

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НИКАБАДЗЕ МИХАИЛ УШАНГИЕВИЧ

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В МЕХАНИКЕ
МИКРОПОЛЯРНЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТОНКИХ ТЕЛ

МОСКВА
2014

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТОНКИХ ТЕЛ.

– М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. 2014. – 515 с.

Построены новые варианты теорий однослойных (с одним и двумя малыми размерами) и многослойных упругих тонких тел при различных параметризациях областей этих тел. В частности, создан новый тензорный аппарат для описания предложенных параметризаций. Сформулированы фундаментальные теоремы для областей тонких тел при рассмотренных параметризациях. Построена теория моментов относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Получены системы уравнений движения и притока тепла и определяющие соотношения физического и теплового содержаний, а также граничные и начальные условия в моментах. Выведены вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах. Построены корректирующие слагаемые, позволяющие удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях. По способу В.В.Понятовского найдены различные выражения для компонент тензора напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям. Доказано, что способ В.В.Понятовского эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по ортогональным полиномам Лежандра.

Получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Выведены граничные условия. Даны сравнения уравнений некоторых теорий. Сформулирована кинематическая гипотеза для теории тонких тел.

На основании найденных обратных операторов расщеплены уравнения квазистатической задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае и в перемещениях и вращениях в микрополярном случае, а также построен обратный оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды и расщеплены граничные условия. Приведены численные решения некоторых простых задач различных приближений.

Библиография: 529 наименований.

Рецензенты: Ю.И. Димитриенко, профессор
Д.В. Георгиевский, профессор

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Московского университета

Рекомендовано использование монографии в учебном процессе кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского университета

Издательство Попечительского совета механико-математическом
факультете МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании
механико-математического факультета

Оглавление

1	Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства	34
1.1	Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей	34
1.1.1	Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела	35
1.1.2	Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности	36
1.1.3	Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области	37
1.1.4	Мультипликативные базисы	41
1.1.5	Различные семейства символов Кристоффеля	42
1.1.6	Деривационные формулы для мультипликативных базисов	43
1.1.7	Представление единичного (изотропного) тензора второго ранга	43
1.1.8	Представления изотропных тензоров четвертого ранга	44
1.1.9	О ковариантной производной от компонент тензоров	47
1.2	Связь между разными семействами параметризаций области тонкого тела	49
1.2.1	Связь между различными семействами мультипликативных базисов	49
1.2.2	Связь между различными семействами символов Кристоффеля	50
1.2.3	Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора	50
1.3	О компонентах ЕТВР	51
1.3.1	Об основных компонентах ЕТВР и число независимых основных компонент ЕТВР	51
1.3.2	Представления компонент ЕТВР через его основные компоненты переноса при различных семействах параметризации области тонкого тела	53
1.3.2.1	Вектор \mathbf{h} не перпендикулярен к базовым поверхностям	53
1.3.2.2	Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности	56
1.3.2.3	Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности и координатные линии на ней являются линиями кривизны	56
1.4	Выражение различных семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР	59
1.4.1	Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ЕТВР	59
1.4.2	Выражение S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР	60
1.5	Представление компонент вторых тензоров поверхностей посредством основных компонент ЕТВР	61
1.5.1	Представление компонент второго тензора поверхности S посредством основных компонент ЕТВР	62

1.5.2	Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ЕТВР	62
1.5.2.1	Представление средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством основных компонент ЕТВР	64
1.5.2.2	Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3	67
1.5.2.3	О представлении расширенного второго тензора поверхности	73
1.5.3	О тензорах Римана-Кристоффеля в \mathbb{R}^3	74
1.5.4	Тождества Ламе	78
1.6	О тензорах Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3	79
2	Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей, некоторых выражений и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов	89
2.1	Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Моменты тензорных полей их компонент и некоторых дифференциальных операторов . . .	89
2.1.1	Теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности . . .	89
2.1.2	Производящая функция и основные рекуррентные соотношения . .	91
2.1.3	Дополнительные рекуррентные соотношения	92
2.2	Моменты скалярной функции и их производных	96
2.2.1	Моменты скалярной функции	96
2.2.2	Моменты производных $\partial_i f$ и $\partial_i \partial_j f$	97
2.3	Производящая функция и основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева первого рода	100
2.4	Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[0, 1]$	103
2.5	Производящая функция. Основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева второго рода	108
2.6	Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева второго рода на сегменте $[0, 1]$	111
2.7	Моменты тензорного поля, производных и некоторых выражений относительно системы многочленов Чебышева второго рода	113
2.7.1	Моменты производных $\partial_i^p \mathbb{F}(x', x^3)$ и $\partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}(x', x^3)$, $p, q \in \mathbb{N}_0$	115
2.7.2	Моменты некоторых выражений	118
2.8	Моменты компонент тензоров и их производных	121
2.8.1	Моменты компонент вектора	121
2.8.2	Моменты ковариантных производных от компонент вектора	122
2.8.3	Моменты компонент тензора второго ранга	126
2.8.4	Моменты ковариантных производных от компонент тензора второго ранга	128
2.9	Представления и моменты k -го порядка некоторых дифференциальных операторов от тензора	129
2.9.1	Представления и момент k -го порядка градиента от тензора	129
2.9.2	Представления и момент k -го порядка повторного градиента от тензора	131
2.9.3	Представления и моменты k -го порядка дивергенции и ротора от тензора	134
2.9.4	Представления и момент k -го порядка градиента дивергенции от тензора	135
2.9.5	Представления и момент k -го порядка оператора Лапласа от тензора	136

2.9.6 Представления и момент k -го порядка повторной дивергенции тензора 138

3 Представления основных уравнений и определяющих соотношений механики деформируемого твердого тела для теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач 139

3.1 Различные представления уравнений движения механики деформируемого твердого тела при НПOTT 140

3.1.1 Представления уравнений движения классической МДТТ при НПOTT 140

3.1.2 Представления уравнений движения микрополярной МДТТ при НПOTT 144

3.2 Различные формы записи определяющих соотнощений по классической и микрополярной теориям упругости 145

3.2.1 Определяющие соотношения для модели линейного упругого тела . 146

3.2.2 Представления закона Гука по классической теории упругости при НПOTT 153

3.2.3 Представления закона Гука микрополярной теории упругости при НПOTT 155

3.2.3.1 Представления уравнения в перемещениях (Ламе) однородного изотропного материала при НПOTT 157

3.2.4 Представление уравнения в перемещениях однородного изотропного материала для неизотермических процессов при НПOTT 158

3.2.5 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости для неизотермических процессов при НПOTT 159

3.2.5.1 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости однородного изотропного материала при неизотермических процессах 159

3.2.5.2 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости анизотропного материала при неизотермических процессах 159

3.2.6 Момент k -го порядка произведения двух функций относительно системы полиномов Чебышева второго рода 162

3.2.7 Законы термодинамики и теплопроводности Фурье. Уравнение притока тепла, граничные и начальные условия и их представления при НПOTT 163

3.2.7.1 Законы термодинамики. Законы теплопроводности Фурье и уравнение притока тепла 163

3.2.7.2 Граничные и начальные условия теплового содержания . . 166

3.2.7.3 Представление уравнения притока тепла при НПOTT . . . 167

3.2.7.4 Представления закона теплопроводности Фурье при НПOTT 168

3.3 Системы уравнений МДТТТ в моментах 168

3.3.1 Системы уравнений микрополярной МДТТТ в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно системы полиномов Чебышева второго рода . . 169

3.3.1.1 Система уравнений нулевого приближения ($r = 0$) в моментах микрополярной МДТТТ 171

3.3.1.2 Система уравнений первого приближения ($r = 1$) в моментах микрополярной МДТТТ 171

3.3.2 Системы уравнений в моментах относительно системы полиномов Лежандра микрополярной МДТТТ 173

3.3.2.1	Системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях	174
3.3.2.2	Системы уравнений движения первого приближения в моментах относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях	175
3.3.3	Системы уравнений движения в перемещениях и вращениях в моментах	176
3.3.3.1	Системы уравнений в перемещениях (уравнений Ламе) нулевого и первого приближений в моментах	179
3.3.3.2	Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах	180
3.3.3.3	Системы уравнений в перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах	182
3.3.3.4	Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах для однородного упругого анизотропного материала при неизотермических процессах	184
3.3.4	Системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах	186
3.3.5	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах приближений $(0,N)$ и $(1,N)$	188
3.3.6	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Чебышева приближений $(0,N)$ и $(1,N)$	188
3.3.7	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Лежандра приближений $(0,N)$ и $(1,N)$	190
3.3.7.1	Системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0,N)$ и $(1,N)$	190
3.3.7.2	Системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0,N)$ и $(1,N)$	190
3.4	Определяющие соотношения в моментах.	191
3.4.1	Определяющие соотношения микрополярной теории упругости в моментах относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода.	191
3.4.2	ОС микрополярной теории в моментах для неоднородных тел	195
3.4.3	Представления закона теплопроводности Фурье в моментах	197
3.5	О граничных и начальных условиях	199
3.5.1	Граничные условия на лицевых поверхностях. Определение нормирующих функций кинематического и теплового содержания	199
3.5.1.1	Определение нормирующих векторов-функций кинематического содержания для ОС физического содержания нулевого приближения	201
3.5.1.2	Определение нормирующих функций для ОС теплового содержания нулевого приближения	205
3.5.2	Граничные условия в моментах в теории тонких тел	206
3.5.2.1	Кинематические граничные условия в моментах	207
3.5.2.2	Граничные условия физического содержания в моментах	207

3.5.3	Граничные условия теплового содержания в моментах	212
3.5.3.1	Граничные условия первого рода в моментах	212
3.5.3.2	Граничные условия второго рода в моментах	213
3.5.3.3	Граничные условия третьего рода в моментах	213
3.5.4	Начальные условия в моментах	214
3.6	Классификация и постановка задач в теории тонких тел	215
3.6.1	Постановки задач микрополярной ТУТТ в моментах	216
3.7	Построение корректирующего слагаемого, обеспечивающего выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при упрощенном методе редукции	218
3.7.1	Способы определения корректирующих слагаемых при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях	219
3.7.2	Определение корректирующих слагаемых при постановках задач относительно тензоров напряжений и моментных напряжений	226
3.8	О способе В.В.Понятовского удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела при применении систем ортогональных полиномов	228
4	Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных упругих тонких тел с одним малым размером при произвольной базовой поверхности	235
4.1	Параметризации области тонкого тела. Представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения и определяющих соотношений	235
4.1.1	К параметризации области тонкого тела с одним малым размером при произвольной базовой поверхности	235
4.1.1.1	Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела	236
4.1.1.2	Двумерные семейства реперов (базисов)	237
4.1.1.3	Трехмерные семейства реперов (базисов)	238
4.1.1.4	Представление единичного тензора второго ранга	242
4.1.1.5	Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3	242
4.1.2	Представления некоторых дифференциальных операторов	243
4.1.2.1	Представления градиента и дивергенции	243
4.1.2.2	Представления повторного градиента и лапласиана	244
4.1.3	Представления уравнений движения и притока тепла и определяющих соотношений микрополярной теории	244
4.1.3.1	Представления уравнений движения в микрополярной МДТТТ	244
4.1.3.2	Представление уравнения притока тепла в микрополярной МДТТТ	245
4.1.3.3	Представления законов Гука и теплопроводности Фурье	245
4.2	Рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты некоторых выражений. Различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах. Постановки задач	247
4.2.1	Некоторые рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра и Чебышева на сегменте $[-1, 1]$	247
4.2.1.1	Основные рекуррентные соотношения	247
4.2.1.2	Дополнительные рекуррентные соотношения	248
4.2.2	Моменты некоторых выражений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго рода	252

