delta_\nu^a - \Omega^{(a)+} \Omega_{(a)}] \varepsilon_\nu \Omega^{(b)+} + \\ - \partial_\nu \Omega_{(a)} [\delta_\mu^a - \Omega^{(a)+} \Omega_{(a)}] \partial_\mu \Omega^{(b)+}. \quad (15.100)$$

Для доказательства его самодуальности потребуется тождество

$$\Omega^{(a)+} \Omega_{(a)} = \delta_1^1 - \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)1} (c^{-1})_{11}^1 \Delta_{(1)1}^{(1)1}. \quad (15.101)$$

Оно справедливо, поскольку левая и правая части (15.101) — это проекционные операторы (обозначим их соответственно  $\tilde{P}_c^a$  и  $P_c^a$ ). Очевидно, что

$$\tilde{P}_c^a \tilde{P}_c^b = \tilde{P}_c^a, \quad P_c^a P_c^b = P_c^a,$$

и они оба осуществляют проекцию на ортогональное дополнение к  $\Delta$ , так как ввиду (15.93) — (15.98)

$$P_c^a \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)A} = \tilde{P}_c^a \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)A} = \Delta_{(a)}^{(1)1} P_c^a = \Delta_{(a)}^{(1)1} \tilde{P}_c^a = 0.$$

Поскольку, кроме того, выполняется тождество  $P_b^a P_c^b = P_b^a P_c^b$ , эти операторы совпадают  $P_b^a = \tilde{P}_b^a$ .

Используя (15.101), можно тождественно преобразовать  $F_{\mu\nu}$  к явно самодуальному виду

$$F_{\mu\nu} = \Omega_{(a)} [\partial_\mu \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)A} (c^{-1})_A^1 \partial_\nu \Delta_{(b)1}^{(1)1} - \partial_\nu \bar{\Delta}_{(1)}^{(1)A} (c^{-1})_A^1 \partial_\mu \Delta_{(b)1}^{(1)1}] \Omega^{(b)+} = \\ = (\varepsilon_\mu^{AC'} \varepsilon_{\nu AD'} - \varepsilon_\nu^{AC'} \varepsilon_{\mu AD'}) \Omega_{(a)} \bar{K}_{(1)C'}^{(1)A} (c^{-1})_A^1 K_{(b)1}^{(1)D'} \Omega^{(b)+}.$$

Ввиду (15.11) и (15.14) теперь очевидно, что  $F_{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ .

**Алгебраическое построение самодуального поля.** Метод реконструкции самодуальных калибровочных полей, описанный в данном разделе, является в некотором смысле замкнутым. Можно отвлечься от математического обоснования формул (15.88) — (15.98), которое дается в разд. 15.3, и рассматривать построение самодуального калибровочного поля как следующую чисто алгебраическую задачу. Пусть задан набор постоянных параметров, которые собраны в матрицы  $K_{(a)}^{(s)A}$ ,  $K_{(a)B}^{(s)}$ , и из последних образована зависящая от  $x$  матрица  $\Delta$  (15.91), удовлетворяющая условию

$$\Delta_A \nabla^{+B} = c \delta_A^B,$$

где  $c(x)$  — вещественна и обратима. Требуется найти решение  $\Omega_{(a)}(x)$  системы алгебраических уравнений

нормированное согласно (15.95). Тогда потенциал самодуального калибровочного поля получается из (15.99). К сожалению, пока нет удается найти в явном виде все такие матрицы  $\Delta$  и решения  $\Omega$ , хотя в принципе таким образом можно построить самодуальные решения с произвольным значением топологического числа  $q$ .

**Случай группы SU(2).** Все сказанное до сих пор относилось к калибровочной теории с произвольной полупростой компактной группой  $G$ . В качестве иллюстрации рассмотрим теперь случай  $G=SU(2)$ . Будем предполагать, как обычно, что все калибровочно ковариантные поля ( $\varphi$ ,  $\Omega$  и т. д.) преобразуются по векторному (т. е. изоспину 1/2) представлению  $SU(2)$ . Элементы последней, как уже отмечалось, — это кватернионы единичной длины, или, иначе, унитарные матрицы  $2 \times 2$  вида  $g = a_\mu \sigma^\mu$ , где  $\sigma^\mu$  — обобщенные матрицы Паули (15.9),  $\mu=0, 1, 2, 3$  и вещественные  $a_\mu$  удовлетворяют  $a_\mu a^\mu = 1$ . Калибровочное поле  $A_\mu$  принимает значения в алгебре Ли группы  $SU(2)$ , состоящей из чисто мнимых кватернионов, или эквивалентно из матриц  $2 \times 2$  вида  $a_i \sigma^i$ , где  $i=1, 2, 3$  и  $a_i$  — произвольные вещественные числа.

В соответствии с описанной выше алгебраической схемой для построения калибровочного поля с инстантонным числом  $q$  необходимо задать матрицы параметров  $\Delta_{(a)}^{(\alpha)A}$  (15.91). Теперь  $a=1, \dots, 2(q+1)$ , так как  $N=2$ . Поскольку пару индексов  $(\alpha)A$ , где  $\alpha=1, \dots, q$ ,  $A=1, 2$ , можно рассматривать как некоторый обобщенный индекс, пробегающий значения  $1, \dots, 2q$ , удобно представить  $\Delta$  в форме прямоугольной матрицы  $(q+1) \times q$  с кватернионными элементами:

$$\Delta_{\rho\alpha}(x) = \hat{a}_{\rho\alpha} + \hat{b}_{\rho\alpha} \hat{x}, \quad (15.102)$$

где  $\rho=0, 1, \dots, q$ ,  $\alpha=1, \dots, q$  и  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{x}$  — вещественные кватернионы, или, что то же самое, матрицы  $2 \times 2$  вида

$$\hat{a}_{\rho\alpha} = a_{\rho\alpha}^{\mu} \sigma_{\mu}, \quad \hat{b}_{\rho\alpha} = b_{\rho\alpha}^{\mu} \sigma_{\mu}, \quad \hat{x} = x_{\mu} \sigma_{\mu}. \quad (15.103)$$

Нетрудно видеть, что полное число постоянных параметров  $a^{\mu}_{\rho\alpha}$ ,  $b^{\mu}_{\rho\alpha}$  равно  $8q(q+1)$ . Они, однако не все независимы, поскольку матрицы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  надо выбрать такими, чтобы выполнялось (15.93). Последнее условие приводит к требованию, чтобы

$$\hat{a}^+ \hat{a} = \hat{b}^+ \hat{b}, \quad \hat{b}^+ \hat{a}$$

были симметричными  $q \times q$  кватернионными матрицами (т. е., например, чтобы  $\hat{a}^+_{\alpha\rho} \hat{a}_{\rho\alpha} = \hat{a}^+_{\rho\alpha} \hat{a}_{\rho\alpha}$ ). Более того, очевидно, что выбор базисов в  $A, B, C$ , при котором выполнены (15.95) и (15.96), не единствен. В частности, эти условия допускают следующий произвол в определении  $\Omega$  и  $\Delta$ :

$$\Omega_{(a)} \rightarrow Q_a^b \Omega_{(b)},$$

$$\Delta_{(a)}^{(\alpha)A} \rightarrow Q_a^b \Delta_{(b)}^{(\beta)A} R_{\beta}^{\alpha},$$

$$\tilde{\Delta}_{(a)}^{(\alpha)A} \rightarrow R_{\alpha}^{\beta} \tilde{\Delta}_{(b)}^{(\beta)A} Q_b^{-a},$$

где  $Q_b^a Q_c^{+b} = \delta_c^a$  и  $R_{\beta}^{\alpha} \in GL(q, \mathbb{C})$  (можно также делать лоренцевы вращения по спинорным индексам).

Для случая  $SU(2)$  в кватернионных переменных этот произвол сводится к возможности преобразовывать кватернионные матрицы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  по правилу

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{\rho\alpha} &\rightarrow Q_{\rho\alpha} \hat{a}_{\rho\alpha} R_{\rho\alpha}, \\ \hat{b}_{\rho\alpha} &\rightarrow Q_{\rho\alpha} \hat{b}_{\rho\alpha} R_{\rho\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (15.104)$$

где  $Q \in Sp(q+1)$  и  $R \in GL(q, \mathbb{R})$ .

Вектор  $\Omega_{(a)}$  в данном случае имеет  $2(q+1)$  компонент, и, поскольку он также является изоспинором, удобно представить его, аналогично  $\hat{a}, \hat{b}, \Delta$ , как вектор  $\Omega_{\rho}$  с кватернионными компонентами  $\Omega_{\rho} = \Omega_{\rho}^{\mu} \sigma_{\mu}$ ,  $\rho=0, 1, \dots, q$ . При (15.104) он преобразуется как  $\Omega_{\rho} \rightarrow Q_{\rho\sigma} \Omega_{\sigma}$ .

Преобразования (15.104) позволяют упростить матрицы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , приводя их к некоторому каноническому виду. Во-первых, с помощью  $R$  можно свести  $\hat{b}^+ \hat{b}$  к единичной  $q \times q$ -матрице. Далее, посредством  $Q$  можно окончательно преобразовать  $\hat{b}$  к форме

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad (15.105)$$

или  $\hat{b}_{\rho\alpha} = -\delta_{\rho\alpha}$ . Оставшийся от (15.104) произвол, сохраняющий вид (15.105), включает возможность умножения  $\hat{b}$  и  $\hat{a}$  слева на элементы группы  $SU(2)$ , а также произвол посредством действия ортогональными матрицами из  $SO(q, \mathbb{R})$ . С помощью последних можно привести симметричную вещественную матрицу  $\hat{a}^+ \hat{a}$  к диагональному виду, так что

$$\hat{a}_{\alpha\rho}^+ \hat{a}_{\rho\alpha} = 0, \quad \alpha \neq \rho. \quad (15.106)$$

Оставшийся  $SU(2)$  произвол отвечает калибровочному преобразованию, с точностью до которого всегда определен потенциал  $A_{\mu}$ .

Убедимся, что матрица  $\Delta_{\rho\alpha}(x)$ , приведенная к канонической форме (15.105), (15.106), описывает общее инстантонное решение для данного топологического числа  $q$ . Действительно, из полного числа параметров  $\hat{a}$ , равного  $4q(q+1)$ , вычтем число (кватернионных) условий (15.106), т. е.  $4q(q-1)$ . Остается  $8q$  свободных параметров, однако из-за остающейся  $SU(2)$  свободы среди них независимыми являются  $8q-3$ .

Мы можем теперь формально выписать общее решение для  $SU(2)$  теории. Обозначим элементы первой строки матрицы  $\hat{a}_{\rho\alpha}$  через  $u_{\alpha} = \{u_1, \dots, u_q\}$ , а остальную  $q \times q$ -матрицу — через  $r_{\alpha\beta}$ . Тог-

да основное уравнение на компоненты кватернионного вектора  $\Omega_p$  имеет вид

$$\Omega_p^+ \Delta_{pa} = \Omega_0^+ u_a - \Omega_p^+ (\Delta^{-1})_{pa} = 0, \quad (15.107)$$

где  $(\Gamma^{-1})_{ab} = -r_{ab} + \lambda \delta_{ab}$ . Условия на матрицу  $\Delta$  обеспечивают обратимость  $\Gamma^{-1}$ , и тогда (15.107) легко решается относительно  $\Omega_p^+$ , а именно:

$$\Omega_p^+ = \Omega_0^+ u_a \Gamma_{ap}.$$

Отсюда

$$\Omega_a = \Gamma_{ap} u_p \Omega_0, \quad (15.108)$$

и из условия нормировки (15.95) находим

$$\Omega_0 = (1 + u^+ \Gamma \Gamma u)^{-1/2}. \quad (15.109)$$

Уравнения (15.108) — (15.109) дают исконое решение с инстантонным числом  $-q$ , поскольку получение  $A_\mu$  теперь сводится к элементарным операциям дифференцирования и свертки (15.99). Мы не будем выписывать явно калибровочное поле  $A_\mu$ , так как ввиду отсутствия удобной параметризации матрицы  $r_{ab}$  (и следовательно,  $\Gamma_{ab}$ ) это выражение является чисто формальным. Покажем, однако, как из общей схемы АХДМ получается известное  $(5q+4)$ -параметрическое решение т'Хуфта. Для этого выберем неканоническую параметризацию (отличную от (15.105) и (15.103)) матриц  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ :

$$\hat{a}_{21} = u_1 \lambda_1, \quad \hat{a}_{a3} = u_a \lambda_{a3}, \quad (15.110)$$

$$\hat{b}_{0a} = -\lambda_a, \quad \hat{b}_{a3} = -\delta_{a3}, \quad (15.111)$$

где  $\lambda_\alpha = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{q+1}\}$  — вещественные числа, а  $u_0, u_a$  — произвольные  $(q+1)$  кватернионы. Итак, матрица  $\Delta_{pa}$  зависит от  $q+4(q+1) = 5q+4$  параметров.

Уравнение на вектор  $\Omega$

$$\Omega_p^+ \Delta_{pa} = \Omega_0^+ (u_0 - \hat{x}) \lambda_a + \Omega_p^+ (x_1 - \hat{\lambda}) \lambda_{a3} = 0$$

легко решается:

$$\Omega_p = \frac{c_p}{(x - u_p)^r}, \quad c_1 = -\lambda_1 c_0.$$

Из условия нормировки (15.95) находим

$$c_0 = f^{-1} = \left[ \frac{1}{(x - u_0)^2} + \sum_{a=1}^q \frac{\lambda_a^2}{(x - u_a)^2} \right]^{-1/2}.$$

Используя теперь найденные величины в (15.99), получаем после несложных преобразований

$$A_\mu = \frac{1}{2} \eta_{ab}^{(-)} \partial_\nu \ln f^2,$$

где  $\eta_{ab}^{(-)}$  — известный антисимметричный тензор т'Хуфта (14.4).

**Топологический калибровочный заряд.** На этом мы закончим обсуждение метода АХДМ получения произвольных инстантонных решений. Сделаем в заключение несколько общих замечаний. Прежде всего отметим, что описанная выше процедура действительно приводит к калибровочным полям с топологическим зарядом  $-q$  (для самодуальных полей индекс Понтрягина отрицателен). Чтобы это показать, воспользуемся тождеством [50]

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} (F_\alpha F_\beta) = -\partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu \ln \det c_p^2, \quad (15.112)$$

где  $c_p^a(x)$  — матрица (15.94). Заметим, что

$$\partial_\mu \ln \det c = \partial_\mu \text{Tr} (c^{-1} \partial_\nu c),$$

и вычислим повторные производные, подставляя  $\partial_\mu c$  из (15.93). После этого, используя (15.101), можно преобразовать левую часть (15.112) к квадрату самодуального тензора  $F_{\mu\nu}$ , задаваемого формулой (15.100) и последующей ее записью в явно самодуальном виде. Подставим теперь (15.112) в выражение для топологического заряда (14.22) и, воспользовавшись теоремой Гаусса, найдем

$$\int_M c_2 = \frac{1}{15\sigma} \int d^3x |x|^2 x^\mu \partial_\mu \partial^\nu \ln \det c_p^2. \quad (15.113)$$

Из (15.94) следует, что на бесконечности

$$c_p^2(x) \rightarrow b_p^2 |x|^2, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

и поэтому правая часть (15.113) перейдет в

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{15\sigma} \int_{R^3} d^3x |x|^2 x^\mu \partial_\mu \partial^\nu \ln (\det b_p^2 \cdot \det \kappa_p^2 |x|^2) = \\ &= \frac{1}{15\sigma} \int_{R^3} d^3x |x|^2 x^\mu \partial_\mu \partial^\nu (q \ln |x|^2) = -q, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Некоторые важные вопросы оказались вне рамок нашего изложения. Во-первых, мы не затрагивали вопрос о полноте конструкции АХДМ. Была весьма схематично рассмотрена проблема перехода к комплексифицированному пространству — времени, и не обсуждался вопрос получения условий вещественности на простран-



ствах  $A, B, C$  и расслоении  $E$ . Наконец, все рассмотрение проводилось для плоского евклидова пространства, тогда как более строго мультиинстантонные решения описываются в рамках компактификации  $M$  до 4-мерной сферы  $S^4$ . Более последовательное изложение метода АХДМ на  $S^4$  можно найти в [31].

### § 16. МАГНИТНЫЕ МОНОПОЛИ

Перейдем теперь к рассмотрению классической калибровочной теории в физическом пространстве — времени Минковского. Как и в двух предыдущих параграфах, мы ограничимся случаем калибровочной группы  $G = \text{SU}(2)$ , однако к полям Янга — Миллса  $A_\mu^a$  добавим хиггсовский сектор, обеспечивающий спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

Простейшей моделью, на примере которой можно проследить многие основные черты объединенных моделей электрослабых и сильных взаимодействий, является так называемая модель Джорджи — Глэшоу [31], или т'Хуфта — Полякова. Ее лагранжиан имеет вид (10.6), где скалярное хиггсовское поле преобразуется по закону

$$\delta\Phi^a = -f_{bc}^a \varepsilon^c \Phi^b$$

относительно  $G = \text{SU}(2)$ . Здесь и далее  $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$  и, как обычно,  $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$  — структурные константы и  $\varepsilon^a(x)$  — инфинитезимальные параметры преобразований. Ковариантная производная поля  $\Phi^a$  имеет вид (10.6).

Как уже отмечалось в предыдущей главе, важную роль играют решения классических уравнений поля, на которых функционал энергии конечен. Последний в соответствии с теоремой Нетер определяется как интеграл по 3-пространству от компоненты  $T_0^0$  тензора энергии — импульса системы. Для рассматриваемой модели (10.6) симметричный (метрический) тензор энергии — импульса

$$T_\mu^\nu = -F_\mu^\lambda F_\lambda^\nu + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta}^2 + V(\Phi) \delta_\mu^\nu + (D_\mu\Phi)^a (D^\nu\Phi)_a - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (D_\lambda\Phi)^a (D^\lambda\Phi)_a, \quad (16.1)$$

где хиггсовский потенциал

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^a\Phi_a - a^2)^2. \quad (16.2)$$

что  $T_0^0 \leq 0$  и функционал энергии

$$T_0^0 = V(\Phi) + \frac{1}{2} \left[ (F_{0i}^a)^2 + \frac{1}{2} (F_{ij}^a)^2 + (D_0\Phi)^2 + (D_i\Phi)^2 \right],$$

где  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ , и суммирование по этим индексам проводится

без их поднятия (метрика Минковского  $\eta_{\mu\nu}$  не участвует). Видно, что  $T_0^0 \geq 0$  и функционал энергии

$$E = \int d^3x T_0^0$$

конечен только в том случае, если на бесконечности  $T_0^0 \rightarrow 0$ . Последнее выполняется тогда и только тогда, когда

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow 0, \quad D_\mu\Phi^a \rightarrow 0, \quad V(\Phi) \rightarrow 0. \quad (16.3)$$

при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Классические уравнения поля для системы Янга — Миллса — Хиггса (10.6) имеют вид

$$D_\mu F_{\nu\lambda}^a = J_{\nu\lambda}^a, \quad (16.4)$$

$$(D_\mu D^\mu\Phi)^a = -\lambda\Phi^a (\Phi^b\Phi_b - a^2), \quad (16.5)$$

где ток

$$J_{\nu\lambda}^a = g f_{abc} (D^\nu\Phi)^c \Phi^b. \quad (16.6)$$

Полевые конфигурации, задаваемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= 0, \\ (D_\mu\Phi)^a &= 0, \quad V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^a\Phi_a - a^2)^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

являются решениями (16.4) — (16.5) и имеют наименьшую энергию  $E=0$ . В соответствии с терминологией, введенной в первой главе, будем называть такие конфигурации вакуумными. Более специально, калибровочные поля, удовлетворяющие (16.7), назовем янг-миллсовским вакуумом, а скалярные полевые конфигурации, являющиеся решениями (16.7), будем именовать хиггсовским вакуумом.

Тривиальное  $G$ -симметричное состояние

$$\Phi^a = 0, \quad A_\mu^a = 0,$$

вакуумным не является, и поэтому для выяснения физического содержания модели поля следует разложить в ряд в окрестности настоящего вакуума, например

$$\Phi^a = a\delta_3^a, \quad A_\mu^a = 0.$$

Переходя к калибровке

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \psi \end{bmatrix}, \quad (16.8)$$

получаем лагранжиан (10.6) в виде

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} \bar{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 g^2 W_\mu \bar{W}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi) - \lambda a^2 \psi^2 + L_{вз}, \quad (16.9)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3, \quad W^\mu = A_\mu^1 + iA_\mu^2, \\ G_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^3,$$

и  $L_{вз}$  есть лагранжиан взаимодействия, содержащий кубические и более высокой степени инварианты из  $\psi$  и  $W$ .

Таким образом, мы видим, что данная теория описывает массивную хиггсовскую скалярную частицу  $\psi$  с массой  $m = a\sqrt{\lambda}$ , комплексное массивное векторное поле  $W_\mu$  с массой  $M = ag$ , а также безмассовое векторное поле  $A_\mu^3$ . Легко убедиться, что модель (16.9) инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon, \quad W_\mu \rightarrow e^{i\varepsilon} W_\mu, \quad (16.10)$$

и следовательно, можно отождествить  $A_\mu^3$  с электромагнитным полем. При этом хиггсовские частицы оказываются нейтральными, тогда как векторные бозоны  $W_\mu$  несут заряд  $\pm g$ .

Группа  $H$  преобразований (16.10) является подгруппой исходной калибровочной группы  $G$ . Обычно  $H$  называется группой точной (или остаточной) симметрии, до которой спонтанно нарушается  $G$ .

Обратимся теперь к общему анализу решений классических уравнений поля (16.4)–(16.6). Условие конечности энергии приводит к нетривиальному поведению полей на бесконечности (16.3), они стремятся к своим вакуумным значениям. Особенно важна асимптотика хиггсовских полей, поскольку она определяет топологический заряд, позволяющий классифицировать решения с конечной энергией.

Границей 3-пространства (сечения  $M^4$  с фиксированным временем  $t$ ) является бесконечно удаленная сфера  $S^2_\infty$ . В сферических координатах  $r, \chi, \theta$  она задается значением  $r = \infty$ , а углы  $y^1 = \chi, y^2 = \theta$  определяют положение произвольной точки на границе. Хиггсовское поле  $\Phi^a$  принимает на  $S^2_\infty$  вакуумные значения (16.3), (16.7) и, следовательно, принадлежит сфере  $\Phi^2 = a^2$  в изотопическом пространстве. Введем для описания граничных конфигураций удобные координаты типа сферических углов:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\infty, \chi, \theta) &= a \sin Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_2(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_3(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_2, \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

где  $Y_{1,2}$  — функции от  $\chi, \theta$  ( $Y = Y(y)$ ). Произвольное калибровочное преобразование  $g \in G$  переводит ( $\Phi' = g\Phi$ ) одну граничную вакуумную конфигурацию в другую, последняя, однако, гомотопически эквивалентна исходной при  $g$  и  $\Phi$ , гладких всюду в 3-пространстве. Действительно, без ограничения общности можно считать, что  $g(x=0) = 1$ , поскольку координаты  $r, \chi, \theta$  всегда можно задать так, чтобы их начало совпадало с точкой, в которой  $g = 1$ . Тогда функция

$$F(t, \chi, \theta) = g\left(\frac{t}{1-t}, \chi, \theta\right) \Phi(\infty, \chi, \theta)$$

является искомой гомотопией, так как она равна при  $t=0$  исходной граничной конфигурации  $\Phi(\infty, \chi, \theta)$ , а при  $t=1$  совпадает с

$$\Phi'(\infty, \chi, \theta) = g(\infty, \chi, \theta) \Phi(\infty, \chi, \theta).$$

Подгруппа  $H \subset G$  калибровочных преобразований, оставляющих вакуум инвариантным, состоит из вращений вокруг оси, задаваемой углами  $Y_1, Y_2$  в изотопическом пространстве. Таким образом, многообразие хиггсовских вакуумов имеет вид

$$G/H = S^2, \quad G = \text{Su}(2), \quad H = \text{U}(1).$$

Аналогично, в более сложных моделях классические вакуумы являются элементами фактор-пространства  $G/H$  полной калибровочной группы  $G$  по подгруппе точной симметрии  $H \subset G$ , остающегося после спонтанного нарушения симметрии.

Отображения сфер  $S^2_\infty \rightarrow S^2$ , которые задают хиггсовские поля на границе, классифицируются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(S^2) = \pi^2(G/H) = \mathbb{Z}.$$

Соответствующий целочисленный заряд  $N$  можно определить как степень отображения  $Y(y)$ :

$$N = \text{deg } Y(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2_\infty} d^2y \sin Y_2 \left| \frac{D(Y_1, Y_2)}{D(y_1, y_2)} \right|. \quad (16.12)$$

Используя (16.11), нетрудно привести введенную величину к явно ковариантному виду

$$N = \frac{1}{8\pi a^3} \int_{S^2_\infty} ds_i \varepsilon^{ijkl} \varepsilon_{abcd} \Phi^a \partial_j \Phi^b \partial_k \Phi^c, \quad (16.13)$$

где  $i, j, k = 1, 2, 3$  — индексы произвольных 3-координат в пространстве и  $ds_i$  — элемент площади границы  $S^2_\infty$ .

Упражнение 16.1. Доказать эквивалентность (16.12) и (16.13). Доказать инвариантность топологического заряда относительно произвольных инфинитезимальных преобразований хиггсовских полей  $\Phi^a \rightarrow \Phi^a + \delta\Phi^a$ .

Конкретное решение классических уравнений (16.4)–(16.6) с фиксированным значением топологического заряда не инвариантно относительно полной калибровочной группы  $G$ . Этот факт аналогичен квантовому механизму спонтанного нарушения симметрии, при котором основное состояние (вакуум) не инвариантно относительно группы симметрий теории. Исходя из этой аналогии, определим подгруппу  $H \subset G$  точной симметрии как группу преобразований, сохраняющих граничную вакуумную конфигурацию решений. Выше при исследовании физического содержания модели мы уже отмечали, что  $H=U(1)$  связана с существованием безмассового калибровочного поля («фотона»). Сформулируем теперь этот результат, полученный в частной калибровке (16.8), более строго.

Ввиду того что  $g$  обозначает в данном разделе калибровочную константу связи, матрицы  $SU(2)$  калибровочных преобразований будем обозначать

$$\omega(x) = \exp(t_a u^a(x)), \quad (16.14)$$

где  $u^a$  — произвольные функции в  $M^4$ , а  $t_a$  — генераторы  $SU(2)$  (см. (14.1)). Изовекторное хиггсовское поле удобно рассматривать как элемент алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  ( $\Phi = \Phi^a t_a$ ), на который калибровочная группа действует посредством присоединенного представления

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \text{Ad}_\omega \Phi = \omega \Phi \omega^{-1}. \quad (16.15)$$

Как обычно, калибровочное поле  $A_\mu = A_\mu^a t_a$  есть элемент алгебры Ли  $SU(2)$  с законом преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \frac{1}{g} \omega \partial_\mu \omega^{-1}. \quad (16.16)$$

Тогда ковариантная производная (10.6) может быть записана в виде

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g [A_\mu, \Phi] = \partial_\mu \Phi + g \text{ad}_{A_\mu} \Phi, \quad (16.17)$$

а различные инварианты, построенные из скалярных полей, можно представить как следы матричных произведений, например,

$$\Phi^2 = \Phi^a \Phi_a = -2 \text{Tr}(\Phi \Phi).$$

Группа  $H$  точной симметрии модели (10.6) состоит из матриц

$$h(x) = \exp(f \hat{\Phi}) = \exp(f \hat{\Phi}_a t_a), \quad (16.18)$$

где  $f(x)$  — произвольная функция в  $M^4$  и  $\Phi^a = \Phi^a / \Phi^2$ . Очевидно, что  $h \in H \subset G$  и

$$\Phi' = h \Phi h^{-1} = \Phi,$$

так что хиггсовский вакуум (граничные конфигурации  $\Phi^a(\infty, \chi, \theta)$ ) инвариантен относительно (16.18). Преобразования из  $H$  параметризуются одной функцией  $f(x)$ , а их генераторами являются  $\Phi = \Phi^a t_a$ . Рассмотрим поле

$$A_\mu = A_\mu^a \hat{\Phi}_a = -2 \text{Tr}(A_\mu \hat{\Phi}). \quad (16.19)$$

Оно является абелевым калибровочным полем, отвечающим группе точной симметрии модели, и может быть отождествлено с электромагнитным полем. Относительно (16.18) поле  $A_\mu$  преобразуется по закону

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{2}{g} \text{Tr}[(h^{-1} \partial_\mu h) \hat{\Phi}] = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu f. \quad (16.20)$$

Упражнение 16.2. Доказать (16.20). Указание: использовать (14.1) для представления  $h(x)$  в виде

$$h = \cos(f/2) + 2\hat{\Phi} \sin(f/2).$$

Упражнение 16.3. Доказать, что для произвольного вектора  $e^a$  и соответствующего элемента алгебры Ли  $e = e^a t_a$  имеет место тождество

$$h^{-1} e h = e \cos f + [e, \hat{\Phi}] \sin f, \quad (16.21)$$

где  $h(x)$  — преобразование (16.18) и  $[, ]$  — коммутатор матриц.

Калибровочное поле  $A_\mu$  с градиентным законом преобразования (16.20) является корректным обобщением поля  $A_\mu^3$  (с законом преобразования (16.10)) на случай произвольной калибровки, отличной от (16.8). Нетрудно также построить обобщение поля  $W_\mu$ . С этой целью в каждой точке  $x \in M^4$  выберем пару изовекторов  $e_1^a$  и  $e_2^a$ , которые совместно с  $\Phi^a$  образуют ортогональный базис во внутреннем пространстве. Определим теперь, аналогично (16.19), поля  $A_\mu^a e_a^1$  и  $A_\mu^a e_a^2$  и рассмотрим их закон преобразований относительно (16.18). Имеем

$$\text{Tr}(A'_\mu e) = \text{Tr}(A_\mu h^{-1} e h) + \frac{1}{g} \text{Tr}[(h \partial_\mu h^{-1}) e],$$

и ввиду ортогональности  $e^a_{1,2} \Phi_a = 0$ , а также тождества (16.21) получим

$$e_a^1 A_\mu^{a'} = e_a^1 A_\mu^a \cos f + e_a^2 A_\mu^a \sin f,$$

$$e_a^2 A_\mu^{a'} = -e_a^1 A_\mu^a \sin f + e_a^2 A_\mu^a \cos f.$$

Таким образом, комплексное поле

$$W_\mu = e_a^1 A_\mu^{a'} + i e_a^2 A_\mu^{a'} \quad (16.22)$$

под действием группы  $H$  испытывает фазовое преобразование

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = e^{if} W_\mu,$$

т. е. описывает заряженные частицы, взаимодействующие посредством  $\mathcal{A}_\mu$ .

Скалярное хиггсовское поле  $\Phi^a$  является незаряженным, поскольку  $\Phi$  по определению инвариантно относительно (16.18). Оно характеризуется одной компонентой  $\Phi^a = |\Phi| \Phi^a$  в выбранном выше базисе в изотопическом пространстве. Проекция его на «заряженные» направления  $e_{1,2}^a$  равны нулю, что полностью согласуется с выводами механизма Хиггса, в котором скалярные поля, отвечающие генераторам нарушенной симметрии, «поглощаются» калибровочными компонентами (в данном случае  $W_\mu$ ).

Итак, суммируем некоторые выводы. В модели Янга — Миллса — Хиггса (10.6) со спонтанным нарушением симметрии до  $H = U(1)$  существует сектор, связанный с абелевым калибровочным полем  $A_\mu$  группы точных симметрий. Можно поэтому предположить, что на больших расстояниях система (10.6) будет обнаруживать (в конкретных классических решениях) «электромагнитные» свойства. Что касается нейтрального хиггсовского поля  $\Phi$  и заряженного векторного поля  $W_\mu$ , то наличие у них массы (вследствие механизма Хиггса) позволяет ожидать их нетривиального поведения только на масштабах длин порядка  $m^{-1}$  и  $M^{-1}$ . На больших расстояниях  $\Phi$  и  $W_\mu$  быстро стремятся к своим вакуумным значениям. Точные решения уравнений поля (16.4) — (16.6), рассмотренные ниже, полностью подтверждают эти качественные выводы. Однако, прежде чем мы приведем конкретные решения, необходимо уточнить описание электромагнитных свойств модели.

**Электромагнитное поле в модели т'Хуфта — Полякова.** В теории Максвелла наблюдаемыми физическими величинами являются электрическое и магнитное поля, составляющие тензор напряженности  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ . Определим аналогичный объект в модели (10.6). Нетрудно видеть, что  $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$  не подходит на роль тензора напряженности, так как меняется при калибровочных преобразованиях по закону

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \frac{2}{g} \partial_\mu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\nu \omega) \hat{\Phi}] - \frac{2}{g} \partial_\nu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\mu \omega) \hat{\Phi}], \quad (16.23)$$

Последних два слагаемых исчезают при  $\omega = h$  в силу (16.20), однако в общем случае  $\omega \in G$  они отличны от нуля. Это означает, что  $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$  не является наблюдаемой величиной в  $G$ -калибровочно инвариантной модели (10.6). К счастью, в теории присутствуют также хиггсовские поля, и с их помощью неинвариантные члены в (16.23) можно скомпенсировать.

Действительно, рассмотрим величину

$$\text{Tr} (\Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi) = -\frac{1}{4} \varepsilon_{abc} \hat{\Phi}^a \partial^\mu \hat{\Phi}^b \partial^\nu \hat{\Phi}^c.$$

Этот тензор антисимметричен по  $\mu, \nu$  и имеет закон преобразования (относительно  $\Phi \rightarrow \Phi' = \omega \Phi \omega^{-1}$ ):

$$\text{Tr} (\hat{\Phi} \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\nu \hat{\Phi})' = \text{Tr} (\hat{\Phi} \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\nu \hat{\Phi}) + \frac{1}{2} \partial_\nu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\mu \omega) \hat{\Phi}] - \frac{1}{2} \partial_\mu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\nu \omega) \hat{\Phi}].$$

Следовательно, тензор

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \frac{4}{g} \text{Tr} (\hat{\Phi} \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\nu \hat{\Phi}) \quad (16.24)$$

является калибровочно инвариантным (относительно  $G = SU(2)$ ). Эту физическую наблюдаемую (введенную впервые в несколько иной форме т'Хуфтом [32]) мы и отождествим в модели Янга — Миллса — Хиггса (10.6) с электромагнитным полем.

Хорошо известно, что система уравнений Максвелла в вакууме

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu*} = 0, \quad (16.25)$$

где  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta}$ , симметрична относительно так называемых преобразований дуальности  $\mathcal{F}_{\mu\nu} \leftrightarrow \mathcal{F}^{\mu\nu}$ , т. е. замены электрического поля  $E_i = \mathcal{F}_{i0}$  на магнитное

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{F}_{jk}, \quad (16.26)$$

и наоборот. Однако в присутствии источников, описываемых электрическим током  $j^\mu$ , система (16.25) перестает быть дуально симметричной, поскольку первая половина уравнений Максвелла модифицируется:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (16.27)$$

тогда как вторая половина остается неизменной.

**Магнитный заряд.** Дирак [33] заметил, что можно восстановить дуальную симметрию полных уравнений, если предположить существование в природе магнитных зарядов, которые порождают магнитный ток  $k^\mu$  так, что вторая половина уравнений приобретает вид

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu*} = k^\nu. \quad (16.28)$$

Из (16.27) — (16.28) видно, что оба тока имеют нулевую дивергенцию

$$\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial_\mu k^\mu, \quad (16.29)$$

так что соответствующие заряды

$$e = \int d^3x j^0, \quad \mu = \int d^3x k^0$$

сохраняются во времени. Интегрируя нулевые ( $\nu=0$ ) компоненты

уравнений (16.27) — (16.28), с помощью теорем Гаусса можно выразить полные электрический  $e$  и магнитный  $\mu$  заряды через потоки соответственно электрического и магнитного полей через пространственную границу  $S^2_\infty$ :

$$e = \int d^3x \operatorname{div} \mathbf{E} = \int ds_i E^i, \quad (16.30)$$

$$\mu = \int d^3 \operatorname{div} \mathbf{B} = \int_{S^2_\infty} ds_i B^i. \quad (16.31)$$

Основной трудностью теории Дирака является тот факт, что левая часть (16.28) тождественно обращается в 0, если существует всюду регулярный вектор-потенциал  $\mathcal{A}_\mu$  для которого

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu.$$

Поэтому в присутствии магнитных зарядов потенциал  $\mathcal{A}_\mu$  с необходимостью должен быть сингулярным. Причем, как показал Дирак [33], его сингулярности расположены на нити (бесконечно тонкой), начинающейся на магнитном заряде и уходящей в бесконечность. Все сказанное относится, однако, к стандартной теории Максвелла, в которой источники — точечные частицы, энергия классических решений бесконечна.

Возвращаясь к модели Янга—Миллса—Хиггса (10.6), отметим, что электромагнитный сектор в ней является частью более общей нелинейной системы (16.4) — (16.6). При этом калибровочная группа  $H = U(1)$  возникает как подгруппа точной симметрии в рамках механизма спонтанного нарушения  $G = SU(2)$  симметрии, что позволяет определить эффективное электромагнитное поле, описываемое потенциалом  $\mathcal{A}_\mu$  (16.19) и тензором напряженности  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  (16.24). Калибровочно инвариантный тензор (16.24) в отличие от теории Максвелла не есть просто «ковариантный ротор» от 4-потенциала, и тем самым магнитный ток  $k^\mu$  и магнитный заряд  $\mu$  полевых конфигураций системы Янга—Миллса—Хиггса с необходимостью нетривиальны.

Найдем электрический и магнитный токи в рассматриваемой неабелевой модели. Для этого согласно (16.27) — (16.28) требуется вычислить дивергенцию тензора (16.24), а также дуального к нему тензора  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^*$ . Преобразуем сначала (16.24). Используя определение (16.19), нетрудно видеть, что

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \hat{\Phi}_a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{g} \varepsilon_{abc} \hat{\Phi}^a D_\mu \hat{\Phi}^b D_\nu \hat{\Phi}^c. \quad (16.32)$$

**Упражнение 16.4.** Доказать эквивалентность (16.24) и (16.32).

Подставляя (16.32) в (16.27) — (16.28), получим следующие явные выражения для токов

$$j^\nu = (D_\mu \hat{\Phi}^a) \left( F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{g} \varepsilon_{abc} \hat{\Phi}^b D^\mu D^\nu \hat{\Phi}^c \right), \quad (16.33)$$

$$k^\nu = \frac{1}{2g} \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{abc} D_\alpha \hat{\Phi}^a D_\beta \hat{\Phi}^b D_\gamma \hat{\Phi}^c. \quad (16.34)$$

При вычислении этих величин неоднократно использовался тот факт, что  $\hat{\Phi}_a \hat{\Phi}^a = 1$  и, следовательно,

$$\hat{\Phi}_a D_\mu \hat{\Phi}^a = 0.$$

Кроме того, (16.33) получена с учетом того, что поля удовлетворяют уравнениям (16.4) — (16.6), тогда как (16.34) справедливо независимо от вычисления уравнений поля — используются только тождества

$$D_{[\mu} F_{\nu\lambda]}^a = 0, \quad [D_\mu, D_\nu] \Phi^a = g \varepsilon^a_{bc} F_{\mu\nu}^b \Phi^c.$$

Заметим также, что в (16.34) можно тождественно заменить ковариантные производные  $\mathcal{D}_\mu$  на частные  $\partial_\mu$ .

Формулы (16.33) — (16.34) определяют распределение и динамику (эффективных) источников электромагнитного поля через  $SU(2)$  калибровочные и хиггсовские поля. В частности, рассмотрим случай, когда модель (10.6) находится в хиггсовском вакууме, т. е. имеет место (16.7). Тогда из (16.33) — (16.34) вытекает, что

$$F_{\mu\nu} = \hat{\Phi}_a F_{\mu\nu}^a, \quad k^\mu = j^\mu = 0.$$

Таким образом, в хиггсовском вакууме  $SU(2)$  калибровочное поле имеет одну компоненту (отвечающую «нейтральному» направлению в изотопическом пространстве, которое связано с генератором  $U(1)$  ненарушенной симметрии), и эта компонента является свободным электромагнитным полем, удовлетворяющим уравнениям Максвелла в вакууме. Последний результат имеет большое значение, поскольку выше было установлено, что точные решения уравнений поля (16.4) — (16.6) (с конечной энергией) нетривиальны только в областях с размерами порядка  $m^{-1}$  или  $M^{-1}$ , а всюду в  $M^4$  вне этих областей полевые конфигурации близки к хиггсовскому вакууму. В сущности, как будет показано ниже, на больших расстояниях отличие от вакуума экспоненциально мало, и следовательно, «издали» полевая конфигурация модели Янга—Миллса—Хиггса будет выглядеть как система электрических и магнитных зарядов, порождающих (почти) максвелловское электромагнитное поле.

Найдем магнитный заряд произвольного распределения полей модели (10.6). Подставляя (16.34) в (16.31), получим

$$\mu = -4\pi N/g$$

в силу (16.13). Таким образом, топологический инвариант (16.13), классифицирующий решения с конечной энергией, в сущности есть магнитный заряд полевой конфигурации. Учтя, что константа свя-

зи  $g$  в данной модели пропорциональна электрическому заряду (так как  $W_\mu$  несет  $\pm g$ ), перепишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\mu g}{4\pi} = -N, \quad N=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.35)$$

Эта формула является известным *условием квантования зарядов*, которое Дирак получил в своей теории магнитных монополей из квантово-механических соображений. Примечательно, что в модели Янга—Миллса—Хиггса квантование зарядов имеет классическое—топологическое происхождение. Для большей строгости уточним, что условие Дирака отличается от (16.35) дополнительным множителем  $1/2$  справа, однако последний нетрудно восстановить, если учесть, что в модели (10.6) заряд  $g$  не является минимальным. Можно показать [34], что минимальный заряд равен половине  $g$ .

**Монополь Полякова—г'Хуфта.** Исследуем теперь точные решения уравнений поля (16.4)—(16.6). Покажем сначала существование решений с произвольным значением топологического (магнитного) заряда. С этой целью рассмотрим конфигурации, которые например, являются

$$\left. \begin{aligned} \Phi^a &= (a \sin N\chi \sin \theta, a \cos N\chi \sin \theta, a \cos \theta), \\ A_\mu^a &= -\frac{1}{ga^2} \varepsilon^{abc} \Phi_b \partial_\mu \Phi_c, \end{aligned} \right\} \quad (16.36)$$

где  $\chi, \theta$  — обычные сферические углы. На бесконечности  $S_\infty^2$  всюду в  $M^4$  находятся в хиггсовском вакууме (16.7). Таковыми, ции  $Y_{1,2}(y)$  (см. (16.11)) имеют простой вид

$$Y_1 = N\chi, \quad Y_2 = \theta,$$

и топологический заряд (16.12)—(16.13) равен  $N$ . Легко убедиться, что (16.36) являются решениями уравнений (16.4)—(16.6). При этом напряженность  $SU(2)$  калибровочного поля принимает вид

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{ga^2} \varepsilon^{abc} \partial_\mu \Phi_b \partial_\nu \Phi_c, \quad (16.37)$$

и подставляя сюда независимые от времени хиггсовские поля (16.36), находим, что нетривиальны только магнитные компоненты

$$F_{ij}^a = -\frac{N}{g} \hat{\Phi}_a \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3}. \quad (16.38)$$

Таким образом, электромагнитное поле (16.32) есть

$$\mathcal{F}_{ij} = -\frac{N}{g} \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3},$$

или для компонент магнитного поля (16.26) получим

$$\mathbf{B} = -\frac{N}{g} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (16.39)$$

Сферически симметричное решение (16.39) является магнитным монополем с зарядом  $\mu = -4\pi N/g$  в полном согласии с (16.35). Этот монополь является точечным и находится в начале координат. Поэтому функционал энергии расходится на решениях (16.36)—(16.39). Отметим, что точечные монополи (16.39) присутствуют (и были впервые получены) в теории Дирака (16.27)—(16.28), однако там существуют также сингулярные нити, на которых 4-потенциал  $\mathcal{A}_\mu$  не существует. Качественная особенность решения (16.36)—(16.39) заключается в том, что  $U(1)$  потенциал (16.19) для него тождественно равен нулю, а электромагнитный тензор (16.24) порождается хиггсовскими полями.

Получение регулярных решений с конечной энергией для произвольного  $N$  является пока нерешенной задачей. Продемонстрируем, однако, существование  $N=1$  монополей. Основная идея построения таких решений довольно проста. Рассмотрим еще раз сингулярные конфигурации (16.36), которые при  $N=1$  имеют следующий вид:

$$\Phi^a = a \frac{x^a}{r}, \quad A_r^a = \frac{1}{g} \varepsilon_{ij}^a \frac{x^j}{r^2}, \quad A_0^a = 0. \quad (16.40)$$

Заметим, что поля (16.40) инвариантны относительно одновременных  $SO(3)$  вращений декартовых пространственных координат  $x^i$  и внутренних координат в изотопическом пространстве. Будем искать  $N=1$  решения с конечной энергией в классе регулярных  $SO(3)$ -симметричных конфигураций (10.7), для которых (16.40) на пространственной бесконечности имеет асимптотику (10.8). Очевидным  $SO(3)$ -симметричным обобщением (10.7) является анзац

$$\Phi^a = \frac{H(r)}{gr^2} x^a, \quad A_i^a = [1 - K(r)] \varepsilon_{ij}^a \frac{x^j}{gr^2}, \quad A_0^a = 0. \quad (16.41)$$

Условия регулярности в  $r=0$  и асимптотика (10.8) при  $r \rightarrow \infty$  фиксируют поведение функций  $H$  и  $K$  на границах:

$$\left. \begin{aligned} H(r) &\leq O(agr), \quad K(r) \leq 1 + O(agr), \quad r \rightarrow 0, \\ H(r) &\rightarrow agr, \quad K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (16.42)$$

Подстановка (16.41) в уравнения поля (16.4)—(16.6) приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений на неизвестные функции

$$\left. \begin{aligned} r^2 K'' &= K [H^2 + K^2 - 1], \\ r^2 H'' &= H \left[ 2K^2 + \frac{\lambda}{g^2} (H^2 - g^2 a^2 r^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

где штрихом обозначается производная по радиусу  $r$ .

Нетрудно видеть, что в анзаце (16.41) эффективный  $U(1)$  потенциал (16.19) тождественно равен нулю ( $\mathcal{A}_\mu = 0$ ), тогда как

но найти численным интегрированием, причем она существенным образом зависит только от отношения  $\lambda/g^2$ , а именно:

$$E = \frac{4\pi a}{g} f\left(\frac{\lambda}{g^2}\right),$$

где гладкая функция  $f \geq 1$  и равенство достигается только в 0 ( $f(0) = 1$ ). Последнее реализуется при  $\lambda = 0$  и заслуживает отдельного рассмотрения.

Прежде всего заметим, что при  $\lambda = 0$  уравнения поля (16.4) — (16.6) тождественно удовлетворяются на решениях следующей системы:

$$F_{ij}^a = \pm \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a, \quad F_{0j}^a = 0, \quad (16.45)$$

где хиггсовские и калибровочные поля не зависят от времени. Уравнение (16.45), называемое уравнением Богомольного [36], допускает замечательную интерпретацию, если формально отождествить хиггсовское поле с «четвертой» компонентой  $\Phi^a = A_4^a$  калибровочного поля SU(2). Ковариантная производная естественно интерпретируется как дополнительная компонента тензора напряженности

$$D_i \Phi^a = \partial_i A_4^a + g \varepsilon_{bc}^a A_i^b A_4^c = F_{i4}^a$$

Тогда уравнение Богомольного представляет собой не что иное, как уравнение самодуальности (14.34) для случая, когда калибровочные поля  $A_i^a, A_4^a$  не зависят от времени.

Мы по-прежнему будем считать, что на бесконечности поля стремятся к своим вакуумным значениям (16.7). Поскольку такая асимптотика вытекает из требования конечности энергии, которая для статических полей в калибровке  $A_0^a = 0$  имеет вид

$$E = \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{2} \left[ (D_i \Phi)^2 + \frac{1}{2} (F_{ij}^a)^2 \right] \right\}, \quad (16.46)$$

условие обращения в нуль константы  $\lambda$  следует понимать как предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$ , который называется пределом Прасада—Зоммерфельда [37]. Убедимся, что в данном пределе энергия достигает своего минимального значения на уравнении Богомольного. Для этого выпишем очевидную оценку интеграла (16.46) снизу:

$$E = \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{4} (F_{ij}^a \mp \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a)^2 \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi^a \right\} \geq \\ \geq \pm \int d^3x \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} D_k (F_{ij}^a \Phi_a) = \pm \int dS_i \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a \Phi_a = \pm \mu a. \quad (16.47)$$

Таким образом, ввиду (16.35) в  $N=1$  секторе для энергии имеем неравенство

$$E \geq \frac{4\pi a}{g}$$

электромагнитный тензор (16.24), (16.32) благодаря вкладу хиггсовских полей имеет вид

$$\mathcal{F}_{i0} = 0, \quad \mathcal{P}_{ij} = -\frac{1}{g} \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3}.$$

Решение системы (16.43), удовлетворяющее граничным условиям (16.42), существует, хотя его нельзя выразить в элементарных функциях. На рис. 22 приведен вид  $K$  и  $H$ , полученный численным интегрированием.