4.2.2.1	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Лежандра	254
4.2.2.2	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышева второго рода	255
4.2.2.3	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышева первого рода	257
4.2.3	Различные представления системы уравнений движения в моментах	258
4.2.3.1	Представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра	259
4.2.3.2	Представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода .	262
4.3	Представления ОС в моментах	263
4.4	О граничных и начальных условиях в микрополярной МДТТТ	264
4.4.1	Граничные условия на лицевых поверхностях	264
4.4.2	Граничные условия в моментах в теории тонких тел	266
4.4.3	Кинематические граничные условия в моментах	267
4.4.4	Физические граничные условия в моментах	267
4.4.5	Граничные условия теплового содержания в моментах	269
4.4.5.1	Граничные условия первого рода в моментах	269
4.4.5.2	Граничные условия второго рода в моментах	269
4.4.5.3	Граничные условия третьего рода в моментах	270
4.4.6	Начальные условия в моментах	270
4.5	Постановки задач в моментах микрополярной ТУТТ	270
4.5.1	Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ	271
4.5.2	Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N)	271
4.5.3	Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ	271
5	Метод ортогональных полиномов при математическом моделировании микрополярных упругих тонких тел с двумя малыми размерами	273
5.1	К параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами. Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения. Рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра	273
5.1.1	К формулам Серре-Френе и параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами	273
5.1.1.1	К классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами прямоугольного поперечного сечения	274
5.1.1.2	К новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами	276
5.1.1.3	К параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии	281
5.2	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами	283
5.2.1	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами	283

5.2.2	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами	284
5.2.3	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии	284
5.3	Элементы теории моментов. Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода при разных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами	285
5.3.1	Элементы теории моментов	285
5.3.2	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода при различных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами	288
5.3.2.1	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми параметрами	290
5.3.2.2	О граничных условиях при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии	293
5.3.2.3	О граничных условиях при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами	301
5.3.2.4	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами	305
5.4	Представления закона Гука микрополярной теории упругости в моментах при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами	309
5.4.1	Метод нормированных моментов поля тензора напряжений	315
5.4.2	Частично упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной	319
5.4.3	Упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной	323
5.4.4	Постановки задач в теории тонких тел с двумя малыми размерами	328
5.4.4.1	Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной термоупругости тонких тел с двумя малыми размерами	328
5.4.4.2	Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами	329
5.4.4.3	Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ с двумя малыми размерами	330
5.5	Представления системы уравнений движения в моментах при разложении по одной координате	331
5.6	Представление закона Гука в моментах при разложении по одной координате	333
5.6.1	Постановка задач ТУТТ с двумя малыми размерами в моментах при разложении искомых величин по одной координате	337

6	Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных плоских тонких областей	340
6.1	Новая параметризация плоской тонкой криволинейной области	340
6.2	Представления некоторых дифференциальных операторов, дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий	348
6.2.1	Представления градиента, повторного градиента, дивергенции и лапласиана тензора	348
6.2.2	Представления дифференциальных уравнений движения и закона Гука	349
6.2.3	О граничных условиях	351
6.3	Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Некоторые соотношения теории моментов. Представления уравнений движения, определяющих соотношений и граничных условий в моментах. Постановки задач	352
6.3.1	Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра на сегменте $[0,1]$	352
6.4	Представления дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий в моментах относительно системы полиномов Лежандра	352
6.4.1	Представления дифференциальных уравнений движения, в моментах относительно системы полиномов Лежандра	353
6.4.2	Закон Гука в моментах относительно системы полиномов Лежандра	354
6.4.3	Представление граничных условий физического содержания в моментах относительно системы полиномов Лежандра	355
6.4.4	Постановка динамических задач микрополярной теории упругости двумерных тонких областей в моментах	355
7	Применение метода ортогональных полиномов в теории многослойных тонких конструкций	357
7.1	Параметризация многослойной тонкой области трехмерного евклидова пространства с несколькими базовыми поверхностями	357
7.1.1	Векторное параметрическое уравнение слоя α и система векторных параметрических уравнений многослойной тонкой области	358
7.1.2	Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризаций поверхности слоя α	359
7.1.3	Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области слоя α	359
7.1.4	Мультипликативные базисы	363
7.1.5	Деривационные формулы для мультипликативных базисов	364
7.1.6	Представление единичного тензора второго ранга	365
7.1.7	Представление изотропных тензоров четвертого ранга	366
7.1.8	О ковариантной производной от компонент тензоров	366
7.2	Связи между различными семействами параметризаций многослойной тонкой области	368
7.2.1	Связи между различными семействами мультипликативных базисов	369
7.2.2	Связи между различными семействами символов Кристоффеля, .	369
7.2.3	Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора	370
7.3	О компонентах ЕТВР	371
7.4	Выражение различных семейств символов Кристоффеля данного слоя через основные компоненты ЕТВР того же слоя	371
7.4.1	Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями слоя α , через основные компоненты ЕТВР этого слоя	371

7.4.2	Выражение семейства символов Кристоффеля относительно семейства базисов, связанного с эквидистантной поверхностью слоя α через основные компоненты ЕТВР	372
7.5	Системы уравнений движения в моментах многослойных тонких тел с одним малым размером	374
7.5.1	Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно систем полиномов Чебышева многослойных тонких тел с одним малым размером	374
7.5.2	Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно систем полиномов Лежандра многослойных тонких тел с одним малым размером	374
7.5.3	Системы уравнений в моментах вектора перемещений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева многослойных тонких тел с одним малым размером	375
7.5.4	Межслойные контактные условия	376
7.5.5	Условия спаянности (полного, идеального контакта)	377
7.5.6	Условия при относительном перемещений точек контактирующих поверхностей слоев	377
7.5.6.1	Условия при относительном перемещений точек идеальных (гладких) контактирующих поверхностей слоев	378
7.5.6.2	Условия при относительном перемещений точек шероховатых контактирующих поверхностей слоев	380
7.5.6.3	Условия при частичном отслаивании контактирующих поверхностей слоев	381
8	Вариационные принципы микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов	383
8.1	О некоторых вариационных принципах в трехмерной микрополярной теории деформируемого твердого тела	383
8.1.1	Некоторые определения и интегральные соотношения	383
8.1.2	Вариационный принцип Лагранжа (теорема Лагранжа)	388
8.1.3	Об условиях совместности в линейной микрополярной теории	390
8.1.4	Статическая (квазистатическая) задача в микрополярной МДТТ в напряжениях и моментных напряжениях	390
8.1.5	Вариационный принцип Кастильяно (теорема Кастильяно)	390
8.1.6	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера	392
8.2	О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории однослойных тонких тел	397
8.2.1	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером при новой параметризации области тела	398
8.2.2	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером в моментах при новой параметризации области тела	399
8.3	О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории многослойных тонких тел	408
8.3.1	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тонких тел с одним малым размером при полном контакте слоев	409

8.3.2	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тонких тел с одним малым размером при наличии областей ослабленной адгезии	412
8.3.2.1	Модель типа скачка. Векторы межфазных (межслойных) перемещений и вращений. Векторы обобщенных межфазных сил и моментов	413
8.3.3	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в теории многослойных тонких тел в моментах относительно систем ортогональных полиномов при наличии областей ослабленной адгезии	416
9	Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и пластин. Сравнения различных теорий. Некоторые задачи	418
9.1	К параметризации области оболочки	418
9.2	Уравнения микрополярной теории оболочек	420
9.2.1	Уравнения микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов	422
9.2.2	Уравнения микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов	423
9.2.3	Уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов	423
9.3	Вектор усилия и векторы моментных усилий. О граничных условиях микрополярной теории оболочек	425
9.4	Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек	428
9.4.1	Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов	429
9.5	Некоторые вопросы классической моментной теории оболочек	430
9.5.1	Усилия и моменты. Тензор усилий и тензор моментов	430
9.5.2	Расщепляющая пара сил	439
9.5.3	Выражение компонент усилий и моментов через компоненты моментов вектора перемещений	440
9.5.4	Гипотеза о жесткости тонкого тела с одним малым размером в поперечном направлении (деформирование без обжатия)	441
9.5.5	Система уравнений классической моментной теории оболочек в усилиях и моментах	442
9.5.6	Система уравнений классической моментной теории оболочек относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений	443
9.5.7	Система уравнений классической моментной теории пластин относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений	444
9.5.8	Уравнения мембранной (безмоментной) теории оболочек	444
9.6	Задача классической теории упругости в перемещениях	445
9.6.1	О граничных условиях в линейной теории упругости. Тензор-оператор напряжения	446
9.6.2	Статическая (квазистатическая) задача классической теории упругости в перемещениях	447
9.6.3	Статическая (квазистатическая) задача теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и моментах вектора перемещений	447
9.6.4	Системы уравнений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра	447

9.6.4.1	Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях	450
9.6.4.2	Системы уравнений нескольких первых приближений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях	450
9.6.4.3	Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра с учетом статических граничных условий на лицевых поверхностях	452
9.6.4.4	Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Чебышева второго рода при новой параметризации	453
9.7	Задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях	454
9.7.1	Уравнения движения в векторах перемещений и вращений в трехмерной микрополярной теории упругости	454
9.7.2	Уравнения движения в векторах перемещений и вращения трехмерной микрополярной теории не обладающих центром симметрии упругих тел	458
9.7.3	О граничных условиях в линейной трехмерной микрополярной теории упругости. Тензор-оператор напряжения и моментного напряжения	459
9.7.4	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях	463
9.7.5	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений	464
9.7.6	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений при новой параметризации	467
9.7.7	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел с двумя малыми размерами в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений	468
9.7.8	О граничных условиях физического содержания в теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами	472
9.8	Постановки первых краевых задач пятого приближения для классической и микрополярной упругих тонких прямоугольных областей	473
9.8.1	Постановка первой краевой задачи пятого приближения для классической упругой тонкой прямоугольной области	474
9.8.2	Постановка первой краевой задачи пятого приближения для микрополярной упругой тонкой прямоугольной области	474
9.9	Численная реализация некоторых задач	477
9.9.1	Задача для равномерно нагруженной с одной стороны двумерной области	477

9.9.2	Задача для равномерно нагруженной с двух сторон двумерной области	481
9.9.3	Задача, когда на лицевые линии действуют уравновешенные поперечные сосредоточенные силы	481
9.9.4	Задача, когда на лицевые линии действуют сосредоточенные касательные силы	482
9.9.5	Задача для двухслойной двумерной области	483

Введение

Теории оболочек, пластин стержней и многослойных конструкций представляют собой обширную ветвь механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Формы объектов, рассматриваемых в них чрезвычайно разнообразны, точно так же велико число областей техники, в которых они встречаются: в машиностроении это корпуса всевозможных машин, улитки турбин; в приборостроении – гибкие упругие элементы (сильфоны, мембраны, в том числе гофрированные, тарельчатые пружины); в гражданском и промышленном строительстве – покрытия и перекрытия, пандусы, навесы и козырьки; в кораблестроении – корпуса судов, сухих и плавучих доков; в авиационном – фюзеляжи и крылья самолетов; в ракетостроении – корпуса ракет; в подвижном составе железных дорог – кузова вагонов, цистерны, несущие конструкции локомотивов; в других видах наземного транспорта – кузова автомобилей, тракторов; в мостостроении – плиты проезжей части, кессоны, опускные колодцы, сваи-оболочки; в тоннелестроении и, в частности, в метростроении – обделка тоннелей; в гидротехническом строительстве – арочные плотины, затворы; в промышленной аппаратуре – всевозможные емкости (аппаратура химических и ряда других производств), резервуары, бункера; в котлостроении – котлы; в трубопроводах – трубы, компенсаторы и т.п.

Теориям оболочек и многослойных конструкций посвящено несколько десятков тысяч трудов. За последние 50 лет предложено огромное количество различных новых вариантов теории трехслойных [197], многослойных [99, 135] и композитных оболочек волокнистой структуры [39, 314]. Состоялось большое количество всевозможных конференций, симпозиумов и семинаров, в том числе несколько специализированных конференций по теории оболочек и пластин, на которых заслушано несколько сотен докладов. Вышло в свет несколько десятков монографий по различным аспектам теории оболочек. Опубликовано несколько сотен статей в различных сборниках научных трудов и научных журналах. Написано большое количество обзоров литературы, в которых рассмотрены общие и частные вопросы теорий в различные промежутки их развития. Например, в книге [408] приведен обзор литературы по теории оболочек за период с 1967 г. по 1985 г., который включает 621 наименование. Обзор отечественной и зарубежной литературы более раннего периода содержится в [8, 126, 316, 488]. Большинство вариантов предложенных теорий многослойных конструкций подробно рассмотрено в замечательных обзорах [12, 99, 107, 114, 116, 117, 135, 143, 332, 333]. Автору принадлежат обзор литературы [259] по теории многослойных конструкций, который содержит 283 наименования и обзоры по теориям оболочек и многослойных конструкций, приведенные в работе [281] и включающие 976 наименований. В этой связи автор не ставил своей целью рассматривать здесь по этой теме обзор литературы. Хотя, обойтись без упоминания некоторых работ не целесообразно. Поэтому мы ограничимся рассмотрением некоторых работ, касающихся лишь нескольких разделов этих теорий.

Моделирование и расчет многослойных конструкций являются сложной проблемой МДТТ. Затруднения заключаются в

- а) проблеме выбора критерия прочности;
- б) учете разных масштабов;
- в) необходимости учета анизотропии материала.

Проблема выбора критерия прочности до сих пор ждет окончательного решения [506], так как разрушение многослойных оболочечных конструкций – сложный процесс, включающий в себя многочисленные механизмы разрушения, которые в свою очередь имеют

как локальный, так и глобальный характер. Следует отметить, что выбор варианта теории многослойных оболочечных конструкций определяет заранее возможность исследования критических (предельных) состояний конструкции и применение тех или иных критериев прочности.

Композитный материал характеризуется наличием различных масштабных уровней, что также приводит к моделям различной сложности, математическая обработка которых требует особых вычислительных затрат. Естественно, все модели можно строить на микромеханическом уровне (масштаб волокон, частиц в композитном монослое или гофра в среднем слое сэндвича). Однако и в этом случае расчет целой конструкции приводит к неприемлемым в инженерной практике вычислительным затратам. Поэтому наибольшее распространение получили модели, работающие на мезоскопическом уровне (масштаб – толщина слоя). При этом свойствами и геометрией волокон, частиц и т.д. пренебрегают. Вместо этого вводятся так называемые эффективные характеристики слоя, которые определяются либо из микромеханического анализа некоторого характерного объема композита, либо из экспериментальных данных. Следующая масштабная характеристика многослойного композита – толщина всего пакета. Как и в предыдущем случае, свойства определяются либо дальнейшим усреднением (уже эффективным или найденным экспериментально на предыдущем этапе) свойств слоя по толщине пакета, либо экспериментально для всего пакета. Очевидно, что при последнем подходе вычислительные затраты минимальны, но зато это приходится платить утратой возможности исследования процессов локального характера (отслоение, разрыв волокон, разрушение матрицы и т.д.).

Анизотропная природа многослойной оболочечной композитной конструкции приводит к системам связанных дифференциальных уравнений в частных производных. Случаи полной анизотропии на практике, как правило, не встречаются, поскольку каждый слой слоистого композита обладает хотя бы одной плоскостью симметрии, перпендикулярной к нормали срединной плоскости слоя. Это позволяет моделировать композит как моноклинный (моноклиный) материал, который как известно [202, 203, 307, 334, 336], характеризуется 13-ю материальными постоянными. Наличие в матрице жесткости такого анизотропного материала 13 независимых компонент обуславливает появление при растяжении – сдвиговых, а при сдвиге – нормальных деформаций. Хотя надо отметить, что эти эффекты просто усложняют систему разрешающих уравнений и не влияют на методы построения таковых.

Следует отметить, что в настоящее время известно несколько путей (методов) построения теорий многослойных пластин [12, 99, 408]. Они аналогичны методам построения теории однородных пластин [17, 100, 433, 488, 510, 526], основанных на:

- 1) гипотезах о напряженном и/или деформированном состояниях;
- 2) разложении всех геометрических и механических величин в ряды;
- 3) асимптотическом интегрировании;
- 4) представлениях о двумерных средах.

Эти методы различаются возможностями использования в практических расчетах, уровнем математической строгости и т.д. И в то же время они приводят трехмерные системы уравнений в частных производных, которые описывают механическое поведение реальной конструкции, к двумерной, т.е. при расчете многослойных оболочечных конструкций решают систему двумерных дифференциальных уравнений в частных производных.

Первый метод, который еще называют гипотетическим методом [408], ближе всего к инженерным представлениям. Исходная задача упрощается после принятия определенных допущений (гипотез). Такие гипотезы связаны прежде всего с именами Кирхгофа Г. [83, 472], Рейснера Е. [508], Генки Х. [467], Тимошенко С.П. [78, 80–83, 232], Амбарцумяна С.А. [13, 15–17], Левинсона М. [478], Пелеха Б.Л. [322, 324], Хорошуна Л.П. [414, 416],

Черных К.Ф. [423–425], Твалчрелидзе А.К., Твалтвадзе Д.В, Никабадзе М.У. [396], Твалчрелидзе А.К. [397–399], Никабадзе М.У. [234–260, 265] и др. (неклассические гипотезы обычным образом переносятся на случай построения любой теории тонких тел). Различные кинематические модели представлены, например, в работе [479]. См. также [36, 409] и др.

Второй метод связан с разложением в ряды по степеням поперечной координаты [167–170, 378–386, 471, 481, 505], разложением в полиномы Лежандра [222, 389, 406, 410, 487], [19, 62–66, 68, 79, 223, 224], [323, 325, 330, 354–358], [417–422], [2–7, 72–77, 125, 151–154, 521], [261, 263, 264, 266–271, 281, 283–285, 303, 304, 411–413], разложением в ряды по системе заданных функций [58, 59], разложением в многочлены Чебышева [273, 274, 281, 283, 284, 303, 304] и др. (эти разложения с одинаковым успехом используются для построения любой теории тонких тел [163, 291, 294–296, 303, 304]). При таком подходе возникает проблема механической интерпретации членов разложений выше второго порядка.

Третий метод – асимптотическое интегрирование предложено, например, в работах Гольденвейзера А.Л. [87–89, др.]. В математическом плане оно приводит к равномерному приближению решения по всем элементам теории (кинематическим, силовым), т.к. рассматриваются всегда члены одинакового порядка.

Четвертый метод, основанный на представлении о двухмерных средах и называемый еще прямым методом [408], находит достаточно редкое применение, т.к. противоречит традиционным взглядам о представлении результатов расчетов в виде полей напряжений. Такое представление для двухмерных теорий – весьма трудоемкий, а иногда и невыполнимый процесс. О возможностях этого метода можно судить, например, по работам [488, 527].

Теории многослойных пластин можно строить, как было выше сказано, аналогично теориям однослойных пластин. Однако при этом существует два принципиально различающихся метода [99, 116, 117, 507]:

- а) теории, основанные на гипотезе ломаной нормали;
- б) теории, основанные на гипотезе эквивалентного слоя.

Основное различие между этими теориями заключается в представлении о пакете слоев как о совокупности независимых слоев (гипотеза ломаной линии) или как о целостном эквиваленте (гипотеза эквивалентного слоя). Следовательно, число разрешающих уравнений в теориях основанных на гипотезе «ломаной нормали», непосредственно зависит от числа слоев пакета и не зависит для теорий, основанных на гипотезе «эквивалентного слоя». Кроме того, определение некоторых эффективных характеристик многослойного пакета существенно затруднено в теориях «эквивалентного слоя», особенно тогда, когда свойства и толщины слоев сильно различаются, поскольку классические представления о деформациях поперечных сечений здесь не выполняются. Это в свою очередь приводит к сложным кинематическим представлениям, в соответствии с которыми определение эффективных характеристик приходится связывать, как правило, с введением поправочных коэффициентов. Многочисленные дискуссии по поводу правомерности введения поправочных коэффициентов и их механической адекватности свидетельствуют о незавершенности теорий «эквивалентного слоя» и необходимости дальнейших теоретических работ в этом направлении. При использовании гипотезы «ломаной нормали» возникает другая проблема – ошибка, получаемая при неточном описании деформации поперечного сечения каждого слоя. Однако она существенно меньше ошибки, возникшей при построении кинематической модели эквивалентного слоя. Методы построения теорий многослойных пластин обсуждаются в работах [99, 107, 116, 117, 415, 445, 469, 491–494, 507, 511]. Вопросы правильного определения эффективных характеристик и особенно поправочных коэффициентов обсуждены, например, в [11, 480].

Следует заметить, что рассмотренные выше методы построения теорий многослойных пластин переносятся и на случай многослойных оболочек [99, 107, 116, 117, 135]. Анализ

работ, посвященных многослойным оболочкам, позволяет выявить несколько основных методов построения теорий многослойных оболочек. Они сводятся к следующему:

1. Теории, которые строятся на основе гипотезы Корхгофа–Лява для всего пакета слоев. Этому методу посвящена обширная литература, которая подробно отражена в монографиях С.А.Амбарцумяна [14, 16–18], а также [99, 119] и др.

2. Теории, учитывающие поперечный сдвиг (и реже поперечные нормальные деформации и напряжения в слоях) (уточненные теории) [96, 97, 365, 509] и др., на основе «интегральных» гипотез о характере распределения поперечных касательных напряжений или перемещений по толщине всего пакета слоев в целом [14, 16, 17] и др. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоев. Такой метод построения теорий многослойных оболочек называют сейчас феноменологическим или непрерывно-структурным. См. также работы, ссылки на которые приведены выше при рассмотрении первого метода построения теорий многослойных пластин.

3. Теории, учитывающие поперечный сдвиг (а нередко и поперечные нормальные деформации и напряжения в слоях), на основе кинематических гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок системы уравнений теории в этом случае зависит от числа слоев. Этот подход был развит впервые в статье Э.И.Григолюка и П.П.Чулкова [98]. Его называют сейчас дискретным или дискретно-структурным методом. Подробный анализ работ дискретно-структурного направления рассмотрен в [107]. См. также [99, 116, 117] и работы, ссылки на которые приводятся выше при рассмотрении первого метода построения теорий многослойных пластин.

4. Теории, построенные с помощью независимого применения кинематических и статических гипотез и смешанного вариационного принципа. Если при этом гипотезы применяются для всего пакета слоев в целом, то порядок системы уравнений не зависит от числа слоев. Если независимо аппроксимируются перемещения и напряжения в каждом отдельном слое, то порядок системы уравнений зависит от числа слоев.