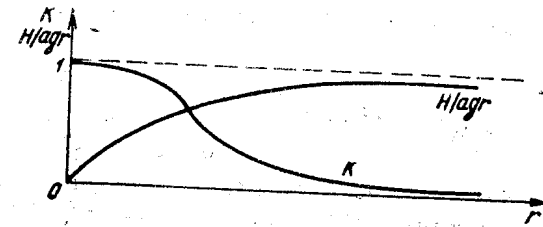


Рис. 22

Оценим поведение полей на бесконечности. На основе асимптотики (16.42) при  $r \rightarrow \infty$  функции  $K(r)$  и  $h(r) = H(r) - agr$  являются малыми, так что в (16.43) можно пренебречь нелинейными членами. В этом приближении

$$K'' \approx (ga)^2 K = M^2 K, \quad h'' \approx 2\lambda a^2 h = m^2 h, \quad (16.44)$$

и для хиггсовских и калибровочных полей получаем ожидаемую асимптотику

$$\Phi^a \approx \frac{ax^a}{r} \left( 1 - O\left(\frac{e^{-mr}}{r}\right) \right),$$

$$A_i^a \approx \frac{1}{g} \varepsilon_{ij}^a \frac{x^j}{r^2} \left( 1 - O(e^{-mr}) \right).$$

В полном согласии с проведенным ранее анализом физического содержания модели массивные поля имеют нетривиальное поведение только на расстояниях порядка  $M^{-1}$  и  $m^{-1}$ .

Уравнение Богомольного. Описанное выше решение было впервые получено т'Хуфтом [32] и Поляковым [35]. Монополь т'Хуфта—Полякова имеет магнитный заряд

$$\mu = -\frac{1}{4\pi g},$$

электрически нейтрален ( $e=0$ , поскольку  $j^\mu=0$  для статических конфигураций (16.41)), а его энергия  $E$  конечна. Величину  $E$  мож-

(откуда, кстати, следует, что введенная выше функция  $f(\lambda/g^2) \geq 1$ ). Равенство в (16.47), на котором реализуется минимум энергии, достигается для  $\lambda=0$  в уравнении Богомольного (16.45).

Решение в  $N=1$  топологическом секторе можно выписать в элементарных функциях. Подставив (16.41) в (16.45), получим систему

$$rK' = \pm KH, \quad rH' = H \pm (K^2 - 1). \quad (16.48)$$

Отсюда находим

$$H = \frac{\pm \beta r}{\text{sh}(\beta r)}, \quad K = -1 + \beta r \text{cth}(\beta r), \quad (16.49)$$

где  $\beta$  — произвольная константа интегрирования.

**Обобщения.** На этом мы закончим обсуждение магнитных монополей в неабелевых калибровочных теориях. Наше рассмотрение ограничилось  $SU(2)$  моделью Джорджи—Глешоу и простейшими решениями уравнений поля. Поэтому в заключение сделаем несколько замечаний о возможных обобщениях. Во-первых, (16.41) не является самым общим  $SO(3)$ -симметричным анзацем в  $N=1$  топологическом секторе. Для нулевой компоненты калибровочного поля решение можно искать в виде

$$A_0^a = J(r) \frac{x^a}{gr^2}.$$

Найденное в работе [38] точное решение системы уравнений для функций  $K, H, J$  (обобщающей (16.43)) описывает так называемый дион-объект, обладающий как магнитным, так и электрическим зарядами. При этом  $\mu = -\frac{1}{4\pi q}$ , а  $e$  произволен.

Что касается магнитных монополей с  $N > 1$ , то, как уже отмечалось, до настоящего времени задача их построения до конца не решена. В частности, это связано с тем, что такие конфигурации с необходимостью не являются сферически симметричными. Наибольший прогресс достигнут для частного случая в пределе Прасада—Зоммерфельда  $\lambda \rightarrow 0$ , когда  $N$ -поль описывается уравнением Богомольного (16.45). В работе [29] рассмотрено построение аксиально-симметричных решений с произвольным  $N$  на основе техники преобразований Бэклунда. Однако наиболее общие результаты получены Намом [39], который в пределе Прасада—Зоммерфельда нашел решения с произвольным магнитным зарядом для произвольной калибровочной группы, используя метод АХДМ (см. § 15).

В реалистических моделях с более общими калибровочными группами (в частности, в моделях Большого объединения [40]  $G$  не меньше чем  $SU(5)$ ) также существуют монополи. Соответствующий топологический инвариант ( $\sim$  магнитный заряд) классифицирует гомотопически неэквивалентные вакуумные конфигурации хиггсовских полей на пространственной бесконечности  $S_\infty^2$ . Для

связных полупростых групп  $G$  спонтанное нарушение симметрии до подгруппы  $H \subset G$  обеспечивается в моделях Большого объединения хиггсовскими полями, многообразие вакуумов которых изоморфно  $G/H$ . Множество монополярных решений тем самым определяется гомотопической группой  $\pi_2(G/H)$ , изоморфной ядру естественного отображения фундаментальных групп  $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$ , индуцируемого вложением  $H \subset G$ . Для односвязных групп  $\pi_2(G/H) \approx \pi_1(H)$ , и следовательно, монополи будут с необходимостью возникать в моделях с ненарушенной симметрией, содержащей электромагнитную группу  $U(1)$ . Точные монополярные решения в таких моделях можно построить с помощью вложения  $SU(2)$  монополя т'Хуфта—Полякова [29].

## § 17. ТЕОРЕМА ОБ ИНДЕКСЕ

**Теорема об индексе** позволяет установить связь между аналитическими свойствами эллиптических дифференциальных операторов на сечениях векторных расслоений и тополого-алгебраическими характеристиками этих расслоений. В частности, теорема об индексе находит применение при описании аномалий в квантовой теории поля (см. § 19).

Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — координаты в  $\mathbb{R}^n$ . Для всякого набора  $t = (t_1, \dots, t_n)$  целых неотрицательных чисел положим

$$|t| = t_1 + \dots + t_n,$$

$$\mathcal{D}^t = (-i)^{|t|} \frac{\partial^{|t|}}{(\partial x^1)^{t_1} \dots (\partial x^n)^{t_n}}.$$

Пусть  $V$  и  $V'$  — конечномерные комплексные векторные пространства и  $U$  — открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим  $C^\infty(U, V)$  пространство гладких  $V$ -значных функций на  $U$ . Линейное отображение

$$\mathcal{D}: C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U, V')$$

называется *дифференциальным оператором порядка  $r$* , если существуют матричные функции

$$a_i: C^\infty(U, V) \ni v^a(x) \rightarrow v'^a(x) = a_{ib}^a(x) v^b(x) \in C^\infty(U, V'),$$

такие, что

$$\mathcal{D} = \sum_{|t| \leq r} a_t \mathcal{D}^t. \quad (17.1)$$

Оператор

$$\tilde{\mathcal{D}} = \sum_{|t|=r} a_t \mathcal{D}^t$$



называется *главной частью* (состоящей из производных максимального порядка) *оператора* (17.1).

**Пример 17.1.** Линейный дифференциальный оператор первого порядка имеет вид

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^n (-i) a^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} + b(x),$$

где  $a(x), b(x)$  — матричные функции. Например,

$$\mathcal{D} = -i\eta^\mu \partial_\mu + m \quad (17.2)$$

— линейный дифференциальный оператор уравнения Дирака.

Дифференциальный оператор (17.1) порядка  $r$  определяет оператор

$$\sigma(\mathcal{D})(x, p): V \rightarrow V'$$

для всех  $(x, p) \in U \times \mathbb{R}^n$  по формуле

$$\sigma(\mathcal{D})(x, p) = \sum_{|I|=r} a_I(x) p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}. \quad (17.3)$$

Он называется *символом оператора*  $\mathcal{D}$  и является преобразованием Фурье его главной части

$$\tilde{\mathcal{D}}f(x) = f \, d^n p e^{i p x} \sigma(\mathcal{D})(x, p) f(p), \quad f(x) \in C^\infty(U, V).$$

Дифференциальный оператор называется *эллиптическим*, если его символ  $\sigma(\mathcal{D})(x, p)$  для всех  $x \in U$  и ненулевых  $p \in \mathbb{R}^n$  обратим.

**Пример 17.2.** Оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

имеет своим символом оператор

$$\sigma(\Delta) = \sum_{k=1}^n p_k^2,$$

который обратим

$$\sigma^{-1}(\Delta) = 1 \left| \sum_{k=1}^n p_k^2 \neq 0 \right.$$

во всех точках  $x$  и для всех ненулевых  $p$ . Примером необратимого дифференциального оператора может служить оператор Д'Аламбера  $\square$  с символом

$$\sigma(\square) = -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Пусть теперь  $X$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие (без границы) и  $E, F$  — гладкие комплексные векторные расслоения над  $X$ , а  $\Gamma(E), \Gamma(F)$  — соответствующие пространственные расслоения их гладких глобальных сечений. Линейное отображение

$$\mathcal{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$$

называется *дифференциальным оператором порядка  $r$* , если существуют такие атласы  $\Psi_E$  и  $\Psi_F$  расслоений  $E$  и  $F$  на одном и том же покрытии  $\{U\}$  многообразия  $X$  (например, образованного стягиваемыми множествами), что  $\mathcal{D}$  представляется операторами (17.1) в картах атласов расслоений  $\Psi_E, \Psi_F$  и атласа  $\Psi_X$  многообразия  $X$  с учетом соответствующих преобразований перехода между картами.

Пусть  $N(X)$  и  $S(X)$  — подрасслоения на  $n$ -мерные шары и  $(n-1)$ -мерные сферы кокасательного расслоения  $T^*(X)$  и

$$\pi : \text{tl } N(X) \rightarrow X.$$

Рассмотрим индуцированные расслоения  $\pi^*E$  и  $\pi^*F$  над  $\text{tl } N(X)$ . Определим *символ оператора*  $\mathcal{D}$  как послыйное отображение

$$\sigma(\mathcal{D}) : \pi^*E \rightarrow \pi^*F,$$

представленное локально в картах атласов  $\Psi_E, \Psi_F$  и голономного атласа  $\Psi_T$  расслоения  $T^*(X)$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{D}) : U \times N^n \times V_E \ni (x, p, v_E) \rightarrow \\ \rightarrow (x, p, \sigma(\mathcal{D})(x, p) v_E) \in U \times N^n \times V_F, \end{aligned} \quad (17.4)$$

где  $N^n, V_E$  и  $V_F$  — типичные слои расслоений  $N(X), E$  и  $F$ ,  $x \in U \subset X, p \in N^n$  — локальные координаты на  $\text{tl } N(X)$  в атласе  $\Psi_T$ , а  $\sigma(\mathcal{D})(x, p)$  задается выражением (17.3).

Если  $E, F, G$  — комплексные векторные расслоения над  $X$  и

$$\mathcal{D}_1 : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F), \quad \mathcal{D}_2 : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(G)$$

— дифференциальные операторы порядков  $r_1$  и  $r_2$ , то их композиция

$$\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(G)$$

— дифференциальный оператор порядка  $r_1 + r_2$  и

$$\sigma(\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2) \sigma(\mathcal{D}_1).$$

Дифференциальный оператор  $\mathcal{D}$  называется *эллиптическим*, если символ  $\sigma(\mathcal{D})$ , будучи ограниченным на расслоение  $S(X)$  (т. е.  $p \neq 0$ ), задает изоморфное отображение (17.4). Отсюда, в частности, следует, что, если  $\mathcal{D}$  эллиптивен, то  $E$  и  $F$  имеют одинаковую размерность.

Предположим теперь, что многообразие  $X$  замкнуто и расслоения  $E$  и  $F$  снабжены эрмитовыми метриками  $(\cdot, \cdot)_{E,F}(x)$ , а следовательно, определены эрмитовы метрики

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{E,F} = \int_X (\cdot, \cdot)_{E,F}(x) dx$$

на  $\Gamma(E)$  и  $\Gamma(F)$ . Дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^*: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$$

называется сопряженным к  $\mathcal{D}$ , если для всех  $f \in \Gamma(E)$  и  $g \in \Gamma(F)$

$$\langle \mathcal{D}f | g \rangle_F = \langle f | \mathcal{D}^*g \rangle_E.$$

Эрмитовы метрики на  $E$  и  $F$  определяют эрмитовы метрики на  $\pi^*E$  и  $\pi^*F$  по формуле

$$(\cdot, \cdot)_{\pi^*E, \pi^*F}(x, p) = (\cdot, \cdot)_{E,F}(x).$$

Соответственно определено отображение

$$\sigma(\mathcal{D})^*: \pi^*F \rightarrow \pi^*E,$$

сопряженное символу  $\sigma(\mathcal{D})$ .

**Пример 17.3.** Оператор Лапласа является сопряженным сам себе:

$$(\varphi^*, \Delta\varphi) = (\Delta\varphi^*, \varphi),$$

где  $\varphi$  — комплексное скалярное поле. Сопряженным к оператору Дирака (17.2)

$$(\mathcal{D}^*\psi^+, \psi) = (\psi^+, \mathcal{D}\psi),$$

где  $\psi$  — дираковские спиноры, является оператор

$$\mathcal{D}^* = i\gamma^* + \partial_x + m.$$

**Теорема.** Пусть многообразие  $X$  замкнуто и расслоения  $E, F$  снабжены эрмитовыми метриками. Тогда для  $\mathcal{D}$  существует и единствен сопряженный оператор  $\mathcal{D}^*$ , и  $\sigma(\mathcal{D})^* = \sigma(\mathcal{D}^*)$ . Если  $\mathcal{D}$  эллиптический, то  $\mathcal{D}^*$  тоже эллиптический, ядро  $\text{Ker } \mathcal{D}$  конечномерно и

$$\dim \text{Ker } \mathcal{D}^* = \dim \text{Coker } \mathcal{D}.$$

Напомним, что *коядром гомоморфизма*  $\varphi: A \rightarrow B$  называется фактор-пространство  $\text{Coker } \varphi = B/\text{Im } \varphi$ .

*Индексом*  $\tau(\mathcal{D})$  эллиптического оператора называется

$$\tau(\mathcal{D}) = \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \dim \text{Coker } \mathcal{D} = \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \dim \text{Ker } \mathcal{D}^*.$$

(17.5)

*Теорема об индексе устанавливает, что  $\tau(\mathcal{D})$  может быть выражен через топологические инварианты.*

Рассмотрим конечную последовательность  $\{E_k, \mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^*\}$  векторных расслоений  $E_k$  над компактным многообразием  $X$  и дифференциальных операторов

$$\mathcal{D}_k: \Gamma(E_k) \rightarrow \Gamma(E_{k+1}), \quad \mathcal{D}_k^*: \Gamma(E_{k+1}) \rightarrow \Gamma(E_k).$$

Предположим, что  $\mathcal{D}_{k+1}\mathcal{D}_k = 0$  (а следовательно,  $\mathcal{D}_k^*\mathcal{D}_{k+1}^* = 0$ ), т. е. последовательность является комплексом, который обозначим  $(E, \mathcal{D})$ . Определим *оператор Лапласа комплекса*  $(E, \mathcal{D})$ :

$$\Delta_k = \mathcal{D}_k^*\mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1}\mathcal{D}_{k-1}^*: \Gamma(E_k) \rightarrow \Gamma(E_k).$$

Комплекс  $(E, \mathcal{D})$  называется *эллиптическим*, если все операторы  $\Delta_k$  эллиптические.

**Пример 17.4.** Комплекс де Рама  $(\Omega^k, d, \delta)$  внешних дифференциальных форм на  $X^n$  (глобальных сечений расслоений  $\Lambda^k(X)$  антисимметричных  $k$ -форм на  $T(X)$ ) с операторами

$$\mathcal{D}_k = d, \quad \mathcal{D}_k^* = \delta,$$

$$\Delta = d\delta + \delta d,$$

образует эллиптический комплекс  $(\Omega, d)$ .

Сечение  $f_k \in \Gamma(E_k)$  называется *гармоническим*, если  $\Delta_k f_k = 0$ . Нетрудно показать, что сечение  $f_k$  гармоническое тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}_k f_k = 0, \quad \mathcal{D}_{k+1}^* f_k = 0. \quad (17.6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle f_k | \Delta f_k \rangle &= \langle f_k | (\mathcal{D}_k^*\mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1}\mathcal{D}_{k-1}^*) f_k \rangle = \\ &= \langle \mathcal{D}_k f_k | \mathcal{D}_k f_k \rangle + \langle \mathcal{D}_{k-1}^* f_k | \mathcal{D}_{k-1}^* f_k \rangle = 0, \end{aligned}$$

откуда в силу невырожденности формы  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  следует равенство (17.6).

**Теорема.** Для всякого сечения  $f_k \in \Gamma(E_k)$  имеет место *разложение Ходжа*

$$f_k = h_k + \mathcal{D}_{k-1} f_{k-1} + \mathcal{D}_k^* f_{k+1}, \quad (17.7)$$

где  $h_k$  — некоторое гармоническое сечение.

Определим *группу когомологий*

$$H^k(E, \mathcal{D}) = \text{Ker } \mathcal{D}_k / \text{Im } \mathcal{D}_{k-1}$$

*эллиптического комплекса.* Используя разложение (17.7), покажем, что группа  $H^k(E, \mathcal{D})$  находится во взаимно однозначном со-

ответствии с множеством  $\text{Ker } \Delta_k$  гармонических сечений  $h_k \in \Gamma(E_k)$ . Если  $\mathcal{D}_k f_k = 0$ , то

$$\mathcal{D}_k \mathcal{D}_k^* f_{k+1} = 0$$

и, повторяя прием, использованный при доказательстве (17.6), получаем  $\mathcal{D}_k^* f_{k+1} = 0$ , а значит,

$$f_k = \mathcal{D}_{k-1} f_{k-1} + h_k.$$

Таким образом, всякое замкнутое сечение  $f_k$  когомологично некоторому гармоническому сечению  $h_k$ . Пусть

$$f'_k = \mathcal{D}_{k-1} f'_{k-1} + h'_k,$$

— замкнутое сечение, когомологичное  $f_k$ . Тогда

$$h'_k - h_k = \mathcal{D}_{k-1} \tilde{f}$$

и, используя второе равенство (17.6), получаем

$$\mathcal{D}_{k-1}^* \mathcal{D}_{k-1} \tilde{f} = 0,$$

а это значит, что  $\mathcal{D}_{k-1} \tilde{f} = 0$  и  $h'_k = h_k$ . Таким образом, всякий класс из  $H^k(E, \mathcal{D})$  содержит в качестве представителя одно и только одно гармоническое сечение, т. е.

$$H^k(E, \mathcal{D}) = \text{Ker } \Delta_k.$$

Отсюда, в частности, следует, что размерность  $\dim H^k(E, \mathcal{D})$  конечна.

Определим индекс эллиптического комплекса

$$\tau(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim \text{Ker } \Delta_k. \quad (17.8)$$

В силу конечности комплекса  $(E, \mathcal{D})$  и конечности  $\dim H^k(E, \mathcal{D})$  он конечен.

**Пример 17.5.** В применении к комплексу де Рама  $(\Omega, d)$  разложение (17.7) означает, что всякая  $k$ -форма  $\varphi_k$  представима как сумма замкнутой, козамкнутой и гармонической форм, и

$$H^k(X) = \text{Ker } \Delta(\Omega^k).$$

Индекс  $\tau(\Omega, d)$  комплекса де Рама совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия  $X$ :

$$\tau(\Omega, d) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \dim H^k(X) = \chi(X).$$

**Пример 17.6.** Пусть  $\mathcal{D}: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  — эллиптический оператор. Его индекс  $\tau(\mathcal{D})$  можно определить как индекс следующего 2-членного комплекса

$$0 \rightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma(F) \rightarrow 0. \quad (17.9)$$

Лапласианами этого комплекса по определению являются

$$\Delta_0 = \mathcal{D}^* \mathcal{D}, \quad \Delta_1 = \mathcal{D} \mathcal{D}^*,$$

а его группами комологий — группы

$$H_0 = \text{Ker } \mathcal{D} = \text{Ker } \Delta_0, \quad H^1 \text{Coker } \mathcal{D} = \text{Ker } \Delta_1.$$

Поскольку  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}^*$  эллиптические операторы, комплекс (17.9) эллиптический и его индекс

$$\tau = \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \dim \text{Coker } \mathcal{D} = \tau(\mathcal{D}).$$

**Пример 17.7.** Для эллиптического комплекса  $(E, \mathcal{D})$  можно построить такой 2-членный комплекс, индекс которого будет совпадать с индексом  $\tau(E, \mathcal{D})$ . Положим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E} &= \bigoplus_k E_{2k}, & \tilde{F} &= \bigoplus_k E_{2k+1}, \\ \tilde{\mathcal{D}} &= \bigoplus_k (\mathcal{D}_{2k} + \mathcal{D}_{2k-1}^*), & \tilde{\mathcal{D}}^* &= \bigoplus_k (\mathcal{D}_{2k}^* + \mathcal{D}_{2k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Легко проверить, что

$$\tilde{\mathcal{D}}: \Gamma(\tilde{E}) \rightarrow \Gamma(\tilde{F}), \quad \tilde{\mathcal{D}}^*: \Gamma(\tilde{F}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}),$$

а последовательность

$$0 \rightarrow \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{F} \rightarrow 0 \quad (17.11)$$

образует комплекс. Лапласианами этого комплекса являются эллиптические операторы

$$\tilde{\Delta}_0 = \tilde{\mathcal{D}}^* \tilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_k \Delta_{2k}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \tilde{\mathcal{D}} \tilde{\mathcal{D}}^* = \bigoplus_k \Delta_{2k+1}.$$

Следовательно, комплекс (17.11) эллиптический, и его индекс

$$\tau = \dim \text{Ker } \tilde{\Delta}_0 - \dim \text{Ker } \tilde{\Delta}_1 = \sum_k (-1)^k \dim \text{Ker } \Delta_k = \tau(E, \mathcal{D}).$$

Заметим, что сам оператор  $\tilde{\mathcal{D}}$  тоже эллиптический. Это следует из того, что символы

$$\sigma(\tilde{\Delta}_0) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}}^* \tilde{\mathcal{D}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}}^*) \sigma(\tilde{\mathcal{D}}),$$

$$\sigma(\tilde{\Delta}_1) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}} \tilde{\mathcal{D}}^*) = \sigma(\tilde{\mathcal{D}}) \sigma(\tilde{\mathcal{D}}^*)$$

эллиптических операторов обратимы.

**Пример 17.8.** Для комплекса де Рама  $(\Omega, d)$ :

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}^* = d + \delta, \quad \tilde{\Delta}_0 = \tilde{\Delta}_1 = (d + \delta)^2 = \Delta.$$

Из примеров 17.6, 17.7 видно, что индекс эллиптического комплекса может быть определен как индекс эллиптического оператора  $\mathcal{D}$ , построенного по правилу (17.10).

Перейдем теперь непосредственно к теореме об индексе эллиптического оператора  $\mathcal{D}$  в комплексах (17.9) и (17.10).

Возьмем два экземпляра расслоений  $N_1(X)$  и  $N_2(X)$  и склеим их тотальные пространства в каждой точке  $x \in X$  по сферам  $S_x^{n-1}$  — границам шаров  $N_x^n$ . В результате получим расслоение, типичным слоем которого является сфера  $S^n$ . Оно называется *компактифицированным кокасательным расслоением*  $K(X)$  над  $X$ . Пусть

$$\tilde{\pi}: \text{tl } K(X) \rightarrow X$$

— проекция и  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$  — ограничения  $\tilde{\pi}$  на  $\text{tl } N_1(X)$  и  $\text{tl } N_2(X)$ . Рассмотрим индуцированные расслоения  $\tilde{\pi}_1^*E$  и  $\tilde{\pi}_2^*F$  и склеим их тоже в каждой точке  $x \in X$  по границам шаров  $N_x^n$  посредством изоморфизма  $\sigma(\mathcal{D})(x, S_x^{n-1})$ . Полученное расслоение называется *разностным расслоением*  $E \ominus F$ .

**Теорема Атья—Зингера об индексе** устанавливает, что

$$\tau(\mathcal{D}) = \int_{\text{th } K(X)} \text{ch}(E \ominus F) \wedge \text{td}(\tilde{\pi}^*\varphi(T(X))), \quad (17.12)$$

где  $\text{ch}(E \ominus F)$  — характер Чженя разностного расслоения  $E \ominus F$ ,  $\text{td}(\tilde{\pi}^*\varphi(T(X)))$  — класс Тодда  $U(n)$ -расслоения над  $\text{tl } K(X)$ , индуцированного касательным  $O(n)$ -расслоением  $T(X)$ , превращенным отображением  $\varphi$  согласно (13.17) в  $U(n)$ -расслоение. В равенстве (17.12) слева стоит аналитический индекс оператора  $\mathcal{D}$ , а справа — выражение для топологического индекса  $\gamma(\mathcal{D})$  оператора  $\mathcal{D}$ . Таким образом, *теорема об индексе устанавливает равенство*

$$\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D})$$

*аналитического и топологического индексов эллиптического дифференциального оператора.* В частности, из этого равенства следует, что  $\gamma(\mathcal{D})$  — целое число.

Если  $X$  имеет размерность  $2m$  и ориентируемо, что равенство (17.12) принимает вид

$$\tau(\mathcal{D}) = (-1)^{m(2n+1)} \int_X \frac{\text{ch } E - \text{ch } F}{e(X)} \text{td}(X), \quad (17.13)$$

где  $\text{td}(X) = \text{td}(\varphi(T(X)))$ . Если  $X$  нечетномерно, то  $\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}) = 0$ .

Если  $\mathcal{D}$  является оператором  $\mathcal{D}$  комплекса (17.11), полученным из комплекса  $(E, \mathcal{D})$ , то

$$\tilde{E} - \tilde{F} = \sum_k (-1)^k E_k,$$

и в силу свойств характера Чженя

$$\tau(\mathcal{D}) = \tau(E, \mathcal{D}) = (-1)^{m(2m+1)} \int_X \sum_k (-1)^k \text{ch}(E_k) \frac{\text{td}(X)}{e(X)}. \quad (17.14)$$

**Пример 17.9.** Вычислим для примера индекс  $\tau(\Omega, d)$  комплекса де Рама по формуле (17.14), хотя результат  $\tau(\Omega, d) = \chi(X)$  нам уже известен (см. пример 17.5). В данном случае  $E_k = \varphi(\Lambda^k(X))$ , где  $\Lambda^k(X)$  — расслоение  $k$ -форм на касательном расслоении. Воспользуемся принципом расщепления

$$\varphi(\Lambda^k(X)) = \Lambda^k \varphi(T^*(X)) = \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} (L_{i_1}^* \otimes \dots \otimes L_{i_k}^*),$$

где сумма берется по всем упорядоченным наборам  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 2m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k \text{Th}(\varphi(\Lambda^k(X))) &= \sum_k (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} \text{ch}(L_{i_1}^* \otimes \dots \otimes L_{i_k}^*) = \\ &= \sum_k (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} \text{ch}(L_{i_1}^*) \dots \text{ch}(L_{i_k}^*) = \sum_k (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} e^{-(a_{i_1} + \dots + a_{i_k})} = \\ &= \prod_{i=1}^{2m} (1 - e^{-a_i}) = (a_1 \dots a_{2m}) \left( \frac{1 - e^{-a_i}}{a_i} \right) = \end{aligned}$$

$$\text{td}(X)^{-1} c_{2m}(\varphi(T(X))) = (-1)^m e^2(X) \text{td}(X)^{-1},$$

где множитель  $(-1)^m$  учитывает, что в случае  $SO(2m)$ -расслоения  $\lambda$  естественные ориентации  $\rho\varphi(\lambda)$  и  $\lambda \oplus \lambda$  различны. Подставляя найденный результат в формулу (17.14), получаем знакомое выражение

$$\tau(\Omega, d) = \int_X e(X) = \chi(X).$$

Приведем без вычислений еще несколько примеров применения теоремы об индексе.

**Пример 17.10.** В § 11 для замкнутого ориентированного многообразия размерности  $4l$  определена сигнатура многообразия  $\text{Sgn}(X)$  как сигнатура билинейной формы (11.7) на группах когомологий  $H^{2l}(X)$ . Вычислим  $\text{Sgn}(X)$  как индекс эллиптического оператора, что позволит выразить ее через классы Понтрягина. Определим оператор  $\omega$ , действующий на  $p$ -формы, как

$$\omega = i^{p(p-1)+2l} \lambda.$$

Можно проверить, что

$$\omega(d + \delta) = -(d + \delta)\omega, \quad \omega^2 = 1.$$

Обозначим  $\Omega^\pm$  пространства форм с собственными значениями  $\pm 1$  относительно  $\omega$ . Так как  $\omega$  антикоммутирует с  $d + \delta$ , то

$$\mathcal{D} = d + \delta: \Omega^+ \rightarrow \Omega^-, \quad \mathcal{D}^* = d + \delta: \Omega^- \rightarrow \Omega^+. \quad (17.15)$$

Построим для оператора (17.5) эллиптический комплекс (17.9). Тогда его индекс

$$\tau(d + \delta) = \dim \text{Ker } \Delta \downarrow \Omega^+ - \dim \text{Ker } \Delta \uparrow \Omega^-. \quad (17.16)$$

Поскольку для всякой гармонической формы  $h^p$ ,  $p \neq 2l$ , можно построить ненулевые гармонические формы  $h^p \pm \omega h^p$  с собственными значениями  $\pm 1$  оператора  $\omega$ , размерности пространств, натянутых на такие формы с собственными значениями 1 и  $-1$ , равны и они не дают вклад в выражение (17.16). Поэтому оно принимает вид

$$\tau(\mathcal{D}) = \dim B_+^{2l}(X) - \dim B_-^{2l}(X), \quad (17.17)$$

где  $B_\pm^{2l}(X)$  — пространства гармонических  $2l$ -форм с собственными значениями  $\pm 1$  относительно  $\omega = *$  на  $B^{2l}$ . Ввиду примера 17.5

$$H^{2l}(X) = B_+^{2l}(X) \oplus B_-^{2l}(X).$$

На  $H^{2l}(X)$  задано положительно определенное скалярное произведение

$$(h, h') = \int_X h \wedge *h'_s,$$

относительно которого  $B_+^{2l}(X)$  и  $B_-^{2l}(X)$  ортогональны, и задана билинейная форма

$$Q(h, h') = \int_X h \wedge h',$$

положительно определенная на  $B_+^{2l}(X)$  ( $*h_+^{2l} = h_+^{2l}$ ) и отрицательно определенная на  $B_-^{2l}(X)$  ( $*h_-^{2l} = -h_-^{2l}$ ). Поэтому разность (17.17) совпадает с сигнатурой  $Q$  и

$$\tau(D) = \text{Sgn}(X).$$

Применяя теперь к оператору (17.15) теорему об индексе, можно получить выражение для сигнатуры

$$\text{Sgn}(X) = \int_X L(X)$$

через *пслином Хирцебруха* и классы Понтрягина

$$L(X) = \prod_i \frac{a_i}{\text{th } a_i} = 1 + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) + \dots$$

Например, если  $\dim X = 4$ ,

$$\text{Sgn}(X) = \frac{1}{3} p_1 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_X \text{Tr}(F \wedge F).$$

**Пример 17.11.** Рассмотрим оператор (17.15), когда формы принимают значения в слоях  $V_x$  некоторого векторного расслоения  $E$ . В этом случае теорема об индексе дает

$$\tau = \int_X L(X) \text{ch}'(E),$$

где  $\text{ch}'$  обозначает характер Чженя, но взятый не от  $F_E$ , а от  $2F_E$ , где  $F_E$  — форма кривизны на  $E$ . В отличие от предыдущего случая ненулевое значение  $\tau$  получается уже при  $\dim X = 2$ :

$$\tau = \int_X \left(1 + \frac{1}{3} p_1 + \dots\right) (\dim V + 2c_1 + 2c_1^2 - 4c_2 + \dots) = + 2c_1 = \frac{i}{\pi} \int \text{Tr } F_E.$$

Если  $\dim X = 4$ ,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{3} \dim V \int_X p_1 + \int_X (2c_1^2 + 4c_2) = \\ &= -\frac{\dim V}{24\pi^3} \int_X \text{Tr}(F \wedge F) - \frac{1}{2\pi^2} \int_X \text{Tr}(F_E \wedge F_E). \end{aligned}$$

Заметим, что если построить комплекс де Рама для форм со значениями в расслоении  $E$ , то его индекс будет равен  $\dim V / \chi(X)$ , т. е. оказывается малочувствительным к изменению пространства значений этих форм.

**Пример 17.12.** Пусть  $\mathcal{S}$  — расслоение на дираковские спиноры. Введем оператор

$$\mathcal{D} = i\gamma^a \mathcal{D}_a = i\gamma^a (\partial_a + A_a^{ab} I_{ab}),$$

где  $\gamma^a$  — евклидовы матрицы Дирака, удовлетворяющие тождеству

$$(\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\delta^{ab};$$

$$\gamma^a = h_a^\mu \gamma^\mu, \quad g^{\mu\nu} = h_a^\mu h_a^\nu \delta^{ab}; \quad I_{ab} = \frac{1}{4} \gamma_{[a} \gamma_{b]}$$

— генераторы группы  $SO(4)$ , а  $A_a^{ab}$  — связность на  $T(X)$ . Поскольку  $g^{\mu\nu}$  — риманова метрика, оператор

$$\mathcal{D}^* \mathcal{D} = DD^* = -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{8} \gamma^{i\mu} \gamma^{\nu j} \gamma^{\delta l} F_{ab\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \dots$$

— эллиптический. образуем комплекс

$$0 \rightarrow \Gamma_+(\hat{\mathcal{S}}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma_-(\hat{\mathcal{S}}) \rightarrow 0, \quad (17.18)$$

где  $\Gamma_\pm(\hat{\mathcal{S}})$  — пространства сечений  $\hat{\mathcal{S}}$ , имеющих собственные значения  $\pm 1$  относительно оператора  $\gamma_5$ . Индексом спинорного комплекса (17.18) является

$$\tau = \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \dim \text{Ker } \mathcal{D}^* = n_+ - n_-,$$

где  $n_{\pm}$  — число линейно независимых решений безмассовых уравнений Дирака  $\mathcal{D}\psi=0$  со спиральностями  $\pm 1/2$ . Применение теоремы об индексе, когда  $\dim X=2l$ , дает

$$n_+ - n_- = \int_X \hat{A}(X),$$

$$\hat{A}(X) = \prod_{i=1}^{2l} \frac{a_i}{2\text{Sh}(a_i/2)} = 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760} (7p_1^2 - 4p_2) + \dots$$

Для  $\dim X=4$  получаем

$$n_+ - n_- = \frac{1}{24} p_1 = -\frac{1}{24} \int_X p_1(X) = \frac{1}{192\pi^2} \int_X \text{Tr}(F \wedge F).$$

В случае, когда спиноры снабжены еще и внутренними индексами представления группы  $SU(k)$ ,

$$\tau = \int_X \hat{A}(X) \wedge \text{ch}(E),$$

где  $E$  — главное  $SU(k)$ -расслоение. В частности, для  $n=4, k=2$  находим

$$n_+ - n_- = \int_X \left( 1 - \frac{1}{24} p_1(X) + \dots \right) \left[ k + c_1(E) + \frac{1}{12} c_1^2(E) - c_2(E) + \dots \right] = -\frac{1}{12} p_1 - C_2.$$

Изложенная выше теорема об индексе справедлива только для замкнутых многообразий. Однако она может быть обобщена и на многообразия с границей, и на некомпактные многообразия, если в той или иной полевой модели их можно рассматривать как предел многообразий с границей.

### § 18. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Метод функционального интегрирования является наиболее удобным для квантования калибровочных теорий. Напомним, что в фейнмановском подходе квантовая эволюция полевой системы  $\Phi$  задается амплитудой перехода, которая вычисляется как интеграл

$$\langle \varphi_2, \Sigma_1 | \varphi_1, \Sigma_1 \rangle = \frac{1}{N} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\mu(\varphi) \exp(iS[\varphi]) \quad (18.1)$$

по всем «траекториям», т. е. полям  $\varphi(x^a)$ , которые на начальной (конечной) пространственноподобной гиперповерхности  $\Sigma_1$  ( $\Sigma_2$ ) совпадают с исходной (конечной) полевой конфигурацией  $\varphi_1 =$

$= \varphi(\Sigma_1)$  ( $\varphi_2 = \varphi(\Sigma_2)$ ). Вклад каждой «траектории» определяется значением классического действия

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} L(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^4x$$

в области  $\Omega$  между  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Нормировочная константа  $N$  зависит от  $\Omega$ . Обычно мы будем предполагать, что гиперповерхности  $\Sigma_{1,2}$  — это пространственноподобные плоскости постоянного времени  $t_1 = \text{const}$  ( $t_2 = \text{const}$ ).

Важнейшими объектами в квантовой теории поля являются матричные элементы  $T$ -упорядоченных произведений полевых операторов. Введение источников  $J(x)$  для полей  $\varphi(x)$  позволяет определить производящий функционал

$$W[J] = \frac{1}{N} \int d\mu(\varphi) \exp\left(i \int d^4x (L + J \cdot \varphi)\right), \quad (18.2)$$

где  $t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow +\infty$ , так что функции Грина вычисляются с помощью функциональных производных

$$\langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}.$$

Большим преимуществом метода функционального интегрирования является его явная ковариантность, позволяющая проводить квантование теории с учетом симметрий классического действия  $S$ .

Основным моментом в функциональном подходе является определение меры интегрирования  $d\mu(\varphi)$ . В соответствии с конструктивным вычислением функционального интеграла с помощью разбиения пространственно-временной области на малые ячейки для невырожденных лагранжианов обычно можно положить

$$d\mu(\varphi) = \prod_{i,x} d\varphi^i(x),$$

где индекс  $i$  пробегает все компоненты поля  $\varphi, x$  — всю область  $\Omega$ . Однако в калибровочной теории такое определение приводит к следующим трудностям. Пусть  $\varphi = A_\mu^a$  — калибровочное поле и классическое действие (14.7) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$A \rightarrow {}^g A = g A g^{-1} + g dg^{-1}, \quad (18.3)$$

где  $A = A_\mu^a t_a dx^\mu$  — форма связности.

Здесь и далее мы используем символ  ${}^g \Phi$  для обозначения калибровочного преобразования величины  $\Phi$  под действием элемента  $g(x) \in G$  калибровочной группы. Если  $\Phi = F$  — 2-форма напряженности, то в отличие от неоднородного закона (18.3) имеем  ${}^g F = g F g^{-1}$ .

В силу инвариантности действия  $S[A] = S[{}^g A]$  интегралы (18.1), (18.2) очевидным образом расходятся, как иногда говорят, вследствие излишнего суммирования по калибровочно эквивалент-

ным конфигурациям. Решение этой проблемы, предложенное Фаддеевым и Поповым [41], заключается в явном выделении расходящегося сомножителя, пропорционального объему калибровочной группы, и переходе к интегрированию по классам калибровочно эквивалентных полей. Поскольку процедура Фаддеева—Попова хорошо известна, мы только кратко опишем ее основные моменты, а затем рассмотрим ее геометрическую интерпретацию.

**Метод Фаддеева—Попова.** Пусть  $\mathcal{G}$  — пространство всех калибровочных потенциалов  $A_\mu^a(x)$  на пространстве — времени  $M$ .

В  $\mathcal{G}$  определено действие группы  $G: A \rightarrow gA$  посредством (18.3), и тем самым через любую точку  $\mathcal{G}$  проходит единственная орбита, так что  $\mathcal{G}$  расслаивается на множество орбит, как показано на рис. 23. Фактор-пространство  $\mathcal{G}/G = \eta$  называется пространством орбит, которое можно наделять структурой бесконечномерного дифференцируемого многообразия (см. приложение V).

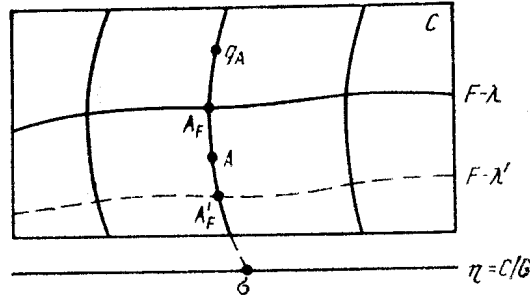


Рис. 23

Действие (14.7) фактически является функционалом на  $\eta: S = S[\sigma]$ , где  $\sigma \in \eta$  — точка пространства орбит. Фаддеев—Попов предложили отделить в (18.1), (18.2) интегрирование по  $\eta$ , соответствующее интегрированию по физическим степеням свободы, от интегрирования вдоль орбит (т. е. по нефизическим, чисто калибровочным, степеням свободы). Технически это реализуется следующим образом. Выберем калибровочное условие

$$F^a[A] - \lambda^a = 0, \quad (18.4)$$

где  $\lambda^a$  — произвольные константы, так, что гиперповерхность, задаваемая (18.4), пересекает каждую орбиту только один раз (см. рис. 23). Обычно  $F^a$  выбирается в виде линейного (дифференциального) оператора, например  $F^a = \partial^\mu A_\mu^a$  — фейнмановская ковариантная калибровка, или  $F^a = n^\mu A_\mu^a$  — аксиальная калибровка. Ясно, что калибровочно инвариантное уравнение (18.4) задает (по крайней мере локально) систему координат в  $\mathcal{G}$ . Любое поле  $A \in \mathcal{G}$  однозначно можно представить в виде  $A = gA_F$ , где  $A_F$  удовлетворяет (18.4). Таким образом, можно записать

$$d\mu(A) = d\mu_G(g) d\mu_\eta(A_F), \quad (18.5)$$

и для интеграла любой инвариантной функции  $f$  на  $\mathcal{G}$  получаем требуемую факторизацию

$$\int_{\mathcal{G}} d\mu(A) f(A) = \int_G d\mu_G(g) \int_\eta d\mu_\eta(A_F) f(A_F). \quad (18.6)$$

В качестве  $d\mu_G(g)$  можно выбрать правоинвариантную меру на калибровочной группе, однако второй сомножитель в (18.5) еще предстоит определить. Для этого введем функционал  $\Delta_F[A]$ , который задается уравнением

$$\Delta_F[A] \int_G d\mu_G(g) \delta(F^a[gA] - \lambda^a) = 1. \quad (18.7)$$

Этот функционал калибровочно инвариантен. Действительно,

$$\begin{aligned} (\Delta_F[gA])^{-1} &= \int_G d\mu_G(g') \delta(F^a[g'gA] - \lambda^a) = \\ &= \int_G d\mu_G(g'g) \delta[F^a[g'gA] - \lambda^a] = (\Delta_F[A])^{-1}, \end{aligned}$$

где мы использовали инвариантность меры на группе. Таким образом,  $\Delta_F[A]$  фактически является функционалом на пространстве орбит  $\eta$ , и поэтому достаточно вычислить его только в точках  $A_F$  на гиперповерхности (18.4).

Поскольку данная гиперповерхность по определению пересекает любую орбиту только один раз, ясно, что в интеграл (18.7) будут давать вклад только элементы  $g$ , близкие к единице:

$$(\Delta_F[A])^{-1} = (\Delta_F[A_F])^{-1} = \int_G d\mu_G(g) \delta(F^a[gA_F] - \lambda^a),$$

так как  $\delta$ -функция отлична от нуля только при  $g \approx 1$  ( $A_F$  суть решение (18.4)). В окрестности единицы координаты на группе задаются групповыми параметрами  $\xi^a$ :

$$g(x) \approx 1 + t_a \xi^a(x), \quad (18.8)$$

и ввиду того, что

$$F^a[gA_F] - \lambda^a \approx F^a[A_F] - \lambda^a + \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \xi^b = \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \xi^b,$$

окончательно находим

$$(\Delta_F[A])^{-1} = \int d\xi \delta \left( \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \xi^b \right) = \left( \det \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \right)^{-1}.$$

Функциональный оператор  $\delta F^a / \delta \xi^b$  называется оператором Фаддеева—Попова.

**Пример 18.1.** Вычислим этот оператор в фейнмановской калибровке  $F^a[A] = \partial^\mu A_\mu^a$ . Для бесконечно малого калибровочного преобразования имеем

$$gA_\mu^a \approx A_\mu^a - D_\mu \xi^a,$$

где  $g$  задается (18.8), а ковариантная производная  $D_\mu$  определена (10.6). Тогда находим

$$\frac{\delta F^a(x)}{\delta \xi^b(y)} = -(\partial^\mu D_\mu)_\delta^a \delta^4(x-y) = -(\partial^\mu \partial_\mu \delta_\delta^a + f_{cb}^a \partial^\mu A_\mu^c) \delta^4(x-y).$$

Итак, мы получили явный вид калибровочного инвариантного функционала в (18.7)

$$\Delta_F [A] = \det \left( \frac{\delta F^a}{\delta \zeta^b} \right). \quad (18.9)$$

Непосредственным следствием (18.9) является тот факт, что  $\Delta_F [A]$  не зависит от произвольных функций  $\lambda^a$ , входящих в (18.7) и определяющих положение гиперповерхности (18.4)  $\mathcal{C}$ .

Закончим построение меры интегрирования калибровочно инвариантных функций  $f(A) = f({}^g A)$  по пространству потенциалов  $\mathcal{C}$ . С этой целью подставим в левую часть (18.6) единицу (18.7)

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu(A) f(A) = \int_{\mathcal{C}} d\mu(A) \Delta_F [A] \int_G d\mu_G(g) \delta(F^a[{}^g A] - \lambda^a) f(A).$$

Сделав замену переменной интегрирования  $A \rightarrow {}^g A$  и поменяв интегралы местами, найдем с учетом инвариантности  $\Delta_F$  и  $f$ , что

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} d\mu(A) f(A) &= \int_G d\mu_G(g) \int_{\mathcal{C}} d\mu(A) \delta(F^a[A] - \lambda^a) \Delta_F [A] f(A) = \\ &= \int_G d\mu_G(g) \int_F d\mu(A_F) \Delta_F [A_F] f(A_F), \end{aligned} \quad (18.10)$$

где  $\delta$ -функция снимает интегрирование по  $\mathcal{C}$ , ограничивая на гиперповерхности (18.4). Легко видеть, что правая часть (18.10) не зависит от  $\lambda^a$ , поскольку в

$$\int d\mu(A) f(A)$$

можно было подставить другую единицу (18.7) с  $\lambda' \neq \lambda$ , что привело бы в силу независимости  $\Delta_F$  от  $\lambda$  только к изменению координат  $A_F \rightarrow A'_F$  на гиперповерхности (18.4). Таким образом, последний фактор в (18.10) в действительности является корректно определенным интегралом по пространству орбит  $\eta$ , мера на котором (сравнивая (18.10) с (18.6)) задается как произведение детерминанта Фаддеева—Попова на ограничение меры на  $\mathcal{C}$  на произвольную гиперповерхность калибровки

$$d\mu_{\eta}(\sigma) = \Delta_F(\sigma) d\mu(A|_{F^a = \lambda^a}). \quad (18.11)$$

где точка  $\sigma \in \eta$  описывается координатами  $A_F$ , удовлетворяющими (18.4) с произвольными  $\lambda^a(x)$ .

Применим теперь полученные результаты к вычислению функциональных интегралов (18.1), (18.2) в квантовой теории калибровочных полей. Для производящего функционала найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[J_a^{\mu}] &= \frac{1}{N_G} \int d\mu_G(g) \int_{\mathcal{C}} d\mu(A) \Delta_F [A] \delta(F^a[A] - \lambda^a) \times \\ &\times \exp \left( i \int d^4x (L + J_a^{\mu} A_{\mu}^a) \right). \end{aligned} \quad (18.12)$$

Второй интеграл осуществляет искомое суммирование по классам калибровочно эквивалентных полей (по пространству орбит  $\eta$ ), тогда как «излишнее суммирование» по группе  $G$ -преобразований выделено в первом факторе. Если лагранжиан  $L$  не зависит от фермионных полей, то, как мы видели выше, все величины в (18.12) суть корректно определенные функции и операции на пространстве орбит  $\eta$ . Тогда интеграл

$$\int d\mu_G(g) = \text{vol}(G)$$

равен объему (бесконечному) калибровочной группы, и его можно исключить из (18.12), переопределив нормировочную константу  $N$ . В следующем параграфе мы увидим, что в присутствии (вейлевских) фермионов в калибровочной теории возникают аномалии, и тогда интеграл по группе нельзя отбросить, поскольку групповые элементы  $g(x)$  сами становятся динамическими переменными. В данном параграфе мы, однако, ограничимся чисто бозонной калибровочной теорией.