Недостаток структурного метода, базирующегося на применении кинематических гипотез для каждого слоя, состоит в том, что на границах контакта слоев не выполняются строго условия непрерывности поперечных напряжений. Сложность получающихся при этом уравнений, с одной стороны и относительная простота и ограниченная область применимости феноменологических моделей, с другой стороны, привели к появлению работ, в которых одновременно применяются независимые кинематические и статические гипотезы и смешанный вариационный принцип Рейсснера. Отметим, что такой метод можно рассматривать и как дальнейшее развитие дискретно-структурного метода. Наиболее существенные результаты в этом направлении достигнуты в большом количестве работ [101–104, 108, 112, 113, 189–194].

5. Теории, которые строятся на основе аналитического метода. В этом случае трехмерная задача теории упругости сводится к двумерной задаче теории оболочек путем разложения искомых функций в ряды. Порядок получающихся при этом системы уравнений зависит как от числа слоев, так и от числа удерживаемых членов в разложениях. Этот метод для построения теории трехслойных пластин и оболочек использован в работах [9, 79]. См. также работы, ссылки на которые приведены выше при рассмотрении второго метода построения теорий многослойных пластин. В теории слоистых оболочек наиболее полно он реализован в работах [417–419, 422]. Вектор перемещения каждого слоя аппроксимируется отрезками гипергеометрического ряда от поперечной координаты. При определенном выборе индексов гипергеометрического ряда возможно разложение вектора перемещения по различным полиномам. Если перемещение представлено в виде разложения по полиномам Якоби, то интегрирование уравнений трехмерной нелинейной теории упругости приводит к системе $3s(N + 1)$ уравнений равновесия (s — число слоев, N — порядок

приближения). При соответствующем задании параметров λ и μ , которые входят в полиномы Якоби, можно построить уравнения, в которых аппроксимация производится по ультрасферическим функциям, полиномам Чебышева, Лежандра. В результате построена обобщенная теория толстых многослойных анизотропных непологих оболочек произвольной формы с заданной точностью h^N . Обобщенная теория позволяет при задании определенных параметров автоматически переходить к различным прикладным двумерным теориям, оценивающим напряженно-деформированное состояние слоистых оболочек с заданной точностью. Приведены асимптотический и численный анализ непрерывности уравнений, соответствующих различным вариантам прикладных теорий. На этой основе дана классификация прикладных теорий и рассмотрены области их применимости. В зависимости от сохранения малых членов по сравнению с единицей выделены: классическая теория слоистых оболочек; теории, учитывающие поперечный сдвиг; теории, учитывающие поперечный сдвиг и обжатие; теории толстых оболочек. Существенным моментом предлагаемой классификации теорий многослойных оболочек является введение параметров, учитывающих поперечную анизотропию слоистой оболочки. На основе построенной классификации выделены весьма тонкие слоистые оболочки, тонкие оболочки, оболочки средней толщины, толстые оболочки. Применение систем ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева) продемонстрировано в [163, 281–285, 291, 294–296].

6. Теории, в которых применяются соотношения трехмерной теории для анализа напряженно-деформированного состояния и устойчивости многослойных оболочек.

Применение пространственного подхода к расчету слоистых анизотропных тонкостенных конструкций затруднялось двумя факторами [313]: отсутствием достаточно мощной вычислительной техники и недостаточностью математического обоснования численных методов для решения указанных классов задач. Создание с 80-х годов высокопроизводительных ЭВМ и эффективного системного математического обеспечения практически позволило снять первый фактор с рассмотрения. Проведенные исследования сходимости и устойчивости метода конечных элементов при расчете тонкостенных композитных конструкций позволили считать для этого метода разрешенной и вторую проблему (в том числе и для геометрически нелинейных задач). Впервые пространственный метод был применен для исследования осесимметричного деформирования анизотропных оболочек вращения в линейной постановке в работах [53, 54, 57, 495, 517], в геометрически нелинейной постановке в [105, 106, 220, 309, 427, 428, 495], а также для анализа обобщенной плоской деформации длинных цилиндрических оболочек и панелей в работах [310, 311]. Из исследований в этом направлении следует отметить работы [55, 56, 109–111, 118, 312] и др.

Эти работы показали, что напряженно-деформированное состояние многослойных композитных оболочек и пластин имеет существенно трехмерный характер, при котором нельзя пренебрегать поперечными нормальными напряжениями и деформациями.

7. Теории, построенные посредством асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [85–90]. Этот метод в математическом плане приводит к равномерному приближению решения по всем элементам теории (кинематическим, силовым), так как рассматриваются всегда члены одинакового порядка.

8. Теории, при построении которых применяется метод последовательного дифференцирования соотношений трехмерной теории [68].

Этим (малоизвестным в литературе) методом в [68] построена непротиворечивая моментная теория оболочек. Выведена система уравнений 10-го порядка, которая согласована с пятью независимо задаваемыми физическими или кинематическими условиями. На контуре оболочки можно задавать произвольно значения нормального и касательного усилий, перерезывающей силы, а также изгибающего и крутящего моментов, или пять независимых кинематических условий, например, три компоненты вектора перемещения

произвольной точки и две касательные компоненты его производной относительно скалярной поперечной координаты x^3 на базовой поверхности ($x^3 = 0$). При этом нормальная компонента производной, выражающая удлинения поперечных волокон, определяется в явной форме с помощью пяти названных выше компонент. Следовательно, этот метод можно развить на случай многослойных конструкций. Порядок получающихся при этом системы уравнений будет зависеть как от числа слоев, так и от числа удерживаемых членов в разложениях искомых функций. Вот и, пожалуй, на сегодняшний день все методы построения теорий тонких тел.

Следует отметить, что к настоящему времени развит целый ряд вариантов теорий тонких тел. Анализ опубликованных работ свидетельствует, что создание уточненных теорий оболочек и многослойных конструкций продолжает активно развиваться. При этом нелинейные теории тонких тел находят все более широкое освещение в литературе. Существенно расширился используемый математический аппарат как для реализации уже поставленной проблемы, так и с целью обеспечения новых постановок. Параллельно с теоретическим используется также и экспериментальный путь исследования. Широко применяются численные методы и дискретные расчетные модели. Однако в геометрически нелинейных теориях тонких тел обычно рассматриваются два варианта теорий. В одном учитываются большие прогибы и повороты, но удлинения волокон оболочки считаются малыми. В другом варианте теорий (в основном это касается одномерных теорий – струна, или двумерных – мембрана) рассматриваются большие удлинения, но считаются пренебрежимо малыми сдвиги.

В нелинейных теориях при гипотетическом подходе возникают несколько возможностей формулировок классических гипотез (Кирхгоффа-Лява, Тимошенко и др.). Заметим также, что при таком подходе затруднительно сравнивать численные результаты с экспериментальными. В самом деле, в эксперименте замеры обычно производятся на внешней и внутренней поверхностях тонких тел, а теоретические значения деформаций на этих поверхностях получаются путем применения принятых гипотез по значениям деформаций срединной поверхности. Теории тонких тел с применением систем полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго родов, в которых базовыми поверхностями являются внутренняя и внешняя (т.е. доступные к экспериментальному изучению) создаются впервые.

В принципе любую задачу теории тонких тел можно рассматривать (решать) в трехмерной постановке, которая является более точной в сравнении с двумерной постановкой. Однако реализовать на практике эту возможность в требуемом объеме не всегда удается вследствие чрезмерной сложности решения трехмерных задач и большого разнообразия практически необходимых постановок задач. Кроме того, известны оценки трудоемкости решения одно-, двух- и трехмерных краевых задач, согласно которым повышение размерности задач на единицу повышает трудоемкость решения в 1000 раз [226]. Применительно к задачам механики деформируемого твердого тела эти оценки являются заниженными, поскольку даже в простейшей ее ветви – в теории упругости, многие задачи в точной постановке остаются практически неразрешимыми [321].

Поведение тонких тел, подчиняясь общим законам механики деформируемого твердого тела, зависит также от специфических присущих им закономерностей [331]. Вследствие относительной малости толщины сопротивление оболочки в поперечном направлении существенно слабее сопротивления в тангенциальных направлениях. Уравнения состояния механики трехмерного тела, в том числе и закон Гука, не учитывают этого обстоятельства. Поэтому их непосредственное использование в теории оболочек приводит к существенной ошибке [68]. Специфические закономерности деформирования тонких тел являются физической предпосылкой к построению новых теорий тонких тел.

Следует заметить, что материалы, из которых изготовлены слои многослойных конструкций, могут быть как однородными, так и неоднородными и даже композитными. Например, в трехслойных конструкциях в качестве внешних слоев используются одно-

родные материалы, внутренний же слой состоит либо из мягкого, относительно слоистого материала (различные пены) [96], либо из жесткого [97], а также либо из конструктивно сложного, неоднородного, композитного материала (сотовые заполнители, гофры). В многослойных композитных конструкциях каждый слой сам по себе является композитным материалом. В современных конструкциях зачастую используется сочетание обоих типов слоистых конструкций. Например, трехслойная пластина, имеющая в качестве внешних слоев многослойные пластины, а также элементы, состоящие как из одного, двух и трех, так и существенно большего количества слоев из композитных материалов и волокнистой структуры. В такие многослойные элементы могут быть включены специальные слои, которые, например, демпфируют конструкцию или защищают ее от температурных или коррозионных воздействий. В настоящее время трехслойные и многослойные конструкции, особенно пластины широко применяются в различных областях техники.

Появление и широкое внедрение в различные отрасли техники композитных материалов слоистой и волокнистой структуры вызвало необходимость в разработке новых методов расчета и проектирования тонких тел, изготавливаемых из этих материалов. Оказалось, что классическая теория, которая до этого безраздельно господствовала в прикладных методах расчета тонкостенных конструкций, не способна удовлетворительно описать напряженно-деформированное состояние композитных тонких тел.

Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих вибропоглощающих характеристик. В ряде случаев необходимость применения многослойных тонких тел вызывается конструктивными и эксплуатационными соображениями. Это очень важно при повышенных требованиях к безопасности конструкций, особенно в самолето- и ракетостроении, тем более, что прогресс вычислительной техники обеспечивает возможность проведения все более и более сложных численных расчетов.

Одной из важных задач современной промышленности является постоянная забота о снижении веса конструкций при сохранении надежности ее работы. В этой связи представляется необходимым для полного исследования реального напряженно-деформированного состояния рассматривать теории высоких (второго, третьего и т.д.) приближений, геометрическую и физическую нелинейность, моментные (микроморфные, микрополярные и др.) теории деформируемого твердого тела, а также уточненные способы сведения трехмерных задач к двумерным. Очевидно, новое механическое содержание приводит к новым задачам, нуждающимся в математическом исследовании.

Следует особо отметить, что наблюдающееся в последние годы интенсивное внедрение новых материалов в современное машино- и приборостроение вызвало быстрый рост интереса к изучению зависимости их физико-механических свойств от внутренней структуры. Как известно, синтез материалов с заданными физико-механическими свойствами относится к разряду "вечных" проблем механики материалов и материаловедения. Особенно актуальными эти задачи стали в последние два десятилетия, когда появились возможности управления структурой материала на уровне отдельных молекул и даже атомов [29, 123, 364].

В 1985 г. при попытках астрофизиков объяснить спектры межзвездной пыли были открыты фуллерены – новая форма существования углерода в природе наряду с известными алмазом и графитом. Оказалось, что атомы углерода могут образовать высокосимметричную молекулу C_{60} . Такая молекула состоит из 60 атомов углерода, расположенных на сфере с диаметром приблизительно в один нанометр и напоминает футбольный мяч.

Вначале C_{60} получали в небольших количествах, а в 1990 г. была открыта технология их крупномасштабного производства. Молекулы C_{60} , в свою очередь, могут образовать кристалл фуллерит с гранцентрированной кубической решеткой и достаточно слабы-

ми межмолекулярными связями [364, 452]. В этом кристалле имеются октаэдрические и тетраэдрические полости, в которых могут находиться посторонние атомы. Если октаэдрические полости заполнены ионами щелочных металлов, то при температурах ниже комнатной структура этих веществ перестраивается и образуется новый полимерный материал. Если заполнить также и тетраэдрические полости, то образуется сверхпроводящий материал с критической температурой 20-40 К. Существуют фуллериты и с другими присадками, дающими материалу уникальные свойства. Например, C_{60} -этилен имеет ферромагнитные свойства.

Из углерода можно получить молекулы с гигантским числом атомов. Такая молекула, например $C_{\approx 1000000}$ может представлять собой однослойную трубку с диаметром около нанометра и длиной в несколько десятков микрон. На поверхности трубки атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников. Концы трубки закрыты с помощью шести правильных пятиугольников. Правильные шестиугольники являются ячейкой в плоском графитовом листе, который можно свернуть в трубки различной формы. Правильные пятиугольники (семиугольники) являются локальными дефектами в графитовом листе, позволяющими получить его положительную (отрицательную) кривизну. Комбинации правильных пяти-, шести- и семиугольников позволяют получать разнообразные формы углеродных поверхностей. Геометрия этих наноконструкций определяет их уникальные физико-механические и химические свойства и, следовательно, возможность существования принципиально новых материалов.

Предсказание физико-химических свойств новых углеродных материалов осуществляется, как с помощью квантовых моделей, так и расчетов в рамках молекулярной динамики. Такой подход позволяет понять сущность физических закономерностей и объяснить происхождение ряда свойств, не имеющих обоснования в классической теории. Предполагается, что исследуемая система состоит из атомных ядер (ионов) и электронов. Эти частицы не рождаются и не исчезают в силу ограниченности их типичных энергий, и скорости их движения достаточно малы по сравнению со скоростью света. Поэтому моделирование атомно-молекулярных систем может проводиться в рамках шредингеровских моделей. Гамильтониан таких моделей содержит кинетическую энергию ядер, кинетическую энергию электронов, потенциальную энергию кулоновского взаимодействия между электронами, между ядрами и электронами и между всеми ядрами. При таком подходе, в случае его полной реализации, можно было бы определить причины существования многих свойств и явлений. Однако, содержательный анализ моделей для реальных систем, состоящих из большого числа частиц, представляет практически трудноразрешимую задачу даже с помощью современных вычислительных систем. Несмотря на несомненные успехи квантовой механики в объяснении ряда свойств микроскопических объектов, переход от микрофизики к описанию макроскопических объектов остается все еще недостаточно изученным. В частности, не ясны критерии, до каких пор можно пользоваться методами классической физики при изучении динамических процессов в наноструктурах.

Известно, что квантовая теория содержит в себе классическую механику в качестве предельного случая. Это составляет принцип соответствия в квантовой механике. А именно, если числовое значение динамической переменной, имеющей размерность действия S (Джс), велико по сравнению с постоянной Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Джс, то систему с достаточной точностью можно описать законами классической физики. Проведем оценку такой величины на примере колебаний периодической структуры из фуллеренов. Наиболее распространенная молекула фуллерена C_{60} состоит из 20 гексагонов и 12 пентагонов. Ее поперечный размер составляет 0,714 нм. При определенных условиях молекулы C_{60} могут упорядочиваться и образовывать молекулярные кристаллы с гранцентрированной кубической решеткой, с параметром $a = 1,41$ нм. В такой динамической системе размерностью действия является произведение периода колебаний на энергию $S = TE$. Характерная частота колебаний такой структуры составляет $10^{10} \div 10^{12} \text{ c}^{-1}$, а энергия возбуждения имеет

порядок $106\text{эВ} = 1,6^{-10}$ Дж, Величина действия равна $S = TE = 2\pi E/\omega = 10^{-24} \doteq 10^{-25}$ Джс и отношение $S/h \geq 10^8 \doteq 10^{10}$. Следовательно, колебания в решетке из фуллеренов можно описывать законами классической физики. Таким образом, механику сред с микроструктурой, включая и нанообъекты, можно строить в рамках законов классической физики.

Микромеханика твердого тела рассматривает макромеханические свойства материалов, в том числе и поликристаллических металлов, с микроскопических позиций. Поэтому она играет важную роль связующего звена между исследованиями на микро- и макроуровнях [443, 516]. Известно, что для создания (синтеза) новых материалов, недостаточно умения анализировать свойства микроструктуры материала. Необходимо определение связи требуемых макроскопических характеристик материала с микроскопическими характеристиками структуры, умение воспроизводить заданные макроскопические свойства. В настоящее время достаточно четко сформировались три различных подхода к построению математических моделей сред, отражающих внутреннее взаимодействие элементов структуры:

- континуальный подход базируется на обобщении континуальной модели среды за счет расширения понятия представительного объема среды, учета ротационных степеней свободы микрочастиц и аффинных деформаций мезообъема (континуум Коссера, микроморфная среда Эрингена-Миндлина). В развитии этого подхода решающий вклад внесли работы Коссера Е. и Ф., Аэро Э.Л., Вожняк Ц., Германн Г., Грин А.Е., Гриоли Г., Гюнтер В., Койтер В.Т., Кувшинский Е.В., Ломакин В.А., Миндлин Р.Д., Нахди П.М., Новацкий В., Пальмов В.А., Ривлин Р.С., Савин Г.Н., Стернберг Е., Трусделл К., Тупин Р.А., Эринген А.К. и др. Основные трудности этого подхода заключаются в выявлении физического смысла моментных напряжений высших порядков и в отсутствии теории макроскопических экспериментов, на основании которых можно было бы найти связь материальных констант среды с параметрами ее микроструктуры;

- структурно-феноменологический (модельный) подход связан с теорией кристаллической решетки и физикой твердого тела. Здесь следует отметить работы И.Кунина, Е.Кренера, А.Аскара (Askar A.), Ж.Пуже и Ж.Можена (Pouget J. and Maugin G.), Л.И. Маневича, Э.Л.Аэро и А.Н.Булыгина, Х.Аскеса (H.Askes) и А.В.Метрикина, А.И.Потапова и И.С.Павлова, А.А.Васильева и А.Е.Мирошниченко;

- статистический подход основан на пространственном усреднении свойств микронеродных сред и переходе от уравнений движения микроэлементов к рассмотрению уравнений макродвижений, отражающих взаимодействие элементов микроструктуры. Сюда заметный вклад внесли работы В.А.Ломакина, А.А.Ильюшина, В.В.Новожилова, В.Н.Николаевского и др.).

Континуальный подход, базируется на понятиях полярности и нелокальности материала, имеющего микроструктуру. Полярность указывает на то, что, помимо деформации окрестности частицы структуры, допускается ее жесткое вращение, в общем случае не связанное с полем перемещений, а нелокальность указывает на зависимость физических свойств материала от влияния частиц окружения. Мысленное разбиение тела на части ограничено некоторым пределом, выражающимся в том, что на некотором уровне происходит качественное изменение физических свойств. Существуют материалы, у которых качественные изменения происходят постепенно, но у кристаллических твердых тел этот предел выражен достаточно четко. Получение представлений о пределах, проявляющихся при измельчении материалов с микроструктурой, представляет проблему поэтапного познания материи. По мере накопления знаний о микроструктуре, которая влияет на механическое поведение материалов, происходит переход на новый уровень познаний – создается теория, позволяющая с новых позиций объяснить механическое поведение. Для укрепления фундаментальной базы теории соответствующего этапа должна быть установлена связь между характеристиками уровня микроструктуры и макроскопиче-

скими характеристиками. Поэтому большая роль отводится механике субмакроскопического уровня, устанавливающей переход от микро- к макро-, а также критерии макро- и микроскопических свойств. К структурно-чувствительным материалам (материалам с микроструктурой) в чистом виде неприменима методология континуума. Тем не менее, допустимо распространение методов механики сплошных сред, занимающейся изучением механического поведения материи на макроуровне, на микроуровень. Они оказываются весьма эффективными для объяснения поведения материалов. Область науки, в которой поведение материалов с микроструктурой изучается при использовании методов непрерывной аппроксимации, называют обобщенной механикой сплошной среды.

Во второй половине XIX века для описания деформации твердых тел использовалась, как правило, континуальная теория упругости. Исторически одной из первых континуальных моделей упругой среды, которая не может быть описана в рамках классической теории упругости, является среда Коссера, состоящая из твердых недеформируемых тел, обладающих тремя трансляционными и тремя ротационными степенями свободы. Теоретические основы такого континуума были развиты Е. и Ф.Коссера [453] в 1909 году. Традиционно предполагалось, что эта работа не имеет предшественников, но это не так [217]. Еще в 1839г. была опубликована работа Дж. Мак-Куллага [482], посвященная построению модели упругой среды, способной одновременно описывать наблюдаемые отражение и преломление. Энергия деформации в континууме Мак-Куллага зависит от вращательных компонентов деформации. В книгах Е.Моссотти (1851 г.), А.Клебша (1862 г.), Г.Кирхгофа (1874 г.) и П.Дюгема (1891 г.) также имеются отступления от законов классического континуума. В 1862 году А.Клебш, ввел энергетически сопряженную пару для "вращательной энергии". О важности учета моментных напряжений говорилось и в работе В.Фойхта (1887г.) [525]. Таким образом, Е. и Ф.Коссера обобщили и развили более ранние работы Г.Кирхгофа, А.Клебша, П.Дюгема и В.Фойхта [155, 195, 444, 484].

С начала 60-х годов стали усиленно развиваться обобщенные модели континуума Коссера: теория ориентированных сред, несимметричная, моментная, мультиполярная, микроморфная и т.п. теории упругости (часто их называют моментными теориями). Так, Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинский [22, 185] на основании допущения о вращательном взаимодействии частиц вытянутой формы в анизотропной упругой среде обобщили феноменологическую теорию упругости с целью объяснения некоторых аномалий динамического поведения пластиков, которым классическая теория упругости не давала удовлетворительной трактовки. В дальнейшем идея "ориентированного" континуума, в которой каждой точке приписывается еще и направление (поле директора), получила свое развитие в теории жидких кристаллов. Существенный вклад в развитие моментных теорий внесли также работы Г.Германна, В.Гюнтера, В.Койтера [171], В.А.Ломакина [155], Р.Миндлина [225], В.Новацкого [307], В.А.Пальмова [318, 319], Р.Ривлина, Г.Н.Савина [369, 370], К.Трусделла, Р.Тупина [518], А.Эрингена [432, 457, 459–461], И.А.Кунина [195, 475] и др. (см. также списки работ в [155, 465]). К середине 60-х годов сформировалось новое направление, тесно связанное с теорией кристаллической решетки, – нелокальная теория упругости, содержащая обобщенные модели континуума Коссера в качестве длинноволнового приближения (Э. Кренер, Дж. Крумхансл, И.А. Кунин). В дальнейшем нелокальная теория упругости развивалась также в работах А.Е.Грина, Н. Лооса, Д. Эделена, А. Эришера и других авторов [120, 149, 195, 446, 459, 465, 474, 475, 519, 522].