**Тождества Славнова—Тейлора.** Исследуем свойства производящего функционала (18.12). Сначала перепишем его несколько в иной форме, используя так называемый трюк *т'Хуфта*: проинтегрируем уравнение (18.12) по всем положениям гиперповерхности калибровки с весом

$$\int d\lambda^a \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x \lambda^a \lambda_a \right].$$

Как было установлено выше, функциональный интеграл (18.12) (см. (18.10)) не зависит от  $\lambda^a$ , поэтому интегрирование левой части равенства (18.12) приведет лишь к тривиальному переопределению нормировки. В то же время справа интегрирование снимает  $\delta$ -функцию и (18.12) переходит в

$$\mathcal{W}[J_a^{\mu}] = \frac{1}{N} \int d\mu(A) \Delta_F [A] \exp \left\{ i \int d^4x (L + L_F + J_a^{\mu} A_{\mu}^a) \right\}, \quad (18.13)$$

где лагранжиан фиксации калибровки имеет вид

$$L_F = -\frac{1}{2} F^a [A] F_a [A]. \quad (18.14)$$

По построению и фиксирующий калибровку член, и детерминант Фаддеева—Попова (18.14), (18.9) — это составные части определения меры функционального интеграла по пространству орбит  $\eta$ . Их появление носит чисто технический характер и связано с заданием (локальных) координат на  $\eta$  посредством калибровки (18.4). Из общих соображений ясно, что физические следствия квантовой теории калибровочных полей не должны зависеть от способа введения координат на  $\eta$ . Действительно, можно показать, что физическая  $S$ -матрица не зависит от выбора оператора  $F^a$  (и тем самым от ви-



да (18.9) и (18.14)), хотя функции Грина, получаемые с помощью производящего функционала (18.13), не инвариантны относительно изменения  $F^a$ . С доказательством этого фундаментального факта можно познакомиться в работе [42]. Однако выше и мы в определенной степени продемонстрировали независимость физических следствий от выбора координат на  $\eta$ , показав, что функциональный интеграл (18.10), (18.12) не меняется при перемещениях (трансляциях) гиперповерхности калибровки в направлении вдоль орбит (см. рис. 23). Единственно, что меняется при таких трансляциях ( $\lambda^a \rightarrow \lambda^{a'}$ ) — это явный вид координат ( $A_F \rightarrow A_{F'}$ ) на гиперповерхности.

Координаты  $A_F$  и  $A_{F'}$ , описывающие одну и ту же орбиту, связаны некоторым калибровочным преобразованием  ${}^g A_F = A_{F'}$  (которое зависит от калибровки  $F^a$ ). Для бесконечно малой трансляции

$$\lambda^a \rightarrow \lambda^{a'} = \lambda^a + \delta\lambda^a$$

преобразования  $g$  мало отличаются от единицы (18.8), и для параметров  $\xi^a$  найдем

$$F^a[A_{F'}] - \lambda^{a'} = F^a[{}^g A_F] - \lambda^a - \delta\lambda^a = F^a[A_F] - \lambda^a + \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \xi^b - \delta\lambda^a = 0,$$

откуда

$$\xi^a = \left( \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \right)^{-1} \delta\lambda^b. \quad (18.15)$$

Как уже отмечалось, влияние трансляций гиперповерхности калибровки на функциональный интеграл сводится к замене переменных интегрирования. Рассмотрим такую замену в производящем функционале (18.13), подставив в него вместо  $A$  бесконечно мало отличающееся поле  ${}^g A$ , где  $g(x)$  определено трансляцией (18.15). Поскольку мера  $d\mu(A)$ , определитель Фаддеева—Попова  $\Delta_F[A]$  и лагранжиан  $L$  калибровочно инвариантны, надо исследовать только изменение последних двух слагаемых в (18.13). Имеем

$$0 = \delta W[J_a^\mu] = \frac{1}{N} \int d\mu(A) \Delta_F[A] \exp \left\{ i \int d^4x (L + L_F + J_a^\mu A_\mu^a) \right\} \times (\delta L_F + J_a^\mu \delta A_\mu^a), \quad (18.16)$$

и нетрудно видеть, что в силу (18.15)

$$\delta L_F = -F_a \delta F^a = -F_a \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \xi^b = -E_a \delta\lambda^a,$$

$$J_a^\mu \delta A_\mu^a = -J_a^\mu D_\mu \left( \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \right)^{-1} \delta\lambda^b.$$

Подставляя эти выражения в (18.16), из-за произвольности  $\delta\lambda^a$  получаем набор тождеств

$$\int d\mu(A) \Delta_F[A] \exp \left\{ i \int d^4x (L + L_F + J_a^\mu A_\mu^a) \right\} \times [F_a[A] + J_b^\mu D_\mu \left( \frac{\delta F^b}{\delta \xi^a} \right)^{-1}] = 0. \quad (18.17)$$

Они называются *тождествами Славнова—Тейлора* и обобщают известные в квантовой электродинамике тождества Уорда—Такахаши на случай неабелевых калибровочных полей. Их можно записать в виде функциональных дифференциальных уравнений на производящий функционал

$$\left[ F + J^\nu D_\nu \left( \frac{\delta F}{\delta \xi} \right)^{-1} \right] \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_a^\mu} \right) W[J_a^\mu] = 0, \quad (18.18)$$

где компактная запись (18.18) означает, что всюду в квадратных скобках вместо аргумента  $A_\mu^a$  надо подставить функциональную производную  $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_a^\mu}$ .

Как мы видим, по своему содержанию тождества Славнова—Тейлора—Уорда—Такахаши аналогичны тождествам Нетер—и те и другие отражают инвариантность теории (соответственно квантовой и классической) относительно преобразований (внутренних) координат.

**Духовые поля.** Детерминант  $\Delta_F[A]$  входит как отдельный фактор (зависящий от калибровочного поля) в (18.13), и это технически затрудняет вычисление амплитуд квантовых процессов по теории возмущений. Поэтому его более удобно представить как результат интегрирования по *вспомогательным скалярным антикоммутирующим полям*  $c^a$  и  $\bar{c}^a$  в виде

$$\Delta_F[A] = \det \frac{\delta F}{\delta \xi} = \int d\bar{c} dc \exp \left\{ i \int d^4x \bar{c}_a \frac{\delta F}{\delta \xi^b} c^b \right\},$$

так что (18.13) приводится к виду

$$W[J_a^\mu] = \frac{1}{N} \int d\mu(A) d\bar{c} dc \exp \left\{ i \int d^4x (L_{\text{эфф}} + J_a^\mu A_\mu^a) \right\}, \quad (18.19)$$

где эффективный лагранжиан описывает теорию взаимодействующих калибровочных и вспомогательных полей:

$$L_{\text{эфф}} = L + L_F + \bar{c}_a \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b. \quad (18.20)$$

*Грассмановы поля*  $\bar{c}_a$ ,  $c^a$  называются *духовыми полями Фаддеева—Попова*, и интегрирование по ним производится в соответствии с известными правилами Березина [43].

Введение духовых полей позволяет сделать более наглядным свойство инвариантности производящего функционала относительно выбора калибровки. Действительно, нетрудно убедиться, что эффективный лагранжиан (18.20) не меняется относительно следующих инфинитезимальных *суперсимметричных преобразований*:

$$\delta A_\mu^a = -\nabla_\mu c^a \delta v, \quad (18.21.1)$$

$$\delta c^a = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc} c^b c^c \delta v, \quad (18.21.2)$$

$$\delta \bar{c}_a = F_a \delta v, \quad (18.21.3)$$

где  $\delta v$  — произвольный антикоммутирующий бесконечно малый параметр. Подставляя (18.21) в (18.20), получим

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{эфф}} = & \delta L + \delta L_F + \delta \bar{c}_a \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b + \bar{c}_a \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} \delta c^b + \\ & + \bar{c}_a \frac{\delta^2 F^a}{\delta \xi^b \delta \xi^c} \delta c^c \delta v c^b, \end{aligned} \quad (18.22)$$

где в последнем члене мы использовали тот факт, что (18.21.1) описывает не что иное, как бесконечно малое калибровочное преобразование с параметром  $\xi^a = c^a \delta v$ . По этой же причине для первого слагаемого получим  $\delta L = 0$ . Далее, для двух следующих членов находим

$$\begin{aligned} \delta L_F + \delta \bar{c}_a \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b &= -F_a \delta F^a + F_a \delta v \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b = \\ &= F_a \left[ \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b \delta v + \delta v \frac{\delta F^a}{\delta \xi^b} c^b \right] = 0 \end{aligned}$$

в силу грассмановости (антикоммутативности)  $c$  и  $\delta v$ . Наконец, для двух последних слагаемых в (18.22) получим

$$\bar{c}_a \left[ \frac{\delta F^a}{\delta \xi^d} \left( -\frac{1}{2} f^d{}_{cb} \right) + \frac{\delta^2 F^a}{\delta \xi^c \delta \xi^b} \right] c^c c^b \delta v,$$

что обращается в нуль в силу групповых свойств инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$\frac{\delta}{\delta \xi^c} \frac{\delta}{\delta \xi^c} - \frac{\delta}{\delta \xi^b} \frac{\delta}{\delta \xi^c} = f^a{}_{cb} \frac{\delta}{\delta \xi^d}.$$

Таким образом, мы показали, что  $\delta L_{\text{эфф}} = 0$  при (18.21). Преобразования (18.21), называемые преобразованиями Бекки — Руэ — Стора — Тюгина (БРСТ) [44], оставляют инвариантными производящий функционал (18.19).

**БРСТ-симметрия и ее следствия.** Выведем тождества, обусловленные существованием БРСТ-симметрии. Для этого модифицируем (18.19), введя внешние источники  $u^a$ ,  $\bar{u}_a$  для духовых полей,

$$\begin{aligned} W[J, \bar{u}, u] = & \frac{1}{N} \int d\mu(A) d\bar{c} dc \exp \left\{ i \int d^4x (L_{\text{эфф}} + \right. \\ & \left. + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{u}_a c^a + c_a u^a) \right\}. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Вычисляя функциональные производные, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\frac{\delta^2 W[J, \bar{u}, u]}{\delta u^a \delta \bar{u}_b} \Big|_{u=\bar{u}=0} = -i \left( \frac{\delta F^b}{\delta \xi^a} \right)^{-1} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) W[J]. \quad (18.24)$$

Теперь, действуя так же, как при выводе (18.17), (18.18), применим преобразования БРСТ в (18.23):

$$\begin{aligned} 0 = \delta W[J, \bar{u}, u] = & \frac{1}{N} \int d\mu(A) d\bar{c} dc \exp \left\{ i \int d^4x (L_{\text{эфф}} + J_a^\mu A_\mu^a + \right. \\ & \left. + \bar{u}_a c^a + \bar{c}_a u^a) \right\} (J_a^\mu \delta A_\mu^a + \bar{u}_a \delta c^a + \delta \bar{c}_a u_a). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (18.21), с учетом произвольности  $\delta v$  получаем тождество

$$\begin{aligned} \int d\mu(A) dc d\bar{c} \left[ J_a^\mu D_\mu c^a + \frac{1}{2} f^a{}_{bc} \bar{u}_a c^b c^c + \right. \\ \left. + F_a u_a \right] \exp \left\{ i \int d^4x (L_{\text{эфф}} + J_a^\mu A_\mu^a) \right\}, \end{aligned} \quad (18.25)$$

которое можно записать в форме функционального дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \left\{ J_a^\mu D_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u_a} - \frac{1}{2} f^a{}_{bc} \bar{u}_a \frac{\delta^2}{\delta \bar{u}_b \delta \bar{u}_c} + \right. \\ \left. + u^a F_a \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} W[J, \bar{u}, u] = 0. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Легко убедиться, что БРСТ-тождества (18.25), (18.26) эквивалентны тождествам Славнова — Тейлора — Уорда — Такахаши. Действительно, вычислив функциональную производную  $\frac{\delta}{\delta u_a}$  от (18.26)

и положив затем  $u = \bar{u} = 0$ , с учетом выражения для двухточечной функции Грина духовых полей (18.24) приходим к (18.18).

Таким образом, БРСТ-симметрия в квантовой теории калибровочных полей является иным, в некотором смысле более наглядным, проявлением независимости физического содержания теории от выбора калибровки. Тождества Славнова (и эквивалентные им БРСТ тождества) играют важную роль в процедуре перенормировки калибровочной теории, так как повторные функциональные производные (18.18), (18.26) устанавливают тождественные соотношения между различными функциями теории Грина.

**Геометрическая интерпретация метода Фаддева — Попова.** Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию введенных выше понятий и конструкций. Начнем с процедуры Фаддева — Попова, целью которой было построение меры интегрирования по пространству орбит  $\eta$ .

Пусть  $Y$  — произвольное  $k$ -мерное риманово пространство,  $y^1, \dots, y^k$  — локальные координаты в некоторой карте и  $g_{ij}(y)$  — метрический тензор. Тогда, как известно, инвариантная форма объема, задающая риманову меру в  $Y$ , есть

$$dv = |\det g_{ij}|^{1/2} dy^1 \dots dy^k.$$

В [45] показано (см. приложение V), что пространство орбит  $\eta$  является гладким (бесконечномерным) многообразием и на нем существует естественная риманова структура. Убедимся, что процедура Фаддева — Попова фактически определяет интегрирование на  $\eta$  с помощью римановой метрики пространства орбит.

Мы определили пространство орбит  $\eta$  как фактор-пространство пространства всех связностей  $\mathcal{C}$  на  $M$  под действием группы калибровочных преобразований (18.3). Следует заметить, что в общем случае  $\eta$  не является многообразием (это стратифицированное пространство). Мы, однако, вслед за [45, 46] ограничимся предположением, что формы  $A$  из  $\mathcal{C}$  являются неприводимыми связностями на соответствующем главном расслоении  $P(M, G)$ , и структурная группа  $G$  проста. Множество неприводимых связностей всюду плотно в пространстве всех калибровочных полей (а иногда и совпадает с ним, например, если  $M=S^4$ ,  $G=SU(2)$  и индекс Понтрягина расслоения  $P$  нетривиален). Можно показать, что пространство орбит  $\eta$  в этом случае является многообразием [45], а  $\mathcal{C}$  — главным расслоением на  $\eta$  со структурной группой

$$G = \prod_x G_x,$$

действующей как группа преобразований форм связности (18.3). Точнее говоря, вместо  $G$  следует рассматривать ее сужение  $\bar{G} = G/Z$ , где  $Z$  — центр, поскольку  $\bar{G}$  действует свободно в  $\mathcal{C}$ .

Обозначим  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \eta$  соответствующую каноническую проекцию. Пусть  $\Omega^p$  — пространство  $p$ -форм на многообразии  $M$  со значениями в алгебре Ли группы  $G$ . Поскольку для любой связности  $A$  и 1-формы  $\omega \in \Omega^1$  сумма  $A + \omega$  также является связностью, получаем, что  $\mathcal{C}$  есть аффинное пространство, моделируемое на  $\Omega^1$ . Фиксация координат  $x^\mu$  на  $M$  и базиса в алгебре Ли очевидным образом вводит локальные координаты на  $\mathcal{C}$  с помощью набора компонент  $\{A_\mu^a(x)\}$  форм связности  $A$ . Соответствующий координатный базис касательного пространства  $T_A(\mathcal{C})$  в точке  $A$  задается операторами

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu^a(x)},$$

Отсюда следует, что  $T_A(\mathcal{C})$  изоморфно  $\Omega^1$  (в локальных координатах  $\{A_\mu^a(x)\}$  любой вектор  $X \in T_A(\mathcal{C})$  задается своими компонентами  $X_\mu^a(x)$ ,

$$X = \int d^4x X_\mu^a(x) \frac{\partial}{\partial A_\mu^a(x)},$$

которые определяют 1-форму  $X_\mu^a dx^\mu \in \Omega^1$ .

Пространство 0-форм  $\Omega^0$  можно отождествить с алгеброй Ли группы калибровочных преобразований (18.3). Произвольная связность  $A$  задает на  $M$  ковариантную производную  $\overset{A}{\nabla}$ , отображающую  $\Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ . В частности, производная

$$\overset{A}{\nabla}: \Omega^0 \rightarrow \Omega^1,$$

$$\xi^a(x) \in \Omega^0 \xrightarrow{\overset{A}{\nabla}} \overset{A}{\nabla}_\mu \xi^a(x) \in \Omega^1, \quad (18.27)$$

как вытекает из сказанного выше, определяет отображение алгебры Ли группы  $G$  в касательное пространство  $T_A(\mathcal{C})$ . Нетрудно понять, что (18.27) является изоморфизмом алгебры Ли на вертикальное подпространство  $V_A \subset T_A(\mathcal{C})$ , касательное к слою расслоения  $\mathcal{C}$  (т. е. к орбите, проходящей через  $A$ ). Действительно, напомним, что фундаментальное векторное поле  $\Sigma(\xi)$ , порождаемое в расслоении  $\mathcal{C}$  действием группы  $G$ , определяется своим действием на произвольную вещественную функцию

$$\Sigma(\xi)_A(f) = \frac{d}{dt} f(g^{(t)}A)|_{t=0}, \quad g(t) = \exp(t\xi).$$

Вычисляя производную, находим

$$\Sigma(\xi)_A(f) = \int d^4x \frac{\delta f}{\delta A_\mu^a(x)} \left( -\overset{A}{\nabla}_\mu \xi^a \right). \quad (18.28)$$

Таким образом, в локальных координатах  $\{A_\mu^a(x)\}$  фундаментальное векторное поле, отвечающее элементу алгебры Ли  $\xi^a(x)$ , имеет компоненты

$$\Sigma(\xi)_\mu^a = -\overset{A}{\nabla} \xi^a \in V_A \subset T_A(\mathcal{C}).$$

Если на  $M$  существует метрика, то ковариантная производная связности  $A$  определяет и обратное отображение касательного пространства  $T_A(\mathcal{C})$  в алгебру Ли группы  $G$ :

$$\overset{A}{\nabla}^*: \Omega^1 \rightarrow \Omega^0,$$

$$X_\mu^a(x) \in \Omega^1 = T_A(\mathcal{C}) \xrightarrow{\overset{A}{\nabla}^*} \overset{A}{\nabla}^\mu X_\mu^a = \zeta^a(x) \in \Omega^0. \quad (18.29)$$

Оператор  $\nabla^A$  является сопряженным к  $\nabla^A$  относительно естественного скалярного произведения, которое можно ввести в пространстве  $p$ -форм  $\Omega^p$ :

$$(\alpha, \beta) = \int_M \text{Tr}(\alpha \wedge \beta^*), \quad \alpha, \beta \in \Omega^p.$$

**Упражнение 18.1.** Показать, что при сдвиге по орбите  $A \rightarrow^s A$  касательные к  $\mathcal{C}$  векторы под действием дифференциала отображения преобразуются по присоединенному представлению группы  $G$ , т. е.

$$X \rightarrow R_g X = a d_g X = g X g^{-1}.$$

Отображение (18.29), сопоставляющее векторному полю элемент алгебры Ли, есть по построению (линейная) форма на  $\mathcal{C}$  со значениями в алгебре Ли. Легко видеть, что эта форма обладает свойством

$$R_g^* \zeta = a d_g \zeta = g \zeta^{-1},$$

аналогично форме связности. Однако  $\zeta$  не является связностью, поскольку все значения этой формы на фундаментальном векторном поле  $\Sigma(\xi)$  не равны соответствующим элементам алгебры  $\xi$ .

Определим на  $\mathcal{C}$  другую 1-форму

$$\omega = -\frac{1}{\square_A} \nabla^A, \quad (18.30)$$

где

$$\square_A = \nabla^A \nabla^A = \left( \nabla^A \nabla^A \right)_a^a$$

— ковариантный оператор Даламбера. Для неприводимых связностей  $A$ , являющихся точками  $\mathcal{C}$ ,  $\square_A$  обратим и  $\frac{1}{\square_A}$  обозначает соответствующую функцию Грина

$$\square_A^{-1} \frac{1}{\square_A}(x, y) = \delta^4(x - y).$$

В локальных координатах  $\{A_\mu^a(x)\}$  компоненты 1-формы

$$\omega^{(b)} = \int d^4 x \omega_a^{\mu(b)} \delta A_\mu^a(x)$$

имеют вид

$$\omega_a^{\mu(b)} = - \int d^4 J \left( \frac{1}{\square_A}(x, y) \nabla_y^\mu \right)_a^b. \quad (18.31)$$

Очевидно, что  $\omega$  есть форма связности на  $\mathcal{C}$ , для нее выполнены оба свойства

$$R_g^* \omega = g \omega g^{-1}, \quad \omega(\Sigma(\xi)) = \xi.$$

Горизонтальное подпространство  $H_A \subset T_A(\mathcal{C})$  по определению является ядром  $\omega$ , т. е.

$$X \in H_A \iff \omega(X) = 0.$$

Введем проектор  $\Pi_A: T_A(\mathcal{C}) \rightarrow H_A$ ,

$$\Pi_A = 1 - \frac{1}{\square_A} \nabla^A, \quad (18.32)$$

или в компонентной записи в локальных координатах

$$\Pi_{A\mu a'}^{a\mu'} = \delta_a^a \delta_{\mu'}^{\mu} - \left( \nabla_{\mu'}^A \frac{1}{\square_A} \nabla^{\mu'} \right)_a^a.$$

Оператор (18.32) обладает очевидным свойством

$$\Pi_A^2 = \Pi_A = \Pi_A^*,$$

где  $*$  означает сопряжение в смысле введенного выше скалярного произведения в  $\Omega^p$ . Напомним, что касательные векторы  $X \in T_A(\mathcal{C})$  можно рассматривать как 1-формы из  $\Omega^1$  на  $M$ .

Скалярное произведение в  $\Omega^1 = T_A(\mathcal{C})$  задает естественную метрику на  $\mathcal{C}$ . Эта метрика калибровочно и координатно инвариантна. Используем ее, чтобы построить метрику на  $\eta = \mathcal{C}/G$ . Пусть  $\sigma \in \eta$  — произвольная точка в пространстве орбит. Рассмотрим векторы  $X, Y \in T_\sigma(\eta)$ . Существование связности  $\omega$  на  $\mathcal{C}$  позволяет единственным образом сопоставить этим векторам их образы в некоторой точке  $A \in \pi^{-1}(\sigma)$  на орбите — слое на  $\sigma$  при горизонтальном поднятии

$$X \rightarrow \tau_X, \quad Y \rightarrow \tau_Y, \quad \tau_X, \tau_Y \in T_A(\mathcal{C}),$$

так что при проекции

$$\pi_*(\tau_X) = X, \quad \pi_*(\tau_Y) = Y.$$

Определим тогда метрику  $\gamma(\cdot, \cdot)$  на  $\eta$  как

$$\gamma(X, Y) = (\tau_X, \tau_Y).$$

Это определение вполне корректно, так как выбор точки  $A$  в слое над  $\sigma$  несуществен: при сдвиге вдоль слоя  $A \rightarrow^s A$  векторы горизонтального лифта преобразуются

$$\tau_{X,Y} \rightarrow g \tau_{X,Y} g^{-1}$$

и их скалярное произведение не меняется.

Естественной инвариантной мерой интегрирования по  $\eta$  является

$$d\mu_\eta(\sigma) = |\det \gamma|^{1/2} d\sigma. \quad (18.33)$$

Эта величина (аналогично конечномерному случаю) не зависит от выбора координат  $\sigma$  на пространстве  $\eta$ . Последние удобно ввести на  $\eta$ , задавая локальные сечения расслоения  $\mathcal{C}$ , т. е. фиксируя

калибровочную свободу (18.3). Рассмотрим, следуя [46], произвольную точку  $\sigma_0 \in \eta$  и лежащую над ней в слое  $\pi^{-1}(\sigma_0)$  точку  $A_0 \in \pi^{-1}(\sigma_0)$ . Определим в окрестности  $\sigma_0$  локальные координаты следующим образом. Пусть

$$S_0 = \{A \in C \mid \overset{A_0}{\nabla}^* (A) = \lambda\}$$

— гиперповерхность в  $\mathcal{E}$ , задающая локальное сечение этого расслоения. Уравнение, определяющее  $S_0$ ,

$$\overset{A_0}{\nabla}^\mu A_\mu^a - \lambda^a = 0 \quad (18.34)$$

является частным случаем калибровочного условия (18.4) и известно как «фоновая ковариантная калибровка».

Например, выбирая фоновое поле  $A_0 = 0$ , получаем обычную фейнмановскую ковариантную калибровку. С помощью сечения  $S_0$  координаты любой точки  $\sigma$  в окрестности  $\sigma_0$  можно задать как точку  $A(\sigma)$  пересечения орбиты  $\pi^{-1}(\sigma)$  с поверхностью (18.34) (рис. 24). Требование, чтобы  $S_0$  проходило через точку  $A_0$ , однозначно определяет кон-

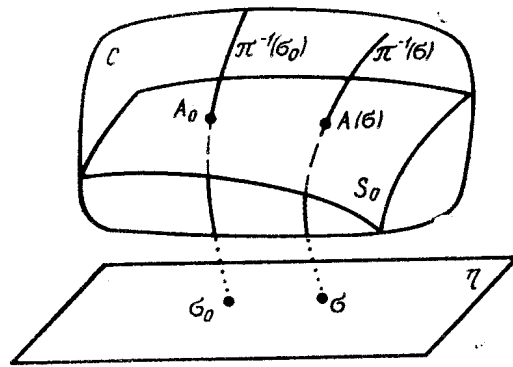


Рис. 24

$$\lambda = \overset{A_0}{\nabla}^* A_0,$$

и (18.34) можно переписать в эквивалентном виде

$$\overset{A_0}{\nabla}^\mu [A_\mu^0 - (A_\mu^a)_0] = 0. \quad (18.35)$$

Как уже отмечалось,  $A_0$  — произвольная точка на орбите  $\pi^{-1}(\sigma_0)$ . Выбор другой точки  $A_0' \in \pi^{-1}(\sigma_0)$  задает посредством (18.34), (18.35) иную гиперповерхность  $S_0'$ , которая переходит в  $S_0$  под действием калибровочного преобразования (18.3), связывающего  $A_0$  и  $A_0'$ . Тем самым множество калибровок (18.34) изоморфно калибровочной группе  $G$ , и бесконечно малое изменение калибровки  $A_0 \rightarrow A_0 + \delta A_0$  описывается инфинитезимальным преобразованием

$$\delta \lambda^a = -\square_0 \xi^a. \quad (18.36)$$

Здесь, как и прежде,  $\xi^a(x)$  — координаты на группе вблизи единицы (18.8), и  $\square_0 = \overset{A_0}{\nabla}^\mu \overset{A_0}{\nabla}_\mu$ .

Вычислим теперь метрику  $\gamma$  и ее определитель во введенных на  $\eta$  локальных координатах. Пусть  $X$  и  $Y$  — произвольные векторы в  $\sigma$ . Задача заключается в том, чтобы найти их горизонтальные лифты  $\tau_X$  и  $\tau_Y$ . В координатах, задаваемых калибровкой (18.34), (18.35), компоненты  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  суть компоненты векторов  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ , касательных к  $S_0 \subset \mathcal{E}$ , т. е.

$$\tilde{X} = \int d^4x X_\mu^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)},$$

где  $X_\mu^a$  удовлетворяет  $\overset{A_0}{\nabla}^\mu X_\mu^a = 0$  в силу того, что  $A_\mu^a = A_\mu^a(\sigma) \in S_0$  (аналогично для  $Y: \overset{A_0}{\nabla}^\mu Y_\mu^a = 0$ ). По определению имеем

$$\tau_*(\tilde{X}) = X, \quad \tau_*(\tilde{Y}) = Y.$$

Однако  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  не являются горизонтальными. Разобьем их с помощью проектора (18.32) на горизонтальную и вертикальную части

$$\tilde{X} = \Pi_A \tilde{X} + \tilde{\Pi}_A \tilde{X},$$

(аналогично для  $\tilde{Y}$ ), где мы ввели проектор

$$\tilde{\Pi}_A = 1 - \Pi_A = \overset{A}{\nabla} \frac{1}{\square_A} \overset{A}{\nabla}^* \quad (18.37)$$

на вертикальное подпространство  $V_A \subset T_A(\mathcal{E})$ . Например, для фундаментального вектора (18.28) имеем

$$\tilde{\Pi}_A \Sigma(\xi)_A = \Sigma(\xi)_A.$$

Легко видеть, что

$$\tilde{\Pi}_A^2 = \Pi_A = \Pi_A^*.$$

$$\Pi_A \tilde{\Pi}_A = \tilde{\Pi}_A \Pi_A = 0.$$

(18.38)

Ясно, что

$$\tau_*(\tilde{X}) = \tau_*(\Pi_A \tilde{X}),$$

и в силу свойств горизонтального лифта получаем в рассматриваемых координатах

$$\tau_{*1}(X) = \Pi_A \tilde{X} = \Pi_A \Pi_0 \tilde{Y}, \quad (18.39)$$

где учтено, что  $\Pi_0 \tilde{X} = X$  из-за связи  $\overset{0}{\nabla}^\mu X_\mu^a = 0$  (для  $\tilde{Y}$  все аналогично). Чтобы упростить обозначения, индексом 0 отмечаются величины, построенные из  $A_0$ , например  $\Pi_0 = \Pi_{A_0}$ .

Таким образом, во введенных координатах метрика  $\gamma$  имеет вид

$$\gamma(X, Y) = (\tilde{X}, \Pi_0 \Pi_A \Pi_0 \tilde{Y}),$$

или в символической форме

$$\gamma = \Pi_0 - \Pi_0 \Pi_A \Pi_0, \quad (18.40)$$

где мы рассматриваем  $\gamma$  как оператор, отображающий

$$T_{A(\sigma)}(S_0) \rightarrow T_{A(\sigma)}(S_0),$$

и не делаем различия между  $T_{A(\sigma)}(S_0)$  и  $T_{\sigma\eta}$ .

Продолжим (18.40) на все касательное пространство  $T_{A(\sigma)}(\mathcal{E})$ , задав оператор

$$\bar{\gamma} = 1 - QQ^*, \quad (18.41)$$

где  $Q = \Pi_0 \tilde{\Pi}_A$  определяет отображение  $\Omega^1 \rightarrow \Omega^1$  и оператор  $Q^* = \tilde{\Pi}_A \Pi_0$  является к нему сопряженным, а  $1$  — тождественное отображение  $T_A(\mathcal{E}) \rightarrow T_A(\mathcal{E})$ . В каждой точке  $A(\sigma) \in S_0$  касательное пространство  $T_{A(\sigma)}(\mathcal{E})$  однозначно разлагается в сумму  $T_{A(\sigma)}(S_0)$  и ортогонального к нему подпространства  $(T_{A(\sigma)}(S_0))^\perp$ . Проекция на них задается соответственно операторами  $\Pi_0$  и  $\tilde{\Pi}_0$ . В силу ортогональности  $\Pi_0 \tilde{\Pi}_0 = 0$ , и очевидно, что  $QQ^* = 0$  на  $(T_{A(\sigma)}(S_0))^\perp$ , тогда как на  $T_{A(\sigma)}(S_0)$   $\bar{\gamma} = \gamma$ . Следовательно,

$$\det \bar{\gamma} = \det \gamma. \quad (18.42)$$

Рассмотрим оператор  $\tilde{\gamma}: \Omega^1 \rightarrow \Omega^1$ ,

$$\tilde{\gamma} = 1 - Q^*Q. \quad (18.43)$$

Его определитель совпадает с определителем  $\bar{\gamma}$ . Действительно, пусть  $v_i$  — собственный вектор оператора  $QQ^*$  с собственными значениями  $\lambda_i$ , т. е.

$$QQ^*v_i = \lambda_i v_i.$$

Тогда  $u_i = Q^*v_i$  является собственным вектором оператора  $Q^*Q$  с тем же собственным значением

$$Q^*Qu_i = \lambda_i u_i.$$

Очевидно, что  $u_i \neq 0$ , так как иначе

$$Qu_i = QQ^*v_i = 0 \neq \lambda_i v_i.$$

Таким образом,

$$\det \tilde{\gamma} = \prod (1 - \lambda_i) = \det \bar{\gamma} = \det \gamma.$$

Заметим, что все три рассматриваемых оператора  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\tilde{\gamma}$  являются невырожденными в той области локальных координат (18.34), (18.35), где касательные векторы к  $S_0$  имеют горизонтальные компоненты. Это всегда имеет место в (малой) окрестности  $\sigma_0$ .

**Упражнение 18.2.** Показать, что операторы  $Q^*Q$  и  $Q^*Q$  имеют собственные значения  $1$  на векторах, являющихся одновременно вертикальными и касательными к  $S_0$ , т. е. доказать, что матрица  $\gamma$  вырождается в точках  $A(\sigma)$ , в которых орбиты  $\pi^{-1}(\sigma)$  являются касательными к поверхности калибровки  $S_0$ .

В любой точке  $A \in \mathcal{E}$  касательное пространство  $T_A(\mathcal{E}) = V_A \oplus H_A$ . На горизонтальном подпространстве  $Q^*Q = 0$  и, следовательно,  $\tilde{\gamma}|_{H_A} = 1$ , в то время как

$$\gamma' = \tilde{\gamma}|_{V_A} = \tilde{\Pi}_A - \tilde{\Pi}_A \Pi_0 \tilde{\Pi}_A. \quad (18.44)$$

Таким образом,

$$\det \tilde{\gamma} = \det \gamma = \det \gamma'. \quad (18.45)$$

Однако вертикальное подпространство  $V_A$ , на котором определен (18.44), изоморфно алгебре Ли  $\Omega^0$  группы калибровочных преобразований (18.3). Взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается операцией построения фундаментальных векторных полей (18.28) и связности (18.30):

$$\Sigma_A: \Omega^0 \rightarrow V_A, \quad (\Sigma_A)^{-1} = \omega: V_A \rightarrow \Omega^0.$$

Таким образом, оператор  $\gamma'$  на  $V_A$  может быть переписан как эквивалентный ему оператор на алгебре Ли  $\Omega^0$ :

$$\gamma'' = (\Sigma_A)^{-1} \gamma' \Sigma_A \Rightarrow \det \gamma'' = \det \gamma'.$$

Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \frac{1}{\square_A} \begin{matrix} A & \\ \square & \end{matrix} * \tilde{\Pi}_A (1 - \Pi_0) \tilde{\Pi}_A \begin{matrix} A & \\ \square & \end{matrix} \Delta = \frac{1}{\square_A} \begin{matrix} A & \\ \nabla & \end{matrix} * \tilde{\Pi}_0 \begin{matrix} A & \\ \nabla & \end{matrix} = \\ &= \frac{1}{\square_A} \begin{matrix} A & 0 \\ \nabla & * \end{matrix} \begin{matrix} 0 & \\ \square & \end{matrix} \begin{matrix} 0 & A \\ \nabla & * \end{matrix}, \end{aligned}$$

откуда

$$\det \gamma'' = \frac{\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ \Delta & * \nabla \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0 & A \\ \nabla & * \nabla \end{pmatrix}}{\det \square_A \det \square_0}.$$

**Упражнение 18.3.** Показать, что для произвольных связностей  $A_0$  и  $A$  имеет место тождество

$$\left( \begin{matrix} 0 & A \\ \nabla^{\mu} & \nabla^{\mu} \end{matrix} - \begin{matrix} A & 0 \\ \nabla^{\mu} & \nabla^{\mu} \end{matrix} \right)_b^a = f_{cb}^a \nabla^{\mu} [A_{\mu}^c - (A_{\mu}^c)_0]. \quad (18.46)$$

Когда  $A$  и  $A_0$  лежат на поверхности калибровки  $S_0$ , что имеет место в выбранных координатах, получаем  $\begin{matrix} 0 & A \\ \nabla & * \nabla \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & A \\ \nabla & * \nabla \end{matrix}$ , и следовательно,

$$\det \gamma' = \det \gamma'' = \left( \det \begin{matrix} 0 & A \\ \nabla & * \nabla \end{matrix} \right)^2 (\det \square_A)^{-1} (\det \square_0)^{-1}. \quad (18.47)$$

Заметим теперь, что детерминант Фаддеева — Попова (18.9) для калибровки (18.34) имеет вид

$$\Delta_F = \det \begin{pmatrix} 0 & A \\ \nabla^* & \nabla \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с учетом (18.40), (18.42), (18.45), (18.47) получаем, что в рассматриваемых локальных координатах инвариантная мера (18.33) равна

$$d\mu_\eta(\sigma) = (\det \square_{(0)})^{-1/2} (\det \square_{A(\sigma)})^{-1/2}.$$

$$\Delta_F[\sigma] \delta \left( \int_{\eta} A_\mu^a - \lambda^a \right) dA(\sigma), \quad (18.48)$$

где введение  $\delta$ -функции позволяет написать дифференциал объема  $d\sigma$  в виде  $dA(\sigma)$ . Важно отметить также, что два первых фактора являются функциями точек  $\sigma \in \eta$ , поскольку определитель оператора Даламбера  $\square_A$  калибровочно инвариантен

$$\det \square_A = \det (g \square_A g^{-1}) = \det (\square_{gA}).$$

При этом первый множитель в (18.48) несуществен в функциональном интеграле (это константа, которую можно убрать, перепределив нормировку  $N$ ). Его появление связано с якобианом перехода (18.36) при интегрировании по всем калибровкам [46].

Сравнения (18.12) с (18.48), мы теперь можем записать производящий функционал в инвариантной форме

$$W[J] = \int_{\eta} d\mu_\eta(\sigma) \text{vol}(\sigma) \exp \left\{ i \int d^4x (L(\sigma) + J_a^{\mu} A_\mu^a(\sigma)) \right\}, \quad (18.49)$$

где

$$\text{vol}(\sigma) = \int_G d\mu_G(g) (\det \square_{A(\sigma)}) \quad (18.50)$$

— объем орбиты  $\pi^{-1}(\sigma)$ , который для случая бозонной калибровочной теории равен произведению объема калибровочной группы на фактор  $(\det \square_{A(\sigma)})^{1/2}$ . Появление последнего нетрудно объяснить, используя аналогию с (18.33). Метрика на орбите  $\pi^{-1}(\sigma)$  как подмногообразия  $\mathcal{E}$  индуцируется метрикой на  $\mathcal{E}$ . Однако орбита изоморфна  $G$ , а касательные к ней вертикальные пространства  $V_A$  изоморфны алгебре Ли. Поэтому скалярное произведение на орбите

$$(X, Y) = \left( \begin{pmatrix} A \\ \nabla \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ \nabla \zeta \end{pmatrix} \right) = (\lambda, -\square_A \zeta), \quad X, Y \in V_A,$$

естественно индуцирует метрику на группе  $\gamma_G = \square_A$ , так что мера интегрирования на орбите, аналогично (18.33), имеет вид

$$d\mu_G(g) (\det \gamma_G)^{1/2} = (\det \square_{A(\sigma)})^{1/2} d\mu_G(g).$$

Таким образом, выяснился геометрический смысл определителя Фаддеева — Попова:  $\Delta_F$  пропорционален определителю римановой метрики  $\gamma$  на пространстве орбит. Тем самым процедура Фаддеева — Попова, целью которой является построение меры интегрирования по  $\eta$ , получает естественное геометрическое обоснование. Это дает возможность записать функциональный интеграл в квантовой теории калибровочных полей в инвариантной форме (18.49), показывающей его независимость от выбора калибровочного условия (18.4), смысл которого заключается во введении локальных координат в  $\eta$ .

**Геометрическая интерпретация духов и БРСТ-симметрии.** Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию духов и БРСТ-преобразований (18.21). Последние играют важную роль как в процедуре перенормировки калибровочной квантовой теории, так и в исследовании калибровочных аномалий (см. § 19). Определим оператор  $s$  БРСТ-преобразований калибровочного и духового полей

$$sA_\mu^a = -\nabla_\mu c^a, \quad (18.51.1)$$

$$sc^a = -\frac{1}{2} f^a_{bc} c^b c^c, \quad (18.51.2)$$

так что БРСТ-преобразования (18.21.1) — (18.21.2) принимают вид

$$\delta_{\text{БРСТ}} A_\mu^a = sA_\mu^a = sA_\mu^a \delta v, \quad \delta_{\text{БРСТ}} c^a = sc^a \delta v,$$

где  $\delta v$  — обычный антикоммутирующий параметр преобразования. Важнейшим свойством БРСТ-оператора является его нильпотентность

$$s^2 = 0, \quad (18.52)$$

что легко проверить непосредственно из определения (18.51) с учетом антикоммутирования  $s$  с  $A$ ,  $c$ ,  $\bar{c}$ .

Для выяснения смысла этих понятий и конструкций вернемся к исследованию геометрии пространства орбит  $\eta$ . Выше мы рассматривали векторные поля, связность и метрику на расслоении  $\mathcal{E}$  (пространстве неприводимых связностей) над  $\eta$ . Теперь займемся внешними формами на  $\mathcal{E}$ . Пусть  $\Lambda^{p,a}(\mathcal{E})$  обозначает пространство  $a$ -форм на  $\mathcal{E}$  со значениями в  $\Omega^p$  (например, что  $\Omega^p$  — пространства  $p$ -форм на  $M$  со значениями в алгебре Ли группы  $G$ ).

**Примеры. 1.** Калибровочное поле  $A$  является элементом  $\Lambda^{1,0}(\mathcal{E})$ , рассматриваемым как функция на  $\mathcal{E}$ , сопоставляющая точкам  $A_\mu^a \in \mathcal{E}$  гладкую 1-форму  $A_\mu^a dx_\mu \in \Omega^1$  на  $M$ .

**2.** Связность (18.30) на расслоении  $\mathcal{E} \rightarrow \eta$  является элементом  $\Lambda^{0,1}(\mathcal{E})$ , рассматриваемым как 1-форма  $\omega$  на  $\mathcal{E}$  со значениями в алгебре Ли — пространстве 0-форм  $\Omega^0$  на  $M$ .

Как обычно, в алгебре внешних форм

$$\Lambda^*(\mathcal{E}) = \bigoplus_{p,\alpha} \Lambda^{p,\alpha}(\mathcal{E})$$

существует операция внешнего дифференцирования, задаваемая в инвариантном виде посредством

$$d_c \varphi(X_0, \dots, X_\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i X_i \varphi(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_\alpha) + \sum_{0 \leq i < j \leq \alpha} (-1)^{i+j} \varphi([X_0, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_\alpha), \quad (18.53)$$

где  $\alpha$ -форма  $\varphi \in \Lambda^{p,\alpha}(\mathcal{E})$  (значение  $p$  произвольно),  $X_0, \dots, X_\alpha$  — векторные поля на  $\mathcal{E}$ , знак  $\wedge$  означает, что этот элемент опускается. Оператор

$$d_c: \Lambda^{p,\alpha} \rightarrow \Lambda^{p,\alpha+1}$$

является нильпотентным  $d_c^2 = 0$ .

Назовем форму  $\varphi \in \Lambda^{p,\alpha}(\mathcal{E})$  вертикальной, если ее значение  $\varphi(X_1, \dots, X_\alpha) = 0$ , когда хотя бы один из аргументов  $X_i$  является горизонтальным. Ясно, что из любой формы  $\varphi$  можно построить вертикальную форму  $\varphi_V$  с помощью проекторов (18.37):

$$\varphi_V(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_\alpha) = \varphi(\tilde{\Pi}X_1, \dots, \tilde{\Pi}X_\alpha). \quad (18.54)$$

Обозначим подпространство вертикальных форм на  $\mathcal{E}$  через  $V^{p,\alpha}(\mathcal{E}) \subset \Lambda^{p,\alpha}(\mathcal{E})$ . Ясно, что

$$V^*(\mathcal{E}) = \bigoplus_{p,\alpha} V^{p,\alpha}(\mathcal{E})$$

является подалгеброй в алгебре внешних форм  $\Lambda^*(\mathcal{E})$ . В  $V^*(\mathcal{E})$  определен вертикальный внешний дифференциал  $d_V$ , который задается внешним дифференциалом  $d_c$  (18.53) с помощью проекторов (18.37):

$$d_V \varphi(X_0, X_1, \dots, X_\alpha) = d_c \varphi(\tilde{\Pi}X_0, \dots, \tilde{\Pi}X_\alpha). \quad (18.55)$$

Пусть в окрестности точки  $A \in \mathcal{E}$  введены (например, посредством гиперповерхности калибровки) локальные координаты  $(\sigma, y)$ , из которых  $\sigma$  — горизонтальные переменные, определяющие орбиты, и  $y$  — вертикальные координаты вдоль слоя — орбиты. Тогда в символической записи имеем

$$d_c = d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + dy \frac{\partial}{\partial y},$$

и составляющая

$$d_V = dy \frac{\partial}{\partial y}$$

есть не что иное, как вертикальный дифференциал (18.55).

Рассмотрим действие  $d_V$  на калибровочном поле  $A$  и связности  $\omega$  на  $\mathcal{E}$ , которые, как отмечалось выше, суть 0- и 1-формы в  $\Lambda^*(\mathcal{E})$ . Заметим, что для 0-форм понятие вертикальности не имеет смысла, тогда как связность (18.30) на  $\mathcal{E}$  по определению есть вертикальная форма  $\omega \in V^{0,1}(\mathcal{E})$ . Используя (18.53), (18.55), находим

$$d_V A = -\overset{A}{\nabla} \omega, \quad (18.56.1)$$

$$d_V \omega = -\frac{1}{2} [\omega, \omega], \quad (18.56.2)$$

где в первом уравнении 1-форма  $\overset{A}{\nabla} \omega$  на  $\mathcal{E}$  определена своим действием на компоненты векторного поля  $X \in T_A(\mathcal{E})$  как

$$\overset{A}{\nabla} \omega(X) = -\overset{A}{\nabla}_\mu \left( \frac{1}{\square_A} \overset{A}{\nabla} X^\mu \right) \in \Omega^1.$$

При получении (18.56.2) мы воспользовались уравнением структуры

$$d_c \omega = -\frac{1}{2} [\omega, \omega] + R$$

и тем, что 2-форма кривизны  $R$  чисто горизонтальна.

Сравнивая теперь (18.56) с (18.51), получаем естественную геометрическую интерпретацию *духового поля* как формы связности  $c^a = \omega^{(a)}$  на расслоении  $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \eta$ , рассматриваемой в качестве элемента алгебры вертикальных форм на  $\mathcal{E}$ . При этом оператор БРСТ есть не что иное, как вертикальный внешний дифференциал

$$s = d_V \quad (18.57)$$

и его нильпотентность вытекает из нильпотентности внешнего дифференцирования:  $d_V^2 = d_c^2 = 0$ . Данная интерпретация, предложенная в [47, 48], будет играть важную роль при рассмотрении калибровочных аномалий в следующем параграфе.

Соотношение (18.56.2) очень похоже на уравнения структуры Маурера — Картана для левоинвариантных форм на группе. Это не случайно, если вспомнить, что слои расслоения  $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \eta$  — орбиты действия (18.3) — изоморфны калибровочной группе

$$G = \prod_x G_x,$$

а алгебра вертикальных векторных полей на  $\mathcal{E}$  изоморфна алгебре Ли калибровочной группы. Элементы последней являются левоинвариантными векторными полями на  $G$ , которые мы будем отождествлять с 0-формами  $\xi(x) \in \Omega^0$  на  $M$ , задающими инфинитезимальные калибровочные преобразования (18.8).

Изоморфизм алгебры Ли группы  $G$  и вертикального пространства  $V_A(\mathcal{E})$ , осуществляемый с помощью связности (18.30) и фун-



даментальных векторных полей (18.28), можно использовать для установления соответствия между пространствами вертикальных форм  $V^{p,\alpha}(\mathcal{E})$  на  $\mathcal{E}$  и дифференциальными  $\alpha$ -формами на  $G$  со значениями в  $\Omega^p(M)$ . А именно, вертикальной  $\alpha$ -форме  $\varphi \in V^{p,\alpha}(\mathcal{E})$  поставим в соответствие  $\alpha$ -форму  $\tilde{\varphi}$  на  $G$ , так что

$$\tilde{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi(\Sigma(\xi_1), \dots, \Sigma(\xi_n)),$$

где  $\xi_i$  — векторные поля на  $G$  и  $\Sigma(\xi_i)$  — фундаментальные векторные поля (18.28). Обратно, произвольной  $\alpha$ -форме  $\psi$  на  $G$  со значениями в  $\Omega^p(M)$  сопоставим вертикальную  $\alpha$ -форму  $\tilde{\psi} \in V^{p,\alpha}(\mathcal{E})$  по правилу

$$\tilde{\psi}(X_1, \dots, X_n) = \psi(\omega(X_1), \dots, \omega(X_n)),$$

где  $X_i$  — векторные поля на  $\mathcal{E}$  и  $\omega$  — связность (18.30). Вертикальность  $\tilde{\psi}$  очевидна, причем также имеем  $\varphi = \tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi} = \psi$ , т. е. *указанное соответствие есть изоморфизм между  $V^*(\mathcal{E})$  и дифференциальными формами на  $G$  со значениями в  $\Omega^p(M)$  (точнее, эквивариантными формами на  $G$ , что требуется для согласования с правым действием  $G$  в расслоении  $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \eta$ )*. Более того, при таком изоморфизме вертикальный дифференциал  $d_V$  переходит во внешний дифференциал на группе  $d_G$  (и наоборот), в том смысле, что

$$d_G \tilde{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) = d_V \varphi(\Sigma(\xi_1), \dots, \Sigma(\xi_n)).$$

Для доказательства этой формулы можно воспользоваться аналогичным (18.53) инвариантным определением  $d_G$  на  $G$ .

В частности, получаем, что *при данном изоморфизме форма связности  $\omega$  на  $\mathcal{E}$  сопоставляется форме Маурера — Картана*

$$\tilde{\omega}(\xi) = \omega(\Sigma(\xi)) = \xi,$$

которая ставит в соответствие каждому векторному полю  $\xi$  на  $G$  элемент алгебры Ли  $\xi$  (напомним, что и то и другое мы отождествляем с 0-формами  $\xi^a(x) \in \Omega^0$  на  $M$ ). Форму  $\tilde{\omega}$  можно очевидным образом рассматривать как тождественное отображение пространства инфинитезимальных калибровочных преобразований (алгебры Ли группы  $G$ ) в себя. С учетом всего сказанного легко убедиться, что (18.56.2) переходит в обычное уравнение структуры Маурера — Картана

$$d_G \tilde{\omega} = -\frac{1}{2} [\tilde{\omega}, \tilde{\omega}],$$

и таким образом, мы получаем новую (эквивалентную) геометрическую интерпретацию дж-ового поля как формы Маурера — Картана, а оператора БРСТ как внешнего дифференциала на группе калибровочных преобразований (18.3).