С недостатком классической теории упругости столкнулись в физике твердого тела при изучении термодинамических свойств материалов. В 1952 году И.М.Лифшиц [208], рассматривая вопрос о тепловых свойствах цепных и слоистых структур при низких температурах, обратил внимание на влияние поперечной жесткости отдельных атомных слоев или цепей на закон дисперсии акустических колебаний слоистого кристалла в длинноволновой части спектра, где она по законам теории упругости должна отсутствовать. В этой работе приведены законы дисперсии для продольных и поперечных (изгибных)

волн. Впоследствии изгибные волны в кристаллической решетке были более детально изучены А.М.Косевичем [179,180,473]. Он отметил, что изгибные волны, в отличие от продольных волн, обусловленных центральными силами взаимодействия вызываются более слабыми силами нецентрального взаимодействия, возникающими при поперечных смещениях частиц. Он также показал, что для более точного описания нелинейной динамики кристаллической решетки в уравнениях колебаний необходимо учитывать и моментные напряжения, описываемые четвертыми пространственными производными от поперечных смещений частиц.

В последние три десятилетия вырос интерес к задачам построения нелинейных моделей сред сложной структуры [1, 24, 25, 34, 35, 38, 46, 60, 132, 140, 146, 172, 317, 442, 457, 468, 470, 496, 501–504]. Так, например, Ж.Пуже и Ж.Можен в работе [504] изучали нелинейную динамику ориентированных сред с помощью микроскопической теории, моделируя среду как систему материальных объектов с трансляционными и вращательными степенями свободы. Один из вариантов теории, описывающей моментную динамику твердого деформируемого тела, был предложен А.Г. Угодчиковым в работах [401–403]. На основе физических и механических свойств геоматериалов со сложной структурой в работах В.Н.Николаевского [306, 490] построены математические модели деформирования и разрушения горных массивов и пластов при внешних воздействиях.

Структурно-феноменологический подход, как было сказано выше, связан с теорией кристаллической решетки и физикой твердого тела. При этом подходе особое внимание уделяется структуре среды. Структура среды и, в частности, размер зерна — один из важнейших показателей качества материалов, непосредственно влияющих на их прочностные и вязкоупругие характеристики. Частицы, из которых состоит тело, представляют как простые центры сил, наделенные свойствами массы. Эти элементы тела действуют друг на друга с помощью центральных сил. Предполагается, что силы, действующие между структурными элементами тела, быстро убывают с расстоянием и ими можно пренебречь, если расстояние между элементами превышает "радиус молекулярного действия". Метод центральных сил приводит к определенным соотношениям между упругими постоянными второго порядка, которые называются соотношениями Коши. В 1830 г. Коши, используя дискретную модель среды (эфира), сделал попытку объяснить дисперсию света в предположении, что свет представляет собой упругие волны с очень большой частотой. Он показал, что для длин волн, много больших расстояния между соседними частицами одномерной решетки, скорость распространения не зависит от длины волны. Для коротких же волн скорость распространения является функцией длины волны и может заметно изменяться. Идеи Коши, послужили отправной точкой для исследований Баден-Пауэлла, который, исходя из модели одномерной решетки, вывел формулу связи между скоростью распространения волны и ее длиной. Однако он не заметил одно из важнейших свойств периодических систем, а именно существование максимальной частоты, при которой волны еще могут распространяться в решетке. Это открытие сделал в 1881 г. Кельвин, обративший внимание на то, что частота является функцией волнового числа. С помощью модели цепочки из частиц двух сортов Кельвин смог объяснить явление дисперсии, избежав затруднений, имевших место в теории Коши.

В 1842 году С.Пуассон сделал предположение о том, что молекулы кристалла представляют собой не точки, а малые твердые тела, которые могут двигаться не только поступательно, но и вращаться [217]. Эта идея позже, в 1887 году, была детально разработана В. Фойхтом [525]. В 1890 году В.Томсон (лорд Кельвин) указал, что соотношения Коши могут быть устранены, если представить кристалл состоящим из двух проникающих друг в друга однородных точечных образований, т.е. двух подрешеток [217]. Более общие структурные схемы кристаллических материалов были предложены в 1915 году Максом Борном, в которых каждый структурный элемент кристалла — элементарная

ячейка – состоит из собрания притягивающихся и отталкивающихся частиц [42]. Частицы внутри каждой ячейки одинаково расположены по отношению друг к другу.

В конце 1930-х годов Я.И.Френкель рассмотрел модель цепочки ориентированных диполей с закрепленными центрами тяжести и показал, что в ней могут распространяться "волны вращательных качаний" (т.е. ориентационные волны).

Первую же модель взаимодействия трансляционных и вращательных колебаний в молекулярной решетке предложили в 1949 году Л.И.Апсельм и Н.Н.Порфирьева [20]. В такой модели было учтено лишь линейное взаимодействие ориентационных волн с одним видом трансляционных колебаний – продольными волнами. Тем не менее удалось показать, что в кристаллических решетках молекулярных кристаллов распространяются в основном смешанные ориентационно-трансляционные колебания, частоты которых зависят как от массы, так от момента инерции молекул в решетке. Для одномерной модели молекулярной решетки с двумя молекулами в элементарной ячейке получаются четыре ветви вращательно-трансляционного спектра колебаний. Для длинных волн одна ветвь (акустическая) дает чисто трансляционные колебания, вторая ветвь – чисто вращательные колебания, зависящие только от момента инерции, и две другие – смешанные вращательно-трансляционные колебания, зависящие и от массы, и от момента инерции. Как показали дальнейшие исследования Н.Н.Порфирьевой, эти результаты, полученные для одномерной модели решетки, сохраняются в основном и для трехмерной молекулярной решетки кристалла.

До середины прошлого столетия большинство результатов механики деформируемого твердого тела были получены в рамках континуального подхода. Дискретные же модели использовались, как правило, в физике твердого тела и теории кристаллической решетки [42, 44, 178–180]. Интерес к дискретным моделям возобновился во второй половине XX века [150, 435–438, 441]. Здесь стоит указать работы Г. Зорского, Д.Рогули и Ч.Рымажа [149], М.Р.Короткиной [177, 178], Н.Ф. Морозова и М.И. Паукшто [230]. Такой интерес связан со следующими обстоятельствами:

- Применение дискретных методов в силу дискретности процессов вычисления идеологически более оправдано.
- Развитие ЭВМ позволяет в настоящее время решать "большие" системы уравнений, что отчасти снимает возражение о неадекватности реальных и расчетных ситуаций.
- Дискретные методы позволили, например в задачах разрушения, обнаружить ряд эффектов, не улавливаемых континуальными методами. И это не случайно, поскольку разрушение происходит на уровне структуры и описывается длинноволновой асимптотикой лишь приближенно.
- Дискретные модели представляются привлекательными в силу моделирования реальной атомной структуры вещества.

Как известно, структурные и кинетические характеристики материалов наиболее ярко проявляются в их динамическом поведении, поэтому один из эффективных способов определения материальных констант твердых тел основан на измерениях скоростей и других характеристик упругих волн, распространяющихся по разным кристаллографическим направлениям. При исследовании твердых материалов упругие (акустические) волны имеют определенные преимущества перед электромагнитными и рентгеновскими волнами, так как могут распространяться в толще среды, куда последние не проникают. Высокая чувствительность акустических методов и сравнительно малые амплитуды деформации дают возможность исследовать механические характеристики твердых тел еще в упругой области деформации без разрушения материала [218, 308, 395, 407, 520]. Это делает актуальной разработку теории волновых процессов в средах сложной структуры и привлекает большое внимание, как теоретиков, так и экспериментаторов. В настоящее время представления о существовании в кристаллической решетке ротационных степеней свободы и различных типов взаимодействий широко используются при изучении динамиче-

ских процессов в средах сложной структуры [20, 221, 227, 447–451, 484, 485, 500–502, 523, 524]. Теория ангармонических эффектов в решетке, состоящей из анизотропных частиц, представляется весьма важной для развития ультразвуковых методов исследования твердых тел [60, 132, 147, 218, 395, 407, 439, 440].

В середине 30-х - начале 40-х годов на важность учета микроструктуры среды, а именно, вращательных степеней свободы частиц обратили внимание физики-экспериментаторы. Так, весьма интересны опыты Е.Бауера и М.Мага, производивших сравнение спектров рассеяния для тяжелой и легкой воды. Из сравнения спектров этих двух веществ, молекулы которых имеют приближенно одну и ту же массу, но различные моменты инерции, Е.Бауер и М.Мага делают заключение о существовании наряду с трансляционными также и вращательные колебания молекул воды. Допуская существование таких же колебаний, Дж. Бернал и Ж.Тамм считали возможным объяснить различия в некоторых физических свойствах легкой и тяжелой воды. В 1940 году Е.Гросс [121] наблюдал эффект изменения длины волны рассеянного света в жидкости, связанный с флуктуациями ориентации анизотропных молекул, и отметил, что при вращательных колебаниях оси молекул могут поворачиваться на значительную величину, если период колебаний много больше времени релаксации. В дальнейшем Е.Гросс и А.Коршунов экспериментально установили [122], что и у кристаллов некоторых органических веществ спектр рассеяния малых частот связан с вращательными колебаниями молекул. Наиболее интенсивен спектр рассеяния у веществ, молекулы которых обладают большой оптической анизотропией (сероуглерод, нафталин, бензол).

В конце 50-х годов стали проводиться опыты по наблюдению оптико-акустического эффекта в жидкостях и твердых телах. В частности, опыты по изучению спектральной зависимости оптико-акустического эффекта в сегнетоэлектрических кристаллах (в частности, сегнетовой соли). Исследование спектральной зависимости такого эффекта в кристалле сегнетовой соли и сопоставление результатов со спектром инфракрасного поглощения представлялось интересным с точки зрения проблем, связанных с молекулярным механизмом пьезоэлектрического явления. Однако вопрос о степени эффективности тех или иных колебаний при возбуждении оптико-акустического эффекта до сих пор до конца не изучен.

В 1970 году были проведены первые эксперименты по акустике твердых тел с микроструктурой (Г.Н. Савин и др. [369, 370]). Авторы установили корреляцию между размером зерна в различных металлах и алюминиевых сплавах и дисперсионным параметром акустической волны. Дисперсию ультразвуковых волн наблюдали также в искусственном зернистом композите – ферритовая дробь в эпоксидной смоле.

Учет микроструктуры среды необходим и при исследовании нелинейных акустических волн в кристаллах, поскольку, как указывается в монографии В.Е.Лямова [218], наличие микровращений приводит к появлению пространственной дисперсии и новых акустических ветвей в спектре волн. Однако эти эффекты в книге не рассматриваются.

В последние два десятилетия моделированию свойств сред сложной структуры, а также теоретическому и экспериментальному исследованию процессов распространения и взаимодействия акустических волн в средах сложной структуры посвящено большое количество работ. Некоторые из них приведены в списке литературы [28, 30–33, 71, 136, 211–216, 315], [26, 27, 34, 35, 46, 173, 187, 188, 204–207, 207, 361, 391, 393, 394, 426, 496, 500–503].

Отметим также, что классическая теория упругости довольно хорошо предсказывает поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда «зернистость» строения рассматриваемых реальных тел не является для этих явлений характерной. Однако классическая теория упругости оказывается не в состоянии удовлетворительно объяснить закономерности некоторых явлений, которые можно наблюдать в реальных упругих телах, не говоря о телах другой реологии. Например, с точки зрения теоретических решений классической теории упругости не удастся объяс-

нить и предсказать законы распространения коротких акустических волн в кристаллических твердых телах, поликристаллических металлах и высоких полимерах. Классическая теория также не дает достаточно удовлетворительной согласованности ее результатов с экспериментальными данными для тел с ярко выраженной поликристаллической структурой в условиях сложного напряженного состояния с большим градиентом напряжений. В частности, эта теория не может дать какого-либо вразумительного объяснения влиянию градиента напряжений на усталостные характеристики поликристаллических материалов. Причину этой несогласованности теории и опыта, очевидно, надо искать в том, что сплошная упругая модель твердого тела, лежащая в основе классической теории упругости, принципиально не в состоянии отобразить те упругие свойства реальных тел, которые определяются их дискретной структурой. Следовательно, для объяснения этих явлений нужна новая модель твердого тела механики сплошной среды, в которой свойства, вытекающие из дискретной структуры реальных тел, были бы явно отражены [368]. Ряд наблюдаемых эффектов (явлений), не объясняемых на основании классической теории можно смотреть также в [229]. Как известно, все реальные тела имеют «зернистое» строение, поэтому их можно рассматривать как совокупность пространственных материальных образований из отдельных «зерен» – материальных частиц, расположенных относительно друг друга на расстояниях, сравнимых с их размерами и связанных между собой сложной системой взаимодействий. Такими «зернами» могут быть отдельные молекулы вещества, отдельные кристаллы и блоки кристаллов в поликристаллических материалах и т.п.

Следует заметить также, что дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея, не могут быть объяснены в рамках классической модели сплошной среды [141, 188]. В рамках же среды Коссера (или более обобщенной среды) этот эффект имеет объяснение. При этом степень затухания амплитуды рэлеевской волны с глубиной, а также эллиптичность волны зависят от материальных констант среды, в том числе и от параметров, описывающих моментные свойства. Это обстоятельство позволяет надеяться на эффективное применение такого типа волн в возможных экспериментальных исследованиях, направленных на обнаружение моментного поведения материала и далее на определение материальных параметров. Итак, для практического применения построенных микроконтинуальных теорий требуется определение материальных функций, входящих в системы уравнений и ОС. Обзор соответствующих работ [141, 188, 460, 464, 477] и др. в этом направлении свидетельствуют, что существуют несколько экспериментальных методов [464, 477] для их определения и ведется активная работа для нахождения материальных констант различных сред (для некоторых материалов они определены [141, 188, 460, 464, 477]). Следовательно, можно предполагать, что в ближайшем будущем они будут найдены для большинства нужных материалов, а построенные микроконтинуальные теории найдут свои практические применения. Хотя, из микрополярных теорий тонких тел, пренебрегая моментными характеристиками, следуют различные теории тонких тел в рамках классической трехмерной теории, которые могут быть использованы на практике. Кроме того, предоставляется необходимым аналогично [100] отметить некоторые вопросы, требующие дальнейшего развития и остающиеся в настоящее время актуальными.

Необходимо дальнейшее развитие математических методов приведения трехмерных задач механики деформируемого твердого тела к двумерной, одномерной, а также нульмерной. Сюда относятся аналитические и асимптотические методы, а также метод последовательного дифференцирования соотношений трехмерной теории. Такие методы следует развивать не только для тел с одним малым размером, но и для тел с двумя малыми размерами. Последняя задача, конечно, является более трудной. При этом особое внимание следует обратить на динамические теории этих тел.

При приведении трехмерных теорий к двумерным целесообразно привлекать вариационные методы, которые являются весьма эффективными для получения внутренне непротиворечивых математически корректных моделей.

Необходимо дальнейшее исследование в направлении математического обоснования методов редукции, т.е. исследования вопросов сходимости, оценки погрешностей, краевых условий, возможностей ускорения сходимости и т.п.

Остается актуальной необходимость сравнения результатов приближенных теорий с результатами аналитических и численных решений задач трехмерной теории. Желательно сравнить результаты приближенных теорий с точными решениями для тел с одним малым размером различных поперечных сечений. Имеющиеся в классическом случае сравнения на основе уравнений плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния не убедительны, поскольку эти уравнения сами являются приближенными.

Важным направлением является приведение трехмерных теорий к двумерным в случае различных реологических свойств материала, геометрически и физически нелинейных тел, а также с учетом влияния температурных, электромагнитных и других полей.

Наконец, отметим имеющиеся в настоящее время большой пробел в области экспериментальных исследований.

В связи с вышесказанным и широким использованием тонких тел (одно-, двух-, трех- и многослойных конструкций) возникает потребность создания новых уточненных теорий тонких тел в рамках как классической, так и моментной теории и усовершенствованных методов их расчета. Поэтому построение уточненных теорий тонких тел и развитие эффективных методов расчета являются важной и актуальной задачей.

Настоящая монография посвящена развитию метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел и его применению при построении различных вариантов теорий упругих тонких тел. Она состоит из 9 глав и заключения. В ней для формул применяются тройная нумерация. Первая цифра означает номер главы, а вторая и третья – номер раздела и соотношения соответственно. Монография изложена на 517 страницах.

В первой главе «Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства» развита эффективная параметризация [240] области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями. Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики. В частности, рассмотрены различные семейства базисов (реперов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций. Введены в рассмотрение компоненты переноса единичного тензора второго ранга (ЕТВР), а также основные компоненты ЕТВР, посредством которых выражены сопровождающие рассмотренные в работе семейства параметризаций различные геометрические объекты. Получены выражения для компонент ЕТВР через основные компоненты ЕТВР при различных частных случаях параметризаций области тонкого тела. Даны представления ЕТВР, единичного тензора четвертого ранга (ЕТЧР), а также изотропных тензоров четвертого ранга при рассматриваемых семействах параметризаций области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Введены в рассмотрение мультипликативные базисы и получены деривационные формулы для них. Даны выражения ковариантных производных от компонент тензора при рассматриваемой параметризации. С помощью компонент переноса ЕТВР осуществлена связь между различными семействами параметризаций. Получены выражения для семейств символов Кристоффеля, компонент вторых тензоров и средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством компонент переноса ЕТВР. Компоненты переноса и компоненты ЕТВР, зависящие от поперечной координаты

x^3 , представлены в виде рядов относительно этой координаты. Рассмотрены некоторые вопросы, касающиеся тензора Римана-Кристоффеля при новой параметризации, а также приведены тождества Ламе. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее новой параметризации.

Во второй главе «Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей, некоторых выражений и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов» приведена теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности. Выписаны основные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго родов, с помощью которых в свою очередь получены несколько дополнительных соотношений, играющих важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел, как при классической, так и при новой (неклассической) параметризации областей этих тел. Определены моменты тензорных полей, их компонент и некоторых дифференциальных операторов от них в криволинейных координатах. В частности, определены моменты тензорных функций, а также их производных и повторных производных. Кроме того, получены представления и найдены моменты относительно полиномов Чебышева лапласиана, градиента, ротора, повторного градиента, дивергенции, повторной дивергенции тензора второго ранга, градиента дивергенции. Получены выражения для моментов k -го порядка произведения двух функций на произвольную степень поперечной координаты.

В третьей главе «Представления основных уравнений и определяющих соотношений механики деформируемого твердого тела для теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач» приведены представления уравнений и определяющих соотношений (ОС) МДТТ как для классической, так и для микрополярной теорий тонких тел при новой параметризации области тонкого тела (НПОТТ), а также уравнения притока тепла и закона теплопроводности Фурье. В частности, выписаны трехмерные постановки задач при новой параметризации области тонкого тела.

Получены представления уравнений в перемещениях (Ламе) и уравнений в перемещениях и вращениях микрополярной теории как при изотермических, так и неизотермических процессах при новой параметризации области тонкого тела. Даны представления законов термодинамики и теплопроводности Фурье, а также уравнения притока тепла, граничных и начальных условий при новой параметризации.

Далее из представленных уравнений (движения, притока тепла и др.) и ОС (законов Гука и теплопроводности Фурье) при новой параметризации области тонкого тела, используя рекуррентные соотношения для систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода, а также выражения для моментов величин, выражений и дифференциальных операторов из второй главы, получены соответствующие уравнения и ОС в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах. При этом получены системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах как классической (относительно тензора напряжений), так и микрополярной (относительно тензоров напряжений и моментных напряжений) механики деформируемого твердого тонкого тела (МДТТТ). Выведены системы уравнений в перемещениях, перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах как при изотермических, так и неизотермических процессах, а также системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах.

Получены ОС классической и микрополярной теорий и закон теплопроводности Фурье нулевого приближения и приближения порядка r в моментах как для однородного, так и неоднородного относительно x^3 материала. Получены выражения граничных условий физического и теплового содержаний (первого, второго и третьего родов) на лицевых поверхностях и выведены системы уравнений для нахождения векторов-функций $\mathbf{u}^{(-)r}$, $\mathbf{u}^{(+r)}$, $\varphi^{(-)r}$, $\varphi^{(+r)}$ и функций $T^{(-)r}$, $T^{(+r)}$, применяемых при представлении ОС в нормированных моментах. Даны определения систем уравнений в моментах приближения (r, N) , а также

систем законов Гука и теплопроводности Фурье в нормированных моментах приближения (r, N) и в моментах приближения (r, N) . Получены граничные условия физического и теплового (второго и третьего родов) содержаний на граничном контуре в моментах приближения (r, N) . Кроме того, выписаны кинематические и тепловые (первого рода) граничные условия на контуре и начальные условия в моментах приближения N .

Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной термоупругости тонких тел (ТУТТ) с одним малым размером. Обсуждены способы получения некоторых частных случаев постановок задач из них.

Следует заметить, что с помощью рассматриваемого метода построения теории тонких тел получается бесконечная система уравнений, которая имеет то преимущество, что она содержит величины, зависящие от двух переменных – гауссовых координат x^1 и x^2 базовой поверхности. Итак, уменьшение числа независимых переменных на единицу достигается ценой увеличения количества уравнений до бесконечности, что, разумеется, имеет свои очевидные практические неудобства. В этой связи сделан следующий необходимый шаг для упрощения проблемы. Производится редукция бесконечной системы к конечной. При этом приводится несколько различных способов такой редукции. После редукции к конечной системе рассматриваемую задачу можно решить приближенно с соответствующими граничными условиями на граничном контуре $\partial S^{(-)}$ базовой поверхности $S^{(-)}$. При этом степень приближения шаг за шагом можно увеличить. Здесь возникает известная проблема выполнения граничных условий на лицевых поверхностях. В рассматриваемой теории тонких тел в теоретически возможных случаях удается и эту проблему решить. При упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной для любого приближенного решения построено корректирующее слагаемое, учет которого обеспечивает выполнение граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела. В частности, построены корректирующие слагаемые, обеспечивающие выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при постановках задач в перемещениях и вращениях, а также задач в тензорах напряжений и моментных напряжениях. Кроме того, рассмотрен способ В.В.Понятовского удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела при применении систем полиномов Лежандра. При этом способе компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, которые не участвуют в граничных условиях на лицевых поверхностях, разлагаются в ряды по данной системе ортогональных полиномов, а остальные компоненты определяются через них из уравнений равновесия таким образом, чтобы они удовлетворяли указанным выше граничным условиям.

Следует заметить, что этот способ при построении классической теории (однослойных и многослойных) пластин постоянной толщины в случае отсутствия объемных сил и касательных напряжений на лицевых поверхностях применял В.В.Понятовский в своих замечательных работах [354–358].

Ниже рассмотрен этот способ удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях при построении классической теории призматических тонких тел с одним малым размером постоянной толщины в случае классической параметризации области тонкого тела с учетом объемных сил и непрерывно распределенных напряжений на лицевых поверхностях. Даны различные представления компонент P_{i3} тензора напряжений, которые согласованы с граничными условиями на лицевых поверхностях. Доказано, что такой способ представления компонент тензора напряжений эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов.