## § 19. КАЛИБРОВОЧНЫЕ АНОМАЛИИ

Симметрии физических систем (мы будем говорить о полевых системах) играют важную роль как в классической, так и в квантовой теории. Напомним, что инвариантность классического действия относительно непрерывной группы преобразований полевых переменных и пространственно-временных координат приводит в силу теорем Нетер к закону сохранения соответствующих токов. В свою очередь, эти токи определяют сохраняющиеся заряды, которые позволяют провести классификацию физических состояний и являются генераторами преобразований симметрии полевой системы. Существование констант движения во многих случаях приводит к упрощению исследования динамики полей, помогает интегрировать соответствующие классические уравнения. Оказывается, однако, что *квантование может нарушать симметрии соответствующей классической теории*. Обычно этот факт проявляется в том, что классически сохраняющийся ток перестает сохраняться после квантования системы. Такое явление называется аномалией.

**Пример 19.1.** Пусть лагранжиан

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla_\mu \psi$$

описывает дираковское спинорное поле  $\psi$ , взаимодействующее с калибровочным полем  $A_\mu^a$  через ковариантную производную

$$\Delta_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu^a t_a \psi,$$

где матрицы  $t_a$  являются генераторами некоторого представления калибровочной группы  $G$ . Мы всегда будем предполагать, что динамика поля  $A_\mu^a$  задается обычным лагранжианом Янга — Миллса, который добавляется к  $L$ , однако явно его выписывать не будем. Перепишем  $L$  в виде лагранжиана свободного поля и члена взаимодействия

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + J_a^\mu A_\mu^a,$$

где

$$J_a^\mu = \frac{\partial L}{\partial A_\mu^a} = i\bar{\psi}\gamma^\mu t_a \psi.$$

Легко убедиться, что на уравнениях поля сохраняются векторный ток

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \psi,$$

аксиальный ток

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \psi,$$

и ковариантно сохраняются калибровочный ток  $J_a^\mu$  и аксиальный неабелевый ток

$$j_{5a}^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 t_a \psi,$$

т. е. в классической теории

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \quad \partial_\mu j_5^\mu = 0, \quad \nabla_\mu J_a^\mu = 0, \quad \nabla_\mu j_{5a}^\mu = 0. \quad (19.1)$$

Первые два закона сохранения вытекают по теореме Нетер из инвариантности модели относительно фазовых  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$  и аксиальных  $\psi \rightarrow e^{i\alpha \gamma_5} \psi$  преобразований, тогда как сохранение  $J_a^\mu$  связано с калибровочной инвариантностью модели. Что касается неабелевого аксиального тока  $j_{5a}^\mu$ , то его сохранение не отражает какой-либо инвариантности  $L$  и носит характер условия согласованности модели, которую формально можно разбить на две подсистемы (левых и правых вейлевских фермионов), каждая из которых инвариантна относительно группы  $G$ . Сразу следует подчеркнуть принципиальное отличие токов  $j^\mu$ ,  $j_5^\mu$ ,  $j_{5a}^\mu$  от  $J_a^\mu$ : ток  $J_a^\mu$  является внутренним током теории, т. е. источником калибровочного поля  $A_\mu^a$ , в то время как токи  $j$  суть внешние, т. е. не влияют на динамику  $A_\mu^a$ . При квантовании классические поля заменяются операторами, и оказывается, что матричные элементы некоторых токов перестают сохраняться. Вместо (19.1) имеем [49]:

$$\langle \partial_\mu j^\mu \rangle = 0, \quad \langle \nabla_\mu J_a^\mu \rangle = 0, \quad (19.2.1)$$

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} (F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}), \quad (19.2.2)$$

$$\langle \nabla_\mu j_{5a}^\mu \rangle = -\frac{i}{8\pi^2} \text{Tr} (t_a F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}). \quad (19.2.3)$$

Стоящие в правых частях уравнений (19.2.2), (19.2.3) величины называются соответственно аномалиями аксиальных векторного и неабелева токов.

**Пример 19.2.** Рассмотрим теперь мультиплет вейлевских фермионов

$$\psi_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi, \quad \gamma_5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3,$$

взаимодействующих с калибровочным полем. Классический лагранжиан левых (правых) спиноров

$$L_\pm = i\bar{\psi}_\pm \gamma^\mu \nabla_\mu \psi_\pm$$

инвариантен относительно  $G$  калибровочных преобразований, и, как следствие, ковариантно сохраняются левый (правый) калибровочные токи

$$J_{a\pm}^\mu = i\bar{\psi}_\pm \gamma^\mu t_a \psi_\pm, \quad \nabla_\mu J_{a\pm}^\mu = 0.$$

Обычной фазовой симметрии отвечает сохранение (внешних) векторных токов

$$j_\pm^\mu = \bar{\psi}_\pm \gamma^\mu \psi_\pm, \quad \partial_\mu j_\pm^\mu = 0.$$

После квантования оказывается, что [49, 50]

$$\langle \partial_\mu j_\pm^\mu \rangle = 0, \quad (19.3.1)$$

$$\langle \nabla_\mu J_a^\mu \rangle = \frac{\mp i}{24\pi^2} \text{Tr} \left[ t_a \partial_\mu \left( A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} A_\nu A_\alpha A_\beta \right) \right] \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (19.3.2)$$

где в (19.2) и (19.3) усреднение  $\langle \rangle$  берется по вакуумному состоянию. Правая часть (19.3.2) отлична от нуля и называется аномалией калибровочного тока.

В данном параграфе основное внимание мы уделим изучению *калибровочных аномалий фермионных токов*. Это, конечно, не означает, что нет других типов аномалий или что они физически неинтересны. Так, например, в последнее время большое внимание привлекли к себе так называемые гравитационные аномалии (для лоренцевой и общекоординатной симметрий) [51], а также не до конца исследованы конформные аномалии [52, 53], связанные с квантовым нарушением масштабной инвариантности теорий безмассовых частиц.

Рассмотренные выше примеры 19.1, 19.2 по существу исчерпывают все основные типы аномалий фермионных токов — абелева (19.2.2), неабелева (19.2.3) и калибровочного (19.3.2). Как уже сказано, мы ограничимся изучением последнего типа аномалий, хотя в процессе знакомства с ними выяснится их связь с другими типами. В определенном смысле калибровочные аномалии являются наиболее неприятными и в то же время наиболее интересными объектами в квантовой теории поля. Это связано с тем, что калибровочный ток является источником калибровочного поля и его несохранение нарушает самосогласованность теории. Простейшим проявлением этого становится противоречивость уравнений Янга — Миллса

$$\Delta_\nu F_a^{\mu\nu} = J_a^\mu.$$

Ковариантная дивергенция левой части тождественно равна нулю, в то время как справа  $\Delta_\mu J_a^\mu \neq 0$  из-за аномалии. Более того, нарушение калибровочной симметрии (19.3.2) делает невозможным доказательство перенормируемости квантовой теории и унитарности физической  $S$ -матрицы, которые основаны существенным образом на калибровочной инвариантности производящего функционала и вытекающих из нее тождествах Славнова — Уорда для функций Грина [42]. Наконец, аномалия (19.3.2) проявляет себя также в том, что плотность калибровочного заряда  $J_{a\pm}^0$  удовлетворяет аномальным коммутационным соотношениям.

**Упражнение 19.1.** Показать, что функционально дифференциальные операторы

$$X_a(x) = -\nabla_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} = -\left( \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + f_{abc} A_\mu^b(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu^c} \right) \quad (19.4)$$

имеют коммутационные соотношения алгебры Ли группы

$$X_a(x) X_b(y) - X_b(y) X_a(x) = f_{abc} \delta^4(x-y) X_c(x). \quad (19.5)$$

Показать, что они являются генераторами инфинитезимальных калибровочных преобразований связностей

$$\delta_c A_\mu^a = -\nabla_\mu \xi^a = -\int d^4x \xi^b X_b(A_\mu^a).$$

**Упражнение 19.2.** Показать, что функционально дифференциальный оператор

$$\rho_a = J_a^0(x) = \frac{\delta}{\delta \psi^2(x)} t_a^2 \psi^\beta(x) \quad (19.6)$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\rho_a(x) \rho_b(y) - \rho_b(y) \rho_a(x) = f_{abc} \delta^4(x-y) \rho_c(x) \quad (19.7)$$

и является генератором бесконечно малых калибровочных преобразований мультиплета спинорных полей

$$\delta_c \psi^2 = \xi^a (t_a \psi)^2 = -\int d^4x \xi^a (\rho_a \psi)^2.$$

Указание:  $\alpha, \beta$  — «цветовые» индексы спинорных полей, которые рассматриваются как классические грассмановы переменные, антикоммутирующие друг с другом и с (правой) грассмановой производной  $\delta/\delta\psi$ .

Рассмотрим теорию взаимодействующих калибровочного поля  $A_\mu^a$  и фермионного поля  $\psi$ . Действие

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi \right\} \quad (19.8)$$

инвариантно относительно калибровочных преобразований, и поэтому часть классических уравнений

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J_a^\mu = i \bar{\psi} \gamma^\mu t_a \psi,$$

а именно, нулевая ( $\mu=0$ ) компонента («закон Гаусса»)

$$G_a = -\nabla_\nu F_a^{0\nu} + i \bar{\psi} \gamma^0 t_a \psi = 0, \quad (19.9)$$

является уравнением связи.

**Упражнение 19.3.** Показать, что в калибровке  $A_0^a=0$  уравнение связи (19.9) является генератором калибровочных преобразований связности  $A_i^a$ ,  $i=1, 2, 3$ , и фермионного поля

$$G_a = X_a + \rho_a, \quad (19.10)$$

и инфинитезимальные преобразования задаются

$$\delta_c = -\int d^4x \xi^a G_a.$$

Указание: из (19.8) канонические импульсы, сопряженные  $A_i^a$  и  $\psi$ , равны соответственно  $P_a^i = F_a^{0i}$ ,  $P_\psi = i\psi^\dagger$ .

При квантовании калибровочных теорий связи учитываются как операторные условия на векторы гильбертова пространства, выделяющие физические состояния

$$i\hat{G}_a | \text{физич. сост.} \rangle = 0, \quad (19.11)$$

где  $\hat{G}_a$  получается из  $G_a$  заменой полей  $\psi$ ,  $A$  и импульсов на соответствующие квантово-механические операторы. Условия (19.11) гарантируют, что физические состояния являются калибровочно инвариантными, т. е. не меняются под действием преобразований  $g = \exp(\xi^a t_a) \in G$ , задаваемых в гильбертовом пространстве оператором

$$U(g) = \exp\left\{-i \int d^4x \xi^a(x) \hat{G}_a(x)\right\},$$

$$U(g) | \text{физич. сост.} \rangle = | \text{физич. сост.} \rangle.$$

Условие (19.11) непротиворечивым образом выделяет физические состояния, если

$$[i\hat{G}_a, i\hat{G}_b] | \text{физич. сост.} \rangle = 0. \quad (19.12)$$

Из (19.5) и (19.7) вытекает, что классическая гауссова связь (19.10) удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Ли

$$[G_a(x), G_b(y)] = f_{abc} \delta(x-y) G_c(x), \quad (19.13)$$

и поэтому, если при квантовании  $G_a \rightarrow \hat{G}_a$  алгебра (19.13) не меняет своего вида, уравнение (19.12) выполнено, и условие (19.11) корректно определяет физические состояния. Это действительно имеет место, когда  $\psi$  — дираковские спиноры, для которых отсутствует квантовая аномалия калибровочного типа (см. (19.2.1)).

Однако прямое вычисление коммутатора гауссовского оператора в аномальной теории с вейлевскими фермионами (см. пример 19.2) приводит [49] к

$$[i\hat{G}_a(x), i\hat{G}_b(\vec{y})] = f_{abc} \delta^3(x-y) i\hat{G}_c(x) \pm \pm \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{ijk} \text{Tr}(\{t_a, t_b\} \partial_i A_j) \partial_k \delta^3(x-y). \quad (19.14)$$

Последнее слагаемое определяется непосредственно аномалией калибровочного тока (19.3.2). Тем самым условие (19.11) уже не выделяет непротиворечивым образом физические состояния, поскольку (19.14) не обеспечивает выполнение (19.12). Иными словами, теория с аномальными токами не может быть проквантована стандартными методами.

Что касается аномалий внешних токов (например, (19.2.2) или (19.2.3)), то их появление не приводит к столь категорическим последствиям. Соответствующие квантовые теории не являются внутренне противоречивыми, внешние аномалии просто сужают группу симметрий по сравнению с классической теорией. Физически это проявляется в том, что становятся возможными квантовые процессы, которые были запрещены наивными («нормальными» правилами отбора, основанными на классических симметриях. Хрестоматийным примером является так называемая U(1) проблема [54]: учет аномалии типа (19.2.3) позволил объяснить наблюдаемый в эксперименте распад нейтрального пиона на два фотона. С этим и другими физическими следствиями аномалий можно познакомиться в обзоре [55].

Исторически аномалии были впервые обнаружены в рамках расчетов по теории возмущений. Сейчас, однако, ясно, что их появление не связано с известными недостатками теории возмущений, а имеет более глубокий источник топологического характера. Мы будем рассматривать калибровочные аномалии именно в последнем аспекте и постараемся выяснить их геометрическое и топологическое содержание. С более техническими методами, посвященными собственно вычислению аномалий, можно познакомиться в [55].

Физическое объяснение аномалий связано с необходимостью регуляризации формально расходящихся выражений в квантовой теории поля. Основным требованием к процедуре регуляризации является сохранение симметрий теории и в первую очередь калибровочной симметрии. Однако часто оказывается невозможным обеспечить сохранение всех симметрий, и тогда возникают аномалии. Как правило, нарушаются симметрии, связанные с безмассовостью или присущие выделенной размерности пространства — времени (т. е., например, вовлекающие матрицу  $\gamma_5$  или символ Леви — Чивита  $\epsilon$ ), поскольку наиболее удобные инвариантные регуляризации основаны на продолжении по размерности, или используются массивные регуляторные поля [54]. Уже отмечалось, что первоначально аномалии проявились в расчетах по теории возмущений как нарушения алгебры киральных генераторов или как нарушения тождеств Уорда, отражающих классическое сохранение токов. Затем уже в рамках ковариантного метода квантования с помощью функциональных интегралов было показано, что аномалии связаны с неинвариантностью меры интегрирования по вейлевским фермионам [55]. Наконец, в современном понимании аномалии вызваны существованием топологических (гомологических) препятствий, не позволяющих построить калибровочно инвариантный определитель дифференциального оператора Дирака.

**Свойства фермионных определителей. Поля Дирака.** Ковариантное квантование теории взаимодействующих калибровочного и фермионного полей (19.8) предполагает построение производящего

функционала (18.1), (18.2). Вакуумная амплитуда задается функциональным интегралом

$$W = \frac{1}{N} \int d\mu(A) d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) \exp(iS[A, \bar{\psi}, \psi]), \quad (19.15)$$

где мера  $d\mu(A)$  включает и фиксирующий калибровку член и детерминант Фаддеева — Попова. Формально интегрируя по грасмановым переменным  $\psi, \bar{\psi}$ , находим

$$W = \frac{1}{N} \int d\mu(A) \det(i\gamma^\mu \nabla_\mu) \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a\right]\right). \quad (19.16)$$

Таким образом, вопрос о калибровочной инвариантности квантовой теории сводится к исследованию свойств фермионного детерминанта

$$\det \mathcal{D}(A) = \int d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) \exp\left(i \int d^4x \bar{\psi} \mathcal{D}(A) \psi\right), \quad (19.17)$$

где оператор Дирака имеет вид

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 = i\gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \quad (19.18)$$

для дираковских спиноров и

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\pm = i\gamma_\mu (\partial_\mu + A^\mu) \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \quad (19.19)$$

для вейлевских правых (левых) фермионных полей.

Запишем (19.17) как производящий функционал

$$e^{iI[A]} = \det \mathcal{D}(A) = \int d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) \exp\left(i \int d^4x \bar{\psi} \mathcal{D} \psi\right)$$

квантовой теории спинорных полей во внешнем калибровочном поле. Потенциал  $A_\mu^a$  играет роль классического источника, и  $I[A]$  — соответствующее эффективное действие. Нас интересует поведение определителя  $\mathcal{D}(A)$  при произвольных изменениях поля  $A$ , в частности, при калибровочных преобразованиях (18.3). Теория (19.15), (19.16) будет непротиворечивой, если

$$\det \mathcal{D}(gA) = \det \mathcal{D}(A). \quad (19.20)$$

Легко видеть, что изменение детерминанта при вариациях  $A_\mu^a$  определяется вакуумным средним калибровочного тока:

$$\frac{\delta I[A]}{\delta A_\mu^a} = -i \frac{\delta \ln \det \mathcal{D}(A)}{\delta A_\mu^a} = \langle J_\mu^a \rangle. \quad (19.21)$$

Тем самым при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$\delta A_\mu^a = -\nabla_\mu \xi^a$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta_\xi I[A] &= I[A + \delta_\xi A] - I[A] = \int d^4x \delta A_\mu^a(x) \frac{\delta I[A]}{\delta A_\mu^a(x)} = \\ &= \int d^4x \xi^a(x) \langle \nabla_\mu J_a^\mu \rangle, \end{aligned} \quad (19.22)$$

и следовательно, детерминант калибровочно инвариантен

$$\det \mathcal{D}(A + \delta_\xi A) = e^{i w_1} \det \mathcal{D}(A), \quad (19.23)$$

если калибровочный ток имеет аномалию. Как показывает (19.22), (19.23), меняется только фаза детерминанта

$$w_1[A, \xi] = \int d^4x \xi^a(x) \langle \nabla_\mu J_a^\mu \rangle. \quad (19.24)$$

Формально интегрируя (19.22), (19.23), можно перейти к конечным калибровочным преобразованиям  $g: A \rightarrow gA$ , так что

$$\det \mathcal{D}(gA) = e^{i W_1[A, g]} \det \mathcal{D}(A), \quad (19.25)$$

где  $W_1[A, g]$  есть некоторый функционал от калибровочного поля и элемента группы, который сводится к (19.24) при  $g \approx 1 + \xi^a t_a$ .

Пока наши рассуждения не являются вполне строгими, поскольку мы использовали представление определителя  $\mathcal{D}(A)$  как функционального интеграла по ферми-полям (19.17), который формально расходится. Для придания смысла определителю дифференциального оператора необходима некоторая регуляризация. Начнем с оператора Дирака (19.18). Предположим, что он не имеет нулевых собственных значений, т. е.  $\text{Ker } \mathcal{D}_0 = 0$  на  $M$ . Пусть  $\lambda_n$  — его ненулевые собственные значения и  $\psi_n$  — соответствующие собственные функции:

$$\mathcal{D}_0 \psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

которые нормируемы условием

$$\int d^4x \bar{\psi}_n \psi_m = \delta_{nm}.$$

Произвольное спинорное поле разложим по системе ортонормированных функций

$$\psi(x) = \sum_n a_n \psi_n(x)$$

и определим меру интегрирования в (19.17) как

$$\prod_n da_n d\bar{a}_n,$$

где  $a_n, \bar{a}_n$  — антикоммутирующие переменные. Так как действие

$$\int d^4x \bar{\psi} \mathcal{D}_0 \psi = \sum_n \lambda_n \bar{a}_n a_n,$$

то функциональный интеграл (19.17) представляется в виде (бесконечного) произведения конечномерных интегралов

$$\prod_n \int da_n d\bar{a}_n e^{i \lambda_n \bar{a}_n a_n}$$

и, таким образом, с точностью до несущественной константы

$$\det \mathcal{D}_0(A) = \prod_n \lambda_n. \quad (19.26)$$

Формула (19.26) является естественным обобщением известного конечномерного соотношения. Однако (19.26) также расходится в силу того, что число сомножителей бесконечно. Для его регуляризации используем свойства обобщенной  $\zeta$ -функции, которая для дифференциального оператора  $\mathcal{D}_0$  с собственными значениями  $\{\lambda_n\}$  определяется посредством

$$\zeta(s, \mathcal{D}_0) = \sum_n \lambda_n^{-s}. \quad (19.27)$$

Сумма (19.27) сходится при больших  $\text{Re } s$ , а на остальной комплексной плоскости значения  $\zeta(s, \mathcal{D}_0)$  получаются с помощью аналитического продолжения. Определим регуляризованный детерминант как

$$\det_R \mathcal{D}_0(A) = \exp \left( - \frac{d\zeta(s, \mathcal{D}_0)}{ds} \right) \Big|_{s=0} \quad (19.28)$$

что формально совпадает с (19.26).

Спектр оператора Дирака калибровочно инвариантен, что вытекает из равенства

$$\mathcal{D}_0(gA) = g \mathcal{D}_0(A) g^{-1},$$

т. е. собственная функция  $\psi_n$  оператора  $\mathcal{D}_0(A)$  определяет собственную функцию  $\psi'_n = g\psi_n$  для  $\mathcal{D}_0(gA)$  с тем же собственным значением. Поэтому определитель  $\mathcal{D}_0(gA)$ , задаваемый функциональным интегралом

$$\det \mathcal{D}_0(gA) = \int d\mu(\psi') d\bar{\mu}(\bar{\psi}') e^{i \int d^4x \bar{\psi}' \mathcal{D}_0(gA) \psi'}, \quad (19.29)$$

вычисленный тем же способом, что и (19.17) (т. е. раскладывая спиноры по системе собственных функций  $\psi' = \sum a'_n \psi'_n$  и интегрируя по мере  $\prod da'_n d\bar{a}'_n$ ), приводит снова к

$$\det \mathcal{D}_0(gA) = \prod_n \lambda_n. \quad (19.30)$$

Поскольку регуляризация с помощью  $\zeta$ -функции калибровочно инвариантна, мы окончательно получаем

$$\det_R \mathcal{D}_0(gA) = \det_R \mathcal{D}_0(A). \quad (19.31)$$

Заметим, что, сделав замену переменных  $g^{-1}\psi' = \psi$ ,  $\bar{\psi}'g = \bar{\psi}$ , можно преобразовать (19.29) к

$$\det \mathcal{D}_0(gA) = J \det \mathcal{D}_0(A), \quad (19.32)$$

где  $J$  — якобиан замены переменных. Уравнение (19.32) дает определенную свободу в вычислениях: так, если независимым способом найдем  $J$ , то, зная  $\det \mathcal{D}_0(A)$  из (19.26) и (19.28), получим  $\det \mathcal{D}_0(gA)$  из (19.32). Эта процедура носит название *метода Фуджикавы* [55], который первым обратил внимание на важную роль якобиана при преобразованиях меры фермионных полей. Мы, однако, поступили по-другому: не делая замены  $g^{-1}\psi' = \psi$ , вычислили непосредственно интеграл (19.29) нашли тем самым левую часть (19.32). Данное уравнение теперь можно, как предложено в [56], переписать как определение (регуляризованного) якобиана преобразования

$$J_R = \frac{\det_R \mathcal{D}_0(gA)}{\det_R \mathcal{D}_0(A)}. \quad (19.33)$$

Как мы видим, для обычного оператора Дирака  $\mathcal{D}_0(A)$  якобиан равен единице  $J_R = 1$ . Таким образом, и мера интегрирования по дираковским полям, и определитель  $\det_R \mathcal{D}_0$  являются калибровочно инвариантными величинами. Сравнивая с (19.23) — (19.25), данный вывод можно переформулировать по-иному: *калибровочный ток спинорных дираковских полей не имеет аномалий*.

**Вейлевские поля.** Перейдем теперь к рассмотрению вейлевских операторов (19.19) (для определенности будем обсуждать  $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_0\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$ ). Здесь ситуация становится сложнее, поскольку кроме необходимости придать смысл формально расходящемуся интегралу (19.17) мы сталкиваемся с проблемой отсутствия у  $\mathcal{D}_+$  собственных функций и значений. Действительно  $\mathcal{D}_+$  действует на правые вейлевские спиноры  $\psi_+ = \gamma_5 \psi_+$ , а результатом является левый спинор

$$\mathcal{D}_+ \psi_+ = -\gamma_5 \mathcal{D}_+ \psi_+,$$

следовательно, уравнение  $\mathcal{D}_+ \psi = \lambda \psi$  не имеет смысла. Аналогично, сопряженный к  $\mathcal{D}_+$  оператор  $\mathcal{D}_-$  отображает левые вейлевские фермионы в правые и также не допускает корректно поставленной задачи на собственные значения.

Как выяснится ниже, эти трудности очень существенны, и в результате построение калибровочно инвариантного определителя  $\det \mathcal{D}_\pm(A)$  окажется принципиально невозможным. Заметим, однако, что оператор  $\mathcal{D}_+(\mathcal{D}_+)^* = \mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-$  (так же как  $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}_-)^* = \mathcal{D}_- \mathcal{D}_+$ ) допускает хорошо поставленную задачу на собственные значения. Как нетрудно видеть,

$$\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_- = \mathcal{D}_0^2 \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad \mathcal{D}_- \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_0^2 \frac{1}{2} (1 + \gamma_5),$$

и следовательно, собственные функции  $\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_- = \mu_n \varphi^n$  получаются из собственных функций оператора Дирака проектированием

$$\varphi_n = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_n,$$

а собственные значения равны квадрату собственных значений оператора  $\mathcal{D}_0$ :  $\mu_n = \lambda_n^2$ . Тем самым находим

$$\begin{aligned} |\det \mathcal{D}_+(A)|^2 &= \det \mathcal{D}_+ \det \mathcal{D}_- = \det (\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-) = \\ &= \left( \prod_n \lambda_n \right)^2 = (\det \mathcal{D}_0(A))^2 \end{aligned} \quad (19.34)$$

и аналогично для  $\mathcal{D}_-(A)$ . При любом определении регуляризованного  $\det_R \mathcal{D}_\pm(A)$  соотношения (19.34) должны иметь место, так как они основаны только на общих свойствах определителя. Таким образом, абсолютная величина

$$|\det_R \mathcal{D}_+(A)| = |\det_R \mathcal{D}_-(A)| = \det_R \mathcal{D}_0(A) \quad (19.35)$$

ввиду (19.31) с необходимостью калибровочно инвариантна, и *меняться при калибровочных преобразованиях может только фаза определителя вейлевского оператора*. Мы это действительно видели для бесконечно малых преобразований (19.23), (19.24). Полученный результат (19.35) усиливает (19.25), в котором теперь  $g(x)$  может быть произвольным конечным калибровочным преобразованием, в том числе так называемым глобальным, т. е. не сводящимся к композиции инфинитезимальных.

Для вейлевского оператора  $\mathcal{D}_+(A)$  функциональный интеграл (19.17) (по правым спинорам) является чисто формальным выражением. Модифицируем его, перейдя к интегрированию по дираковским полям и заменив  $\mathcal{D}_+$  на

$$\widehat{\mathcal{D}}_+(A) = i\gamma^5 \left\{ \partial_\mu + A_\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \right\}. \quad (19.36)$$

Определитель этого оператора можно считать равным  $\det \mathcal{D}_+(A)$ . Действительно, представим (19.36) в виде

$$\widehat{\mathcal{D}}_+(A) = i\gamma^5 \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) + \mathcal{D}_+(A). \quad (19.37)$$

Тогда функциональный интеграл

$$\det \widehat{\mathcal{D}}_+(A) = \int d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) \exp \left( i \int d^4x \bar{\psi} \widehat{\mathcal{D}}_+ \psi \right) \quad (19.38)$$

можно записать как произведение

$$\int d\mu(\psi_-) d\mu(\bar{\psi}_-) e^{i \int d^4x \bar{\psi}_- i\gamma^5 \partial_\mu \psi_-} \int d\mu(\psi_+) d\mu(\bar{\psi}_+) e^{i \int d^4x \bar{\psi}_+ \mathcal{D}_+ \psi_+},$$

откуда видно, что *квантовая теория, определяемая (19.38), с точки зрения теории возмущений эквивалентна (19.17)*, так как эф-

Фективные действия этих полей отличаются на постоянный (не зависящий от  $A$ ) множитель. Более того, очевидно, что

$$\text{Ker } \widehat{\mathcal{D}}_+(A) = \text{Ker} \left( i\gamma^5 \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right) + \text{Ker } \mathcal{D}_+(A),$$

однако

$$i\gamma^5 \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)$$

не имеет нетривиальных нулевых мод, поэтому все нулевые моды  $\widehat{\mathcal{D}}_+$  являются правыми и совпадают с нулевыми модами  $\mathcal{D}_+$ .

Выше при обсуждении обычного оператора Дирака мы предполагали, что он не имеет нулевых мод. Тогда соответственно и  $\mathcal{D}_+$  и  $\widehat{\mathcal{D}}_+$  тоже их не имеют. Если, однако, это не так, то в функциональных интегралах (18.17), (19.38) следует исключить интегрирование по ядру  $\text{Ker } \mathcal{D}(A)$ , что приведет к «отбрасыванию» нулевых сомножителей в (19.26). Такая процедура эквивалентна определению детерминанта оператора  $\mathcal{D}$  с нулевыми модами  $\text{Ker } \mathcal{D}$  как

$$\det' \mathcal{D} = \det (\mathcal{D} + P_0),$$

где  $P_0$  — проектор на  $\text{Ker } \mathcal{D}$ . Ввиду  $\text{Ker } \mathcal{D}_+ = \text{Ker } \widehat{\mathcal{D}}_+$  проекторы для (19.19) и (19.37) совпадают.

Наконец, легко видеть, что абсолютная величина  $|\det \widehat{\mathcal{D}}_+(A)|$  калибровочно инвариантна. Действительно, из (19.37) имеем

$$|\det \widehat{\mathcal{D}}_+|^2 = \det \widehat{\mathcal{D}}_+ \det \widehat{\mathcal{D}}_+^* = \det (\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-) \det (-\partial^\mu \partial_\mu),$$

и сравнивая с (19.34), получаем калибровочную инвариантность  $|\det \widehat{\mathcal{D}}_+|$  аналогично (19.35).

Совпадение основных свойств  $\mathcal{D}_+$  и  $\widehat{\mathcal{D}}_+$  (которые определяют эквивалентные квантовые теории, имеют одинаковое ядро и детерминанты которых преобразуются аналогичным образом) позволяет отождествить

$$\det \mathcal{D}_+ = \det \widehat{\mathcal{D}}_+ \quad (19.39)$$

Соотношение (19.39) можно считать определением, смысл которого заключается в замене оператора  $\mathcal{D}_+$ , не имеющего собственных значений, оператором  $\widehat{\mathcal{D}}_+$ , допускающим корректно поставленную задачу на собственные значения.

Как и для оператора Дирака, функциональный интеграл (19.38) можно вычислить, раскладывая  $\psi$  по собственным функциям  $\psi_n$  оператора (19.37)  $\widehat{\mathcal{D}}_+ \psi_n = \lambda_n^+ \psi_n$ ,

$$\det \widehat{\mathcal{D}}_+(A) = \prod_n \lambda_n^+, \quad (19.40)$$

с последующей регуляризацией бесконечного произведения с помощью  $\zeta$ -функции. Важнейшим отличием  $\widehat{\mathcal{D}}_+$  от  $\mathcal{D}_0$  является неэквивариантность (19.37):

$$\widehat{\mathcal{D}}_+(gA) \neq g \widehat{\mathcal{D}}_+(A) g^{-1},$$

несмотря на то, что действие

$$i \int d^4x \psi \mathcal{D}_+ \psi$$

в (19.38) инвариантно относительно (18.3) и

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi_- + g_+.$$

В результате собственные значения  $\lambda_n^+$  и, следовательно, детерминант (19.40) калибровочно неинвариантны. Как мы выяснили, закон преобразования (19.40) задается (19.25), т. е.

$$\det \widehat{\mathcal{D}}_+(gA) = e^{iW_1[A, g]} \det \widehat{\mathcal{D}}_+(A), \quad (19.41)$$

где структура функционала  $W_1[A, g]$  определяется аномалией калибровочного тока (19.3.2): для  $g \approx 1 + \xi^a t_a$

$$\omega_1[A, \xi] = \int d^4x \xi^a(x) \langle \nabla^\mu J_a^\mu \rangle. \quad (19.42)$$

**Алгебраические методы в теории аномалий.** Из различных методов вычисления аномалий (в равной степени сложных технически [55]) мы остановимся на алгебраическом подходе, основанном на получении кохомологий алгебры Ли группы калибровочных преобразований.

Пусть  $\Omega_n(A, g_1, \dots, g_n)$  — произвольная функция  $n$  элементов группы  $G \ni g_1, \dots, g_n$ , а также калибровочного поля  $A$ . Назовем множество таких функций  $\{\Omega_n\}$  пространством  $n$ -коцепей. Введем кограничный оператор  $\Delta$ , отображающий  $\{\Omega_n\} \rightarrow \{\Omega_{n+1}\}$  по правилу

$$\begin{aligned} (\Delta \Omega_n)(A, g_0, g_1, \dots, g_n) &= \Omega_n(g \cdot A, g_1, \dots, g_n) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \Omega_n(A, g_0, \dots, g_i, g_{i-1}, \dots, g_n) + (-1)^{n+1} \Omega_n(A, \dots, g_{n-1}). \end{aligned} \quad (19.43)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Delta^2 = 0$ , и, следовательно, операция (19.43) превращает семейство пространств  $\{\Omega_n\}$ ,  $n=0, 1, \dots, \infty$ , в коцепной комплекс. Как обычно, назовем  $n$ -коцепь  $\Omega_n$   $n$ -коциклом, если  $\Delta \Omega_n = 0$ , и  $n$ -кограницей, если существует такая  $(n-1)$ -коцепь  $\Omega'_{n-1}$ , что  $\Omega_n = \Delta \Omega'_{n-1}$ . Обозначим пространство  $n$ -коциклов

$$Z_\Delta^n = \{\Omega_n | \Delta \Omega_n = 0\},$$

а пространство  $n$ -кограниц

$$B_\Delta^n = \{\Omega_n | \Omega_n = \Delta \Omega'_{n-1}\}.$$

Очевидно, что  $B_\Delta^n \subset Z_\Delta^n$ . Фактор-пространство

$$H_\Delta^n = Z_\Delta^n / B_\Delta^n \quad (19.44)$$

называется  $n$ -й группой когомологии калибровочной группы  $G$ .

Для того чтобы связать введенную конструкцию с аномалиями, рассмотрим повторное калибровочное преобразование детерминанта  $\widehat{\mathcal{D}}_+(A)$ . Подставляя  $A \rightarrow g_0 A$  в (19.41), находим

$$W_1[g_0 A, g] - W_1[A, g g_0] + W_1[A, g_0] = 0. \quad (19.45)$$

Это означает (ср. с (19.43)), что функция  $W_1[A, g]$  является 1-циклом:

$$W_1 \in Z_\Delta^1, \quad \Delta W_1 = 0.$$

Предположим, что  $W_1$  также есть 1-кограница, т. е. существует 0-цепь  $W_0[A]$ , такая, что

$$W_1[A, g] = \Delta W_0[A] = W_0[gA] - W_0[A].$$

где мы использовали определение (19.43). Тогда можно переопределить детерминант вейлевского оператора, добавив к эффективному действию  $I[A]$  контрчлен

$$\Delta I[A] = -W_0[A]$$

так, что

$$e^{i(I[A] + \Delta I[A])} = e^{iW_0[A]} \det \widehat{\mathcal{D}}_+(A)$$

будет калибровочно инвариантным выражением. О такой ситуации мы будем говорить, что аномалия калибровочного тока не является опасной — ее можно устранить перенормировкой действия калибровочного поля. Напротив, если такой 0-цепи не существует ( $W_1 \neq \Delta W_0$ ), то аномалия является истинной и не может быть устранена. Этот факт не зависит от вида регуляризации, используемой для получения конечного значения детерминанта, и приводит к обсуждавшимся выше проблемам в квантовании калибровочных теорий с вейлевскими фермионами.

Таким образом, для истинной аномалии функция фазы  $W_1[A, g]$  в (19.41) является элементом группы когомологий  $H_\Delta^1$ . Если когомологии калибровочной группы известны (их полному вычислению посвящены работы [57, 58]), то тем самым из чисто алгебраических соображений можно установить общую структуру аномалии определителя вейлевского оператора.

Аналогичный анализ можно провести для инфинитезимальной формы фазы (19.42), которая непосредственно связана с аномалией калибровочного тока (19.32). Перепишем (19.42) в виде

$$\omega_1[A, \xi] = \int_M a(\xi, A), \quad (19.46)$$

где дифференциальную форму на пространстве — времени  $M$

$$a(\xi, A) = \frac{\pm i}{24\pi^2} \text{Tr} \left\{ d\xi \wedge \left( A \wedge dA + \frac{1}{2} A \wedge A \wedge A \right) \right\} \quad (19.47)$$

мы будем называть формой аномалии, или просто аномалией. Здесь, как обычно, обозначено

$$\xi = \xi^a(x) t_a, \quad d\xi = d\xi^a(x) t_a.$$

Для упрощения записи далее всюду мы будем опускать символ внешнего произведения в выражениях для внешних форм, построенных как полиномы от  $\xi \in \Omega^0$ ,  $A \in \Omega^1$  и их дифференциалов.

Градуированное векторное пространство

$$\mathcal{A} = \bigoplus_n \mathcal{A}^n$$

с введенными в нем операциями умножения  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  и дифференцирования  $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , такими, что

$$\mathcal{A}^m \mathcal{A}^l \subset \mathcal{A}^{m+l}, \quad d\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{n+1}, \quad d^2 = 0,$$

$$d(a \cdot b) = (da) \cdot b + b \cdot (-1)^n a \cdot db,$$

где  $a \in \mathcal{A}^n$ ,  $b \in \mathcal{A}$ , называется градуированной дифференциальной алгеброй (ГДА). Если произведение ассоциативно  $a(bc) = (ab)c$ , где  $a, b, c \in \mathcal{A}$ , и градуировано коммутативно

$$ab = (-1)^{mb} ba,$$

где  $a \in \mathcal{A}^m$ ,  $b \in \mathcal{A}^n$ , то  $\mathcal{A}$  называется градуированной коммутативной дифференциальной алгеброй (ГКДА).

**Пример 19.3.** Алгебра внешних форм  $\Lambda^*(M)$  на многообразии  $M$  является ГКДА.

Пусть  $\mathcal{A}_{(1)}$  и  $\mathcal{A}_{(2)}$  — произвольные ГДА. Их косым произведением называется ГДА  $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{(1)} \otimes \mathcal{A}_{(2)}$ , в которой умножение определено как

$$(\iota_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (-1)^{\iota_1 b_1} a_1 b_1 \otimes a_2 b_2,$$

где  $a_2 \in \mathcal{A}_{(2)}^m$ ,  $b_1 \in \mathcal{A}_{(1)}^n$ , а дифференциал есть

$$d(\iota_1 \otimes a_2) = d_1 a_1 \otimes a_2 + (-1)^n a_1 \otimes d_2 a_2,$$

где  $a_2 \in \mathcal{A}_{(2)}^n$  и  $d_1, d_2$  — дифференциалы соответственно в  $\mathcal{A}_{(1)}$  и  $\mathcal{A}_{(2)}$ . Градуировка алгебры  $\mathcal{B}$  определяется как

$$\mathcal{B} = \bigoplus_n \mathcal{B}^n, \quad \mathcal{B}^n = \bigoplus_{m=0}^n \mathcal{A}_{(1)}^m \otimes \mathcal{A}_{(2)}^{n-m}.$$

**Пример 19.4.** Алгебра вертикальных форм  $V^*(\mathcal{E})$  на пространстве связностей  $\mathcal{E}$  со значениями в  $\Omega^p(M)$  является косым произведением  $\Omega^*(M)$  на ГКДА вертикальных внешних форм (см. § 18).



где  $a \in \mathcal{A}^n$ ,  $b \in \mathcal{A}$ , называется градуированной дифференциальной алгеброй (ГДА). Если произведение ассоциативно  $a(bc) = (ab)c$ , где  $a, b, c \in \mathcal{A}$ , и градуированно коммутативно.

$$ab = (-1)^{nm} ba,$$

где  $a \in \mathcal{A}^m$ ,  $b \in \mathcal{A}^n$ , то  $\mathcal{A}$  называется градуированной коммутативной дифференциальной алгеброй (ГКДА).

Пример 19.3. Алгебра внешних форм  $\Lambda^*(M)$  на многообразии  $M$  является ГКДА.

Пусть  $\mathcal{A}_{(1)}$  и  $\mathcal{A}_{(2)}$  - произвольные ГДА. Их косым произведением называется ГДА  $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{(1)} \otimes \mathcal{A}_{(2)}$ , в которой умножение определено так

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) = (-1)^{mn} a_1 b_1 \otimes a_2 b_2,$$

где  $a_2 \in \mathcal{A}_{(2)}^n$ ,  $b_1 \in \mathcal{A}_{(1)}^n$ , а дифференциал есть

$$d(a_1 \otimes a_2) = d_1 a_1 \otimes a_2 + (-1)^n a_1 \otimes d_2 a_2,$$

где  $a_i \in \mathcal{A}_{(i)}^n$  и  $d_1, d_2$  - дифференциалы соответственно в  $\mathcal{A}_{(1)}$  и  $\mathcal{A}_{(2)}$ . Градуировка алгебры  $\mathcal{B}$  определяется как

$$\mathcal{B} = \bigoplus_n \mathcal{B}^n, \quad \mathcal{B}^n = \bigoplus_{m=0}^n \mathcal{A}_{(1)}^m \otimes \mathcal{A}_{(2)}^{n-m}.$$

Пример 19.4. Алгебра вертикальных форм  $V^*(C)$  на пространстве связей  $C$  со значениями в  $\Omega^p(M)$  является косым произведением  $\Omega^*(M)$  на ГДА вертикальных внешних форм (см.

§13). Дифференциал на  $V^*(C)$  есть  $d = d_n + s$  - сумма внешнего дифференциала на  $M$  и оператора БРСТ (18.57).

стр. 241-248 В квантовой теории калибровочных полей мы имеем дело с различными функционалами от  $A$  и  $\xi(x)$ . Например, классическое действие  $S[A]$  является инвариантным функционалом от калибровочного поля, тогда как эффективное действие  $I[A]$  (или определитель (19.17)) и аномалия (19.42), (19.46) - неинвариантные функционалы от  $A$  и  $\xi$ . Заметим, что аномалия  $w_1[A, \xi]$  за-

висит от элемента  $\xi(x)$  алгебры Ли группы калибровочных преобразований линейно.

Пусть  $\Gamma^\alpha(\text{Lie } G, C)$  - пространство  $\alpha$ -линейных антисимметричных отображений алгебры Ли группы  $G$  во множество функций  $\Lambda^0(C)$  на пространстве калибровочных потенциалов  $C$ . Элементы  $\psi \in \Gamma^\alpha(\text{Lie } G, C)$  суть функционалы  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_\alpha)(A)$ , которые называются  $\alpha$ -коцепями алгебры  $\text{Lie } G$  со значениями в  $\Lambda^0(C)$ . В комплексе

$$\Gamma^*(\text{Lie } G, C) = \bigoplus_\alpha \Gamma^\alpha(\text{Lie } G, C)$$

определен оператор  $\delta: \Gamma^\alpha \rightarrow \Gamma^{\alpha+1}$ ,

$$\begin{aligned} \delta\psi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\alpha) = & \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i L_C(\xi_i) \psi(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_\alpha) + \\ & + \sum_{0 \leq i < j \leq \alpha} (-1)^{i+j} \psi([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_\alpha), \end{aligned} \quad (19.48)$$

где  $L_C(\xi_i)$  - производная Ли вдоль фундаментального векторного поля  $\Sigma(\xi_i)$  (18.28) на  $C$ . Напомним, что результат применения  $L_C(\xi)$  к функции  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_\alpha) \in \Lambda^0(C)$  равен значению векторного поля на данной функции, т.е.

$$L_C(\xi) \psi(A) = \Sigma(\xi)_A(\psi) = \quad (19.49)$$

$$= \int d^4x \frac{\delta\psi}{\delta A_a^\alpha(x)} (-\nabla_a^\alpha \xi^\alpha) = - \int d^4x \xi^\alpha(x) X_a(x) \psi(A),$$

где мы использовали определение (19.4). Иначе говоря,  $L_C(\xi)$  генерирует бесконечно малые преобразования функционалов на  $C$  под действием калибровочной группы (18.3).

Пример 19.5. Пусть 0-коцепь  $\psi = \psi_0(A) \in \Gamma^0(\text{Lie } G, C)$  - произвольный функционал на  $C$ . Из (19.48) имеем

$$(\delta\psi_0)(\xi) = \delta_\xi \psi_0(A),$$

где  $\delta_\xi$  - инфинитезимальное калибровочное преобразование. В частности, для калибровочно инвариантных функционалов  $\delta\psi_0 = 0$ .

Аналогично для произвольной I-коцепи

$$\psi_1 = \psi_1(\xi, A) \in \Gamma^1(\text{Lie } G, \mathbb{C})$$

из (I9.48), (I9.49) получим

$$(\delta\psi_1)(\xi_0, \xi_1) = \int d^4x \{ \xi_1^a X_a \psi_1(\xi_0, A) - \xi_0^a X_a \psi_1(\xi_1, A) \} - \psi_1([\xi_0, \xi_1], A)$$

В частности, если  $\psi_1 = \delta\psi_0$ , то в силу (I9.5)  $\delta\psi_1 = \delta^2\psi_0 = 0$ .

В общем случае нетрудно видеть, что (I9.48) нильпотентен

$$\delta^2 = 0, \quad (\text{I9.50})$$

и следовательно его можно рассматривать как оператор для комплекса  $\Gamma^*(\text{Lie } G, \mathbb{C})$ . Элементы  $\alpha$ -го порядка, для которых  $\delta\psi_\alpha = 0$ , называются  $\alpha$ -циклами, тогда как точные  $\alpha$ -цепи, для которых  $\psi_\alpha = \delta\psi'_{\alpha-1}$ , называются  $\alpha$ -кограницами. Фактор-пространство

$$H_\delta^\alpha = Z_\delta^\alpha / B_\delta^\alpha \quad (\text{I9.51})$$

именуется  $\alpha$ -ой группой когомологий алгебры Ли калибровочной группы  $G$ . Здесь, как обычно,

$$Z_\delta^\alpha = \{ \psi_\alpha \mid \delta\psi_\alpha = 0 \}$$

- пространство  $\alpha$ -циклов,

$$B_\delta^\alpha = \{ \psi_\alpha \mid \psi_\alpha = \delta\psi'_{\alpha-1} \}$$

- пространство  $\alpha$ -кограниц.

Из рассмотренного выше примера видно, как связать эти когомологии с аномальной калибровочной теорией. Действительно, с учетом (I9.48) уравнение (I9.22) переписывается в виде уравнения на коцепи

$$\delta I[A] = w_1[A, \xi]. \quad (\text{I9.52})$$

Применяя оператор кограницы  $\delta$ , получаем слева 0, и следовательно

$$\delta w_1[A, \xi] = 0, \quad (\text{I9.53})$$

т.е. аномалия  $w_1[A, \xi]$  является I-циклом. Уравнение (I9.53) аналогично (I9.45) (в сущности, это инфинитезимальная форма последнего) и называется условием совместности Весса-Зумино [87].

Упражнение I9.4. Показать прямым вычислением, что аномалия (I9.32), (I9.46) удовлетворяет условию совместности Весса-Зумино

Итак,  $w_1[A, \xi] \in Z_\delta^1$ . Если известно, что к тому же

$$w_1[A, \xi] = \delta w_0[A]$$

(т.е.  $w_1 \in B_\delta^1$ ), то можно переспределить эффективное действие

$$I[A] \rightarrow \tilde{I}[A] = I[A] - w_0[A],$$

которое в силу (I9.52) будет калибровочно инвариантным. Однако, если I-цикл нетривиален  $w_1[A, \xi]$  и следовательно  $w_1[A, \xi] \in H_\delta^1$ , аномалия является истинной и не может быть устранена с помощью перенормировки.

Таким образом, мы выяснили когомологическую природу аномалий:

$$W_1[A, g] \in H_\Delta^1, \quad w_1[A, \xi] \in H_\delta^1$$

и следовательно знание первой группы когомологий группы  $G$  и алгебры Ли  $\text{Lie } G$  полностью определяет структуру истинных аномалий калибровочной теории. Более того, в то время как элементами нулевой группы когомологий  $H^0$  являются все возможные калибровочно инвариантные функционалы, можно показать, что  $H_\delta^2$  принадлежат аномальные (швингеровские) члены в коммутационных соотношениях (I9.I4) [75, 88].

Когомологии  $H_{\mathcal{E}}^{\alpha}$  тесно связаны с рассмотренной в §18 геометрической теорией дуг и BRST преобразований. Комплекс  $\Gamma^*(Lie G, \mathcal{C})$  изоморфен алгебре вертикальных форм  $V^{0,\alpha}(\mathcal{C})$ . Этот факт связан с изоморфизмом алгебры Ли  $Lie G$  и алгебры вертикальных векторных полей на  $\mathcal{C}$ , устанавливаемым с помощью связности  $\omega$  на расслоении  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \eta$  и фундаментальных векторных полей (18.28). Каждой  $\alpha$ -коцепи  $\psi \in \Gamma^{\alpha}(Lie G, \mathcal{C})$  поставим в соответствие  $\alpha$ -форму  $\tilde{\psi} \in V^{0,\alpha}(\mathcal{C})$  по правилу

$$\tilde{\psi}(X_1, \dots, X_{\alpha}) = \psi(\omega(X_1), \dots, \omega(X_{\alpha})),$$

где  $X_i \in T(\mathcal{C})$ . Из определения связности  $\omega$  (18.30) следует, что  $\tilde{\psi}$  - вертикальная форма (т.е. она обращается в 0, если хотя бы один из векторов  $X_i$  горизонтальный). Обратно,  $\alpha$ -форме  $\varphi \in V^{0,\alpha}(\mathcal{C})$  поставим в соответствие  $\alpha$ -коцепь

$$\hat{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha}) = \varphi(\Sigma(\xi_1), \dots, \Sigma(\xi_{\alpha})).$$

Упражнение 19.5. Доказать, что при данном изоморфизме кограничный оператор  $\delta$  переходит в вертикальный дифференциал  $d_V$  на  $V^{0,\alpha}(\mathcal{C})$ .

Комплекс  $\Gamma^*(Lie G, \mathcal{C})$  (и соответствующие когомологии  $H_{\mathcal{E}}^{\alpha}$ ) содержит гораздо больше информации, чем это нужно в квантовой теории калибровочных полей. Действительно, в последней встречаются только локальные функционалы от  $A$  и  $\xi$ , поэтому рассмотрим подпространство

$$\Gamma_{loc}^*(Lie G, \mathcal{C}) = \bigoplus_{\alpha} \Gamma_{loc}^{\alpha}(Lie G, \mathcal{C}),$$

где элементами  $\psi \in \Gamma_{loc}^{\alpha}(Lie G, \mathcal{C})$  являются локальные  $\alpha$ -коцепи вида

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) = \int_M \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) \quad (19.54)$$

с некоторой  $\alpha$ -формой  $\varphi$  на  $M$ , являющейся полиномом от  $A$  и

его производных.

Пусть  $\mathcal{B}^{p,\alpha}$  - пространство отображений  $\mathcal{C}^{\infty}(Lie G)^{\alpha}$  в  $\Lambda^p(M)$  ( $p$ -формы на пространстве-времени  $M$ ), которые  $\alpha$ -линейны и антисимметричны по  $(Lie G)^{\alpha}$  и полиномиальны по  $\mathcal{C}$ . Элементы  $\varphi \in \mathcal{B}^{p,\alpha}$  отображают набор  $(A, \xi_1, \dots, \xi_{\alpha})$  в  $p$ -форму на  $M$

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) = \frac{1}{p!} \psi_{\mu_1 \dots \mu_p}(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

причем, это отображение локально, т.е.

$$supp \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) \subset supp \xi_1 \cap \dots \cap supp \xi_{\alpha}, \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$

Введем в

$$\mathcal{B}^{*,*} = \bigoplus_{p,\alpha} \mathcal{B}^{p,\alpha}$$

операцию умножения

$$\mathcal{B}^{p,\alpha} \times \mathcal{B}^{q,\beta} \rightarrow \mathcal{B}^{p+q,\alpha+\beta} :$$

$$(\varphi \varphi')(A, \xi_1, \dots, \xi_{\alpha}, \xi_{\alpha+1}, \dots, \xi_{\alpha+\beta}) =$$

$$= \frac{(-1)^{q\alpha}}{(\alpha+\beta)!} \sum_{\pi} (-1)^{\epsilon(\pi)} \varphi(A, \xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(\alpha)}) \wedge \varphi'(A, \xi_{\pi(\alpha+1)}, \dots, \xi_{\pi(\alpha+\beta)}), \quad (19.55)$$

где сумма берется по всем перестановкам  $\pi$  индексов  $1, 2, \dots, \alpha+\beta$ ,  $\varphi \in \mathcal{B}^{p,\alpha}$ ,  $\varphi' \in \mathcal{B}^{q,\beta}$ . Кроме того, определим в  $\mathcal{B}^{*,*}$  операторы дифференцирования  $d, s, \hat{d}$ :

$$d: \mathcal{B}^{p,\alpha} \rightarrow \mathcal{B}^{p+1,\alpha},$$

$$(d\varphi)(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A) = d(\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{\alpha})(A)), \quad (19.56)$$

$$s: \mathcal{B}^{p,\alpha} \rightarrow \mathcal{B}^{p,\alpha+1},$$

$$(s\varphi)(\xi_0, \dots, \xi_{\alpha})(A) = \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i L_{\mathcal{C}}(\xi_i) \varphi(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{\alpha}) + \quad (19.57)$$

$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq \alpha} (-1)^{i+j} \varphi([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_{\alpha}),$$

$$\hat{d}: \mathcal{B}^{p,\alpha} \rightarrow \mathcal{B}^{p+1,\alpha+1},$$

$$\hat{d} = d + s, \quad (I9.58)$$

где  $\varphi \in \mathcal{B}^{p,\alpha}$ . Как нетрудно видеть,  $\mathcal{B}^{*,*}$  с введенными операциями (I9.55)–(I9.58) являются ГКДА. Более того, это носое произведение ГКДА внешних форм на  $M$  (с дифференциалом  $d$ ) на ГКДА косых форм на  $Lie G$  (с дифференциалом  $s$ ).

Упражнение I9.6. Доказать следующие свойства операторов (I9.56)–(I9.58):

$$s^2 = d^2 = ds + sd = \hat{d}^2 = 0.$$

Несколько слов о терминологии. Будем говорить, что элемент из  $\mathcal{B}^{p,\alpha}$  имеет бистепень  $(p,\alpha)$  и полную степень  $(p+\alpha)$ . При этом  $p$ -его обычная степень как дифференциальной формы на  $M$ , а  $\alpha$  называется духовым числом. Последнее связано с тем что в силу (I8.57) и с учетом рассматривавшихся выше изоморфизмов оператор (I9.57) является оператором БРСТ (и поэтому мы его обозначаем той же буквой). Компоненты калибровочного поля  $A^a = A^a_\mu dx^\mu$  естественным образом интерпретируются как элементы  $A^a \in \mathcal{B}^{1,0}$ , тогда как геометрическое духовое поле  $\omega^a$  (форма Маурера–Картана (§I8)), рассматриваемое как тождественное отображение алгебры Ли  $\omega^a(\xi) = \xi^a$ , есть элемент из  $\mathcal{B}^{0,1}$ .

Легко видеть, что действие (I9.57) на компоненты  $A$  и  $\omega$  воспроизводит БРСТ преобразования (I8.5I):

$$sA^a_\mu = -\frac{A}{\nabla_\mu} \omega^a, \quad (I9.59.1)$$

$$s\omega^a = -\frac{1}{2} f^a_{bc} \omega^b \omega^c. \quad (I9.59.2)$$

Свойство  $\alpha$ -линейности элементов  $\mathcal{B}^{p,\alpha}$  позволяет рассматривать их как однородные "полиномы" степени  $\alpha$  по компонентам духового поля  $\omega^a$ :

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_\alpha) = \varphi_{a_1 \dots a_\alpha} \xi_1^{a_1} \dots \xi_\alpha^{a_\alpha} = (\varphi_{a_1 \dots a_\alpha} \omega^{a_1} \dots \omega^{a_\alpha})(\xi_1, \dots, \xi_\alpha),$$

т.е.  $\varphi \in \mathcal{B}^{*,\alpha}$  представляется в виде

$$\varphi = \varphi_{a_1 \dots a_\alpha} \omega^{a_1} \dots \omega^{a_\alpha}.$$

По этой причине степень  $\alpha$  и называется духовым числом.

Сравнивая (I9.48) с (I9.57), из (I9.54) находим

$$\delta \int_M \varphi(\xi_1, \dots, \xi_\alpha) = \int_M s\varphi(\xi_1, \dots, \xi_\alpha), \quad (I9.60)$$

где  $\varphi \in \mathcal{B}^{*,\alpha}$ . Уравнение (I9.60) позволяет связать когомологии  $H^*_{Lie G}$  комплекса  $\Gamma^*_{Lie G} \subset \Gamma^*(Lie G, \mathbb{C})$  с когомологиями ГКДА  $\mathcal{B}^{*,*}$ . Действительно, если каноническая форма  $\int_M \varphi$  замкнута, т.е.

$$\delta \int_M \varphi = 0,$$

то в силу (I9.60)

$$\int_M s\varphi = 0,$$

т.е. существует такая форма  $\varphi' \in \mathcal{B}^{3,\alpha+1}$ , что

$$s\varphi + d\varphi' = 0.$$

Далее, если  $\int_M \varphi$  точная, т.е. существует форма  $\int_M \psi$  такая, что

$$\int_M \varphi = \int_M \delta \psi,$$

то из (I9.60) находим, что существует форма  $\psi' \in \mathcal{B}^{3,\alpha}$  такая, что

$$\varphi = s\psi + d\psi'.$$

Форма  $\varphi^a_\rho \in \mathcal{B}^{p,\alpha}$  называется  $s$ -коциклом по модулю  $d$ , если найдется  $\varphi'^{\alpha+1}_{\rho-1}$  такая, что

$$s\varphi + d\varphi' = 0.$$

Аналогично,  $\varphi^a_\rho$  называется  $s$ -кограницей по модулю  $d$ , если существуют  $\varphi'^{\alpha-1}_{\rho-1}$  и  $\varphi''^{\alpha}_{\rho-1}$  такие, что

$$\varphi = s\varphi' + d\varphi''.$$

Пространство кограниц принадлежит пространству коцепей:

$B_{S(d)}(\mathcal{B}^{p,\alpha}) \subset Z_{S(d)}(\mathcal{B}^{p,\alpha})$ . Обозначим  $S$  по модулю  $d$  как  $s(d)$ . Классы  $S$ -коциклов по модулю  $d$ , не являющихся  $S$ -кограницами по модулю  $d$ , являются элементами группы  $S$ -когомологий по модулю  $d$ :

$$H_{S(d)}(\mathcal{B}^{p,\alpha}) = Z_{S(d)}(\mathcal{B}^{p,\alpha}) / B_{S(d)}(\mathcal{B}^{p,\alpha}). \quad (I9.61)$$

Уравнение (I9.60) устанавливает изоморфизм когомологий [73]

$$H_{\delta, \text{лок}}^x = H_{S(d)}(\mathcal{E}^{p,\alpha}), \quad (I9.62)$$

где  $n = \dim M = 4$ .

Таким образом, задача определения общей структуры аномалии калибровочного тока (I9.46) свелась к алгебраической задаче вычисления  $S$ -когомологий по модулю  $d$ , а конкретно, группы  $H_{S(d)}(\mathcal{B}^{4,1})$ , изоморфной первой группе локальной  $\delta$ -когомологии  $H_{\delta, \text{лок}}^1 \ni \omega, [A, \xi]$ . Все  $S$ -когомологии по модулю  $d$  были вычислены в [85]. Основным приемом является использование формулы обобщенной трансгрессии, позволяющей получить  $S$ -когомологии по модулю  $d$  из  $S$ -когомологий.

Рассмотрим  $I$ -параметрическое семейство элементов  $\mathcal{B}^{*,*}$  вида [88]

$$A_t^a = tA^a + \omega^a, \quad (I9.63)$$

где  $t$  - произвольный непрерывный параметр,  $A$  -  $I$ -форма калибровочного поля (элемент  $\mathcal{B}^{1,0}$ ),  $\omega$  - духовое поле (элемент  $\mathcal{B}^{0,1}$ ). Форма (I9.63) имеет полную степень  $I$ . Дальнейшие преобразования удобно проводить в более компактной матричной записи. Поэтому введем  $A_t = A_t^a t_a$  и вычислим тензор напряженности "связности" (I9.63)

$$F_t = \hat{d}A_t + A_t^2, \quad (I9.64)$$

здесь  $\hat{d}$  - полный дифференциал (I9.58) в ГКДА  $\mathcal{B}^{*,*}$ . Подставляя (I9.63) в (I9.64), находим (с учетом (I9.59))

$$F_t = tdA + t^2A^2 + (1-t)d\omega. \quad (I9.65)$$

Введем ковариантную производную "связности" (I9.63)

$$\mathcal{D}_t = \hat{d} + [A_t, \cdot], \quad (I9.66)$$

где  $[ \cdot, \cdot ]$  обозначает коммутатор, или антикоммутатор в зависимости от четности (степени в  $\mathcal{B}^{*,*}$ ) объекта, к которому применяется ковариантная производная. Дифференцируя (I9.64) по  $t$ , имеем

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = \mathcal{D}_t \frac{\partial A_t}{\partial t}. \quad (I9.67)$$

Элементами локальной  $\delta$ -когомологии  $H_{\delta, \text{лок}}^*$  являются симметричные инвариантные компоненты от напряженности калибровочного поля

$$P(F_{(1)}, \dots, F_{(n)}). \quad (I9.68)$$

Общую структуру (I9.68) можно выписать, рассмотрев, например,

$$P_{(n)} = \text{Tr}(F)^n$$

- след  $n$ -ой степени напряженности калибровочного поля. Произвольный инвариантный полином (I9.68) очевидным образом можно построить как сумму произведений  $P_{(n)}$ . Легко видеть, что формы (I9.68) замкнуты относительно обоих кограницных операторов  $d$  и  $s$ :

$$dP(F^n) = 0, \quad sP(F^n) = 0. \quad (I9.69)$$

Упражнение I9.7. Доказать (I9.69). Указание: доказать этот

факт для элементарных форм  $P_{(n)}$ , воспользовавшись тождеством Бианки

$$\overset{A}{\nabla} F = dF + [A, F] = 0.$$

Формулу трансгрессии, позволяющую выразить  $S$ -когомологии по модулю  $d$  через  $S$ -когомологии, можно получить рассматривая симметричные полиномы (I9.69) как функции  $F_t$ , задаваемых (I9.64), (I9.65). Заметим, что при  $t=0$ , имеем  $F_0 = d\omega$  тогда как при  $t=1$ ,  $F_1 = F$ . Итак, пусть  $P = P(F_t, \dots, F_t)$  — полином  $n$ -ой степени от  $F_t$ . Его производная по  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}(F_t) = nP\left(\frac{\partial F_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right).$$

Отсюда, используя (I9.67) и тождество Бианки для "обобщенной связности"  $\mathcal{D}_t F_t = 0$ , получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}(F_t) = n\hat{d}P\left(\frac{\partial A_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right),$$

а интегрируя по  $t$  от 0 до 1, окончательно найдем

$$P(F^n) - P((d\omega)^n) = n\hat{d}\int_0^1 dt P(A, (tdA + t^2A^2 + (1-t)d\omega)^{n-1}). \quad (I9.70)$$

Эта формула является обобщением известной формулы гомологии Картана (или Чжэня-Вейля) [89]. Разложим правую часть (I9.70) по степеням  $\omega$

$$n\int_0^1 dt P(A, (tdA + t^2A^2 + (1-t)d\omega)^{n-1}) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A).$$

Верхний индекс у  $Q$  обозначает ее духовое число (степень как формы на  $Lie G$ ), тогда как нижний индекс обозначает ее степень как формы на пространстве-времени. Из (I9.70) находим в явном виде

$$Q_{2n-1-\alpha}^\alpha = \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha-1)!} \int_0^1 dt (1-t)^\alpha P(A, (tdA + t^2A^2)^{n-\alpha-1}, (d\omega)^\alpha). \quad (I9.71)$$

Эта формула справедлива для  $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ .

Можно, однако, пойти дальше и получить разложение полинома  $P(F^n)$  по степеням духового числа больше  $n-1$ . Для этого рассмотрим другое семейство 1-форм [88]

$$\tilde{A}_t = t\omega, \quad (I9.72)$$

для которого напряженность (I9.64) имеет вид

$$\tilde{F}_t = \hat{d}\tilde{A}_t + A_t^2 = t d\omega + (t^2 - t)\omega^2. \quad (I9.73)$$

При  $t=0$  очевидно  $\tilde{F}_0 = 0$ , однако при  $t=1$ ,  $\tilde{F}_1 = d\omega$ .

Возьмем тот же самый полином  $P$ , но аргументами которого уже являются (I9.73). Аналогичным образом вычислив его производную, найдем

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\tilde{F}_t) = n\hat{d}P\left(\frac{\partial \tilde{A}_t}{\partial t}, \tilde{F}_t^{n-1}\right).$$

(проверьте, что тождество Бианки по-прежнему справедливо), и, интегрируя от 0 до 1, получим

$$P((d\omega)^n) - P(0) = n\hat{d}\int_0^1 dt P(\omega, (td\omega + (t^2-t)\omega^2)^{n-1}). \quad (I9.74)$$

Опять разложим правую часть (I9.74) по степеням  $\omega$ ,

$$n\int_0^1 dt P(\omega, (td\omega + (t^2-t)\omega^2)^{n-1}) = \sum_{\alpha=n}^{2n-1} Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A),$$

где теперь из (I9.74) имеем

$$Q_{2n-1-\alpha}^\alpha = \frac{(-1)^{\alpha-n} n!(n-1)!}{\alpha!(2n-\alpha-1)!} P(\omega, (d\omega)^{2n-1-\alpha}, \omega^{2(\alpha-n)}) \quad (I9.75)$$

(интеграл по  $t$  явно вычисляется). Складывая (I9.70) и (I9.74), получаем окончательно

$$P(F^n) = (d+s) \sum_{\alpha}^{2n-1} Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A). \quad (I9.76)$$

Данное уравнение в компактной форме содержит информацию

(проверьте, что тождество Бишки по-прежнему справедливо) и, интегрируя от 0 до 1, получим

$$P(d\omega)^n - P(0) = n \int_0^1 dt P(\omega, (t d\omega + (1-t)\omega^2)^{n-1}). \quad (19.74)$$

Опять разложим правую часть (19.74) по степеням  $\omega$ :

$$n \int_0^1 dt P(\omega, (t d\omega + (1-t)\omega^2)^{n-1}) = \sum_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha \leq n}}^{2n-1} Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A),$$

где теперь из (19.74) имеем

$$Q_{2n-1-\alpha}^\alpha = \frac{(-1)^{n-\alpha} n! (n-1)!}{\alpha! (2n-\alpha-1)!} P(\omega, (d\omega)^{2n-1-\alpha}, \omega^{2(n-\alpha)}) \quad (19.75)$$

(интеграл по  $t$  явно вычисляется). Складывая (19.70) и (19.74), получаем окончательно

$$P(F^n) = (d+s) \sum_{\alpha=0}^{2n-1} Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A). \quad (19.76)$$

Данное уравнение в компактной форме содержит информацию об  $s$ -когомологиях по модулю  $d$ . Действительно, распишем (19.76) как систему уравнений одинаковой степени  $\alpha$ :

$$P = d Q_{2n-1}^0, \quad (19.77.1)$$

$$s Q_{2n-1}^0 + d Q_{2n-2}^1 = 0, \quad (19.77.2)$$

$$s Q_{2n-1}^1 + d Q_{2n-3}^2 = 0, \quad (19.77.3)$$

$$s Q_{2n-1-\alpha}^\alpha + d Q_{2n-2-\alpha}^{\alpha+1} = 0, \quad (19.77.4)$$

$$s Q_0^{2n-1} = 0. \quad (19.77.5)$$

Из (19.77) ясно, что любая из форм  $Q_{2n-1-\alpha}^\alpha(\omega, A)$  является нетривиальным элементом в соответствующей группе когомологии  $H_{s(d)}(\mathcal{B}^{2n-1-\alpha, \alpha})$  при  $\alpha=0, 1, \dots, 2n-1$ . Действительно, по определению все эти формы суть  $s$ -ковиклы по модулю  $d$ . Однако они не являются  $s$ -кограницами по модулю  $d$ . Проверим это для  $Q_{2n-2}^1$ . Допустим, что это  $s$ -кограница по модулю  $d$ , тогда существуют формы  $\varphi_{2n-2}^0$  и  $\psi_{2n-3}^1$ , такие, что

$$Q_{2n-2}^1 = s\varphi_{2n-2}^0 + d\psi_{2n-3}^1$$

Подставляя это выражение в (19.77.3), получим

$$d(-s\varphi_{2n-3}^1 + Q_{2n-3}^2) = 0,$$

откуда

$$Q_{2n-3}^2 = s\varphi_{2n-3}^1 + d\chi_{2n-4}^2.$$

Таким образом, предположение о том, что  $Q_{2n-2}^1$  является кограницей, приводит к выводу, что и  $Q_{2n-3}^2$  тоже кограница. Рассуждение можно (многократно) повторить, доказав тем самым, что все  $Q_{2n-1-\alpha}^\alpha$  для  $\alpha=1, \dots, 2n-1$  являются кограницами.

Рассмотрим теперь уравнение (19.77.2). Подставив сюда

$$Q_{2n-2}^1 = s\varphi_{2n-2}^0 + d\varphi_{2n-3}^1,$$

найдем

$$s(Q_{2n-1}^0 - d\varphi_{2n-2}^0) = 0.$$

Отсюда

$$Q_{2n-1}^0 = d\varphi_{2n-2}^0 + s\chi_{2n-1}^0,$$

поскольку эти формы имеют степень  $\alpha=0$  (меньшей степени нет). Подставляя это в (19.77.2), получаем, что

$$P = sP', \quad P' = -d\chi_{2n-1}^0.$$

Тем самым  $P$  является  $s$ -кограницей, что противоречит тому, что  $P$  — нетривиальный элемент  $s$ -когомологии. Таким образом, уравнения (19.76), (19.77) устанавливают изоморфизм групп когомологий

$$H_s(\mathbb{B}^{2n-1,0}) \cong H_{s(d)}(\mathcal{B}^{2n-1,0-\alpha}); \quad (19.78)$$

так что по произвольному элементу  $s$ -когомологий — инвариантному симметричному полиному  $P(F^n)$  — с помощью (19.71) и (19.75) получаем элементы  $s$ -когомологий по модулю  $d$ .

**Утверждение 19.8.** Пусть  $\omega = \omega^0$  и  $P(F^2) = c \operatorname{Tr} F^2$ , где  $c = \text{const}$ . Найти полиномы  $Q$ . Указание: для  $\alpha=0, 1$  использовать (19.71), для  $\alpha=2, 3$  — (19.75). Ответ:

$$Q_0^0 = c \operatorname{Tr} \left( A d A + \frac{2}{3} A^3 \right),$$

$$Q_{\frac{1}{2}} = c \operatorname{Tr} (A d \omega),$$

$$Q_1^2 = c \operatorname{Tr} \omega d \omega,$$

$$Q_0^3 = -\frac{c}{3} \operatorname{Tr} \omega^3.$$

**Упражнение 19.9.** Вычислить полиномы  $Q$  для  $n=3$  и  $P(F^3) = c \text{Tr} F^3$ ,  $c = \text{const}$ . Ответ:

$$Q_5^0 = c \text{Tr} \left[ A(dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 dA + \frac{3}{5} A^5 \right],$$

$$Q_4^1 = \frac{c}{2} \text{Tr} [(AdA + dAA + A^3) d\omega],$$

$$Q_3^2 = c \text{Tr} [A(d\omega)^2],$$

$$Q_2^3 = c \text{Tr} [\omega(d\omega)^2],$$

$$Q_1^4 = -\frac{c}{2} \text{Tr} [\omega^3 d\omega],$$

$$Q_0^5 = \frac{c}{10} \text{Tr} \omega^5.$$

Выше было показано, что истинные аномалии в 4-мерном пространстве — времени являются элементами группы когомологий  $H_{4-1}(\mathcal{B}^{4,1})$ , где  $4 = \dim M$ ,  $1$  — дѹховое число. Изоморфизм (19.78) редуцирует задачу к рассмотрению симметричных инвариантных полиномов 3-й степени по  $F$  с последующим выделением из трансгрессии (19.76) членов  $Q_4^1$ . Последнее составляет содержание упражнения 19.9, откуда мы видим, что  $Q_4^1 = a(\xi, A)$  по модулю  $d$  (см. (19.47)) при

$$c = \pm \frac{i}{24\pi^3}.$$

*Когомологический метод позволяет определить общую структуру калибровочной аномалии с точностью до коэффициента  $c$ , который должен фиксироваться независимым образом. Проще всего это сделать с помощью прямого вычисления аномальных диаграмм, но существует также и чисто геометрическое построение, основанное на теореме об индексе [62].*

Мы завершим обсуждение алгебраического подхода несколькими замечаниями. Первое из них касается технической стороны. Всюду в данном параграфе мы фактически предполагали, что расслоение  $P(M, G)$ , на котором калибровочные поля  $A$  являются связностями, топологически тривиально. В этом случае квантовую теорию можно строить над тривиальным классическим вакуумом  $A_{(0)} = 0$ . Однако в общем случае в качестве классического фона следует выбирать некоторую нетривиальную связность  $A_{(0)}$ , и тогда аномалии будут зависеть от последней  $\omega_1 = \omega[A_{(0)}; A, \xi]$ . Все описанные выше понятия и конструкции допускают естественное обобщение [61] для  $A_{(0)} \neq 0$ , которое мы не рассматриваем из чисто технических соображений, чтобы не усложнять рассуждений.

Второе замечание касается роли полиномов  $Q^{\alpha_{2n-1-\alpha}}$  в квантовой теории калибровочных полей. Как нетрудно видеть, при  $\alpha=0$  это все что имеет, как выразившиеся характеристические классы Чженя — Саймона, позволяющие выразить формы Чженя (Понтрягина)  $\text{Tr} F^n$  как дифференциал от  $(2n-1)$ -формы. При  $\alpha=1$  полиномы  $Q$  дают выражение для аномалий в пространстве соответствующей размерности:  $Q_4^1$  есть аномалия в 2-мерном пространстве [55].  $Q_4^1$ , как мы видели, есть аномалия в 4-мерном  $M$ , и вообще  $Q_{2n}^1$  дает выражение для аномалии в  $2n$ -мерном пространстве — времени. Далее,  $\alpha=2$  формы описывают аномальные (швингеровские) члены в коммутационных соотношениях для генераторов калибровочной группы. В этом легко убедиться, сравнивая  $Q_3^2$  с (19.14) в 4-мерном  $M$ , то же справедливо для  $Q_1^2$  в 2-мерном пространстве — времени. Роль остальных полиномов при  $\alpha \geq 3$  пока неясна.

**Топологическая интерпретация аномалий.** Перейдем теперь к выяснению топологического смысла аномалии. Как мы увидим, решающее значение здесь имеет топология калибровочной группы

$$G = \prod_x G_x.$$

Поэтому сначала мы рассмотрим некоторые свойства семейств калибровочных преобразований (т. е. отображений пространств параметров в  $G$ ). Пусть  $N$  — конечномерное ( $\dim N = k$ ) пространство параметров  $\theta^\alpha = \{\theta^1, \dots, \theta^k\} \in N$  и  $g(\theta^\alpha, x^\mu) \in G$  (отображение  $M \times N \rightarrow G$ ) — произвольное  $k$ -параметрическое семейство калибровочных преобразований. Обозначим

$$\bar{A}(\theta, x) = g(\theta, x) A(x) g(\theta, x)^{-1} + g(\theta, x) dg(\theta, x)^{-1}, \quad (19.79.1)$$

$$\bar{\omega}(\theta, x) = g(\theta, x) d_\theta g(\theta, x)^{-1}, \quad (19.79.2)$$

где

$$d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

— обычный внешний дифференциал на  $M$ , а

$$d_\theta = d\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$$

— внешний дифференциал на  $N$ . Очевидным образом  $\bar{A}$  и  $\bar{\omega}$  можно рассматривать как  $(1, 0)$ - и  $(0, 1)$ -формы на произведении  $M \times N$ , или, иначе, как элементы ГДА

$$\mathcal{B} = \Lambda^*(M) \otimes \Lambda^*(N)$$

с полным дифференциалом

$$\bar{d}^2 = d + d_\theta \quad (19.80)$$



Имеют место соотношения

$$\bar{d} = d^2 = d_0^2 = dd_0 + d_0d = 0.$$

Заметим, что обе формы

$$\bar{A} = \bar{A}_\mu(\theta, x) dx^\mu + \bar{\omega}_\alpha(\theta, x) d\theta^\alpha$$

являются матричными, принимающими значения в алгебре Ли группы  $G$ . Подействуем дифференциалом  $d_0$  на  $\bar{A}$  и  $\bar{\omega}$ . Непосредственно из определений (19.79) получаем

$$d_0\bar{A} = -d_0\bar{\omega} - \bar{A}d_0 - d_0\bar{A}, \quad (19.81.1)$$

$$d_0\bar{\omega} = -\bar{\omega}^2. \quad (19.81.2)$$

Сравнивая (19.81) с (19.59), видим, что алгебра, порожденная полями (19.79) с дифференциалом  $d_0$ , является реализацией БРСТ-алгебры с оператором  $s = d_0$ .

Определим обобщенную связность

$$\mathcal{B} = \bar{A} + \bar{\omega} = gAg^{-1} + g\bar{d}g^{-1} = g(\theta, x)A(x)g(\theta, x)^{-1} + g(\theta, x)(d + d_0)g(\theta, x)^{-1}. \quad (19.82)$$

С помощью (19.81) находим, что соответствующая форма кривизны имеет вид

$$\mathcal{F} = \bar{d}\mathcal{K} + \mathcal{K}^2 = (d + d_0)(\bar{A} + \bar{\omega}) + (\bar{A} + \bar{\omega})^2 = gFg^{-1}, \quad (19.83)$$

где  $F = dA + A^2$  — обычная 2-форма (на  $M$ ) напряженности калибровочного поля  $A(x)$ . Из ковариантности последней вытекает, что

$$\bar{F} = d\bar{A} + \bar{A}^2 = gFg^{-1}. \quad (19.84)$$

Рассмотрим произвольный симметричный инвариантный полином степени  $n$  от  $F$ :  $P = P(F^n)$ . Выше с учетом формулы трансгрессии (19.76) мы получили, что существует  $(2n-1)$ -форма от  $A$ , такая, что  $P = dQ_{2n-1}(A)$  (см. формулу (19.77.1)). Заметим, однако, что соотношения между  $A$ ,  $F$ ,  $d$  полностью эквивалентны соотношениям между  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\bar{d}$ . Ясно поэтому, что подстановка в  $P$  вместо  $F$  формы  $\mathcal{F}$  приводит к аналогичной связи

$$P(\mathcal{F}^n) = (d + d_0)Q_{2n-1}\mathcal{K}, \quad (19.85)$$

в чем можно убедиться прямым вычислением. Структура формы  $Q_{2n-1}(\mathcal{A})$  определяется формулой (19.71), в которой надо положить  $\alpha = 0$  и заменить  $d \rightarrow \bar{d}$ ,  $A \rightarrow \mathcal{A}$ . Мы опустим верхний индекс 0 у  $Q_{2n-1}$ , так как в (19.71) — (19.77) он обозначает духовую степень соответствующей формы, однако полином  $Q_{2n-1}(\mathcal{A})$  содержит духовое поле в  $\mathcal{A} = \bar{A} + \bar{\omega}$  в произвольных степенях. В явном виде из (19.71) имеем

$$Q_{2n-1}(\mathcal{A}) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} d[P(A)(\bar{d}\mathcal{K} + F^2A^2)^{n-1}] = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-1-m)!(2n-1-m)} P((\bar{d}\mathcal{K})^m, \mathcal{K}^{2^{n-1}-2n}). \quad (19.86)$$

Используем теперь тот факт, что  $\bar{A}$ ,  $\bar{\omega}$  и  $d_0$  реализуют структурную БРСТ-алгебру. Следиствием этого является применимость формул (19.83) — (19.77) к симметричным полиномам от (19.84). В частности, (19.76) примет вид

$$P(\mathcal{F}^n) = (d + d_0) \sum_{\alpha=0}^{2n-1} Q_{2n-1-\alpha}(\bar{\omega}, \bar{A}). \quad (19.87)$$

где полиномы  $Q$  известны: достаточно в (19.71) и (19.75) заменить  $\omega$  на  $\bar{\omega}$ ,  $A$  на  $\bar{A}$ .

Полином (19.86) также можно разложить по степеням  $\bar{\omega}$ :

$$Q_{2n-1}(\mathcal{K}) = Q_{2n-1}(\bar{A} + \bar{\omega}) = \sum_{\alpha=0}^{2n-1} \tilde{Q}_{2n-1-\alpha}^{\alpha}(\bar{\omega}, \bar{A}). \quad (19.88)$$

Поскольку в силу (19.83) и (19.84) для инвариантных полиномов

$$P(F^n) = P(\bar{F}^n) = P(\mathcal{F}^n),$$

получаем, что формулы (19.85), (19.88) и (19.87) описывают трансгрессию одних и тех же инвариантных форм  $P$  двумя различными способами. Отличие с коhomологической точки зрения отличие  $\tilde{Q}$  от  $Q$  несущественно. Легко видеть, что разность  $\tilde{Q}_{2n-1-\alpha}^{\alpha} - Q_{2n-1-\alpha}^{\alpha}$  является  $\delta$ -кограницей по модулю  $d$  для любого  $\alpha$ . При этом

$$\tilde{Q}_{2n-1}^0(\bar{A}) = Q_{2n-1}^0(\bar{A}),$$

$$\tilde{Q}_0^{2n-1}(\bar{\omega}) = Q_0^{2n-1}(\bar{\omega}).$$

**Упражнение 19.10.** Доказать следующие тождества:

$$Q_{2n-1}^0(\bar{A}) = Q_{2n-1}^0(A) + k_n P[gdg^{-1}]^{2^{n-1}-1} + d\varphi_{2n-1}, \quad (19.89)$$

$$Q_{2n-1}(\mathcal{K}) = Q_{2n-1}^0(A) + k_n P[g(d + d_0)g^{-1}]^{2^{n-1}-1} + (d + d_0)\tilde{\varphi}_{2n-1}, \quad (19.90)$$

где  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  — некоторые формы и

$$k_n = \sum_{m=0}^{n-1} (1)^m \frac{n!}{m!(n-1-m)!(2n-1-m)}.$$

Указание: формулы (19.89), (19.90) определяют закон преобразования полиномов  $Q_{2n-1}^g(A)$  под действием калибровочной группы для  $A \rightarrow gA$ , где  $g = g(x)$  или  $g = g(x, \theta)$  соответственно.

Для выяснения топологического смысла аномалии заметим, что детерминант вейлевского оператора  $\mathcal{D}_+(A)$  представляет комплексное число каждой точке  $A$  пространства  $\mathcal{C}$  калибровочных потенциалов. Легко видеть, что  $\mathcal{C}$  является стягиваемым, т. е.  $\pi_n(\mathcal{C}) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тем самым функция

$$\det \mathcal{D}_+(A) = \det \hat{\mathcal{D}}_+(A)$$

с геометрической точки зрения есть сечение тривиального комплексного линейного расслоения над  $\mathcal{C}$ . Однако  $\mathcal{C}$  является главным расслоением над  $\eta = \mathcal{C}/G$ , топология которого, как мы видим, определяется калибровочной группой. Под действием  $\mathcal{D}_+$  вейлевский детерминант меняет фазу, и следовательно,  $\det \mathcal{D}_+$  можно интерпретировать как сечение  $U(1)$  расслоения над  $\eta$ . Обозначим это расслоение  $L = \det(\text{ind } \mathcal{D}_+)$ , оно называется детерминантным расслоением [63, 64]. Покажем, что топологическое содержание аномалии заключается в том, что комплексное линейное расслоение  $L$  (ассоциированное с  $\mathcal{C} \rightarrow \eta$ ) является топологически нетривиальным [62, 64]. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть ограничение  $L$  на произвольную нестягиваемую 2-сферу  $S^2 \subset \mathcal{C}$ . Существование таких сфер обеспечивается изоморфизмом гомотопических групп

$$\pi_1(G) = \pi_2(\eta), \quad (19.91)$$

вытекающим, например, из гомотопической последовательности

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_{k+1}(\eta) \rightarrow \pi_k(G) \rightarrow \pi_k(\mathcal{C}) \rightarrow \dots$$

для расслоения  $\mathcal{C} \rightarrow \eta$ . Поскольку  $\mathcal{C}$  стягиваемо (в частности,  $\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_2(\mathcal{C}) = 0$ ), откуда получаем (19.91). Нам будет удобно построить этот изоморфизм в явном виде.

Пусть  $g(\theta, x)$  — однопараметрическое семейство калибровочных преобразований, причем

$$g(0, x) = g(2\pi, x) = 1,$$

т. е. это петля (обозначим ее  $l$ ) в калибровочной группе

$$G = \prod_x G_x.$$

Из физических соображений мы будем рассматривать калибровочные преобразования, исчезающие на пространственной и временной бесконечности, иначе говоря, вальдим граничные условия  $g(x) \rightarrow 1$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда пространство — время допускает компактификацию  $M \rightarrow S^4$ . отображения

$$g(\theta, x): S^1 \times S^4 \rightarrow G$$

классифицируются гомотопической группой  $\pi_5(G)$ , поскольку из-за граничных условий топологически  $S^1 \times S^4 \approx S^5$ .

Семейство  $g(\theta, x)$  определяет петлю в пространстве калибровочных потенциалов на  $\mathcal{C}$ :

$$A^\theta = g(\theta, x) A g(\theta, x)^{-1} + g(\theta, x) dg(\theta, x)^{-1}, \quad (19.92)$$

где без ограничения общности мы в качестве  $A(x) \in \mathcal{C}$  выберем поле, для которого оператор Дирака  $\mathcal{D}_0(A)$  не имеет нулевых мод. Петля  $A^\theta$  по определению принадлежит орбите  ${}^g A \subset \mathcal{C}$ , проходящей через  $A(x)$ , и, следовательно, проекция  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \eta$  переводит всю кривую (19.92) в одну точку  $\sigma = \pi(A) \in \eta$ . Вслед за [62] построим петлю  $A^\theta$  до диска  $D \subset \mathcal{C}$ , задав двухпараметрическое семейство

$$A^{t,\theta} = tA^\theta + (gAg^{-1} + g dg^{-1}) \quad (19.93)$$

Параметры  $t$  и  $\theta$  можно рассматривать как полярные координаты на диске (19.93), который интерполирует между  $A = 0$  (центр диска  $t=0$ ) и петлей  $A^\theta$  (граница диска  $t=1$ ) (рис. 25). Заметим, что точки диска (19.93) только при  $t=1$  связаны калибровочным преобразованием с  $A$ , при  $t < 1$  точки

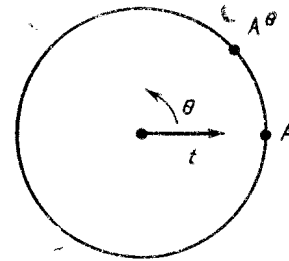


Рис. 25

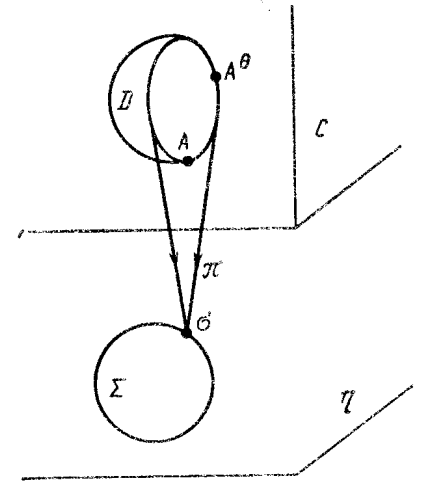


Рис. 26

диска лежат уже на других орбитах в  $\mathcal{C}$ . Проекция  $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \eta$  отображает  $D$  в замкнутую 2-мерную поверхность

$$\Sigma = \{A^{t,\theta} = \pi(A^{t,\theta})\}, \quad \Sigma \subset \eta, \quad (19.94)$$

которая гомеоморфна 2-мерной сфере (рис. 26). Покажем, что описанная конструкция реализует изоморфизм (19.91).

Действительно, если  $\Sigma$  стягиваема, то существует гомотопия, посредством которой диск  $D$  можно деформировать так, что он будет лежать целиком в орбите  ${}^g A$ . Но тогда с помощью действия калибровочной группы нетрудно построить гомотопию окружности

$A^0$  к  $A$ . Обратное, если существует гомотопия  $A^0$  к  $A$ , то  $D$  деформируется в сферу, вложенную в  $\mathcal{G}$ , и эта сфера стягиваема в силу  $\pi_2(\mathcal{G})=0$ , что влечет стягиваемость ее проекции  $\Sigma$ . Таким образом, сфера  $\Sigma$  в  $\eta$  принадлежит тривиальному классу  $\pi_2(\eta)$  тогда и только тогда, когда петля  $l$  в  $G$ , определяющая границу диска  $D$ , гомотопически эквивалентна тривиальной петле.

**Упражнение 19.11.** Описанная конструкция ставит в соответствие нетривиальному элементу  $[l] \in \pi_1(G)$  — гомотопическому классу, которому принадлежит петля  $l$ , — элемент  $[\Sigma] \in \pi_2(\eta)$  — гомотопический класс, содержащий  $\Sigma$ . Докажите, что это соответствие взаимно однозначно.

Рассмотрим детерминант вейлевского оператора на произвольной петле  $l$  (19.92). Из (19.41)

$$\det \widehat{\mathcal{D}}_+(A^0) = e^{i W_1[A, g(\theta)]} \det \widehat{\mathcal{D}}_+(A),$$

где функционал  $W_1[A, g(\theta)]$  получается с помощью интегрирования аномалии калибровочного поля

$$W_1[A, g(\theta)] = \int_0^{\theta_1} \omega_1[A, \xi(\theta)], \quad (19.95)$$

в которой бесконечно малое преобразование задается формой Маурера — Картана

$$\bar{\omega}(\xi(\theta)) = \xi(\theta) = d\theta g \frac{f \partial g^{-1}}{\partial \theta}. \quad (19.96)$$

Отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , которое определяет фаза детерминанта, характеризуется степенью

$$\deg W_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial W_1(\theta)}{\partial \theta} = \pm k, \quad (19.97)$$

что совпадает с полной аномалией (деленной на  $2\pi$ ) при обходе петли  $l$  в  $G$ . Степень отображения должна быть целым числом  $\pm k$ , что гарантирует однозначность вакуумного функционала

$$W[A] = e^{i W_1[A]}$$

(см. (19.38)) как функции внешнего поля  $A$ . Вычислим (19.97). Как известно, аномалия является элементом группы когомологий  $H_{s(d)}(\mathcal{A}^{4,1})$ . Для однопараметрического семейства  $g(\theta, x^a)$ , задающего петлю  $l$  в  $G$ , соответствующая БРСТ-алгебра порождается

$$\bar{A}(\theta, x) = A^a, \quad \bar{\omega}(\theta, x) = \xi(\theta),$$

(см. (19.92) и (19.96)) с оператором

$$s = d\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Поскольку пространство параметров  $N = S^1$  одномерно, имеем  $\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^3 = \dots = 0$ , откуда вытекает, что для любых инвариантных полиномов  $P(F^a)$  формы

$$Q_{2^i-1-2^j}^i(\bar{\omega}, \bar{A}) = \bar{Q}_{2^i-1-2^j}^i(\bar{\omega}, \bar{A}) \equiv 0$$

при  $a \geq 2$ . В частности, в 4-мерном пространстве — времени мы интересуемся  $P(F^3) = c \text{Tr} F^3$ , для которого (см. упражнение 19.9)

$$P(F^3) = (d + d_0) \{Q_5^0(\bar{A}) + Q_4^1(\bar{\omega}, \bar{A})\}, \quad (19.98.1)$$

$$P(P^3) = (d + d_0) Q_5(\bar{A} + \bar{\omega}), \quad (19.98.2)$$

$$P(A, +\bar{\omega}) = Q_5^0(\bar{A}) + \bar{Q}_4^1(\bar{\omega}, \bar{A}), \quad (19.98.3)$$

где, как легко видеть,

$$\bar{Q}_4^1(\bar{\omega}, \bar{A}) = Q_4^1(\bar{\omega}, \bar{A}) + \frac{c}{2} d \{ \text{Tr} [(AdA + dAA + A^3)] \} \quad (19.98.4)$$

Итак, найдем степень отображения фазы вейлевского детерминанта на петле  $l$ :

$$\begin{aligned} \text{deg } W_1(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_M Q_4^1(\xi(\theta), A^0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1 \times S^4} \bar{Q}_4^1(\xi(\theta), A^1) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1 \times S^4} Q_5(A^0 + \xi(\theta)), \end{aligned}$$

где мы использовали (19.98.4) и (19.98.3) и то, что  $Q_5^0(\bar{A}) = 0$  как 5-форма на 4-мерном многообразии  $M$ . Подставляя сюда (19.90) (легко видеть, что  $k_3 = 1/10$ ), окончательно находим

$$\deg W_1(\theta) = \frac{c}{20\pi} \int_{S^1 \times S^4} \text{Tr} [g(\theta, x) (d + d_0) g(\theta, x)^{-1}]^5. \quad (19.99)$$

Как уже отмечалось, отображения

$$g(\theta, x): S^1 \times S^4 \rightarrow G$$

классифицируются гомотопической группой  $\pi_5(G)$ . Для полупростых односвязных групп с  $\pi_5(G) = \mathbf{Z}$  (например, для  $SU(N)$ ,  $N \geq 3$ ) интеграл в правой части (19.99) пропорционален степени отображения сферы  $S^5 \approx I \times M$  в фундаментальную 5-сферу  $S_0^5$  в  $G$ , равной числу «накручивания»  $S^5$  на  $S_0^5$ :

$$k = \frac{i^{32} 1}{(2\pi)^3 5!} \int_{S^5} \text{Tr} (gdg^{-1})^5. \quad (19.100)$$

Заметим, что с аналогичным выражением для степени отображения  $S^3 \rightarrow S^3$  мы встречались в § 14 при изучении инстантонов (см. (14.20)). Подставляя (19.100) в (19.99), получим

$$\deg W_1(\theta) = i24\pi^2 ck = \pm k,$$

откуда найдем коэффициент

$$c = \pm \frac{i}{24\pi^2}$$

в полном согласии с (19.32), (19.47).

Полученный результат доказывает нетривиальность детерминантного расслоения  $L$ . Как мы знаем, вейлевский детерминант есть сечение  $L \rightarrow \eta$ . Ограничение  $L$  на сферу  $\Sigma \subset \eta$  является тривиальным расслоением тогда и только тогда, когда степень отображения фазы детерминанта равна нулю при обходе по любой петле  $l'$  на  $\Sigma$ . Однако очевидно, что на любой  $l'$ , полученной непрерывной деформацией из границы диска  $l$  (в силу дискретности степени), это число равно  $\deg W_1(0) = \pm k$  (19.98), что не исчезает, если  $l$  в  $G$  нестягиваема. Этот вывод может быть получен иным способом, если явно построить связность на  $U(1)$ -детерминантном расслоении  $L$  над стягиваемой сферой  $\Sigma \subset \eta$ . Первое число Чженя для этой связности равно  $\pm k$  (см. [62, 63]).

Подведем некоторые итоги нашего анализа квантовой калибровочной теории с вейлевскими фермионами. Как мы видели, аномалия непосредственно связана с инвариантностью собственных значений вейлевского оператора (19.37) относительно  $G$ . Общая структура аномалии определяется чисто алгебраически из вычисления  $s$ -когомологий по модулю  $d$  соответствующей БРСТ-алгебры. С топологической точки зрения аномалия есть проявление нетривиальности детерминантного расслоения  $L$ , сечением которого является  $\det \mathcal{D}_+(A)$ , что препятствует редукции детерминанта к функции на  $\eta$ . Заметим, что коэффициент аномалии, который не фиксируется кохомологическими методами, определяется из топологических соображений из требования однозначности вакуумного функционала теории.

**Квантовые теории с аномалиями.** В начале данного параграфа мы отмечали, что калибровочные аномалии приводят к многочисленным трудностям. Обсудим теперь вопрос, как сделать квантовую теорию с аномалиями осмысленной.

Одним из наиболее естественных (и первых в историческом плане) является требование взаимного сокращения аномалий внутри мультиплета вейлевских фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем  $A_\mu$ . Структура мультиплета задается матрицами  $t_a$  генераторов калибровочных преобразований (19.6) спиноров  $\psi$ . Нетрудно видеть, что генераторы входят в выражение для аномалий только в комбинации

$$d_{abc} = \text{Tr}(t_a \{t_b, t_c\}). \quad (19.101)$$

Действительно, используя коммутатор

$$[t_b, t_c] = f^a_{bc} t_a,$$

аномалию калибровочного тока (19.3.2) можно преобразовать к виду

$$\langle \nabla_\mu J_{a\pm}^\mu \rangle = \frac{\pm i}{49\pi^2} d_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (A_\nu^b \partial_\alpha A_\beta^c + \frac{1}{4} f^c_{de} A_\nu^d A_\alpha^e A_\beta^c),$$

тогда как иномальный (швингеровский) член в коммутаторе (19.14) равен

$$\pm \frac{1}{24\pi^2} d_{cab} \varepsilon^{ijkl} \partial_i A_j^c \partial_k \delta(x-y),$$

Таким образом, квантовая теория оказывается свободной от аномалий, если  $d_{abc} = 0$ . В частности, это имеет место для любых представлений  $SU(2)$ , для всех симплектических групп и для всех ортогональных групп  $SO(N)$ , кроме  $N=6$ . Для специальных унитарных групп  $SU(N)$ ,  $N \geq 3$ , в общем случае  $d_{abc} \neq 0$ . Тем не менее для некоторых представлений  $SU(N)$  комбинация (19.101) исчезает, и тогда в квантовой теории с такой выделенной структурой «цветового» мультиплета аномалии также отсутствуют. Заслуживает внимания тот факт, что единственным теоретическим объяснением равенства числа лептонов и кварков в объединенной  $SU(2) \times U(1)$  теории электрослабых взаимодействий является именно условие  $d_{abc} = 0$ , гарантирующее сокращение аномалий [49].

Теоретико-полевые модели, для которых  $d_{abc} \neq 0$ , являются внутренне противоречивыми в рамках обычной квантовой теории поля. Возможно, аномальной теории удастся придать смысл, изменив процедуру квантования, однако пока неясно, какие именно изменения необходимы. Существует еще одна возможность. Если в аномальной модели  $d_{abc} \neq 0$ , надо попытаться включить ее в более общую теорию, содержащую дополнительные поля, вейлевские спиноры (или иные), аномалии которых сокращали бы исходные. Очевидно, что такое расширение может изменять физическое содержание исходной модели, и оно не является однозначным. Примечательно, однако, что существует в некотором смысле наиболее естественное расширение любой аномальной модели, которое связано с построением функционального интеграла калибровочной теории. Как мы сейчас увидим, аномальная теория сама себя «лечит», и корректная процедура геометрического построения меры на пространстве орбит  $\eta$  (см. § 18) приводит к непротиворечивой квантовой схеме.

Рассмотрим более подробно функциональный интеграл (19.15) полной теории взаимодействующих калибровочного поля  $A$  и вейлевского фермионного поля  $\psi$ . Задание гиперповерхности калибровки (18.4), (18.34) вводит в  $\mathcal{E}$  локальную координатную систему: поле  $A$  представляется в виде  $A = g \cdot \sigma$ , где  $\sigma$  суть координаты орбиты, которой принадлежит  $A$ , а  $g$  — координаты на орбите

(изоморфной  $G$ ). Мера  $d\mu(A)$  была найдена в § 18. Используя ее, преобразуем интеграл (19.15) к

$$W = \frac{1}{N} \int_{\eta} d\mu_{\eta}(\sigma) \int_G \rho(\sigma) d\mu_G(g) d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) e^{iS[\sigma, \bar{\psi}, \psi]}, \quad (19.102)$$

где

$$\rho(\sigma) = (\det \square_{\delta})^{1/2}$$

задает элемент объема на орбите  $\sigma$ , а  $d\mu_{\eta}(\sigma)$  определяет меру на пространстве орбит  $\eta$  (см. (18.48)).

Для чисто калибровочной теории (без спиноров) инвариантность действия  $S$ , а также меры  $d\mu(A)$  относительно калибровочных преобразований позволяет вычислить интеграл по группе  $G$ , включив результат интегрирования (бесконечный объем  $G$ ) в нормировку  $N$ . Однако в присутствии вейлевских спиноров интегрирование по  $G$  уже не снимается. Действительно, в силу инвариантности действия имеем

$$S[g \cdot \sigma, \bar{\psi}, \psi] = S[\sigma, \bar{\psi}g, g^{-1}\psi].$$

Сделаем в (19.102) замену переменных  $\psi \rightarrow \bar{g}^{-1}\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}g$ . Как мы знаем, детерминант вейлевского оператора не инвариантен относительно калибровочных преобразований, поэтому якобиан такой замены не равен 1. Определим (регуляризованный) якобиан преобразования  $\psi' = g\psi$  аналогично (19.33) как

$$J(A, g) = \frac{\mathcal{D}(\psi')}{\mathcal{D}(\psi)} = \frac{\det \hat{\mathcal{D}}_+(gA)}{\det \hat{\mathcal{D}}_+(A)}. \quad (19.103)$$

Тогда при используемой нами замене переменных фермионная мера преобразуется по правилу

$$d\mu(\varphi) d\mu(\bar{\psi}) J(g^{-1}A, g) d\mu(g^{-1}\psi) d\mu(\bar{g}). \quad (19.104)$$

С использованием (19.104) функциональный интеграл (19.102) запишется в виде

$$W = \frac{1}{N} \int_{\eta} d\mu_{\eta}(\sigma) \int_G \rho(\sigma) d\mu_G(g) d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) J(\sigma, g) e^{iS[\sigma, \bar{\psi}, \psi]}, \quad (19.105)$$

или с учетом (19.41)

$$W = \frac{1}{N} \int_{\eta} d\mu_{\eta}(\sigma) \int_G \rho(\sigma) d\mu_G(g) d\mu(\psi) d\mu(\bar{\varphi}) e^{i\hat{S}[\sigma, g, \bar{\psi}, \psi]}, \quad (19.106)$$

где модифицированное действие есть сумма

$$\hat{S}[\sigma, g, \bar{\psi}, \psi] = S[\sigma, \bar{\psi}, \psi] + W_1[\sigma, g]. \quad (19.107)$$

Второе слагаемое называется членом Весса — Зумино, его можно рассматривать как действие дополнительного поля  $g(x)$ , взаимо-

действующего с физическими степенями свободы  $\sigma$  калибровочного поля  $A$ .

Обозначим интеграл по  $g$

$$e^{i\Delta S[\sigma]} = \int_G d\mu_G(g) e^{iW_1[\sigma, g]}. \quad (19.108)$$

Нелокальный функционал  $\Delta S[\sigma]$  играет роль контрчлена, компенсирующего аномалию вейлевского детерминанта (19.38). Действительно пусть  $\sigma'$  — другие координаты на  $\eta$ , отвечающие новой гиперповерхности калибровки. Они связаны со старыми координатами калибровочным преобразованием  $\sigma' = h \cdot \sigma$ , где  $h \in G$ , вообще говоря, зависит от  $\sigma$ . Функционал  $\Delta S[\sigma]$  калибровочно неинвариантен, так как из (19.45) следует

$$\Delta S[\sigma'] = \Delta S[\sigma] - W_1[\sigma, h]. \quad (19.109)$$

При замене калибровки  $\sigma \rightarrow \sigma' = h \cdot \sigma$  классическое действие инвариантно

$$S[\sigma', \bar{\psi}, \psi] = S[h \cdot \sigma, \bar{\psi}, \psi] = S[\sigma, \bar{\psi}h, h^{-1}\psi],$$

однако мера преобразуется (19.104) как

$$d\mu(\psi) d\mu(\bar{\psi}) = d\mu(\psi) e^{iW_1[\sigma, h]} d\mu(h^{-1}\psi) d\mu(\bar{\psi}h),$$

и компенсирует неинвариантность (19.109). Как следствие, функциональный интеграл (19.106) калибровочно инвариантен, поскольку  $d\mu_{\eta}(\sigma)$  и  $\rho(\sigma)$  по построению не зависят от выбора координат на пространстве орбит  $\eta$ .

Впервые предложение видоизменить классическое действие аномальной теории, добавив к нему член Весса — Зумино, было сделано в работе Фадеева — Шаташвили [65]. Выше мы следовали работам [66, 67], в которых дано обоснование этого предложения.

Таким образом, естественное расширение аномальной теории заключается в следующем. Калибровочное поле  $A$  складывается из физических степеней свободы (элементов  $\eta$ ) и нефизических «чисто калибровочных» составляющих (параметризуемых  $g \in G$ ). В классической теории последние не являются динамическими переменными. Это же верно и в квантовой теории без вейлевских спиноров, в которой функциональный интеграл по  $g(x)$  факторизуется в постоянный (бесконечный) множитель. Однако в аномальной квантовой теории  $g(x)$  наряду с  $\sigma \in \eta$  становится динамической переменной с классическим действием в виде члена Весса — Зумино.

Недавно было показано [67], что в 2-мерной аномальной теории с модифицированным действием (19.107) генераторы  $G_a$  калибровочных преобразований удовлетворяют нормальным коммутационным соотношениям (19.13).

## Глава IV. Геометрия пространства-времени

В настоящее время можно выделить три основных круга калибровочных моделей пространственно-временных симметрий. Это калибровочная теория самой гравитации, теория супергравитации, многомерные модели Калуца — Клейна. Здесь мы сосредоточим внимание только на ключевых элементах этих теорий, поскольку все они основаны на применении формализма расслоений. В калибровочной теории гравитации это описание метрического и тетрадного гравитационных полей и различных видов пространственно-временных калибровочных преобразований в формализме расслоений (см. § 20). В теории супергравитации — определение суперпространства (см. § 21). В моделях Калуца — Клейна — математическое доказательство того, что метрика многомерного пространства может быть выражена через метрику и калибровочные поля на пространственно-временном многообразии (см. § 22).

### § 20. ГРАВИТАЦИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ РАССЛОЕНИИ

В теории гравитации пространство — время обычно предполагается 4-мерным паракомпактным дифференцируемым ориентируемым многообразием  $X^4$  без границы.

В формализме расслоений эйнштейновское гравитационное поле, отождествляемое с компонентами псевдоримановой метрики на  $X^4$ , определяется как глобальное сечение  $g$  расслоения  $\lambda_B$  псевдоевклидовых билинейных форм на касательных пространствах к  $X^4$ . В силу последнего расслоения  $\lambda_B$  ассоциировано с касательным расслоением  $T(X^4)$ , структурной группой которого является группа  $GL^+(4, \mathbf{R})$ . Типичным слоем расслоения  $\lambda_B$  служит пространство  $B$  билинейных форм на  $\mathbf{R}^4$ , которые преобразованиями из группы  $GL^+(4, \mathbf{R})$  могут быть приведены к метрике Минковского  $\eta$ . Поскольку стабилизатором точки  $\eta \in B$  является группа Лоренца  $SO(3, 1)$ , само пространство  $B$  изоморфно фактор-пространству

$$\Sigma = GL^+(4, \mathbf{R}) / SO(3, 1)$$

а расслоение  $\lambda_B$  изоморфно ассоциированному с  $T(X^4)$  расслоению  $\lambda_\Sigma$  на фактор-пространства  $\Sigma$ .

Этот изоморфизм приводит к тому (см. § 3), что необходимым и достаточным условием существования глобального сечения  $g$  расслоения  $B$  (т. е. гравитационного поля на  $X^4$ ) является редукция структурной группы  $GL^+(4, \mathbf{R})$  касательного расслоения  $T(X^4)$  к группе Лоренца [9]. Это означает, что имеется такой атлас

$$\psi^g = \{U_i, \psi_i^g\}$$

расслоения  $T(X^4)$ , все функции перехода которого — элементы калибровочной группы  $SO(3, 1)(X^4)$ , а функции  $g_i = \psi_i^g g$  метрического поля  $g$  сводятся к метрике Минковского

$$g_i(x) = \eta = \text{const}$$

во всех картах атласа  $\psi^g$ . Атлас  $\psi^g$  определен неоднозначно, а с точностью до калибровочных преобразований из группы  $SO(3, 1)(X^4)$ .

Глобальное сечение  $h$  фактор-расслоения  $\lambda_\Sigma$ , изоморфное  $g$ , описывает тетрадное поле. Изоморфизм  $g$  и  $h$  выражается в том, что в атласе  $\psi^g$  функции  $h_i = \psi_i^g h$  тетрадного поля  $h$  принимают значения в центре фактор-пространства  $\Sigma$ . Поэтому тетрадное поле можно задать также семейством локальных сечений  $\tilde{h}$  ассоциированного с  $T(X^4)$  главного  $GL^+(4, \mathbf{R})$ -расслоения, определенных с точностью до их умножения справа на элементы калибровочной группы  $SO(3, 1)(X^4)$ . Эта неоднозначность связана с неоднозначностью атласа  $\psi^g$ . В таком атласе  $\psi$  функции  $\tilde{h}_i$  принимают значения в группе Лоренца. Пусть  $\psi^g$  — атлас, в котором все  $\tilde{h}_i$  принимают значения в единице группы. Тогда в произвольном атласе  $\psi$  тетрадные функции  $\tilde{h}_i$  имеют вид

$$\tilde{h}_i = \psi_i(\psi_i^g)^{-1}$$

и могут быть представлены как матричные функции, действующие в типичном слое касательного и ассоциированных с ним расслоений и осуществляющие калибровочные преобразования от атласа  $\psi^g$  к атласу

$$\psi = \{U_i, \psi_i = \tilde{h}_i \psi_i^g\}.$$

Отсюда, в частности, следует известное выражение

$$g_i = \tilde{h}(\eta) \tag{20.1}$$

функции метрического поля  $g$  в атласе  $\psi$  через метрику Минковского  $\eta$  и тетрадные функции  $\tilde{h}_i$ .

Тetraдные функции  $\tilde{h}_i$ , действующие в типичном слое, могут быть также представлены как матричные функции, действующие в касательных пространствах и осуществляющие переход от базиса

$$\{t_i^g(x) = (\psi_i^g)^{-1}(t),$$

определяемого атласом  $\psi^g$ , к базису

$$\{t_i(x) = \psi_i^{-1}(t), \tag{20.2}$$

определяемому атласом  $\psi$ , а именно:

$$t_\mu(x) = \tilde{h}_\mu^\alpha t_\alpha^g(x),$$

В частности, соотношение (20.1) принимает вид

$$g_{\mu\nu}(x)h^{\alpha} = \bar{h}^{\beta}(x)\eta_{\alpha\beta}.$$

Обычно атлас  $\Psi$  касательного расслоения выбирается голономным и  $\{t_{\mu}(x)\} = \{\partial_{\mu}\}$ .

Следуя общей схеме формализации полевых систем расслоениями, система отсчета в теории гравитации может быть определена как фиксация атласа  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  касательного и ассоциированных с ним расслоений над многообразием  $X^4$ . Это определение глобальным образом обобщает определение систем отсчета в тетрадной формулировке теории гравитации. Если атлас  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  касательного расслоения задан, репер (20.2) может быть восстановлен в любой точке многообразия  $X^4$ . Он составляет базис касательного пространства  $T_x$  к  $X^4$  и задает локальную систему отсчета в точке  $x \in X^4$ .

Реперные функции  $\{t_i(x), x \in U_i\}$  представляют собой семейство сечений ассоциированного с  $T(X^4)$  расслоения реперов  $LX^4$ , слоем которого в точке  $x \in X^4$  является множество реперов (базисов)  $\{t(x)\}$  в касательном пространстве  $T_x$ . Типичным слоем расслоения  $LX^4$  служит пространство  $LR^4$  реперов  $\{t\}$  в  $R^4$ . Структурная группа  $GL^+(4, R)$  действует в пространстве  $LR^4$  транзитивно и свободно. Действительно, для любых двух реперов  $\{t\}$  и  $\{t'\}$  существует элемент  $g$  группы  $GL^+(4, R)$ , такой, что  $\{t'\} = \{gt\}$ , и для всех  $\{t\}$  и  $g \in GL^+(4, R)$ ,  $\{gt\} \neq \{t\}$ , если  $g \neq \hat{1}$ . Это определяет изоморфизм  $LR^4$  на групповое пространство  $GL^+(4, R)$ . В результате расслоение  $LX^4$  является главным расслоением, а функции  $\{t_i(x)\}$  — это набор сечений главного расслоения, отвечающего атласу  $\Psi$  (см. § 3).

Обратно, если  $\{U_i\}$  — покрытие многообразия  $X^4$ , то задание семейства реперных полей  $\{t_i(x), x \in U_i\}$ , таких, что

$$t_i(x) = \rho_{ij}(x)t_j(x), \quad x \in U_i \cap U_j,$$

$$\rho_{ij}(x)\rho_{ik}(x) = \rho_{ik}(x), \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k,$$

фиксирует атлас  $\Psi$  касательного расслоения  $T(X^4)$ . Изменение атласа расслоения (будем считать, что покрытие  $X^4$  при этом не меняется)

$$\Psi = \{U_i, \psi_i\} \rightarrow \Psi' = \{U'_i, \psi'_i = g_i \psi_i\}$$

сопровождается преобразованием реперов

$$t'_a(x) = (\psi'_i)^{-1}(t_a) = \psi^{-1}((g_i^{-1})^b_a t_b) = (g_i^{11})^b_a t_b(x), \quad x \in U_i.$$

Отметим, что, если расслоение  $T(X^4)$  нетривиально, не существует непрерывного реперного поля (поля локальных систем отсчета), определенного на всем многообразии  $X^4$ .

Обычная общековариантная формулировка теории гравитации соответствует специальному случаю голономных систем отсчета,

когда выбор атласа  $\Psi$ , касательного расслоения, коррелирует с выбором координатного атласа  $\Psi_X$  многообразия  $X^4$ , так что базисные реперы, определяемые атласом  $\Psi$  в касательных пространствах к  $X^4$ , являются голономными, т. е. образованы касательными векторами  $\{\partial_{\mu}\}$  к координатным линиям в  $X^4$ , а функции перехода атласа  $\Psi = \{U_i, \psi_i\}$  представляют собой матрицы Якоби

$$\psi_i \psi_j^{-1} = \partial(\varphi_i \varphi_j^{-1})$$

функций перехода атласа  $\Psi_X = \{U_i, \varphi_i\}$ . Причем такая корреляция поддерживается при всех преобразованиях системы отсчета и системы координат

$$(\psi'_i)^{-1} : t_{\mu}(x) \rightarrow t'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} t_{\nu}(x) \quad (20.3)$$

$$\varphi'_i \varphi_i^{-1} : x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x).$$

Преобразования систем отсчета в теории гравитации в формализме расслоений — это преобразования атласов расслоений, т. е. калибровочные преобразования первого рода, образующие калибровочную группу  $GL^+(4, R)(X^4)$ . Однако в отличие от внутренних симметрий в случае пространственно-временных симметрий существуют два класса таких преобразований, а именно: преобразования атласа расслоения материальных полей  $\lambda$  (как и в случае внутренних симметрий) и преобразования атласа касательного расслоения, действующие на неполевые величины — операторы частных производных  $\partial_{\mu}$  как на векторы касательных пространств. Атласы этих расслоений эквивалентны, но могут не совпадать, а их преобразования не обязаны коррелировать. Например, структурной группой спинорного расслоения  $\lambda$  может быть только группа Лоренца, но не  $GL^+(4, R)$  (не существует конечномерного спинорного представления  $GL^+(4, R)$ ). Поэтому  $\lambda$  допускает атласы лишь с лоренцевскими функциями перехода и только лоренцевские калибровочные преобразования. В то же время базисные векторы касательных пространств не содержат полевых величин и имеют смысл частных производных  $\{\partial_{\mu}\}$  (когда  $[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] = 0$ ) только в голономном атласе (в неголономном атласе  $\partial_a = h_a^{\mu} \partial_{\mu}$ ). Однако голономный атлас в общем случае не является лоренцевским, а его голономные преобразования — лоренцевскими калибровочными преобразованиями.

По-разному обеспечивается и инвариантность функционала действия материальных полей относительно этих двух классов калибровочных преобразований:

относительно преобразований первого класса, как и в случае внутренних симметрий, введением калибровочных полей — связности на расслоении  $\lambda$ ;

относительно преобразований второго класса — введением помимо связности еще и метрического поля.

Чтобы можно было образовать скалярные комбинации полей, на слоях расслоения  $\lambda$  тоже задается билинейная форма, например эрмитова метрика, но, как и в случае внутренних симметрий, выбором системы отсчета она всегда может быть приведена к наперед заданному каноническому виду и не является динамической величиной. Метрика на касательных пространствах нужна для построения скалярных комбинаций из операторов частных производных. Выбором атласа она тоже может быть приведена во всех точках к каноническому виду (например, псевдориманова метрика в атласе  $\Psi^g$  сводится к метрике Минковского  $g_i = \eta$ ). Однако в общем случае такой атлас является не голономным, и в выражениях для операторов производных в таком атласе входят полевые величины (тетрадные функции)  $\delta_a = h_a^* \delta_\mu$ .

Таким образом, в случае пространственно-временных симметрией метрическое поле (в том числе и гравитационное) не устраняется выбором калибровки и является динамической величиной. В этом состоит главное своеобразие калибровочной теории пространственно-временных симметрий.

Заметим, что инвариантность функционала действия относительно пространственно-временных калибровочных преобразований может быть обеспечена введением, вообще говоря, произвольных метрического и калибровочного полей. Чтобы это были именно гравитационные метрика и связность, необходимо добавочное физическое условие. Таковым условием может быть принцип эквивалентности, реформулируемый в терминах расслоений.

В теории гравитации принцип эквивалентности призван гарантировать переход к специальной теории относительности в некоторой системе отсчета. В геометрическом аспекте специальную теорию относительности можно характеризовать как геометрию инвариантов группы Лоренца (в духе эрлангенской программы Ф. Клейна). Тогда принцип эквивалентности может быть сформулирован как требование существования лоренцевских инвариантов и их сохранения при параллельном переносе в некоторой системе отсчета [68].

Математически это требование означает, что связность на касательном расслоении  $T(X^4)$  над многообразием  $X^4$  должна быть лоренцевской, т. е. существует атлас  $\Psi^L$  этих расслоений с лоренцевскими функциями перехода, относительно которого 1-форма связности  $\Gamma$  принимает значения в алгебре Ли группы Лоренца, и группой голономии этой связности является группа Лоренца. Это ведет, в свою очередь, к редукции структурной группы  $GL^+(4, \mathbf{R})$  касательного расслоения к группе Лоренца (см. [9]), т. е. функции перехода атласа  $\Psi^L$  являются лоренцевскими (элементарными калибровочной группы  $SO(3, 1)(X^4)$ ), и на  $X^4$  в таком атласе могут быть глобально определены лоренцевские инварианты. В других атласах эти инварианты становятся ковариантными ве-

личинами, но продолжают сохраняться при параллельном переносе.

Редукция структурной группы к группе Лоренца, как уже отмечалось, является необходимым и достаточным условием существования псевдоримановой метрики  $g$  как глобального сечения расслоения  $\lambda_B$ , функции которой в атласе  $\Psi^L$  сводятся к лоренцевскому инварианту — метрике Минковского  $\eta$ , т. е.  $\Psi^L = \Psi^g$ . При этом связность  $\Gamma$  и метрика  $g$  оказываются связанными условием метричности

$$(d - \Gamma)g = 0,$$

которое справедливо во всех системах отсчета.

Поскольку ничто не требует симметричности коэффициентов формы связности  $\Gamma$ , они не сводятся, как в общей теории относительности, к символам Кристоффеля  $\{\}$  метрики  $g$ , а включают также компоненты тензора кручения:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}^\alpha,$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}),$$

$$K_{\mu\nu}^\alpha = Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha,$$

$$Q_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha).$$

Теория гравитации с кручением хорошо разработана [69, 70], и источником кручения  $Q$  служит спиновый ток материальных полей.

Из редукции структурной группы касательного расслоения к группе Лоренца следует ее редукция и к группе пространственных вращений  $SO(3)$  как максимальной компактной подгруппы группы  $SO(3, 1)$ . Это означает существование атласа  $\Psi^g$ , все функции перехода которого сводятся к пространственным вращениям. В результате всюду на  $X^4$  в таком атласе могут быть определены  $SO(3)$ -инварианты, хотя они и не будут сохраняться при параллельном переносе. Эта редукция обуславливает существование на  $X^4$  неособого ковекторного поля (1-формы)  $\omega$  как глобального сечения ассоциированного с  $T(X^4)$  расслоения на факторпространстве  $SO(3, 1)/SO(3)$ , гомеоморфные гиперболоиду  $\{v^2 = 1, v^0 > 0\}$  в пространстве Минковского.

Кроме того, структурная группа  $GL^+(4, \mathbf{R})$  расслоения  $T(X^4)$  всегда редуцирована к  $SO(4)$ , что определяет некоторую риманову метрику  $g^R$  на  $X^4$ .

В результате имеет место следующая диаграмма редукции структурных групп касательного расслоения  $T(X^4)$  над многообразием  $X^4$ , допускающим гравитационное поле:



$$GL^+(4, \mathbb{R}) \rightarrow \left[ \begin{array}{c} SO_4(4) \\ SO(3,1) \end{array} \right] \rightarrow SO(3,1)$$

Она устанавливает связь между полями  $g$ ,  $\omega$ ,  $g^R$  на  $X^4$ , выражаемую следующей теоремой.

**Теорема. 1.** Для всякого гравитационного поля  $g$  на  $X^4$  существуют неособая (нигде не образующаяся в нуль) 1-форма  $\omega$  и риманова метрика  $g^R$  на  $X^4$ , такие, что

$$g = -g^R + 2 \frac{\omega \otimes \omega}{|\omega|^2}, \quad (20.4)$$

где

$$|\omega|^2 = g^R(\omega, \omega) = g(\omega, \omega).$$

2. Обратно, пусть  $g^R$  — риманова метрика и  $\omega$  — неособая 1-форма на многообразии  $X^4$ . Тогда существует псевдориманова метрика  $g$ , такая, что величины  $(g, \omega, g^R)$  удовлетворяют соотношению (20.4).

3. Для всякого набора полей  $(g, \omega, g^R)$  на  $X^4$ , удовлетворяющих соотношению (20.4), существует атлас  $\Psi^a$ , такой, что полевые функции  $g_i, g_i^R, \omega/|\omega|$  постоянны и принимают вид соответственно метрики Минковского  $\eta$ , евклидовой метрики  $\eta^E$  и 1-формы с компонентами  $(1, 0, 0, 0)$  относительно  $\Psi^a$ . Из последнего следует, что форма  $\omega/|\omega|$  совпадает с тетрадной формой  $h^0$ , определяемой в голономном атласе как  $h^0 = h_a^0 dx^a$ .

Пара  $(\omega, g^R)$ , связанная с данным гравитационным полем  $g$  соотношением (20.4), определяет  $(3+1)$ -расщепление касательно-го расслоения  $T(X^4)$  в сумму Уитни

$$T(X^4) = T^{\parallel}(X^4) \oplus T^{\perp}(X^4)$$

3-мерного порасслоения  $T^{\parallel}(X^4)$ , задаваемого уравнением  $\omega=0$ , и его 1-мерного ортогонального (относительно  $g^R$ ) дополнения  $T^{\perp}(X^4)$ . Метрики  $g$  и  $g^R$  индуцируют на порасслоении  $T^{\parallel}(X^4)$  риманову пространственную метрику  $\varphi$ , так что

$$g = -\varphi + h^0 \otimes h^0 \quad g^R = \varphi + h^0 \otimes h^0$$

Определено также дуальное к  $h^0$  (относительно  $g^R$  и  $g$ ) времени-подобное (относительно  $g$ ) неособое векторное поле  $\tau_0$  на  $X^4$ , которое представляет собой поле направлений вдоль слоев 1-мерного расслоения  $T^{\perp}(X^4)$ . Эти направления можно интерпретировать как направления локального времени в каждой точке  $x \in X^4$ , а само  $(3+1)$ -расщепление — как задание на многообразии  $X^4$  определенной пространственно-временной структуры, согласованной с данным гравитационным полем  $g$ .

Риманова метрика  $g^R$  из соотношения (20.4) определяет также функцию расстояния и метрическую топологию на пространстве —

времени  $X^4$ , согласованную с данным гравитационным полем  $g$ . В отличие от римановой метрики псевдориманова метрика — гравитационное поле — может быть задана не на всяком многообразии  $X^4$ .

Как отмечалось в § 13 (см. примеры 13.9, 13.10), гладкое ориентируемое многообразие  $X^4$  характеризуется следующими характеристическими классами:

классом Понтрягина  $p_1$  (числом Понтрягина  $P_1$ , если  $X^4$  — замкнутое многообразие);

классом Эйлера  $e$  (эйлеровой характеристикой, если  $X^4$  — замкнутое многообразие);

классами Штифеля — Уитни  $\omega_i, i=1, \dots, 4$ , где  $\omega_1=0$  в силу ориентируемости  $X^4$ .

**Теорема.** Гравитационное поле всегда существует на некомпактных многообразиях  $X^4$ , а на замкнутом многообразии тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика равна нулю.

Поскольку в теории гравитации помимо гравитационного поля рассматриваются также и материальные поля, необходимо учесть условия, обеспечивающие задание над  $X^4$  соответствующих расслоений. Это относится к спинорным расслоениям, структурная группа которых  $SL(2, \mathbb{C})$  является двулистным накрытием группы Лоренца  $SO(3, 1)$ , и их существование обусловлено возможностью расширения  $SO(3, 1)$ -расслоения, ассоциированного с  $T(X^4)$ , до  $SL(2, \mathbb{C})$ -расслоения. Такое расширение имеет место, т. е. многообразии  $X^4$  допускает спинорную структуру, если класс Штифеля — Уитни  $\omega_2$  многообразия  $X^4$  равен нулю.

Естественно также требовать выполнения тех или иных условий причинности пространственно-временной структуры, т. е.  $(3+1)$ -расщепления, согласованного с гравитационным полем на многообразии  $X^4$ . Минимальным из них является ориентируемость линейного расслоения  $T^{\parallel}(X^4)$ , а следом за тем, и  $T^{\perp}(X^4)$ , т. е. структурная группа касательного расслоения должна быть редуцирована к ортохронной группе Лоренца  $SO^+(3, 1)$ . Такое многообразие называется *пространственно ориентируемым*.

Условия существования гравитационного поля, спинорной структуры на многообразии  $X^4$ , его пространственной ориентируемости накладывают жесткие ограничения на топологию  $X^4$ , а именно: всякое такое некомпактное многообразие должно иметь тривиальное касательное расслоение, а замкнутое многообразие характеризуется числом Понтрягина  $P_1$ , кратным 48.

## § 21. СУПЕРСИММЕТРИЯ И СУПЕРПРОСТРАНСТВА

В настоящее время в качестве одного из перспективных кандидатов на объединение фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию, широкое распространение получила теория суперсим-

метрии и супергравитации [43, 71]. Введение суперсимметрии основывается на том, что классические поля образуют  $Z_2$ -градуированную суперкоммутативную алгебру  $E$ , т. е.  $\varphi \otimes \varphi' = -\varphi' \otimes \varphi$ , когда  $\varphi$  и  $\varphi'$  — только фермионные (нечетные) элементы  $E$ , и  $\varphi \otimes \varphi' = \varphi' \otimes \varphi$  в остальных случаях. На этой алгебре, кроме обычных симметрий, могут быть рассмотрены преобразования суперсимметрий, переводящие бозонные и фермионные поля друг в друга.

Рассмотрим линейные операторы, действующие на алгебре  $E$ . На множестве этих операторов также можно задать  $Z_2$ -градуировку, полагая четными (нечетными) операторы, не меняющие (меняющие на противоположную) четность элементов из  $E$ .

Введение нечетных операторов на  $Z_2$ -градуированной алгебре полей  $E$  приводит к обобщению понятия алгебры Ли. Элементы алгебры Ли  $I$  являются генераторами четных преобразований и действуют на тензорные произведения полей по закону

$$I(\varphi \otimes \varphi') = I(\varphi) \otimes \varphi' + \varphi \otimes I(\varphi'). \quad (21.1)$$

Рассмотрим действие на тензорное произведение полей генераторов нечетного преобразования  $Q$ . Пусть  $\varphi, \varphi'$  — нечетные элементы  $E$ . Тогда, чтобы удовлетворить условию

$$Q(\varphi \otimes \varphi') = -Q(\varphi' \otimes \varphi),$$

надо по аналогии с (21.1) положить

$$Q(\varphi \otimes \varphi') = Q(\varphi) \otimes \varphi' - \varphi \otimes Q(\varphi').$$

Таким образом, при перестановке нечетного генератора с нечетным элементом из  $E$  появляется множитель  $(-1)$ .

Рассмотрим теперь действие четных операторов  $Q'Q'$  и  $Q'Q$ :

$$\begin{aligned} Q'Q'(\varphi \otimes \varphi') &= (Q'Q')(\varphi) \otimes \varphi' + (-1)^{r(\varphi)+1} Q'(\varphi) \otimes Q'(\varphi') + \\ &+ (-1)^{r(\varphi)} Q'(\varphi) \otimes Q'(\varphi) \otimes \varphi' + \varphi \otimes (Q'Q')(\varphi'), \\ Q'Q(\varphi \otimes \varphi') &= (Q'Q)(\varphi) \otimes \varphi' + (-1)^{r(\varphi)+1} Q'(\varphi) \otimes Q(\varphi') + \\ &+ (-1)^{r(\varphi)} Q(\varphi) \otimes Q'(\varphi') + \varphi \otimes (Q'Q)(\varphi'), \end{aligned} \quad (21.2)$$

где  $r(\varphi)$  обозначает четность элемента  $\varphi$ . Действие (21.2) отличается от действия (21.1) четного генератора  $I$  алгебры Ли. Как видно из выражения (21.2), нужным образом будет действовать антикоммутатор

$$[Q, Q'] = QQ' + Q'Q,$$

который и представляет собой генератор некоторого четного преобразования.

Таким образом, рассмотрение нечетных операторов на  $Z_2$ -градуированной алгебре полей  $E$  приводит к обобщению конструкции алгебры Ли до супералгебры Ли.

Супералгеброй Ли называется  $Z_2$ -градуированное векторное пространство

$$L = L^0 \oplus L^1,$$

с заданной на нем билинейной операцией  $[\ , \ ]$ , удовлетворяющей следующим условиям:

$$[I, I'] = (-1)^{r(I)r(I')+1} [I', I],$$

$$[I, [I': I'']] = [[I, I'], I''] + (-1)^{r(I)r(I')} [I', [I, I'']],$$

$$I \in L^{r(I)}, I' \in L^{r(I')}.$$

Четная часть  $L^0$  супералгебры Ли  $L$  является алгеброй Ли, а коммутатор

$$[L^0, L^1] \supset L^1$$

задает представление алгебры Ли  $L^0: L^1 \rightarrow L^1$  на пространстве нечетной части  $L^1$  супералгебры Ли. Это позволяет классифицировать полупростые супералгебры Ли, используя классификацию Картана алгебр Ли [72].

Линейные представления супералгебр Ли реализуются в  $Z_2$ -градуированных векторных пространствах

$$V^{n,m} = V^0 \oplus V^1 = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m.$$

При этом четные генераторы не меняют четность элемента пространства представления, т. е. имеют вид

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

где  $A$  —  $(n \times n)$ -матрицы и  $B$  —  $(m \times m)$ -матрицы.

Подчеркнем, что супералгебра Ли является алгеброй над полем  $\mathbb{R}$ , т. е. ее коэффициенты — вещественные числа. Однако переход к групповым нечетным преобразованиям требует расширения числового поля до алгебры Грассмана  $\Lambda$ . Это вызвано следующим обстоятельством.

Пусть  $g$  — оператор линейного нечетного преобразования в алгебре  $E$ . Естественно потребовать, чтобы действие  $g$  на тензорное произведение полей имело обычный вид:

$$g(\varphi \otimes \varphi') = g(\varphi) \otimes g(\varphi'). \quad (21.3)$$

Пусть  $\varphi$  и  $\varphi'$  — нечетные элементы алгебры  $E$ . Тогда

$$g(\varphi \otimes \varphi') = -g(\varphi' \otimes \varphi) = -g(\varphi') \otimes g(\varphi). \quad (21.4)$$

Сравнивая (21.3) и (21.4), видим, что элементы  $g(\varphi)$  и  $g(\varphi')$  также нечетны, что противоречит предположению, что  $g$  меняет четность.

Это противоречие можно устранить, расширяя поле  $\mathbf{R}$  до алгебры Грассмана  $\Lambda$  и заменяя супералгебру Ли на алгебру Ли, являющуюся ее  $\Lambda$ -оболочкой.

Алгеброй Грассмана  $\Lambda$  называется ассоциативная алгебра над полем  $\mathbf{R}$  (или  $\mathbf{C}$ ) с единицей, обладающая канонической системой из  $l$  образующих:

$$\kappa^2, \dots, \kappa^l, \kappa^i \kappa^j + \kappa^j \kappa^i = 0, \quad i, j = 1, \dots, l$$

Алгебра Грассмана является суперкоммутативной алгеброй. Ее четная (нечетная) часть  $\Lambda^0$  ( $\Lambda^1$ ) образована всевозможными линейными комбинациями произведений четного (нечетного) числа образующих. Имеется вложение поля  $\mathbf{R}$  в  $\Lambda$  на  $\mathbf{R} \cdot 1$ , где 1 — единица алгебры  $\Lambda$ . Базис алгебры  $\Lambda$  как вещественного векторного пространства образуют элементы вида

$$\kappa^{i_1} \dots \kappa^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k \quad k = 0, 1, \dots, l,$$

где  $[i_1, \dots, i_k]$  — всевозможные упорядоченные наборы чисел от 0 до  $l$  и  $\chi^0 = 1$ . Размерность этого пространства равна  $2^l$ .

Расширение поля  $\mathbf{R}$  до алгебры Грассмана  $\Lambda$  означает переход от векторных пространств над  $\mathbf{R}$  к  $\Lambda$ -модулям, т. е. к тем же линейным пространствам, но с коэффициентами из  $\Lambda$ . При этом  $\mathbf{Z}_2$ -градуированное векторное пространство  $V^{n, m}$  над  $\mathbf{R}$  превращается в  $\mathbf{Z}_2$ -градуированный  $\Lambda$ -модуль, в котором четность элемента

$$\lambda v \quad (\lambda \in \Lambda, v \in V^{n, m})$$

является суммой

$$r(\lambda v) = [r(\lambda) + r(v)] \bmod 2$$

четностей элементов  $\lambda$  и  $v$ . Например, четная часть  $\Lambda$ -модуля имеет вид

$$(\Lambda^0 \otimes V^0) \oplus (\Lambda^1 \otimes V^1). \quad (21.5)$$

Она называется  $\Lambda$ -оболочкой  $\mathbf{Z}_2$ -градуированного векторного пространства  $V^{n, m}$  и представляет собой, с одной стороны,  $\Lambda^0$ -модуль, а с другой стороны,  $2^{l-1}(n+m)$ -мерное вещественное векторное пространство

$$(\mathbf{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbf{R}^n) \oplus (\mathbf{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbf{R}^m). \quad (21.6)$$

В частности, взятие  $\Lambda$ -оболочки от супералгебры Ли делает все ее элементы четными и превращает ее в алгебру Ли. Генерируемые элементами этой алгебры, например, посредством экспоненциального отображения

$$\lambda I \rightarrow \exp(\lambda I), \quad r(\lambda) = r(\lambda) = r(I),$$

групповые преобразования также являются четными. Это элементы супергруппы Ли (см. ниже).

Среди супералгебр, действующих на  $\mathbf{Z}_2$ -градуированной алгебре классических полей, особое место занимает супералгебра Пуанкаре, которая (не выписывая лоренцевские генераторы) имеет вид

$$\begin{aligned} [Q_A, Q_{B'}] &= 2\sigma_{AB'}^\mu P_\mu, \quad [P_\mu, P_\nu] = 0, \\ [Q_A, Q_B] &= [Q_{A'}, Q_{B'}] = 0, \\ [P_\mu, Q_A] &= [P_\mu, Q_{B'}] = 0, \end{aligned} \quad (21.7)$$

где  $A$  и  $B'$  — индексы 2-компонентных (непунктирных и пунктирных) вейлевских спиноров,  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  — матрицы Паули и  $\sigma^0 = -1$ . Дело в том, что эта супералгебра оставляет инвариантным совместный функционал действия бозонного и фермионного полей (хотя и путем введения вспомогательного поля).

Например, пусть  $\varphi$  — скалярное поле, а  $\psi_A$  — вейлевское спинорное поле и  $F_{AB} = -F_{BA}$  — вспомогательное псевдоскалярное поле. Представление супералгебры (21.7) на мультиплете

$$(\varphi, \psi_A, F_{AB})$$

определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_A \varphi &= \sqrt{2} \psi_A, \quad Q_{B'} = 0, \\ Q_A \psi_B &= \sqrt{2} F_{AB}, \quad Q_{B'} \psi_C = i\sqrt{2} \sigma_{B'C}^\mu \partial_\mu \psi, \\ Q_A F_{BC} &= 0, \quad Q_{B'} F_{AC} = i\sqrt{2} \sigma_{B'C}^\mu \partial_\mu \psi_A. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Введение вспомогательного поля необходимо, чтобы антикоммутатор  $[Q_A, Q_{B'}]$  сводился к генераторам трансляций  $P_\mu$ . Легко проверить, что супералгебра (21.7) в представлении (21.8) оставляет инвариантным лагранжиан

$$\sqrt{-g} (i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \varphi^* \square \varphi + F^* F),$$

но с точностью до дивергенции. Это означает, что генераторы  $P_\mu$  действуют на поля как производные Ли.

Чтобы лагранжиан оставался строго инвариантным, надо предположить, что при переходе к групповым преобразованиям трансляций последние сопровождаются также преобразованиями координатного пространства

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu(x),$$

т. е. являются диффеоморфизмами. Однако в рамках супергруппы Пуанкаре преобразования трансляций могут возникать в результате суперпозиции преобразований с нечетными генераторами  $Q$ :

$$\begin{aligned} \exp(\lambda^A Q_A) \exp(\lambda^{B'} Q_{B'}) &= \exp(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \\ &+ \frac{1}{2} [\lambda^A Q_A, \lambda^{B'} Q_{B'}] + \dots) = \exp(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \lambda^A \lambda^{B'} \sigma_{AB'}^\mu P_\mu + \dots). \end{aligned}$$

Это означает, что координатное пространство  $X$ , реализующее представление группы трансляций, необходимо расширить до пространства, допускающего представление супергруппы Пуанкаре.

Таковым могло бы быть суперпространство, параметризуемое как обычными координатами  $x$ , так и «спинорными» координатами  $\theta$ , на котором супералгебра Пуанкаре реализовывалась бы операторами вида

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} - i \sigma_{AB}^{\mu} \theta^{B'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

$$Q_{B'} = \frac{\partial}{\partial \theta^{B'}} + i \theta^A \sigma_{AB'}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Однако строгое математическое описание такого суперпространства оказалось серьезной проблемой. По-видимому, наиболее удовлетворительно она разрешается в рамках формализма супермногообразий и суперрасслоений [73, 74]. Этот формализм является непосредственным градуированным обобщением (путем замены поля действительных чисел  $\mathbf{R}$  на алгебру Грассмана  $\Lambda$ ) обычной теории дифференцируемых многообразий и расслоений. Такое обобщение было построено сравнительно недавно, когда на алгебре  $\Lambda$  была введена банахова структура, превращающая ее в нормированное евклидово топологическое пространство.

*Банаховой алгеброй* называется алгебра с нормой, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\|\hat{1}\| = 1, \hat{1} \text{ — единица алгебры;}$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, a, b \text{ — элементы алгебры.}$$

Банахова структура может быть задана на алгебре Грассмана с помощью нормы

$$\lambda = \sum_{k=0}^l \sum_{(i_1 \dots i_k)} a_{i_1 \dots i_k} x^{i_1 \dots i_k}, a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbf{R}, \quad (21.9)$$

$$\|\lambda\| = \sum_{k=0}^l \sum_{(i_1 \dots i_k)} |a_{i_1 \dots i_k}|$$

Такая норма индуцирует на  $\Lambda$  топологию  $2^l$ -мерного вещественного евклидова пространства.

Алгебраическая структура  $\Lambda$  также может быть реализована вещественными матрицами, а именно — алгебра Грассмана  $\Lambda$  изоморфна подалгебре алгебры  $(2^l \times 2^l)$ -мерных вещественных треугольных матриц, строящихся по следующему правилу.

Обозначим  $I$  упорядоченный набор  $(i_1 \dots i_k)$ . Пусть  $J \subset I$ , т. е.  $I$  содержит в себе все элементы из  $J$ . Обозначим  $I - J$  набор из тех

элементов  $I$ , которые не входят в  $J$ . Аналогично, если  $I \cap J = \emptyset$  (т. е. наборы  $I$  и  $J$  не имеют общих элементов), обозначим  $I + J$  набор, состоящий из элементов  $I$  и  $J$ . Пусть  $(I|J)$  — четность перестановки при упорядочивании множества  $i_1 \dots i_k j_1 \dots j_n$ . Поставим в соответствие элементу

$$\lambda = \sum_I a_I x^I, \quad x^I = x^{i_1} \dots x^{i_k},$$

алгебры  $\Lambda$ -матрицу с компонентами

$$A_{IJ} = -(-1)^{(I|J-I)}, a_{J-I}, I \subset J, \quad (21.10)$$

$$A_{IJ} = 0, \quad I \not\subset J.$$

Например, если  $l=2$ , произвольный элемент из  $\Lambda$  имеет вид

$$\lambda = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_{12} x^1 x^2,$$

и ему сопоставляется матрица

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{12} \\ 0 & a & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что умножению элементов  $\lambda$  из алгебры Грассмана  $\Lambda$  отвечает произведение сопоставляемых этим элементам вещественных матриц (21.10). Это важно, поскольку позволяет представить алгебры и группы Ли с параметрами из алгебры Грассмана как вещественные алгебры и группы Ли.

*Суперпространством* размерности  $(n, m)$  называется прямое произведение

$$B^{n, m} = (\Lambda^0)^n \times (\Lambda^1)^m$$

с нормой, индуцируемой нормой (21.9) по правилу

$$\|b\| = \sum_{i=1}^{n+m} \|b^i\|,$$

$$b = (b^1, \dots, b^n, b^{n+1}, \dots, b^{n+m}), b^k \in \Lambda^0, k \leq n, b^{n+k} \in \Lambda^1$$

Такая норма определяет на  $B^{n, m}$  топологию  $2^{l-1}(n+m)$ -мерного евклидова пространства. Суперпространство  $B^{n, m}$  можно представить как  $\Lambda$ -оболочку (21.5)  $\mathbf{Z}_2$ -градуированного векторного пространства  $V$  с базисом  $\{v_k, k=1, \dots, n+m\}$ , а с другой стороны, как  $2^{l-1}(n+m)$ -мерное вещественное векторное пространство (21.6) с базисом  $\{e_{I_k}\}$ .

Рассматриваются отображения

$$F: B^{n, m} \rightarrow \Lambda,$$

называемые *суперфункциями*. Их *супердифференцируемость* определяется по аналогии с дифференцируемостью обычных функций на банаховых пространствах. Суперфункция  $F$  может считаться  $r$  раз супердифференцируемой в точке  $b \in B^{n,m}$ , если для всякого элемента  $(b+h)$  из некоторой окрестности  $U \ni b$  суперфункцию  $F(b+h)$  можно представить в виде

$$F(b+h) = F(b) + \sum_{p=1}^n (G^p F)(b, h) = \eta(b, h) \|h\|^p,$$

где  $(G^p F)(b, h)$  — полилинейные кратности  $p$  непрерывные отображения

$$B^{n,m} \ni h \rightarrow (G^p F)(b, h) \in \Lambda$$

суперпространства  $B^{n,m}$  как  $\Lambda^0$ -модуля в алгебру  $\Lambda$ , а суперфункции  $\eta(b, h)$  удовлетворяют условию

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\eta(b, h)\| = 0,$$

Суперфункция  $F$  считается  $r$  раз супердифференцируемой (класса  $G^r$ ) в открытой области  $U \subset B^{n,m}$ , если она  $r$  раз супердифференцируема во всех точках  $b \in U$ . Суперфункция  $F$  считается класса  $G^\infty$ , если она класса  $G^r$  при любом  $r$ .

Обозначим  $G^\infty(U)$  множество суперфункций класса  $G^\infty$  на  $U \subset B^{n,m}$ . Тогда сопоставление

$$G_h: F(b) \rightarrow (GF)(b, h), \quad b \in U,$$

задает отображение  $G^\infty(U)$  в себя, удовлетворяющее условиям

$$G_h(FF') = G_h(F)F' + FG_h(F'),$$

$$G_h G_h = G_h G_{h'}$$

Оно представляет собой производную  $F$  по направлению  $h$ . На полиномиальных и аналитических суперфункциях производной по направлению можно придать вид

$$G_h = h^k \frac{\partial}{\partial b^k}, \quad r(h^k) = r(b^k),$$

при выполнении условий

$$\frac{\partial}{\partial b^k} (FF') = \frac{\partial}{\partial b^k} (F)F' + (-1)^{r(b^k)r(F)} F(F'),$$

$$\frac{\partial}{\partial b^k} \frac{\partial}{\partial b^q} = (-1)^{r(b^k)r(b^q)} \frac{\partial}{\partial b^q} \frac{\partial}{\partial b^k}.$$

Поскольку и суперпространство  $B^{n,m}$ , и алгебра Грассмана  $\Lambda$  представляют собой также вещественные пространства, суперфунк-

ция  $F$  может быть задана набором  $2^l$  вещественных функций  $f_i$  от  $2^{l-1}(n+m)$  действительных переменных  $y^{i_k}$ , так что суперанализ во многом аналогичен комплексному анализу. В частности, функции  $f_i$  с необходимостью должны удовлетворять некоторым условиям типа Коши — Римана. Одно из них

$$\frac{\partial}{\partial y^{i_k}} f_i = \frac{\partial}{\partial y^{j_k}} f_j.$$

*Супермногообразие*  $M^{n,m}$  размерности  $(n, m)$  определяется как банахово многообразие, допускающее атлас

$$\Psi_M = \{U_i, \varphi_i: U_i \rightarrow B^{n,m}\},$$

функции перехода которого супердифференцируемы.

По аналогии с обычной дифференциальной геометрией строятся касательные пространства к супермногообразию. Касательный вектор к супермногообразию  $M^{n,m}$  в точке  $b \in M^{n,m}$  определяется как класс эквивалентности пар

$$(h \in B^{n,m}, \varphi_i(b), b \in U_i)$$

при преобразованиях атласа  $\Psi_M$ . В карте  $(\varphi_i, U_i \ni b)$  он может быть представлен оператором производной по направлению  $h$  в точке  $b$  на множестве суперфункций  $G^\infty(U_i)$ , поскольку  $G_h = G_{h'}$ , если пары  $(h, \varphi_i)$  и  $(h', \varphi'_i)$  эквивалентны. Множество  $G_h$ , когда  $h$  пробегает  $B^{n,m}$ , образует касательное пространство к  $M^{n,m}$  в точке  $b$ . Оно изоморфно  $B^{n,m}$ .

Множество касательных пространств к  $M^{n,m}$  составляет касательное *суперрасслоение* — супердифференцируемое расслоение  $T(M^{n,m})$  над  $M^{n,m}$ , получаемое склеиванием тривиальных расслоений  $U_i \times B^{n,m}$  посредством функций перехода

$$\rho_{ji}: (U_j \times B^{n,m}) \ni (b, h) \rightarrow$$

$$\rightarrow (b, G(\varphi'_j \varphi_i^{-1}))(b, h) \in (U_i \times B^{n,m}),$$

где  $G(\varphi'_j \varphi_i^{-1})$  — аналог матрицы Якоби.

Глобальное сечение  $\tau$  касательного суперрасслоения  $T(M^{n,m})$  составляет векторное поле (суперполе) на супермногообразии  $M^{n,m}$ . Подобно векторному полю на многообразии, векторное поле  $\tau$  на супермногообразии определяет отображение  $G_\tau$  пространства суперфункций  $G^\infty(M^{n,m})$  в себя, такое, что для любых  $\lambda \in \Lambda^0$ ,  $F, F' \in G^\infty(M^{n,m})$ ,

$$G_\tau(FF') = G_\tau(F)F' + FG_\tau(F'),$$

$$G_\tau(\lambda F) = \lambda G_\tau(F).$$

Коммутатор двух суперполей

$$[G_\tau, G'] = G_\tau G' - G' G_\tau$$

тоже суперполе, и множество суперполей на супермногообразии образует  $\Lambda^0$ -модуль, являющийся алгеброй Ли.

Примером супермногообразий и векторных полей на них являются *супергруппы Ли* и супералгебры Ли. Супергруппой Ли  $SG$  называется группа, допускающая параметризацию грассмановыми величинами, которая превращает групповое пространство в аналитическое супермногообразие. Как и в теории групп Ли, алгебра Ли  $A_{SG}$  супергруппы Ли  $SG$  определяется как алгебра Ли левинвариантных векторных полей на групповом супермногообразии, т. е. полей, инвариантных относительно преобразования, порождаемых левыми сдвигами  $g \rightarrow g'g$  на групповом многообразии.

**Теорема.** Пусть  $SG$  — супергруппа Ли размерности  $(n, m)$  и  $A_G$  — алгебра Ли группы  $SG$ , рассматриваемой как вещественной группы Ли размерности  $2^{l-1}(n+m)$ . Тогда алгебра  $A_{SG}$ , рассматриваемая как  $2^{l-1}(n+m)$ -мерная алгебра Ли, изоморфна  $A_G$ . Обратно, пусть  $A$  — алгебра Ли, образующая суперпространство размерности  $(n, m)$  и  $G$  —  $2^{l-1}(n+m)$ -мерная вещественная группа Ли с  $A$  как  $2^{l-1}(n+m)$ -мерной вещественной алгеброй Ли. Тогда на  $G$  можно задать структуру супергруппы Ли с алгеброй Ли  $A$ .

В физических приложениях обычно рассматриваются супергруппы Ли, чьи алгебры Ли представляют собой  $\Lambda$ -оболочки супералгебр Ли.

Как и в случае касательного суперрасслоения, определение главного суперрасслоения дословно повторяет определение главного расслоения [74]. Причем, поскольку супермногообразия, супергруппы Ли и суперрасслоения представляют собой обычные многообразия, группы Ли и расслоения, ряд теорем для расслоений остается справедливым и для суперрасслоений. Например, если  $SH$  — замкнутая суперподгруппа Ли супергруппы Ли  $SG$ , то для редукции структурной супергруппы  $SG$  суперрасслоения к  $SH$  необходимо и достаточно существование глобального сечения ассоциированного расслоения на фактор-пространства  $SG/SH$  [75].

В качестве примера геометрических конструкций, которые можно задать на супермногообразиях, опишем некоторый конкретный вариант суперметрики.

Рассмотрим супермногообразие  $M^{4,4}$ . Структурной группой его касательного суперрасслоения  $T(M^{4,4})$  является супергруппа  $L(4,4)$  всех изоморфизмов суперпространства  $B^{4,4}$  — типичного слоя суперрасслоения  $T(M^{4,4})$ . Одной из подгрупп  $L(4,4)$  является супергруппа Ли  $OSp(4,2; 1)$ , алгебра Ли которой представляет собой  $\Lambda$ -оболочку супералгебры  $osp(4,2; 1)$ . Четной частью супералгебры  $osp(4,2; 1)$  является алгебра Ли  $SO(3, 1) \oplus sp(4)$ , а нечетная часть состоит из 16 генераторов  $Q_{\mu}^A$  ( $\mu=0, 1, 2, 3; A=1, 2, 3, 4$ ). Генераторы  $Q_{\mu}^A$  по индексам  $\mu$  реализуют векторное представление

алгебры Лоренца  $so(3, 1)$ , а по индексам  $A$  — фундаментальное представление  $sp(4)$ .

Представление алгебры  $osp(4,2; 1)$  на  $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве  $V^{4,4}$  ( $\Lambda$ -оболочкой которого является суперпространство  $B^{4,4}$ ) осуществляется матрицами  $A$ , удовлетворяющими условию

$$A^t \Gamma + \Gamma A = 0, \quad \Gamma = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\eta} & 0 \\ \hline 0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{array} \right] \quad (21.11)$$

Здесь  $\hat{\eta}$  —  $(4 \times 4)$ -матрица метрики Минковского,  $(-\sigma^0)$  — единичная  $(2 \times 2)$ -матрица, а операция « $t$ » задается по правилу

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -G^T & E^T \end{pmatrix},$$

где  $B, C, D, E$  —  $(4 \times 4)$ -матрицы, а  $T$  — обычное транспонирование. В представлении (21.11) четный сектор пространства  $V^{4,4}$  реализует 4-векторное представление алгебры Лоренца  $so(3,1)$ , а нечетный сектор — действительное (майорановское) спинорное представление алгебры  $so(3,1) \subset sp(4)$  матрицами

$$L_{12} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad L_{31} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{01} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{02} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{03} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix},$$

где  $\sigma^\mu$  — матрицы Паули.

Грассманова оболочка  $B^{4,4}$  пространства  $L^{4,4}$  реализует представление супергруппы  $OSp(4,2; 1)$ , порождаемое представлением (21.11) супералгебры  $osp(4,2; 1)$ . При этом операторы супергруппы  $OSp(4,2; 1)$  сохраняют инвариантной билинейную форму

$$\eta_S(bb') = x^\mu \Gamma_{\mu\nu} x'^\nu + \theta^A \Gamma_{AB} \theta'^B = x^0 x'^0 - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 + \theta^1 \theta'^3 - \theta^2 \theta'^1 + \theta^3 \theta'^2 - \theta^0 \theta'^0, \quad (21.12)$$

где  $\Gamma$  — матрица (21.11) на элементах

$$b = x^\mu b_\mu + \theta^A b_A$$

суперпространства  $B^{4,4}$ . Координаты  $x^\mu$  и  $\theta^A$  элементов  $b \in B^{4,4}$  являются соответственно четными и нечетными элементами алгебры Грассмана, и форма  $\eta_S$  принимает значения в  $\Lambda^0$ .

Как и в теории гравитации (см. § 20), потребуем редукцию структурной супергруппы  $L(4,4)$  касательного суперрасслоения

$T(M^{4,4})$  к  $OSp(4,2; 1)$ . Необходимым и достаточным условием такой редукции является существование глобального сечения  $g_s$  ассоциированного с  $T(M^{4,4})$  расслоения на фактор-пространства

$$L(4, 4)/OSp(4,2; 1).$$

Это фактор-пространство изоморфно пространству всех билинейных форм на суперпространстве  $B^{4,4}$ , приводимых к каноническому виду (21.12) преобразованиями из  $L(4,4)$ . Таким образом, глобальное сечение  $g_s$  может рассматриваться как суперметрика на супермногообразии  $M^{4,4}$ .

Для физических приложений естественно требовать, чтобы супермногообразие включало в себя многообразие. Такое включение индуцируется вложением поля  $\mathbf{R}$  в  $\Lambda$  и гомоморфизмом  $\sigma$  алгебры  $\Lambda$  на  $\mathbf{R}$ , при котором

$$\sigma\lambda = \sigma\left(\sum_{k=0}^l \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{i_1, \dots, i_k} x^{i_1} \dots x^{i_k}\right) = a_0.$$

На суперпространстве  $B^{n,m}$  отображение имеет вид

$$\sigma: (x^1, \dots, x^n; \theta^1, \dots, \theta^m) \rightarrow (\sigma x^1, \dots, \sigma x^n),$$

т. е. суперпространство проектируется на свой четный сектор, при этом у четных координат  $x$  сохраняется только вещественная часть. Однако определение морфизма  $\sigma$  на супермногообразии  $M^{n,m}$  сталкивается с трудностью. Действительно, пусть  $(U, \varphi)$  и  $(U', \varphi')$  — две карты на супермногообразии  $M^{n,m}$ , пересечение которых несвязано, т. е.

$$UU' = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Обозначим

$$\varphi_{1,2} = \downarrow \varphi V_{1,2} \quad \varphi'_{1,2} = \varphi \downarrow V'_{1,2}$$

Пусть  $b_1 \in V_1, b_2 \in V_2$  — два  $\sigma$ -эквивалентных элемента в карте  $(U, \varphi)$ , т. е.

$$\sigma\varphi_1 b_1 = \sigma\varphi_2 b_2.$$

Но эти элементы не обязательно эквивалентны  $(\sigma\varphi'_1 b_1 \neq \sigma\varphi'_2 b_2)$  в карте  $(U', \varphi')$ , поскольку в общем случае

$$\sigma\varphi'_1 \varphi_1^{-1} \sigma \neq \sigma\varphi'_2 \varphi_2^{-1} \sigma.$$

Супермногообразие  $M^{n,m}$  имеет атлас, в котором отношение  $\sigma$ -эквивалентности хорошо определено, однако фактор-пространство супермногообразия  $M^{n,m}$  по этому отношению в общем случае не является даже топологическим многообразием).

## § 22. МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТИПА КАЛУЦА — КЛЕЙНА

Модель Калуца — Клейна была предложена в 20-е годы как совместное геометрическое описание гравитации и электромагнетизма. Ее главным атрибутом является 5-мерное пространство  $X^5$  с координатами  $x^A, A=0, 1, 2, 3, 5$ , и метрикой

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\lambda} \\ -g^{\nu\lambda} & 1 + g^{\nu\lambda} g_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}. \quad (22.1)$$

Компоненты метрики  $g^{AB}$  предполагаются независимыми от координаты  $x^5$ , а на волновые функции в 5-мерном пространстве накладываются условия цикличности по координате  $x^5$ , т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^5} = i m \psi,$$

$$\psi = \psi(x^0, \dots, x^3; x^5) = \psi(x^0, \dots, x^3) e^{i m x^5}, \quad (22.2)$$

при целом  $m$ .

Это означает, что пространство  $X^5$  представляет собой прямое произведение

$$X^4 \times S^1$$

4-мерного пространства времени и окружности  $S^1$  с циклической координатой  $x^5$ . При этом выражении (22.1) для метрики  $g^{AB}$  и (22.2) для волновых функций  $\psi$  на  $X^5$  через метрику  $g^{\mu\nu}$  и функции  $\psi$  на  $X^4$  составляют условия проекции физических, геометрических и других объектов на пространство  $X^5$  в пространство — время  $X^4$ . Например, волновое уравнение

$$\square \psi = 0$$

на пространстве  $X^5$  приводится на пространстве  $X^4$  к уравнению Прока

$$(\square - m^2) \psi = 0,$$

а уравнение Эйнштейна для метрики  $g^{AB}$  — к уравнению Эйнштейна для метрики  $g^{\mu\nu}$  и уравнениям Максвелла для величин  $g^\mu$ , которые в модели Калуца — Клейна интерпретируются как электромагнитный потенциал (с точностью до константы).

Все эти моменты присутствуют и в обобщенных многомерных моделях типа Калуца — Клейна, когда на  $(4+d)$ -мерном пространстве компоненты метрики с индексами высших размерностей, как оказалось, соответствуют калибровочным полям на 4-мерном пространстве — времени. Это соответствие и стало главной причиной широкого внимания к многомерии как к одному из перспективных в настоящее время путей объединения гравитации с другими фундаментальными взаимодействиями.

Мы посвятим этот параграф математическому (в формализме расслоений) обоснованию этого ключевого пункта обобщенных моделей Калуца — Клейна, а именно — доказательству следующего факта.

Если  $G$  — компактная группа преобразований многообразия  $E$  с изоморфными орбитами в  $E$ , тогда существует взаимно однозначное соответствие между  $G$ -инвариантными метриками на  $E$  и тройками  $(\gamma, A, h)$  метрики  $\gamma$  на пространстве орбит  $M$ , калибровочных полей  $A$  группы  $N/H$ , где  $H$  — стабилизатор точки в  $E$  и  $N$  — нормализатор подгруппы  $H$  в  $G$ , и некоторых скалярных полей  $h$ , характеризующих внутреннюю геометрию орбит [76].

Пусть  $E$  — многообразие, на котором задано правое действие компактной связной группы Ли  $G$ , т. е.

$$G \ni g : E \ni q \rightarrow qg \in E.$$

Для всякой точки  $q \in E$  обозначим  $G(q)$  орбиту группы  $G$  в  $E$ , проходящую через  $q$ , а через  $H_q$  — стабилизатор точки  $q$ . Для точек  $q$  и  $q'$ , принадлежащих одной и той же орбите, подгруппы  $H_q$  и  $H_{q'}$  сопряжены в  $G$ , а значит изоморфны. Для точек, принадлежащих разным орбитам, это, вообще говоря, не так. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда стабилизаторы всех точек  $q \in E$  сопряжены с некоторой стандартной подгруппой  $H$  в  $G$ .

Нормализатором подгруппы  $H$  в  $G$  называется максимальная подгруппа  $N$  группы  $G$ , такая, что  $H$  является в  $N$  инвариантной подгруппой (нормальным делителем), т. е.

$$N = \{g \in G : gH = Hg\}.$$

Рассмотрим правое фактор-пространство  $G/H$  и фактор-группу  $N/H$ . На  $G/H$  определено правое действие группы  $G$  по правилу

$$g' : G/H \ni [g] \rightarrow [g]g' = [gg']g' \ni G/H, \quad (22.3)$$

где  $[g] = \{hg\}$  обозначает правый класс смежности элемента  $g$  на  $G$ . Зададим левое действие

$$n : G/H \ni [g] \rightarrow [ng] \in G/H \quad (22.4)$$

группы  $N$  на  $G/H$ . Оно, очевидно, перестановочно с правым действием  $G$  на  $G/H$ :

$$n([g]g') = [ngg'] = [ngg'] = [ng]g' = (n[g])g'.$$

Более того, действие (22.4) зависит только от класса смежности  $[n]$  элемента  $n$  в  $N/H$ :

$$nh'[g] = n[h'g],$$

т. е. сводится к действию

$$[n][g] = [ng] \quad (22.5)$$

фактор-группы  $N/H$  на  $G/H$ .

Рассмотрим главное расслоение  $\lambda_{N/H}$  со структурной группой  $N/H$  над базой  $M$  и ассоциированное с ним расслоение  $\lambda_{G/H}$  с типичным слоем  $G/H$ , на тотальном пространстве которого определено правое действие группы  $G$ :

$$g' : \text{tl}\lambda_{G/H} = (\text{tl}\lambda_{N/H} \times (G/H)) / (N/H) \ni (g, [q]) / (N/H) \rightarrow (q, [gg']) / (N/H) \in \text{tl}\lambda_{G/H}, \quad (22.6)$$

где  $q \in \text{tl}\lambda_{N/H}$  и действие  $N/H$  на

$$\text{tl}\lambda_{N/H} \times (G/H)$$

имеет вид

$$[n] : (q, [g]) \rightarrow (q[n], [n][g]) = (q[n], [ng]).$$

Поскольку правое действие (22.3) группы  $G$  на  $G/H$  и левое действие (22.5) группы  $N/H$  на  $G/H$  перестановочны, действие (22.6) группы  $G$  на  $\text{tl}\lambda_{G/H}$  является послойным, т. е.  $G$  преобразует точки одного и того же слоя расслоения  $\lambda_{G/H}$ . На каждом слое, как на своей орбите (см. пример 1.5), группа  $G$  действует транзитивно, но не свободно (поскольку центр  $G/H$  имеет своим стабилизатором подгруппу  $H$ ).

Существует вложение  $\text{tl}\lambda_{N/H}$  на подмногообразии в  $\text{tl}\lambda_{G/H}$ . Оно осуществляется отображением

$$\gamma : \text{tl}\lambda_{N/H} \ni q \rightarrow (q, [\hat{1}]) / (N/H) \in \text{tl}\lambda_{G/H}.$$

Причем если  $q \neq q'$ , то  $\gamma(q) \neq \gamma(q')$ , поскольку центр  $[\hat{1}]$  фактор-пространства  $G/H$  не имеет стабилизатора в  $N/H$  и

$$(q[n], [\hat{1}]) / (N/H) = (q, [n]) / (N/H) \neq (q, [\hat{1}]) / (N/H).$$

Используем все приведенные конструкции для доказательства следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $E$  — многообразие, на котором задано правое действие группы  $G$ , такое, что стабилизаторы всех точек из  $E$  сопряжены с некоторой подгруппой  $H$  в  $G$ . Пусть  $M$  — множество орбит  $G$  в  $E$ . Тогда существует расслоение

$$\lambda_{N/H} = (E; \pi, M, N/H, G/H)$$

с тотальным пространством

$$\text{tl}\lambda_{N/H} = E,$$

базой  $M$ , проекцией  $\pi : E \rightarrow M$ , структурной группой  $N/H$ , типичным слоем  $G/H$  (рис. 27).

Выделим в  $E$  подпространство точек, стабилизатором которых является подгруппа  $H$ :

$$Q = \{q \in E : qH = q\}.$$



Заметим, что если  $q \in Q$ , то  $qg \in Q$  тогда и только тогда, когда  $g \in N$ , поскольку

$$qgH = qHg = qg$$

лишь при  $g \in N$ . В силу этого же свойства на  $Q$  определено правое действие  $N/H$  и оно свободно. Это превращает  $Q$  в тотальное пространство главного  $(N/H)$ -расслоения  $\lambda_{N/H}$  с базой  $M$ . Зададим отображение

$$Q \times G/H \ni (q, [g]) \rightarrow qg \ni E.$$

Оно обладает свойством

$$q[n], [n]^{-1}g \rightarrow qg, \quad [n] \in N/H,$$

и задает на  $E$  структуру тотального пространства ассоциированного с  $\lambda_{N/H}$  расслоения с типичным слоем  $G/H$ . Все описанные конструкции и отображения могут быть сделаны гладкими.

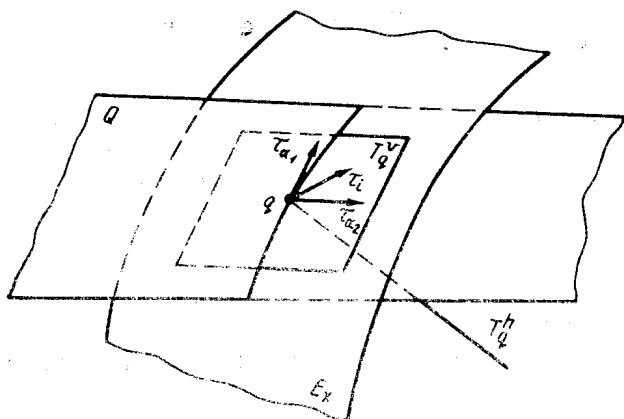


Рис. 27

Рассмотрим теперь индуцируемые  $H$ ,  $N$  и  $N/H$  разбиения алгебры Ли  $A_G$  группы  $G$ . Пусть  $H$  — компактная связная подгруппа Ли группы  $G$ . Обозначим  $(\cdot, \cdot)$  невырожденную  $G$ -инвариантную билинейную форму на алгебре  $A_G$ , на которой  $G$  действует по присоединенному представлению  $\text{ad } G$ . Пусть  $A_H$  — алгебра Ли группы  $H$  и  $P_H$  — ее ортогональное дополнение в  $A_G$ . Причем, поскольку

$$(P_H, H) = ((\text{ad } H)(P_H), (\text{ad } H)) = ((\text{ad } H)(P_H), H) = 0,$$

имеем

$$(\text{ad } H)(P_H) = P_H.$$

Алгебра  $A_H$  и ее ортогональное дополнение  $P_H$  образуют разбиение

$$A_G = A_H + P_H, \quad (\text{ad } A_H)(P_H) = P_H, \quad ([A_H, P_H] \subset P_H) \quad (22.7)$$

алгебры Ли  $A_G$ . Так же как алгебра Ли,  $A_G$  отождествляется с касательным пространством к многообразию группы Ли  $G$  в единице группы, векторное пространство  $P_H$ , наделенное действием  $\text{ad } H$ , может быть отождествлено с касательным пространством к многообразию  $G/H$  в его центре.

Аналогичное разбиение имеет место для алгебры Ли  $A_N$ :

$$A_N = A_H + K_H, \quad K_H = A_N \cap P_H,$$

где  $K_H$  — ортогональное дополнение  $A_H$  и  $A_H$  и

$$(\text{ad } H)(K_H) = K_H \quad ([A_H, K_H] \subset K_H).$$

В то же время, поскольку  $H$  — инвариантная подгруппа  $N$ , имеем

$$[A_H, K_H] \subset A_H.$$

Отсюда следует, что  $[A_H, K_H] = 0$ , и ортогональное дополнение  $K_H$  образует подпространство векторов в касательном пространстве  $P_H$  к  $G/H$ , инвариантных относительно действия подгруппы  $H$ . Более того,

$$[K_H, K_H] \subset K_H,$$

и поэтому  $K_H$  является подалгеброй Ли в  $A_N$ , которая может быть отождествлена с алгеброй Ли группы  $K = N/H$ .

Введем также ортогональное дополнение  $P_N$  алгебры Ли  $A_N$  в  $A_G$ :

$$A_G = A_N + P_N, \quad (\text{ad } N)(P_N) = P_N,$$

$$P_H = K_H + P_N, \quad (\text{ad } H)(P_N) = P_N,$$

(22.8)

$$A_G = A_H + K_H + P_N.$$

Фиксируем в алгебре Ли  $A_G$  базис  $I_A$ :

$$[I_A, I_B] = c_{AB}^D I_D,$$

согласованный с разбиением (22.8), т. е.

$$I_A = \{I_i, I_\alpha; I_i \in A_H, I_\alpha \in P_H\},$$

$$I_\alpha = \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}; I_{\alpha_1} \in K_H, I_{\alpha_2} \in P_N\}.$$

(22.9)

Обозначим  $\Lambda(g)_{B^A}$  морфизмы присоединенного представления  $G$  на  $A_G$ :

$$(\text{ad } g)(I_A) = g I_A g^{-1} = \Lambda_A^B(g) I_B,$$

Тогда для  $n \in N$  матрицы  $\Lambda(n)$  имеют следующий вид:

$$\Lambda(n) = \begin{pmatrix} \Lambda_j^i(n) & 0 \\ 0 & \Lambda_\alpha^\beta(n) \end{pmatrix},$$

где  $\Lambda_j^i(n)$  — матрицы представления  $N$  на  $A_H$ , а  $\Lambda_\alpha^\beta(n)$  — матрицы представления  $N$  на  $(K_H + P_N)$ .

Обозначим  $\tau_A$  фундаментальное поле (см. (2.5)) на  $E$ , соответствующее генератору  $I_A$  группы преобразований  $G$  на  $E$ :

$$\tau_A(q) = \frac{d}{ds} (q \exp(sI_A)) \Big|_{s=0}. \quad (22.10)$$

Поскольку имеется гомоморфизм алгебры Ли  $A_G$  в алгебру Ли векторных полей на  $E$ , образом которого являются фундаментальные поля, получаем

$$[\tau_A, \tau_B](q) = c_{AB}^D \tau_D(q), \quad q \in E. \quad (22.11)$$

Векторы  $\tau_A(q)$  в  $q \in E$  касательны к линиям, вдоль которых переносится точка  $q$  под действием преобразований  $\exp(sI_A)$  при малых параметрах  $s$ . Поэтому все они лежат (см. рис. 27) в вертикальном пространстве  $T_q^v$  к  $E$  в точке  $q$ , т. е. в подпространстве, касательном к слою  $E_x$ ,  $x \in M$ , расслоения  $\lambda_{N/H}$ , проходящего через точку  $q \in E$  (к орбите  $G(q) = E_{\pi(q)}$  в  $E$ ). В частности, поскольку

$$\dim T_q^v = \dim G - \dim H < \dim G,$$

система векторов  $\{\tau_A(q)\}$  не является линейно независимой в  $T_q^v$ .

Из определения (22.10) следует, что поля  $\tau_i$  (см. обозначения (22.9)) исчезают на подмногообразии  $Q$  в  $E$ , поскольку  $qH = q$ ,  $q \in Q$ , тогда как векторы  $\{\tau_\alpha(q)\}$  линейно независимы в точках  $q \in Q$ , а векторы  $\tau_{\alpha i}(q)$  касательны к  $Q$  (см. рис. 27). Следовательно,  $\{\tau_\alpha(q)\}$  линейно независимы и в некоторой окрестности  $U$  подмногообразия  $Q$  в  $E$ , так что

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta](q) = f_{\alpha\beta}^i(q) \tau_i(q), \quad q \in U. \quad (22.12)$$

Сравнивая (22.12) с (22.11), получаем, что

$$f_{\alpha\beta}^i(q) \tau_i(q) = c_{\alpha\beta}^A \tau_A(q), \quad q \in U,$$

$$f_{\alpha\beta}^i(q) = c_{\alpha\beta}^i, \quad q \in Q,$$

Беря от обеих частей этого равенства коммутатор с полем  $\tau_\delta$  в точках подмногообразия  $Q$ , находим

$$\tau_\delta(f_{\alpha\beta}^i)(q) = c_{\alpha\beta}^A c_{\delta\alpha}^i - c_{\alpha\beta}^\mu c_{\delta\mu}^i = c_{\alpha\beta}^i c_{\delta i}^i, \quad (22.13)$$

Из (22.10) также следует (с учетом  $\tau_i(q) = 0$ ,  $q \in Q$ ), что

$$\tau_\alpha(qn) = \Lambda_\alpha^\beta(n) \tau_\beta(q), \quad q \in Q, n \in N. \quad (22.14)$$

Рассмотрим теперь  $G$ -инвариантную метрику  $g$  на  $E$ , т. е. производные Ли метрики  $g$  вдоль полей  $\tau_A$  равны нулю. Покажем, что  $g$  определяет:

- а)  $G$ -инвариантную метрику  $h_x$  на каждом слое  $E_x$ ;
- б)  $G$ -инвариантное распределение горизонтальных пространств  $T_q^h$ ,  $q \in E$ , на  $E$ , или эквивалентно связность на главном расслоении  $\lambda_{N/H}$ ;
- в) метрику  $\gamma$  на  $M$ .

Обратно, метрика  $g$  восстанавливается по величинам из пунктов (а) — (в).

Метрика  $g$  на  $E$  задает скалярное произведение двух вертикальных векторов и тем самым индуцирует  $G$ -инвариантную метрику  $h_x$  на каждом слое  $E_x$ . Эту метрику достаточно знать в какой-либо одной точке  $q \in E_{x=\pi(q)}$  слоя  $E_x$ , из которой, используя ее  $G$ -инвариантность, она может быть перенесена во все точки слоя  $E$ . Выберем некоторое локальное сечение  $\sigma: M \rightarrow Q$  главного расслоения  $\lambda_{N/H}$ , определяющее карту этого и ассоциированных расслоений в окрестности  $x \in M$ , и будем задавать метрику  $h_x$  ее значением

$$h(x) = g(\sigma(x))$$

в точке  $q = \sigma(x) \in Q$ . В качестве базисов вертикальных касательных пространств  $T_q^v$  в точках  $q \in Q$  можно выбрать линейно независимые векторы  $\{\tau_\alpha(q)\}$ . В таком базисе метрика  $h(x)$  имеет компоненты

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q) = g_q(\tau_\alpha(q), \tau_\beta(q)).$$

При переходе к другому локальному сечению

$$\sigma'(x) = \sigma(x)n(x), \quad n(x) \in N,$$

используя закон преобразований (22.14), получаем

$$h'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(qn) = \Lambda_\alpha^\mu(n) \Lambda_\beta^\nu(n) g_{\mu\nu}(q) = \Lambda_\alpha^\mu(n) \Lambda_\beta^\nu(n) h_{\mu\nu}.$$

В частности, если  $n \in H \subset N$ , то  $\sigma = \sigma'$  и

$$h_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\mu(n) \Lambda_\beta^\nu(n) h_{\mu\nu}, \quad (22.15)$$

т. е. матрица  $h_{\alpha\beta}(x)$  является  $H$ -инвариантной. Причем, поскольку  $[A_H, K_H] = 0$  и матрицы  $\Lambda_\alpha^\mu(n)$ ,  $n \in H$ , имеют вид

$$\Lambda_\alpha^\mu = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_2}^{\mu_1} & 0 \\ \xi^\mu & \Lambda_{\alpha_2}^{\mu_2} \end{pmatrix},$$

из условия (22.15) можно получить ограничения на форму матрицы  $h_{\alpha\beta}$ , а именно:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha_1\beta_1} & 0 \\ 0 & h_{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что векторы  $\tau_{\alpha 1}(q)$  и  $\tau_{\alpha 2}(q)$ ,  $q \in Q$ , ортогональны относительно метрики  $g$ , а тем самым векторы  $\tau_{\alpha 2}$  ортогональны подмногообразию  $Q$  (см. рис. 27).

Обозначим  $T_q^h$  ортогональное относительно метрики  $g$  дополнение в касательном пространстве  $T_q$  к  $E$  в точке  $q \in E$  вертикального пространства  $T_q^v$ . В частности, пространства  $T_q^h$  в точках  $q \in Q$  ортогональны векторам  $\tau_{\alpha 2}$ , а значит, являются касательными к подмногообразию  $Q$ . Прямая сумма  $T_q^h$  и пространства  $T_q^v(Q)$ , натянутого на векторы  $\tau_{\alpha 1}(q)$ , касательные к слою  $Q_{x=\pi(q)}$ , образуют касательное пространство к  $Q$  в точках  $q \in Q$  (см. рис. 27). Поскольку метрика  $g$   $G$ -инвариантна, распределение  $T_q^h$  тоже  $G$ -инвариантно, т. е.

$$(T_b^h)a = T_{qa}^h, \quad a \in G.$$

Тем самым распределение  $T_q^h$  при ограничении на многообразии  $Q$  удовлетворяет всем требованиям к распределению горизонтальных пространств (см. § 4) на тотальном пространстве  $Q$  главного расслоения  $\lambda_{N/H}$  (можно показать, что оно дифференцируемо по  $q$ ), и тем самым вводит некоторую связность на  $\lambda_{N/H}$ .

Метрика  $\gamma$  на  $M$  задается следующим образом. Пусть  $t, t'$  — два касательных вектора к  $M$  в точке  $x \in M$ . Выберем произвольную точку  $q$  в слое над  $x$  и определим

$$\gamma_x(t, t') = g_q(t_q^h, t_q'^h), \quad (22.16)$$

где  $t_q^h, t_q'^h$  — поднятия  $t, t'$  в горизонтальное пространство  $T_q^h$ . В силу  $G$ -инвариантности метрики  $g$  это определение не зависит от выбора точки  $q$ .

Обратно, предположим известными метрику  $\gamma$  на  $M$ , распределение  $T_q^h$ ,  $q \in Q$ , и  $G$ -инвариантную метрику  $h_x$  на слоях  $E_x$ . Возьмем произвольные два вектора  $t_q, t_q' \in T_q(E)$ . Пусть  $q_0 \in Q$  — точка, такая, что  $q = q_0 a$  для некоторого элемента  $a \in G$ , векторы  $\pi^*(t_q)$  и  $\pi^*(t_q')$  — проекции  $t_q$  и  $t_q'$  на  $T_{\pi(q)}(M)$  и векторы  $t_q^h$  и  $t_q'^h$  — поднятия  $\pi^*(t_q)$  и  $\pi^*(t_q')$  в горизонтальное векторное пространство  $T_{q_0}^h$ . Тогда векторы

$$t_q - t_q^h a, \quad t_q' - t_q'^h a$$

вертикальные и метрика  $g$  может быть определена следующим образом:

$$g_q(t_q, t_q') = \gamma_x(\pi(t_q), \pi(t_q')) + h_x(t_q - t_q^h a, t_q' - t_q'^h a). \quad (22.17)$$

Например, пусть  $q \in Q$  и векторы  $t_q, t_q'$  — горизонтальные. Тогда второй член в выражении (22.17) отсутствует и оно сводится к выражению (22.16). Если векторы  $t_q, t_q'$  имеют только вертикальные составляющие, то

$$\pi^*(t_q) = \pi^*(t_q') = 0$$

и выражение (22.17) воспроизводит определение метрики  $h_x$ .

Перепишем выражение (22.17) для метрики  $g$  в компонентах. Пусть  $\{x^\mu\}$  — некоторая локальная система координат на многообразии  $M$  и  $\{e_\mu(q)\}$  — горизонтальные поднятия векторов  $\partial_\mu$  в  $T_q^h$ . Векторы  $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$  образуют базис касательного пространства  $T_q$  к  $E$  в точках подмногообразия  $Q$  и некоторой его окрестности  $U$ . Поскольку векторы  $e_\mu(q)$  и  $\tau_\alpha(q)$  ортогональны относительно метрики  $g$ , последняя в базисе  $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$  имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$(x, y) \in M \times (G/H)$$

локальная система координат

$$q = [\sigma(x)]y, \quad x = \pi(q),$$

на  $E$ , определяемая локальным сечением главного расслоения  $\sigma : M \rightarrow Q$ , и

$$g_{\mu\nu}(x, y) = g(e_\mu(q), e_\nu(q)) = \gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}.$$

Выразим теперь  $e_\mu$  через  $\partial_\mu$ . В локальной системе координат

$$(x, a) \in M \times (N/H), \quad g = [\sigma(x)]a, \quad a \in N/H,$$

определяемой сечением  $\sigma$  на  $Q$ , форма связности  $\omega$  на  $Q$  в точках  $q = (x, \hat{1})$  имеет вид

$$\omega = -A + I_{\alpha 1} dt^{\alpha 1},$$

где

$$A = A_\mu^{\alpha 1}(x) I_{\beta 1} dx^\mu$$

локальная 1-форма связности на  $M$ . Из условия  $\omega(e_\mu) = 0$  находим

$$e_\mu(x, \hat{1}) = \partial_\mu + A_\mu^{\alpha 1}(x) \tau_{\alpha 1}(x, \hat{1}).$$

Тогда, учитывая, что

$$g_{\alpha\beta}(\sigma(x)) = g_{\alpha\beta}(x, \hat{1}) = h_{\alpha\beta}(x),$$

выражение (22.17) для метрики  $g$  в точках  $q = (x, \hat{1})$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g &= \gamma^{\mu\nu}(x) e_\mu(x, \hat{1}) \otimes e_\nu(x, \hat{1}) + h^{\alpha\beta} \tau_\alpha(x, \hat{1}) \otimes \tau_\beta(x, \hat{1}) = \\ &= \gamma^{\mu\nu}(x) (\partial_\mu + A_\mu^{\alpha 1}(x) \tau_{\alpha 1}(x, \hat{1})) \otimes (\partial_\nu + A_\nu^{\beta 1}(x) \tau_{\beta 1}(x, \hat{1})) + \\ &+ h^{\alpha\beta}(x) \tau_\alpha(x, \hat{1}) \otimes \tau_\beta(x, \hat{1}) = \gamma^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \otimes \partial_\nu + \\ &+ \gamma^{\mu\nu}(x) A_\mu^{\alpha 1}(x) \tau_{\alpha 1}(x, \hat{1}) \otimes \partial_\nu + \gamma^{\mu\nu}(x) A_\nu^{\beta 1}(x) \partial_\mu \otimes \tau_{\beta 1}(x, \hat{1}) + \end{aligned}$$

$$+ (h^{\alpha\beta}(x) + \gamma^{\mu\nu}(x) A_{\mu}^{\alpha}(x) A_{\nu}^{\beta}(x)) x_r \hat{1} \otimes \tau_{\beta}(x, \hat{1}) + \\ + h^{\alpha\beta}(x) \tau_{\alpha}(x, \hat{1}) \otimes \tau_{\beta}(x, \hat{1}).$$

Это означает, что в точках  $q = (x, \hat{1}) \in Q \subset E$  в базисе  $\{\partial_{\mu}, \tau_{\alpha}(x, \hat{1})\}$  контравариантные компоненты  $G$ -инвариантной метрики  $g$  на  $E$  имеют вид

$$g(x, \hat{1}) = \begin{bmatrix} \gamma^{\mu\nu}(x) & \gamma^{\mu\nu} A_{\mu}^{\alpha}(x) & 0 \\ \gamma^{\mu\nu}(x) A_{\mu}^{\beta}(x) & h^{\alpha\beta}(x) + \gamma^{\mu\nu}(x) A_{\mu}^{\alpha}(x) A_{\nu}^{\beta}(x) & 0 \\ 0 & 0 & h^{\alpha\beta}(x) \end{bmatrix} \quad (22.18)$$

(ср. в (22.1)). Таким образом, она выражается через: компоненты метрики  $\gamma^{\mu\nu}(x)$  на пространстве — времени  $M$ , хотя надо подчеркнуть, что существование на  $E$  инвариантной метрики с наперед заданной сигнатурой не гарантировано; калибровочные поля  $A_{\alpha}^{\mu}(x)$  группы  $N/H$  на  $M$ ; мультиплет скалярных полей  $h^{\alpha\beta}(x)$  — компоненты метрики во «внутреннем» пространстве  $G/H$ .

Приведем еще выражения для скалярной кривизны метрики  $g$  на  $E$ :

$$R(E) = N(M) + (G/H) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\alpha} F_2^{\mu\nu} - \nabla_{\mu} (h^{\alpha\beta} D^{\mu} h_{\alpha\beta}) - \\ - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} (D_{\mu} h_{\alpha\gamma} D^{\mu} h_{\beta\delta} + D_{\mu} h_{\alpha\beta} D^{\mu} h_{\gamma\delta}), \quad (22.19)$$

которая выражается через ковариантные производные  $\nabla_{\mu}$  и кривизну  $R(M)$  метрики  $\gamma$  на  $M$ , ковариантные производные  $D_{\mu}$  и напряженность  $F$  калибровочного поля  $A$  группы  $N/H$  и метрику  $h$  на  $G/H$ :

$$R(G/H) = h^{\beta\delta} \left( \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^{\gamma} c_{\gamma\delta}^{\alpha} - \frac{1}{4} h^{\alpha\alpha'} h_{\alpha\alpha'} c_{\alpha\beta}^{\gamma} c_{\gamma\delta}^{\alpha'} + c_{\alpha\beta}^{\gamma} c_{\gamma\delta}^{\alpha} - c_{\alpha\beta}^{\gamma} c_{\gamma\delta}^{\alpha} \right)$$

Выражения типа (22.18), (22.19) составляют математическую основу многомерных объединенных моделей типа Калуца — Клейна.

## Приложения

### Приложение I. ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

Здесь приводится частная формулировка теорем Нетер, достаточная для их приложения в теории калибровочных полей [77].

Теоремы Нетер устанавливают законы сохранения и условия связи, которые следуют из инвариантности функционала действия

$$S = \int L(q, \partial_{\eta} q) dx$$

системы классических полей  $\{q^a(x)\}$  относительно  $r$ -параметрической группы Ли внутренних симметрий  $G$  и локальной группы  $G(X)$ , получаемой из  $G$  заменой параметров  $\omega$  группы  $G$  функциями координат  $\omega^m(x)$ ,  $x \in X$ .

**Первая теорема Нетер.** Пусть функционал  $S$  инвариантен относительно группы  $G$ . Достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования

$$g = (\hat{1} + I_m \delta \omega^m)$$

из  $G$ , где  $I_m$  — генераторы, а  $\delta \omega^m$  — малые параметры группы  $G$  и

$$I_m \delta \omega^m : q^a \rightarrow \delta q^a = I_{mb}^a q^b \delta \alpha^m, \quad (П.1.1)$$

Вариация функционала  $S$  при преобразованиях (П.1.1) имеет вид

$$\delta S = \int dx \left[ \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^a} \partial_{\mu} \delta q^a \right] = \int dx \left[ \frac{\partial L}{\partial q^a} I_{mb}^a q^b + \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^a} \times \right. \\ \times I_{mb}^a \partial_{\mu} q^b \left. \right] \delta \alpha^m = \int dx \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q^a} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^a} \right) I_{mb}^a q^b + \partial_{\mu} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^a} I_{mb}^a q^b \right) \right] \delta \omega^m.$$

Тогда из условия  $\delta S = 0$  и произвольности параметров  $\delta \omega^m$  получаем, что  $r$  линейно независимых комбинаций лагранжевых производных

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}^a}$$

обращаются в дивергенции, а именно:

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} I_{mb}^a q^b \equiv - \partial_{\mu} J_m^{\mu}, \quad (П.1.2)$$

где величина

$$J_m^\mu = \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} I_{mr}^a q^b \quad (\text{П.1.3})$$

называется *током симметрии* полей  $q^a$ , отвечающим генератору  $I_m$  группы  $G$ .  
На экстремальных, т. е. решениях уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} = 0$$

тождества (П.1.2) принимают вид

$$\partial_\mu J_m^\mu = 0 \quad (\text{П.1.4})$$

локального закона сохранения тока симметрии полей  $q$ .

Локальный закон сохранения (П.1.4) ведет к интегральному закону сохранения

$$\int_V d^4x \partial_\mu J_m^\mu = \int_{\partial V} ds_\mu J_m^\mu = \int_{x_1^0}^{x_2^0} d^3x J_m^0 = Q_m(x_2^0) - Q_m(x_1^0) = 0.$$

если интегрирование ведется по объему  $V$ , заключенному между гиперповерхностями  $x^0 = x_1^0$  и  $x^0 = x_2^0$ , и ток  $J_m^i$  достаточно быстро спадает на пространственной бесконечности. Величина  $Q_m$  называется *зарядом*.

**Вторая теорема Нетер.** Пусть функционал  $S$  инвариантен относительно локальной группы  $G(X)$  с законом преобразований полей

$$I_m \delta \omega^m(x) : q^a \rightarrow \delta q^a = I_{mb}^a q^b \delta \omega^m + b_m^{a\mu} \partial_\mu \delta \omega^m, \quad (\text{П.1.5})$$

где величины  $b_m^{a\mu}$  не зависят от  $x$ . Тогда имеет место  $r$  тождественных соотношений между лагранжевыми производными  $\delta L / \delta q^a$ .

Вариация  $G(X)$ -инвариантного функционала  $S$  при преобразованиях (П.1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx \left[ \frac{\delta L}{\delta q^a} q^a + \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} \right) \right] = \int dx \left[ \frac{\delta L}{\delta q^a} I_{mb}^a q^b - \right. \\ &= \left. b_m^{a\mu} \partial_\mu \delta \omega^m + \int dx \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} \delta q^a + \frac{\delta L}{\delta q^a} b_m^{a\mu} \delta \omega^m \right) \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

Если теперь проинтегрировать (П.1.6) по какой-либо области, на границе которой вариации  $\delta \omega^m$ ,  $\partial_\mu \delta \omega^m$  исчезают, второй интеграл, а следовательно, и первый интеграл в (П.1.6) по отдельности обращаются в нуль.

Из равенства нулю первого интеграла в (П.1.6) в силу произвольности  $\delta \omega^m$  получаем искомые соотношения

$$\frac{\delta L}{\delta q^a} I_{mb}^a q^b \equiv b_m^{a\mu} \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta q^a} \quad (\text{П.1.7})$$

между лагранжевыми производными. Они представляют собой условия связи на уравнения Эйлера — Лагранжа, которые тем самым не являются независимыми.

Из равенства нулю второго интеграла в (П.1.6) в силу произвольности  $\delta \omega^m$  следует тождество

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} I_{mb}^a q^b + \frac{\delta L}{\delta q^a} b_m^{a\mu} \right) \delta \omega^m + \left( \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} I_{mb}^a q^b + \frac{\delta L}{\delta q^a} b_m^{a\mu} + \right. \\ \left. + \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}^a} b_m^{a\mu} \right) \partial_\mu \delta \omega^m + \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} b_m^{a\nu} \partial_\nu \partial_\mu \delta \omega^m = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая в нем коэффициенты при  $\delta \omega$ ,  $\partial_\mu \delta \omega$ ,  $\partial_\mu \partial_\nu \delta \omega$  нулю, получаем тождества

$$\partial_\mu J_m^\mu + b \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta q^a} = \partial_\mu J_m^\mu + \frac{\delta L}{\delta q^a} I_{mb}^a q^b \equiv 0,$$

$$J_m^i + \frac{\partial L}{\partial q_a} b_m^{a\mu} \equiv 0, \quad (\text{П.1.8})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}^a} b_m^{a\mu} + \frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}^a} b_m^{a\nu} \equiv 0,$$

называемые *тождествами второй теоремы Нетер*. Первое из них (с учетом условия связи (П.1.7)) совпадает с тождеством (П.1.2) первой теоремы Нетер.

## Приложение II. СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ

Напомним коротко описание систем со связями в гамильтоновом формализме, ограничиваясь (для простоты изложения) системами с конечным числом степеней свободы [78].

Такая система описывается функционалом действия в форме

$$S = \int dt \left[ p_i \dot{q}^i - H(p, q) + \sum_A \lambda^A \varphi_A(p, q) \right], \quad (\text{П.1.1})$$

$$i = 1, \dots, n, \quad A = 1, \dots, m < n.$$

где  $p_i$ ,  $q^i$  — канонические переменные системы,  $\lambda^A$  — множители Лагранжа, а  $\varphi_A(p, q)$  — связи. Уравнения движения, получаемые варьированием действия (П.1.1), имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} + \lambda^A \{q^i, \varphi_A\} \\ \dot{q}^i &= \{q^i, H\} + \lambda^A \{q^i, \varphi_A\}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

$$\varphi_A(p, q) = 0,$$

где  $\{, \}$  — скобки Пуассона по каноническим переменным  $p, q$ . Система со связями, описываемая уравнениями (П.1.2), называется *обобщенной гамильтоновой системой*.

Требование непротиворечивости связей  $\varphi_A(p, q) = 0$  уравнениям (П.1.2) означает, что

$$\dot{\varphi}_B = \{\varphi_B, H\} + \lambda^A \{\varphi_B, \varphi_A\} = 0, \quad (\text{П.1.3})$$

и накладывает следующие условия на систему связей  $\varphi_A(p, q)$ .

Связи  $\varphi_A$  состоят из связей первого рода

$$\varphi_F, F = 1, \dots, r \leq m,$$

и второго рода

$$\varphi_s, s = r + 1, \dots, m,$$

таких, что

$$\{\varphi_F, \varphi_A\} = c_{FA}^C \varphi_B, \{H, \varphi_F\} = c_{F\bar{F}}^m \varphi_B. \quad (\text{П.И.4})$$

$$\det \left| \left\{ \varphi_s, \varphi_{s'} \right\} \right|_{\varphi=0} \neq 0, \quad (\text{П.И.5})$$

где  $c_{FA}^C, c_{F\bar{F}}^m$  — некоторые функции канонических переменных. Условие (П.И.5) обеспечивает то, что уравнения (П.И.3) однозначно определяют множители Лагранжа  $\lambda^F$  связей второго рода через  $p, q$  и  $\lambda^F$ . Напротив, множители Лагранжа  $\lambda^F$ , соответствующие связям первого рода, остаются произвольными. Это приводит к тому, что решение уравнений движения (П.И.2) зависит от произвольных функций

$$\lambda^F(t), F = 1, \dots, r,$$

т. е. оказывается неоднозначным при фиксированных начальных условиях и представляет собой целый класс функций  $\{q^i(t), \lambda^F(t)\}$ .

Таким образом, обобщенная гамильтонова система с какими-либо связями первого рода является вырожденной. В дальнейшем рассматриваются системы со связями только первого рода.

Вырожденность обобщенной гамильтоновой системы можно устранить, если помимо первоначальных связей

$$\varphi_A(p, q) = 0, \quad A = 1, \dots, m,$$

наложить еще дополнительные связи

$$\kappa_A(p, q) = 0, \quad A = 1, \dots, m, \quad (\text{П.И.6})$$

такие, что

$$\{\kappa_A, \kappa_B\} = 0, \quad (\text{П.И.7})$$

$$\det \left| \left\{ \varphi_B, \kappa_A \right\} \right|_{\varphi=0, \kappa=0} \neq 0, \quad (\text{П.И.8})$$

Это приводит к тому, что в полном наборе связей  $\psi_\Omega = (\varphi_A, \kappa_B)$  связи  $\varphi$  и  $\kappa$  оказываются связями только второго рода, поскольку, как это вытекает из условий (П.И.7), (П.И.8),

$$\det \left| \left\{ \psi_\alpha, \psi_{\alpha'} \right\} \right|_{\psi=0} = -(\det \left| \left\{ \kappa_A, \varphi_{A'} \right\} \right|_{\psi=0})^2 \neq 0, \quad (\text{П.И.9})$$

Следовательно, обобщенная гамильтонова система с пополненным составом связей  $\varphi_A, \kappa_B$  оказывается невырожденной. В силу условия (П.И.9) уравнения (П.И.3) однозначным образом определяют множители Лагранжа, отвечающие связям  $\varphi_A, \kappa_B$ , подстановка которых в (П.И.2) дает систему уравнений, имеющую единственное решение при фиксированных начальных условиях.

Иными словами, наложение дополнительных связей (П.И.6) (называемых калибровочными условиями) выделяет определенный представитель из класса функций  $\{q^i(t), \lambda^F(t)\}$ , образующих решение вырожденной обобщенной гамильтоновой системы.

Невырожденная обобщенная гамильтонова система с пополненным составом связей  $\varphi, \kappa$  эквивалентна гамильтоновой системе без связей, но с  $(n-m)$  сте-

пенями свободы. Действительно, вследствие условия (П.И.7) канонические координаты  $q^i$  можно выбрать так, что первые  $m$  координат будут совпадать с  $\chi_A$ , т. е.  $q = (\chi_A, Q)$ . Пусть  $p = (p_A, P)$  — соответствующие сопряженные импульсы. Условие (П.И.8) в этих переменных имеет вид

$$\det \left| \frac{\partial \varphi_A}{\partial p_B} \right| \neq 0,$$

так что уравнения связей  $\varphi_A(p, q) = 0$  можно решить относительно  $p_A$ . В результате уравнения связей  $\varphi, \kappa$  полностью разрешаются и принимают вид

$$q^A = 0, \quad p_A = p_A(P, Q),$$

$(P, Q)$  образуют набор  $(n-m)$  независимых канонических переменных с гамильтонианом

$$H(P, Q) = H(p, q) \Big|_{\varphi=0, \kappa=0}$$

Можно показать эквивалентность уравнений для системы с гамильтонианом  $H(P, Q)$  и системы с гамильтонианом  $H(p, q)$  и связями  $\varphi, \kappa$ .

### Приложение III. ПРОСТРАНСТВО ПУТЕЙ

Рассмотрим пространство кусочно-гладких путей  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  проходящих в конечномерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  из точки  $p$  в точку  $q$ , и покажем, что локально его можно аппроксимировать (в некотором точном смысле) гладким конечномерным многообразием. Конструкция  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  дословно обобщается на случай риманова многообразия  $X^n$ , когда  $p$  и  $q$  — точки, которые не сопряжены друг другу вдоль ни одной геодезической [3].

Пусть  $p, q$  — точки  $\mathbb{R}^n$  и

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

— непрерывный кусочно-гладкий путь с концами  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ , т. е. существует разбиение

$$0 = \sigma_0 < \dots < \sigma_k = 1$$

отрезка  $[0, 1]$ , такое, что  $\gamma([\sigma_i, \sigma_{i+1}])$  — гладкое отображение. Множество всех таких путей обозначим через  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ . На нем можно определить функцию расстояния

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{0 \leq \sigma \leq 1} \rho(\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma)) + \left( \int_0^1 d\sigma \left[ \left( \frac{ds_1(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 + \left( \frac{ds_2(\sigma)}{d\sigma} \right)^2 \right] \right)^{1/2} \quad (\text{П.ИИ.1})$$

где  $s_1(\sigma), s_2(\sigma)$  — длины дуг вдоль  $\gamma_1(\sigma)$  и  $\gamma_2(\sigma)$ , а  $\rho(x, y)$  — расстояние между точками  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Подчеркнем, что выражение (П.ИИ.1) обеспечивает отделимость путей, отличающихся только параметризацией, т. е. когда

$$\gamma_1([0, 1]) = \gamma_2([0, 1]), \quad \gamma_1(\sigma) = \gamma_2(\varphi(\sigma)),$$

где  $\varphi$  — некоторое отображение отрезка  $[0, 1]$  на себя. Зададим на  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  топологию, индуцируемую функцией расстояния (П.ИИ.1), т. е. базисом этой топологии являются шары

$$D_\varepsilon(\gamma) = \{\gamma', d(\gamma, \gamma') < \varepsilon\}.$$

Рассмотрим в  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  подмножество путей  $\Omega^a$ , имеющих ограниченный функционал энергии

$$E(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{ds}{d\sigma} \right| d\sigma \leq a. \quad (\text{П.III.2})$$

Он непрерывен на  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ . Фиксируем некоторое разбиение отрезка  $[0, 1]$  точками

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k = 1,$$

и обозначим  $\Omega^a(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  подпространство в  $\Omega^a$ , состоящее из всех кусочно-гладких геодезических (прямых), имеющих точки излома при  $\sigma = \sigma_i$ . Всякий путь из  $\Omega^a(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  однозначно определяется набором из  $(k-1)$  точек  $\gamma(\sigma_1), \dots, \gamma(\sigma_{k-1})$ . Отображение

$$\gamma \rightarrow (\gamma(\sigma_1), \dots, \gamma(\sigma_{k-1}))$$

устанавливает гомеоморфизм между  $\Omega^a(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  и открытым подмножеством прямого произведения

$$\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n(k-1)}.$$

Этот гомеоморфизм наделяет  $\Omega^a(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  структурой  $n(k-1)$ -мерного многообразия.

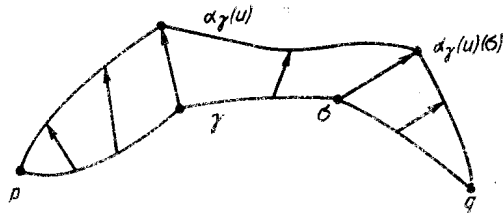


Рис. 28

Всякий путь из  $\Omega^a$  можно сколь угодно точно аппроксимировать путем из  $\Omega^a(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  при достаточно большом  $k$ . В смысле этой аппроксимации мы и будем говорить, что пространство  $\Omega^a$  наделяется структурой многообразия.

В частности, с каждой точкой  $\gamma \in \Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  можно связать бесконечномерное линейное пространство  $T_\gamma \Omega$ , которое естественно представлять себе как «касательное» пространство к  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  в точке  $\gamma$ . Им является линейное пространство всех кусочно-гладких векторных полей на  $\mathbb{R}^n$  вдоль (это не означает параллельно) пути  $\gamma$ . Вариацией по параметру  $u \in [-\epsilon, \epsilon]$  пути  $\gamma$ , оставляющей точки  $p$  и  $q$  неподвижными, называется отображение  $\lambda(u)$  отрезка  $[-\epsilon, \epsilon]$  в  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ , такое, что  $\alpha_\gamma(0) = \gamma$  и отображение  $\gamma_\gamma(u)(\sigma)$  отрезка  $[-\epsilon, \epsilon]$  в  $\mathbb{R}^n$  является гладким на каждой гладкой полосе  $\sigma_i \leq \sigma \leq \sigma_{i+1}$  (рис. 28). Поскольку при каждом фиксированном  $u$  мы получаем кусочно-гладкий путь  $\alpha_\gamma(u)(\sigma)$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_\gamma(u)$  можно рассматривать как траекторию в  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  и определить ее вектор скорости

$$v = \left. \frac{d\alpha_\gamma(u)}{du} \right|_{u=0} \quad (\text{П.III.3})$$

в точке  $\gamma = \alpha_\gamma(0) \in \Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ . Поле  $v(\sigma)$  является кусочно-гладким векторным полем вдоль  $\gamma$  и, следовательно, принадлежит  $T_\gamma \Omega$ . Обратно, для всякого поля

$v \in T_\gamma \Omega$  существует траектория  $\alpha_\gamma(u) \subset \Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ , такая, что

$$\left. \frac{d\alpha_\gamma(u)(\sigma)}{du} \right|_{u=0} = v(\sigma).$$

Таким образом, имеет место точная аналогия с касательным пространством к конечномерному многообразию.

В частности, пусть  $F(\gamma)$  — вещественный функционал на  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ . Рассмотрим производную

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} F(\alpha_\gamma(u)) \right|_{u=0}. \quad (\text{П.III.4})$$

Если эта производная существует, то она имеет смысл производной по направлению  $v$ , определяемому согласно (П.III.3) в точке  $\gamma \in \Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$ .

Аналогично пространству  $\Omega(\mathbb{R}^n, p, q)$  может быть рассмотрено пространство  $\Omega\mathbb{R}^n$  замкнутых путей в  $\mathbb{R}^n$ .

#### Приложение IV. КОГОМОЛОГИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПУЧКАХ

Начнем с определения предпучка и пучка [79]. Предпучок считается заданным на топологическом пространстве  $X$ , если каждому открытому множеству  $U \subset X$  сопоставлена некоторая абелева группа  $S_U (S_\emptyset = 0)$ , а каждой паре открытых множеств  $V \subset U$  сопоставлен гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \rightarrow S_V,$$

такой, что

$$\text{а) } r_U^U = \text{Id}_{S_U};$$

$$\text{б) } r_W^U = r_W^V r_V^U \text{ для } W \subset Z \subset U.$$

**Пример IV.1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $S_U$  — абелева группа по сложению всех непрерывных вещественных функций, определенных на  $U \subset X$ , а гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \rightarrow S_V$$

определяется как сужение их на  $V \subset X$ . Тогда  $S = \{S_U, r_V^U\}$  — предпучок.

Следующая конструкция позволяет каждому предпучку сопоставить специального вида расслоение (накрытие)  $(S(X), \pi, X)$ , называемое пучком.

1. Для каждой точки  $x \in X$  обозначим  $S_x$  прямой предел абелевых групп  $S_U, x \in U$  по отношению к гомоморфизмам  $r_V^U$ . По определению это означает, что для каждой открытой окрестности  $U$  точки  $x$  каждый элемент  $s \in S_U$  определяет некоторый элемент  $s_x \in S_x$ , называемый ростком элемента  $s$  в точке  $x$ . Причем два элемента  $s \in S_U$  и  $s' \in S_{U'}$  определяют один и тот же росток тогда и только тогда, когда существует такая окрестность  $W \ni x$ , что

$$r_W^U s = r_W^{U'} s'.$$

В частности, если  $s$  и  $s'$  — вещественные функции из примера IV.1, они определяют один и тот же росток  $s_x$ , если совпадают на некоторой окрестности  $W$  точки  $x$ .

2. Прямой предел  $S_x$  абелевых групп  $S_U$  (он называется *стеблем пучка*) является абелевой группой (это неверно для неабелевых групп). Пусть  $S(X)$  — объединение всех групп  $S_x$ ,  $x \in X$ . Введем на этом множестве топологию. Для каждого открытого множества  $U \subset X$  и каждого элемента  $s \in S_U$  обозначим  $S(U)$  подмножество множества  $S(X)$ , состоящее из всех ростков  $s_x$ ,  $x \in U$ , элемента  $s$ . Семейство всех множеств  $S(U)$  ( $U$  пробегает всевозможные открытые множества пространства  $X$ , а  $s$  пробегает все элементы из  $S_U$ ) образует базу топологии, вводимой в  $S$ .

3. Пусть  $\pi: S(X) \rightarrow X$  — отображение, переводящее каждый из стеблей  $S_x$ ,  $x \in X$ , в соответствующую точку  $x \in X$ . Согласно определению топологии в  $S(X)$  это отображение непрерывно, и тройка  $P = (S(U), \pi, X)$  образует расслоение. Слоем этого расслоения над точкой  $x \in X$  является стебель  $S_x = \pi^{-1}(x)$ , на котором индуцируется дискретная топология (ее базу составляют сами элементы  $s_x \in S_x$ ).

**Пример IV.2.** Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $S_U$  — абелева группа всех постоянных вещественных функций на  $U$ . Росток  $s_x$  элемента  $s \in S_U$ ,  $x \in U$ , однозначно определяется значением  $s(x)$  в точке  $x$ . Стеблем  $S_x$  является множество действительных чисел  $\mathbb{R}$ , в котором введена дискретная топология. Пучок  $P = (S(X), \pi, X)$  называется *постоянным пучком с коэффициентами в  $\mathbb{R}$* .

Пучок, порождаемый предпучком из примера IV.1, называется *пучком ростков непрерывных функций*. Соответственно, если  $X$  — многообразие, определяется пучок ростков гладких функций.

Два разных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Например, тот же пучок ростков непрерывных функций порождается и предпучком только ограниченных функций.

По пучку можно построить предпучок. Обозначим  $\Gamma(U, P)$  множество всех сечений расслоения  $P$  над  $U \subset X$ . Оно наделено структурой абелевой группы, нулем которой является нулевое сечение  $x \rightarrow 0_x$ . Сопоставим каждому открытому множеству  $U \subset X$  группы  $\Gamma(U, P)$  (при  $U = \emptyset$  группу  $\{\Gamma(U, P)\}$  по определению считаем нулевой) и любым двухоткрытым множествам  $U$  и  $V \subset U$  — гомоморфизм

$$r_V^U: \Gamma(U, P) \rightarrow \Gamma(V, P),$$

относящий каждому сечению пучка  $P$  над  $U$  его ограничение на  $V$ . В результате получим предпучок  $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$ , называемый *каноническим предпучком* пучка  $P$ . Можно показать, что пучок, порождаемый предпучком  $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$ , совпадает с пучком  $P$ .

Для пучка ростков непрерывных функций  $\Gamma(U, P)$  — абелева группа непрерывных вещественных функций на  $U$ , т. е.  $\Gamma(U, P) = S_U$ .

Пусть пучок  $P$  порожден некоторым предпучком  $\{S_U, r_V^U\}$ . Сопоставим каждому элементу  $s \in S_U$  сечение  $h_U(s)$  пучка  $P$  над  $U$ , сопоставляющее всякой точке  $x \in U$  росток  $s_x$  элемента  $s$  в точке  $x$ . Это сопоставление  $s \rightarrow h_U(s)$  определяет гомоморфизм абелевых групп

$$h_U: S_U \rightarrow \Gamma(U, P).$$

Эти гомоморфизмы перестановочны с гомоморфизмами  $r_V^U$ , т. е.

$$r_V^U h_U = h_V r_V^U,$$

и определяют гомоморфизм предпучка  $\{S_U, r_V^U\}$  в предпучок  $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$ . В общем случае этот гомоморфизм не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

Прежде чем перейти к когомологиям, рассмотрим точные последовательности предпучков и пучков.

Пусть имеется последовательность предпучков над одним и тем же топологическим пространством

$$\dots \rightarrow S^q \rightarrow S^{q+1} \rightarrow S^{q+2} \rightarrow \dots,$$

(П. IV.1)

где стрелки обозначают гомоморфизмы пучков. Пусть для каждого  $U \subset X$  соответствующая последовательность предпучков

$$\dots \rightarrow S_V^q \rightarrow S_V^{q+1} \rightarrow S_V^{q+2} \rightarrow \dots \quad (\text{П. IV.2})$$

является точной, т. е. образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром последующего. Тогда последовательность (П. IV.1) тоже является точной. При переходе к прямому пределу свойство точности последовательности сохраняется. Поэтому для каждой точки  $x \in X$  индуцируемая последовательностью (П. IV.2) последовательность стеблей

$$\dots \rightarrow S_x^q \rightarrow S_x^{q+1} \rightarrow S_x^{q+2} \rightarrow \dots, \quad (\text{П. IV.3})$$

тоже является точной. Последовательность (П. IV.3) для каждого определяет последовательность пучков

$$\dots \rightarrow P^q \rightarrow P^{q+1} \rightarrow P^{q+2} \rightarrow \dots, \quad (\text{П. IV.4})$$

порождаемых предпучками  $S^q$ , где стрелки обозначают послойные отображения расслоений, тождественные на базе  $X$  и являющиеся гомоморфизмами абелевых групп на слоях. Из точности последовательности (П. IV.3) следует точность последовательности (П. IV.4). Таким образом, точность последовательности предпучков (П. IV.1) приводит к точности последовательности порождаемых этими предпучками пучков (П. IV.4).

Последовательность пучков (П. IV.4) индуцирует последовательность групп сечений

$$\dots \rightarrow \Gamma(U, P^q) \rightarrow \Gamma(U, P^{q+1}) \rightarrow \Gamma(U, P^{q+2}) \rightarrow \dots, \quad (\text{П. IV.5})$$

но важно отметить, что эта последовательность не является, вообще говоря, точной, хотя образует коцепной комплекс, поскольку гомоморфизм

$$P^q \rightarrow 0 \in P^{q+2}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\Gamma(U, P^q) \rightarrow 0 \in \Gamma(U, P^{q+2}).$$

**Когомологии со значениями в пучках.** Перейдем теперь непосредственно к определению когомологий со значениями в пучках [6]. Пусть  $S$  — некоторый предпучок над топологическим пространством  $X$  и пусть  $\{U_i\}_{i \in I}$  — открытое покрытие  $X$ . Определим в качестве  $p$ -мерной коцепи (покрытия  $U$  с коэффициентами в  $S$ ) функцию  $f$ , сопоставляющую каждой последовательности  $(i_0, \dots, i_p)$  индексов из множества  $I$  некоторый элемент  $f(i_0, \dots, i_p)$  группы

$$S_V, \quad V = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

Все такие  $p$ -мерные коцепи очевидным образом образуют абелеву группу  $C^p(\{U_i\}, U)$  относительно формального сложения, а формула

$$(\delta^p f)(i_0, \dots, i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}),$$

$$W = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}, \quad W_k = U_{i_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{i_k} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}},$$

определяет гомоморфизм

$$\delta^p: C^p(\{U_i\}, S) \rightarrow C^{p+1}(\{U_i\}, S).$$



Легко проверить, что

$$\delta^{p+1}\delta^p = 0$$

и определены группы когомологий

$$H^p(\{U\}, S) = \text{Ker } \delta^p / \text{Im } \delta^{p-1}.$$

Эти группы зависят от покрытия  $\{U\}$ . Пусть покрытие  $\{V\}$  вписано в покрытие  $\{U\}$  (т. е. если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то  $V_i \subset U_i$ ). Как можно показать, что индуцирует гомоморфизм

$$H^p(\{U\}, S) \rightarrow H(\{V\}, S)$$

и, беря прямой предел групп  $H^p(\{U\}, S)$  по отношению к этим гомоморфизмам, где  $\{U\}$  пробегает все покрытия пространства  $X$ , получаем определение *групп когомологий*  $H^*(X, S)$  пространства  $X$  с коэффициентами в предпучке  $S$ .

Группами когомологий  $H^*(X, P)$  со значениями в пучке  $P$  называются группы когомологий со значениями в каноническом пучке  $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$ . Если  $X$  — паракомпактное пространство, группы когомологий со значениями в предпучках  $S$ , порождающих один и тот же пучок  $P$ , изоморфны группам  $H^*(X, P)$ .

Группа  $H^0(X, P)$  по определению изоморфна группе глобальных сечений  $\Gamma(X, P)$  пучка  $P$ .

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств. Для всякого пучка  $P$  над  $Y$  оно индуцирует пучок (расслоение)  $f^*P$  над  $X$  (см. § 13) и определяет гомоморфизм групп когомологий

$$f^*: H(Y, P) \rightarrow H(X, f^*(P)).$$

Пучок  $P$  над паракомпактным пространством  $X$  называется *тонким*, если для любого локально конечного открытого покрытия  $\{U_i\}$  пространства  $X$  существует семейство гомоморфизмов пучков  $\{h_i: P \rightarrow P\}$ , такое, что:

а) для всякого  $i$  найдется замкнутое множество  $A_i$ , такое, что  $A_i \subset U_i$  и  $h^i(S_x) = 0$  для  $x \notin A_i$ , где  $S_x$  — стебель в  $P$  над  $x$ ;

$$б) \sum_i h_i(S_x) = \text{Id}_{S_x}.$$

**Пример IV.3.** Пучок ростков непрерывных вещественных функций на  $X$  является тонким. Чтобы это показать, выберем в качестве  $h_i$  умножение на функции  $\varphi_i$ , составляющие разбиение единицы для пространства  $X$ . Аналогично устанавливается тонкость пучков ростков гладких функций и внешних дифференциальных  $p$ -форм на гладком многообразии  $X$ .

**Теорема.** Группы когомологий  $H^p(X, P)$ ,  $p > 0$ , паракомпактного пространства  $X$  с коэффициентами в тонком пучке  $P$  равны нулю.

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{h} P_0 \xrightarrow{h_1} P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_p \xrightarrow{h_p} \dots \quad (\text{П. IV.6})$$

над паракомпактным пространством  $X$ . Эта последовательность называется *резольвентной пучка*  $P$ , если группы когомологий

$$H^q(X, P) = 0, \quad q > 0,$$

для всех  $q$  и  $p$  (например, когда все пучки  $P_p$  тонкие). Последовательность (П. IV.6) определяет коцепной комплекс

$$0 \rightarrow \Gamma(X, P) \xrightarrow{h_*} \Gamma(X, P_0) \xrightarrow{h_*^0} \Gamma(X, P_1) \rightarrow \dots \quad (\text{П. IV.7})$$

групп глобальных сечений пучков  $P, P_0, \dots$ , который, вообще говоря, точен только в членах  $\Gamma(X, P)$  и  $\Gamma(X, P_0)$ . Имеет место следующая важная теорема.

**Теорема.** Рассмотрим резольвенту (П. IV.6) пучка  $P$  над паракомпактным пространством  $X$ . Тогда  $q$ -я группа когомологий комплекса (П. IV.7) изоморфна группе когомологий  $H^q(X, P)$ , т. е.

$$H^1(X, P) = \text{Ker } h_*^1 / \text{Im } h_*^0, \quad q > 0; \quad H^0(X, P) = \text{Ker } h_*^0.$$

Пусть, в частности,  $P$  — постоянный пучок с коэффициентами в  $\mathbb{R}$  из примера IV.2 (будем обозначать его  $R$ ), а  $P_q$  — пучки ростков внешних  $q$ -форм на гладком многообразии  $X$ . Рассмотрим последовательность

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{d^1} P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_p \rightarrow \dots, \quad (\text{П. IV.8})$$

где  $d^*$  — гомоморфизм ростков  $q$ -форм, порождаемых внешним дифференцированием форм. Последовательность (П. IV.8) точна, поскольку росток всякой замкнутой формы является и ростком некоторой точной формы. Так как все пучки  $P_p$  тонкие, то последовательность (П. IV.8) является резольвентой для  $P$ . Она определяет комплекс де Рама

$$0 \rightarrow R \rightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \rightarrow \dots$$

внешних дифференциальных форм на  $X$ , и в силу предыдущей теоремы получаем изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbb{R})$$

групп когомологий де Рама  $H^p(X)$  и групп когомологий  $H^p(X, \mathbb{R})$  гладкого многообразия  $X$  с коэффициентами в постоянном пучке  $R$ .

#### Приложение V. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Детальное описание этого пространства можно найти в работе [45].

Покажем сначала, что группа  $G(X)$  калибровочных преобразований второго рода является (бесконечномерной) группой Ли.

Пусть  $G$  — полупростая компактная подгруппа Ли группы матриц  $GL(n, \mathbb{C})$  и, следовательно, подмножество алгебры комплексных  $(n \times n)$ -матриц  $L(n, \mathbb{C})$ . Рассмотрим главное расслоение  $\lambda_G$  над замкнутым ориентируемым многообразием  $X^n$ , снабженным римановой метрикой, и ассоциированное с  $\lambda_G$  расслоение  $\Lambda$  с типичным слоем  $L(n, \mathbb{C})$ , в котором структурная группа  $G$  действует по присоединенному представлению. Пространство  $\Gamma(\Lambda)$  (гладких) глобальных сечений этого расслоения наделено структурой бесконечномерной алгебры относительно операции поточечного умножения:

$$(ss')(x) = s(x)s'(x) \quad s, s' \in \Gamma(\Lambda).$$

Ясно, что  $G(X) \subset \Gamma(\Lambda)$ .

Зададим на  $\Gamma(\Lambda)$  топологию, а на  $G(X)$  индуцированную топологию, так что  $G(X)$  станет топологической группой.

Фиксируем какой-либо атлас  $\Psi = \{U_i, \varphi_i\}$  расслоения  $\Lambda$  и координатный атлас  $\Psi_X = \{U_i, \psi_i\}$  многообразия  $X$ . На  $\Gamma(\Lambda)$  можно ввести норму

$$\|s\|_k = \left( \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} |s_i|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} dV \sum_{l=0}^k |s_l(s_i)|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{П. V.1})$$

где

$$\|f\|^2 = \text{Tr } ff^*, \quad f \in L(n, \mathbb{C}), \quad D^l = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = l,$$

$dV$  — элемент объема относительно римановой метрики на  $X^n$ .

Обозначим  $\Gamma^k(\Lambda)$  пополнение по норме (П.V.1) пространства  $\Gamma(\Lambda)$ , а  $G^k$  — пополнение  $G(\tilde{X})$  по норме, индуцированной на  $G(\Lambda)$ . Пространство  $G^k$  является пространством Соболева. Оно замкнуто в  $\Gamma^k(\Lambda)$  при  $k > n/2$ , и из неравенства Соболева

$$\| |ss'| \|_k \leq \text{const} \| |s| \|_k \| |s'| \|_k \quad (\text{П.V.2})$$

(при  $k > n/2$ ) следует, что групповая операция в  $G^k$  непрерывна в метрической топологии на  $G^k$ . Таким образом,  $G^k$  является топологической группой.

Пусть  $\lambda_A$  — ассоциированное с  $\lambda_G$  расслоение, типичным слоем которого является алгебра Ли  $A_G$  группы  $G$ , на которую группа  $G$  действует по присоединенному представлению, и  $\Gamma(\lambda_A)$  — пространство глобальных сечений  $\lambda_A$ . Ясно, что  $\Gamma(\lambda_A) \subset \Gamma(\Lambda)$  и на  $\Gamma(\lambda_A)$  определена норма типа (П.V.1), где в данном случае

$$\| f \|^2 = \text{Tr} \, f f^*, \quad f \in A_G,$$

— инвариантная метрика на алгебре Ли  $A_G$ . Пополняя  $\Gamma(\lambda_A)$  по этой норме, получим пространство Соболева  $\Gamma^k(\lambda_A) \subset \Gamma^k(\Lambda)$ . Это бесконечномерное полное нормированное векторное, т. е. гильбертово, пространство.

Задавая поточечное экспоненциальное отображение

$$\Gamma^k(\lambda_A) \ni \alpha(x) \rightarrow g(x) = \exp \alpha(x) \in G^k, \quad (\text{П.V.3})$$

можно определить отображение некоторой окрестности  $U^k(0)$  нуля в  $\Gamma(\lambda_A)$  на некоторую окрестность единицы  $N^k(\hat{1})$  в  $G^k$ . Используя неравенство (П.V.2), удастся показать, что это отображение дифференцируемо

$$\exp(\alpha + \delta) \exp(-\alpha) = \exp(\mu(\alpha)\delta + r(\delta, \alpha)),$$

$$\mu(\alpha)\delta = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(q+1)!} [\dots [\delta, \alpha] \alpha] \dots \alpha], \quad (\text{П.V.4})$$

$$\| \mu(\delta, \alpha) \|_k \leq c(\alpha) \| \delta \|_k^2.$$

Более того, оно является диффеоморфизмом и определяет карту дифференцируемого многообразия в окрестности  $N^k(\hat{1})$  единицы группы  $G^k$ . Координатой элемента  $g \in N^k(\hat{1})$  в такой карте является элемент  $\alpha \in U^k(0)$ , такой, что  $g = \exp \alpha$ .

Пусть  $M^k(\hat{1}) \subset N^k(\hat{1})$  — окрестность единицы в  $G^k$ , такая, что

$$M^k = (\hat{1})M^k(\hat{1}) \subset N^k(\hat{1}).$$

Тогда для любых  $g, g' \in M^k(\hat{1})$

$$gg' = (\exp \alpha) \exp(\alpha') = \exp \left( \alpha + \alpha' + \frac{1}{2} [\alpha, \alpha'] + \dots \right),$$

и группа  $G^k$  является локальной группой Ли с алгеброй Ли  $\Gamma^k(A_G)$ .

Структуру многообразия и группы Ли, определяемую экспоненциальным отображением (П.V.3) в некоторой окрестности единицы группы  $G^k$ , можно правыми сдвигами распространить на всю группу  $G^k$ , а именно, координатой элемента

$$g \in M^k(a) = M^k(\hat{1})a$$

вблизи точки  $a \in G^k$  является элемент  $\alpha \in \Gamma^k(\lambda_A)$ , такой, что  $g = (\exp \alpha)a$ . Ем самым  $G^k$  наделяется структурой многообразия гильбертова типа (т. е. морфизмы  $\varphi_i$  атласа такого многообразия — отображения не в  $\mathbb{R}^n$ , а в бесконечномер-

ное гильбертово пространство) и является группой Ли с алгеброй Ли  $\Gamma^k(\lambda_A)$ . Опишем теперь действие группы  $G^k$  в пространстве локальных 1-форм связности  $A$  на расслоении  $\lambda_G$ .

Введем  $\Gamma_{k+1-p}^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^p})$  пространство Соболева  $p$ -форм ( $p=0, 1, \dots$ ) на  $X^n$  со значениями в расслоении  $\lambda_A$  (т. е. пространство сечений расслоения  $\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^p}$  с нормой типа (П.V.1) класса  $(k+1-p)$ . Это гильбертово пространство, и для

$$\sigma, \sigma' \in \Gamma_{k+1-p}^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^p})$$

выполняется неравенство Соболева ( $k > n/2+1$ )

$$\| [\sigma, \sigma'] \|_{k+1-p} \leq \text{const} \| \sigma \|_{k+1-p} \| \sigma' \|_{k+1-p}. \quad (\text{П.V.5})$$

Пусть  $A, A'$  — 1-формы связности. Их разность есть 1-форма со значениями в  $\lambda_A$ , т. е.

$$A - A' = \tau \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1}).$$

Это значит, что пространство форм  $A$  наделяется структурой аффинного пространства и представление  $A' = A + \tau$  вводит на нем систему координат  $A' \rightarrow \tau$  и функцию расстояния типа (П.V.1):

$$\| A - A' \|_k = \| \tau \|_k, \quad \tau \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1}).$$

Обозначим  $A^k$  пространство Соболева связности  $A$ . Рассмотрим калибровочное преобразование

$$A^k \times G^{k+1} \ni (A, g) \rightarrow Ag = (A - g^{-1}D_A g) \in A^k, \quad (\text{П.V.6})$$

где  $D_A = d - [A, \ ]$  — оператор внешнего ковариантного дифференцирования. Действие (П.V.6) группы  $G^k$  на  $A^k$  дифференцируемо. В координатах

$$A' \rightarrow \tau (A' = A + \tau), \quad g \rightarrow \alpha (g = (\exp \alpha)a),$$

оно имеет вид

$$\Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1} \times G^{k+1}) \rightarrow \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1}),$$

$$(\tau, \alpha) \rightarrow f(\tau, \alpha) = -a^{-1}D_A \alpha - a^{-1} \exp(-\alpha) D_A (\exp \alpha) a + a^{-1} \exp(-\alpha) \tau (\exp \alpha) a. \quad (\text{П.V.7})$$

Чтобы доказать его дифференцируемость, надо показать, что при малых приращениях

$$\tau + \delta\tau, \quad \alpha + \delta\alpha$$

функция  $f$  представима в виде

$$f(\tau + \delta\tau, \alpha + \delta\alpha) = f(\tau, \alpha) + f'_\tau(\tau, \alpha)\delta\tau + f'_\alpha(\tau, \alpha)\delta\alpha + r_1(\delta\tau, \delta\alpha, \tau, \alpha) + r_2(\delta\tau, \delta\alpha, \tau, \alpha),$$

где

$$f'_\tau : G^{k+1} \ni \delta\tau \rightarrow f'_\tau \delta\tau \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1}),$$

$$f'_\alpha : \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1}) \ni \delta\alpha \rightarrow f'_\alpha \delta\alpha \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\mathbb{R}^1})$$

$$A' \rightarrow \mathcal{T} \quad (A' = A + \mathcal{T}), \quad g \rightarrow \alpha \quad (g = (\exp \alpha) a),$$

оно имеет вид

$$\Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}) \times G^{k+1} \rightarrow \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}),$$

$$(\mathcal{T}, \alpha) \rightarrow f(\mathcal{T}, \alpha) = -a^{-1} D_A \alpha - \quad (\text{П.}\bar{\text{Y}}.7)$$

$$- a^{-1} \exp(-\alpha) D_A (\exp \alpha) a + a^{-1} \exp(-\alpha) \mathcal{T} (\exp \alpha) a.$$

Чтобы доказать его дифференцируемость, надо показать, что при малых приращениях

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} + \delta \mathcal{T}, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha$$

функция  $f$  представляется в виде

$$f(\mathcal{T} + \delta \mathcal{T}, \alpha + \delta \alpha) = f(\mathcal{T}, \alpha) + f'_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \alpha) \delta \mathcal{T} + f'_{\alpha}(\mathcal{T}, \alpha) \delta \alpha + \tau_1(\delta \mathcal{T}, \delta \alpha, \mathcal{T}, \alpha) + \tau_2(\delta \mathcal{T}, \delta \alpha, \mathcal{T}, \alpha),$$

где

$$f'_{\mathcal{T}} : G^{k+1} \ni \delta \mathcal{T} \rightarrow f'_{\mathcal{T}} \delta \mathcal{T} \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}),$$

$$f'_{\alpha} : \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}) \ni \delta \alpha \rightarrow f'_{\alpha} \delta \alpha \in \Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1})$$

— линейные непрерывные отображения, а величины  $\|\tau_i\|_k \leq \|\delta \mathcal{T}\|_k + \|\delta \alpha\|_k$

более чем первого порядка малости по  $\|\delta \alpha\|_{k+1}$  и  $\|\delta \mathcal{T}\|_{k+1}$ .

Это можно получить, используя представления (П.}\bar{\text{Y}}.7) и (П.}\bar{\text{Y}}.4),

когда

$$f'_{\mathcal{T}} \delta \mathcal{T} = a^{-1} \exp(-\alpha) \delta \mathcal{T} (\exp \alpha) a,$$

$$f'_{\alpha} \delta \alpha = -a^{-1} \exp(-\alpha) D_A (\mu(\alpha) \delta \alpha) (\exp \alpha) a,$$

и неравенства Соболева (П.}\bar{\text{Y}}.5), и

$$D_A : \Gamma_{k+1}(\lambda_A) \rightarrow \Gamma_k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}),$$

(сгр 3С5-3С9)

$$\|D_A \tau\|_k \leq \text{const} \|\tau\|_{k+1}.$$

Более того, действительно (П.}\bar{\text{Y}}.6) является бесконечно дифференцируемым.

Опишем пространство классов калибровочно эквивалентных связностей  $\eta$ . Рассмотрим подпространство  $\bar{A}^k \subset A^k$  неприводимых связностей (которые нельзя калибровочным преобразованием перевести в формы связности, принимающие значения в собственной подалгебре алгебры  $A_G$ ). Тогда  $G^{k+1}$  (она не имеет центра, т.е. абелевой инвариантной подгруппы) действует на  $A^k$  свободно. Это означает, что, если  $Ag = A$ , для которого  $A \in \bar{A}^k$ , то  $g$  — единица группы.

Рассмотрим фактор-пространство сферы группы  $G^{k+1}$ :

$$\mathcal{T} : \bar{A}^k \rightarrow \bar{A}^k / G^{k+1} = \eta^k \quad (\text{П.}\bar{\text{Y}}.8)$$

где  $\mathcal{T}$  — каноническая проекция, и снабдим его фактор-топологией. Пространство  $\eta^k$  может быть наделено структурой многообразия, т.е. покрыто областями, каждая из которых гомеоморфна некоторой открытой области гильбертова пространства.

Чтобы сконструировать такое покрытие, воспользуемся калибровочным условием

$$D_A^*(A' - A) = 0, \quad (\text{П.}\bar{\text{Y}}.9)$$

где

$$D_A^* = (-1)^{k+1} \mu(\alpha)^{-1} * D_A * \quad (\text{П.}\bar{\text{Y}}.10)$$

— оператор ковариантного дифференцирования. Можно проверить, что для поля  $A'$ , достаточно близкого к полю  $A$  и удовлетворяющего уравнению (П.}\bar{\text{Y}}.9), никакое поле, полученное из  $A'$  с помощью достаточно малого калибровочного преобразования не может удовлетворять условию (П.}\bar{\text{Y}}.9). Тем самым, это условие из каждого класса калибровочно эквивалентных полей  $A'$  вблизи  $A$  выбирает только одного представителя. Поэтому отображение  $\mathcal{T}$

подмножества пространства  $\bar{A}^k$ , состоящего из точек  $A'$  вблизи  $A$ , удовлетворяющих (П.У.9), на  $\eta^k$  может определять карту на  $\eta^k$  с центром в  $\pi(A)$ .

Реализуем эту конструкцию. Пусть

$$N^k(A) = \{ A' \in \bar{A}^k : \|A - A'\|_k = \|\tau\|_k < \varepsilon \}$$

- карта на  $\bar{A}^k$  с центром в  $A \in A^k$ . Пусть

$$S^k(A) = \{ A' \in \bar{A}^k : D_A^*(A' - A) = D_A^* \tau = 0 \}.$$

Определим множество

$$Q^k(A) = S^k(A) \cup N^k(A).$$

Оно является открытым подмножеством пространства

$$H^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1}) = \text{Ker } D_A^*,$$

когда  $D_A^*$  действует на  $\Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1})$ . Это пространство не зависит от  $A$  с точностью до изоморфизма, является замкнутым подпространством  $\Gamma^k(\lambda_A \otimes \lambda_{\Omega^1})$  и гильбертовым пространством.

Если  $\varepsilon$  достаточно мало, можно показать, что:

для каждого точки  $A' \in N^k(A)$  найдется единственный элемент  $g \in G^{k+1}$  такой, что  $A'g \in U^k(A)$ ;

для всякой пары  $A', A'' \in N^k(A)$  не существует никакого-либо элемента  $g \in G^{k+1}$  такого, что  $A' = A''g$ .

Тогда в силу этих свойств проекция

$$\pi_A = \pi|_{Q^k(A)} : \bar{A}^k \supset Q^k(A) \rightarrow U^k(A) \subset \eta^k$$

является гомеоморфизмом  $Q^k(A)$  на образ  $U^k(A)$  в  $\eta^k$ .

Зададим отображение

$$\bar{\sigma}_A : U^k(A) \rightarrow Q^k(A) \subset \bar{A}^k, \quad \pi_A \bar{\sigma}_A = \text{Id}_{U^k(A)}.$$

Оно является локальным сечением расслоения (П.У.8), и пары  $\{U^k(A), \bar{\sigma}_A\}$  образуют атлас пространства  $\eta^k$  как многообразия. Координатой точки  $q \in \eta^k$  в карте  $(U^k(A), \bar{\sigma}_A)$  является

$$\mathcal{T}_A(q) = A - \bar{\sigma}_A(q),$$

а функциями перехода между картами

$$\bar{\sigma}_{A_1}(q) = \bar{\sigma}_{A_2}(q) g_{A_1}(\bar{\sigma}_{A_2}(q))^{-1},$$

$$\mathcal{T}_{A_1} = A_2 - A_1 + g_{A_1}(\tau_2) D_{A_2} g_{A_1}^{-1}(\tau_2) + \text{Ad } g_{A_1}(\tau_2) \mathcal{T}_{A_2}$$

(см. определение  $g_A$  ниже). Можно показать, что  $\eta^k$  - дифференцируемое многообразие. Оно отделимо, паракомпактно, имеет счетную базу и метризуемо.

Расслоение (П.У.8) представляет собой локально тривиальное главное расслоение со структурной группой  $G^{k+1}$ . Элементом такого расслоения над точкой  $q \in \eta^k$  является орбита группы  $G^{k+1}$  в  $\bar{A}^k$  проецирующая через  $\bar{\sigma}_A(q)$  в карте  $(U^k(A), \bar{\sigma}_A)$ .

Пусть  $(U^k(A), \bar{\sigma}_A)$  - карта на  $\eta^k$ . Рассмотрим отображение

$$\mathcal{U}_A : U^k(A) \times G^{k+1} \ni (q, g) \rightarrow \bar{\sigma}_A(q)g \in \pi^{-1}(U^k(A)).$$

Оно является изоморфизмом. Чтобы это показать, введем отображение

$$g_A : \pi^{-1}(U^k(A)) \rightarrow G^{k+1},$$

которое всякому элементу  $A' \in \pi^{-1}(U^k(A))$  ставит в соответствие элемент  $g_A(A') \in G^{k+1}$  такой, что

$$A' \bar{\sigma}_A^{-1}(A') = \bar{\sigma}_A(\pi(A')).$$

Такой элемент существует и единственен, поскольку группа  $G^{k+1}$  действует на  $\bar{A}^k$  свободно. Причем,

$$g_A(A'g) = g_A(A')g.$$

Определим отображение

$$\psi_A : \pi^{-1}(U^k(A)) \ni A' \rightarrow (\pi(A'), g_A(A')) \in U^k(A) \times G^{k+1}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\psi_A \chi_A = \text{Id}_{(U^k(A) \rightarrow G^{k+1})},$$

$$\chi_A \psi_A = \text{Id}_{\pi^{-1}(U^k(A))},$$

т.е.  $\chi_A = \psi_A^{-1}$  - изоморфизм. Более того, можно показать, что  $\chi_A$  - локальный диффеоморфизм. Пары  $\{U^k(A), \psi_A\}$  образуют атлас расслоения (П.У.8) как локально тривиального главного  $G^{k+1}$ -расслоения.

Расслоение (П.У.8) не обязательно тривиально, например, когда  $G = SU(N)$ ,  $X = S^2$ . Это значит, что оно не всегда имеет тривиальную конформную структуру, тем самым, не всегда возможен выбор калибровки (представителя) сразу для всех классов калибровочно эквивалентных полей.

1. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М., 1984.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981.
4. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., 1977.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории голономии. М., 1984.
6. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
7. Милнор Дж., Стайер Дж. Характеристические классы. М., 1979.
8. Eguchi T., Gilkey P., Hanson A.//Phys. Rep. 1980. V. 66. P. 213.
9. Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М., 1985.
10. Даниэль Д., Виалле С.//УФН. 1982. Т. 136. С. 377.
11. Saunders D. The geometry of jet bundles. N. P.—London, 1989.
12. Unified string theories/Eds. M. Green, D. Cross. Singapore, 1986.
13. Iwanenko D., Landau L.//Zeits. Phys. 1928. V. 48. P. 340.
14. Рахевский П. К.//УМН. 1955. Т. 10. С. 1.
15. Chevalley C. The algebraic theory of spinors. N. Y., 1954.
16. Budinich P., Trautman A.//J. Geom. Phys. 1987. V. 4. P. 361.
17. Craf. W.//Ann. Inst. H. Poincaré. 1978. V. A29. P. 85.
18. Boya L., Carinena J., Mateos J.//Forsch. Phys. 1978. V. 26. Y. 175.
19. Olariu S., Popescu I.//Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 339.
20. Asorey M.//J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 179.
21. Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Yu.//Phys. Lett. 1975. V. B59. P. 85.
22. Schartz A. S.//Phys. Lett. 1977. V. B67. P. 172.
23. Atiah M. F. Geometry of Yang—Mills fields.//Lect. Fermi Acad. Nac. Lincei. Pisa, 1979.
24. Actor A.//Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. P. 461.
25. Atiah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. J., Manin Yu. I.//Phys. Lett. 1978. V. A65. P. 185.
26. Ward R. S.//Phys. Lett. 1977. V. A61. P. 81.
27. Печроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. М., 1987.
28. Osborn H.//Comm. Math. Phys. 1982. V. 86. P. 195.
29. Burzlaff J. Magnetic poles in gauge field theories. Commun. DIAS N 27, ser A. Dublin, 1983.
30. Osborn H.//Nucl. Phys. 1979. V. B159. P. 497.
31. Georgy H., Glashow S. L.//Phys. Rev. 1972. V. D6. P. 2977.
32. 't Hooft G.//Nucl. Phys. 1974. V. 79. P. 276.
33. Dirac P. A. M.//Proc. Roy. Soc. Lond. 1931. V. A133. P. 60.
34. Coddard P., Olive D.//Rep. Math. Phys. 1978. V. 41. P. 1357.
35. Поляков А. М.//Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 194.
36. Богомольный Е. Б.//Ядер. Физ. 1976. Т. 24. С. 449.
37. Prasad M., Sommerfeld C.//Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 760.
38. Julia B., Zee A.//Phys. Rev. 1975. V. D11. P. 2227.
39. Nahm W. In: Monopoles in quantum field theory/Eds. N. Graigie, P. Goddard, W. Nahm. Singapore, 1982. P. 87.
40. Ченг Т. П., Ли Л. Ф. Калибровочная теория элементарных частиц. М., 1987.
41. Faddeev L. D., Popov V. N.//Phys. Lett. 1967. V. B25. P. 29.

42. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М., 1983.
43. Vecchi C., Rouet A., Stora R.//Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287.
44. Mitter P., Viallet C.//Comm. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 457.
45. Babelon O., Viallet C.//Phys. Lett. 1979. V. B85. P. 246.
46. Bonora L., Cotta-Ramusino P.//Comm. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 589.
47. Thierry-Mieg J.//J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2834.
48. Jackiw R. In: Relativity groups and topology 11. Les Houches 1982./Eds. B. Dewitt, R. Stora. Holland, 1984. P. 221.
49. Zumino B. In: Relativity, groups and topology 11. Les Houches 1982./Eds. B. DeWitt, R. Stora. Holland, 1984. P. 1291.
50. Alvarez-Gaume L., Ginsparg P.//Ann. Phys. 1985. V. 161. P. 423.
51. Bonora L., Cotta-Ramusino P., Reina C.//Phys. Lett. 1983. B126. 305.
52. Alvarez O.//Nucl. Phys. 1987. R286. P. 175.
53. 't Hooft G.//Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 8.
54. Морозов А. Ю.//УФН. 1986. Т. 150. С. 337.
55. Gamboa-Savari R. E., Muschietti M. A., Schaposnic F. A., Solomin J. E.//Ann. Phys. 1984. V. 157. P. 360.
56. Dubois-Violette M., Talon M., Viallet C. M.//Ann. Inst. H. Poinc. 1986. V. 44. P. 103.
57. Dubois-Violette M.//J. Geom. Phys. 1986. V. 3. P. 525.
58. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. 1971. V. B37. P. 95.
59. Zumino B.//Nucl. Phys. 1985. V. B253. P. 477.
60. Manes J., Stora R., Zumino B.//Comm. Math. Phys. 1985. V. 102. P. 157.
61. Alvarez-Gaume L., Ginsparg P.//Nucl. Phys. 1984. V. B243. P. 449.
62. Atiyah M., Singer I.//Proc. Nat. Acad. Sci. 1984. V. 81. P. 2597.
63. Martellini M., Reina C.//Ann. Inst. H. Poincare. 1985. V. 43. P. 443.
64. Faddeev L. D., Shatashvily S. L.//Phys. Lett. 1986. V. B167. P. 225.
65. Babelon O., Schaposnic F., Viallet C.//Phys. Lett. 1986. V. B177. P. 385.
66. Harada K., Tsutsui I.//Phys. Lett. 1987. V. B183. P. 311.
67. Ivanenko D., Sardanashevily G.//Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 1.
68. Hehl F., von der Heyde P., Kerlick G., Nester J.//Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 393.
69. Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитационных взаимодействий. М., 1985.
70. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. М., 1986.
71. Кас В.//Comm. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 31.
72. Владимиров В. С., Волович И. В.//ТМФ. 1984. Т. 59. С. 3.
73. Rogers A.//J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 935.
74. Bruzzo U., Cianci R.//Class. Quant. Grav. 1984. V. 1. P. 213.
75. Coqueriaux R., Jadczyk A.//Comm. Math. Phys. 1983. V. 90. P. 79.
76. Кочоплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., 1980.
77. Гитман Д. М., Тютин И. В. Каноническое квантование полей со связями. М., 1986.
78. Бредон Г. Теория пучков. М., 1988.
79. Тредер Г.-Ю. Эволюция основных физических идей. Киев, 1988.
80. Кудрявцев П. С. Курс истории физики. М., 1974.
81. Вьяльцев А. Н. Открытие элементарных частиц. М., 1984.
82. Ataldi E.//Phys. Rep. 1984. V. 111. P. 1.
83. Ivanenko D., Obukhov Yu.//Ann. d. Phys. 1985. V. 42. P. 59.
84. Ахмезер А. И., Рекало М. П. Элементарные частицы. М., 1986.
85. Имшенник В. С., Надежин В. К.//УФН. 1988. Т. 156. С. 561.
86. Лозунов А. А., Лоскутов Ю. М., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М., 1987.
87. Obukhov Yu., Korotki V.//Class. Quant. Grav. 1988. V. 4. P. 1633.
88. Гурелик Г. Е. Размерность пространства. М., 1983.
89. Вьяльцев А. Н. Дискретное пространство-время. М., 1966.
90. Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация. Киев, 1985.

#### Учебное издание

Иваненко Дмитрий Дмитриевич  
Обухов Юрий Николаевич  
Сарданашвили Геннадий Александрович

#### ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Зав. редакцией учебно-методической литературы по физике и математике Е. С. Гридасова. Редактор С. А. Крылов. Художник Е. Н. Волков. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Г. А. Фетисова. Корректор В. В. Кожуткино.

ИБ № 7427

Изд. № ФМ-37. Сдано в набор Подп. в печать  
Формат 60×88<sup>1/8</sup>. Бум. тип. Гарнитура литературная. Печать офсет. Объем  
усл.печ.л. усл.кр.-отг. уч.-изд.л. Тираж экз. Зак. № 1134  
Цена

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8  
Государственного комитета СССР по печати.  
191988, Москва, Хохловский пер., 7