В четвертой главе «Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных упругих тонких тел с одним малым размером при произвольной базовой поверхности» рассмотрена параметризация области тонкого тела, когда в качестве базы рассматрива-

ется произвольная поверхность, отличная от срединной, а поперечная координата принимает значения из сегмента $[-1,1]$. Выписаны основные соотношения при этой параметризации. В частности, дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Выписаны выражения для компонент ЕТВР. Приведены представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения и ОС микрополярной теории упругости при рассматриваемой параметризации области тонкого тела.

Даны определения момента k -го порядка некоторой величины относительно произвольной системы ортогональных полиномов и систем полиномов Лежандра и Чебышева. Выписаны выражения для моментов частных производных и некоторых выражений относительно этих полиномов. Приведены различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах, а также граничные условия. Сформулированы постановки динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах. Подробней эти вопросы рассмотрены также в [284, 303, 304].

В пятой главе «Метод ортогональных полиномов при математическом моделировании микрополярных упругих тонких тел с двумя малыми размерами» выписаны основные соотношения при классической и новой параметризациях, а также в случае параметризации при произвольной базовой линии. При этом новая параметризация и параметризация при произвольной базовой линии рассматриваются впервые. Даны векторные параметрические уравнения области тонкого тела при рассматриваемых параметризациях.

Даны определения момента (m,n) -го порядка некоторой величины относительно произвольной системы ортогональных полиномов и систем полиномов Лежандра и Чебышева. Приведены выражения для компонент ЕТВР, а также представления градиента, дивергенции тензора, системы уравнений движения и ОС при этих параметризациях. Приведены выражения для моментов частных производных и некоторых выражений относительно этих полиномов. Выписаны граничные условия, различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах. Изложен метод нормированных моментов полей тензоров напряжений и моментных напряжений, а также рассмотрены частично упрощенный и упрощенный методы редукции бесконечной системы уравнений к конечной. В последних двух случаях редукции построены корректирующие слагаемые, позволяющие удовлетворить граничным условиям на лицевых поверхностях. Выписаны системы алгебраических уравнений для определения нормирующих функций. Рассмотрены некоторые вопросы при методе разложения по одной координате.

Даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M, N) при методе разложения по двум координатам и приближения (r, N) при методе разложения по одной координате. Более подробно вопросы этой главы рассмотрены в [282, 296] (см. также [161, 163, 293], nmu14a, nmu14b).

В шестой главе «Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных плоских тонких областей» аналогично общей теории, применяя разложения по системе ортогональных полиномов, построена теория плоских криволинейных тонких областей [285].

В седьмой главе «Применение метода ортогональных полиномов в теории многослойных тонких конструкций» рассмотрена эффективная параметризация многослойной трехмерной тонкой области, заключающаяся в использовании в отличие от классических подходов нескольких базовых поверхностей. Многие соотношения этой главы получаются из соответствующих формул первой главы, если в них корневые буквы снабжать снизу индексом, обозначающим номер слоя. Введены в рассмотрение свойственные предложенным параметризациям геометрические характеристики. В частности, выписаны выражения для компонент переноса ЕТВР, а также соотношения, связывающие сопровождающие рассмотренные в работе параметризации различные семейства базисов

и порожденные ими соответствующие семейства символов Кристоффеля. Определены компоненты контакта ЕТВР. Получены различные варианты системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Выписаны межслойные условия при различных связях соседних слоев многослойного тела. Даны постановки задач.

Аналогично многослойной трехмерной тонкой области и работе [239] рассматривается параметризация многослойной плоской криволинейной области на основе нескольких базовых кривых. Подробнее вопросы о параметризациях многослойных тонких областей рассмотрены в [252, 255, 282, 291, 294, 295, 304]. Получены системы уравнений, ОС, граничные условия физического содержания приближения $(0, N)$ для классического упругого материала, а также кинематические граничные условия и начальные условия приближения N . Выписаны межслойные контактные условия.

В восьмой главе «Вариационные принципы микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов» выведены необходимые интегральные соотношения для формулировок вариационных принципов. Сформулированы и доказаны вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории, из которых получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из которых в свою очередь выведены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. При этом для микрополярной теории многослойных тонких тел, как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии, получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера, так как из них легко выводятся остальные (Лагранжа, Кастильяно).

В девятой главе «Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и призматических оболочек. Сравнения различных теорий. Некоторые задачи» исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Даны постановки задач. Кроме того, приведены уравнения классической моментной теории оболочек и уравнения тонких тел, получаемые с помощью метода классических ортогональных полиномов. Даны сравнения уравнений некоторых теорий. Сформулирована кинематическая гипотеза для теории тонких тел.

Найдены обратные тензоры-операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях как для изотропных однородных материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии. В этих случаях получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды. При этом в последнем случае уравнение относительно вектора перемещений совпадает с уравнением классической теории, а уравнение относительно вектора вращений имеет аналогичный ему вид. Кроме того, при отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала. Поэтому можно полагать, что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды. Построен также обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды. Кроме того, выявлены случаи, при которых легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения.

Из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения статической (квазистатической) задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае и в перемещениях и вращениях в микрополярном случае. Из последних систем уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных векторных функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с учетом этих условий. Начиная с первого приближения системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них — система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функций. При этом матричные дифференциальные операторы этих систем имеют треугольный вид и их определители отличны от нуля, т.е. существуют для них обратные операторы, которые нетрудно найти для треугольных операторов. Значит, эти системы совместимы. На основании обратного оператора к оператору какой-нибудь из этих систем она расщепляется и для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Используя метод Векуа для решения таких уравнений, можно выписать их аналитические решения.

Расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов (Лежандра, Чебышева) получены для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника. Аналогичные уравнения получены и для редуцированной среды, содержащие уравнение классической среды.

Выведены расщепленные системы уравнений статической (квазистатической) задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений, из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Для этой системы аналогично однослойному призматическому телу, используя метод Векуа, можно выписать аналитическое решение. Кроме того, расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов (Лежандра, Чебышева) получены для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника. Аналогичные уравнения получены и для редуцированной среды, содержащие уравнение классической среды.

Приведены решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с защемленными краями при различных нагрузках, а также о двуслойной двумерной области с защемленными краями.

Следует заметить, что при написании монографии замеченные опечатки в опубликованных (в основном депонированных) работах были исправлены.

В заключении сформулированы основные результаты монографии.

Глава 1

Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства

Рассмотрена эффективная параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями.

1.1 Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей

Рассмотрим область трехмерного евклидова пространства, ограниченную двумя лицевыми поверхностями $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ и боковой поверхностью Σ (рис. 1.1).

В дальнейшем условно лицевую поверхность $S^{(-)}$ будем называть внутренней базовой поверхностью, а лицевую поверхность $S^{(+)}$ – внешней базовой поверхностью (рис. 1.1). Кроме того, поверхность $S^{(-)}$ часто будем называть основной базовой поверхностью, так как при параметризации рассматриваемой области трехмерного евклидова пространства на ней вводятся гауссовы координаты, т.е. сперва осуществляется параметризация поверхности $S^{(-)}$, а потом, принимая $S^{(-)}$ в качестве основной базовой поверхности (базы), производится параметризация области и любой эквидистантной от $S^{(-)}$ поверхности, обозначаемой через S .

Введем определения:

Определение 1.1.1. Отнесение некоторой области к той или иной системе координат называется параметризацией этой области.

Определение 1.1.2. Трехмерная (двумерная) область евклидова пространства \mathbb{R}^3 , один или два размера (один размер), которой значительно меньше чем остальные (другой), называется тонкой областью.

Определение 1.1.3. Тонкая область, имеющая боковую поверхность Σ , называется незамкнутой тонкой областью, в противном случае – замкнутой.

Определение 1.1.4. Трехмерное тело, занимающее тонкую область, называется тонким телом.

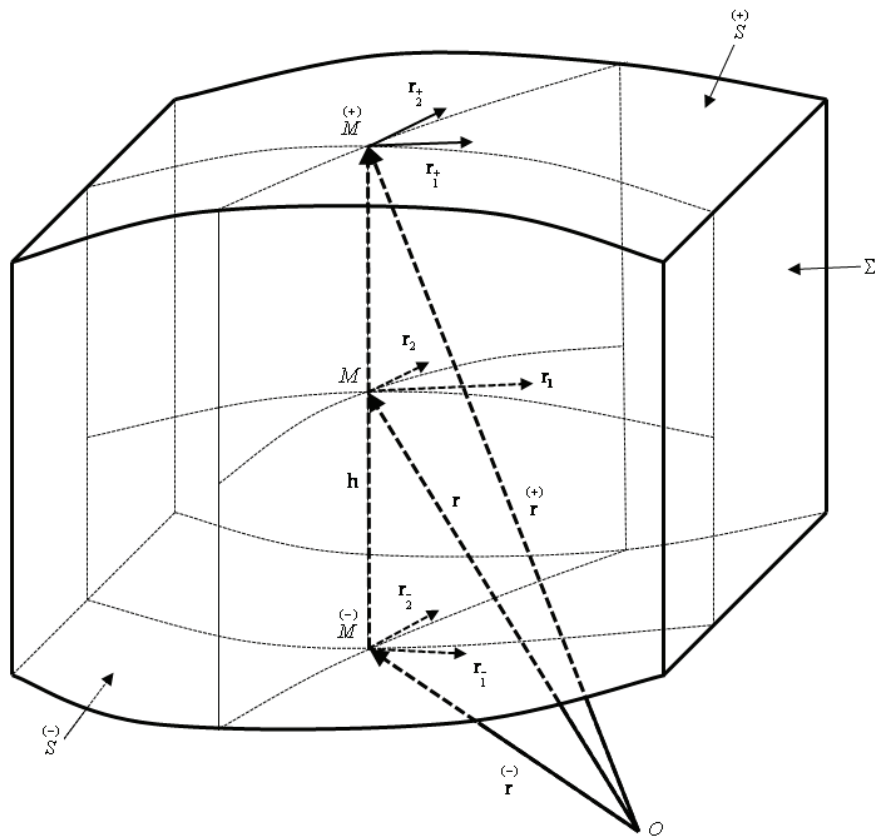


Рис. 1.1: Новая параметризация области тонкого тела

В силу определения (1.1.4) в дальнейшем, говоря о тонкой области, будем подразумевать тонкое тело и, наоборот, говоря о тонком теле, будем подразумевать тонкую область (область тонкого тела).

Определение 1.1.5. Область тонкого тела называется ограниченной, если существует шар конечного радиуса, который содержит рассматриваемую область тонкого тела.

Определение 1.1.6. Любая регулярная поверхность называется базовой поверхностью или просто базой.

Следует заметить, что при дальнейшем изложении рассматривается тонкое тело, один размер которого меньше остальных. В качестве $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ используются регулярные поверхности [348] и, кроме того, в случае ограниченной незамкнутой области тонкого тела боковая поверхность Σ считается линейчатой поверхностью.

1.1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (рис. 1.1)

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{h}(x^1, x^2) = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) \quad \forall x^3 \in [0, 1],$$

или коротко

$$\mathbf{r}(x', x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \mathbf{h}(x') = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad \forall x^3 \in [0, 1], \quad (1.1.1)$$

где соотношения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2) \quad (1.1.2)$$

являются векторными параметрическими уравнениями базовых поверхностей $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ соответственно, $x' = (x^1, x^2)$ — произвольная точка на $\overset{(-)}{S}$, т.е. x^1 и x^2 — криволинейные (гауссовы) координаты¹ на внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$.

Вектор

$$\mathbf{h}(x') = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad (1.1.3)$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}$ на внешнюю $\overset{(+)}{S}$, вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям.

Нетрудно увидеть, что (1.1.1) при $\forall x'$ и $x^3 = 0$ определяет внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}$, при $\forall x'$ и $x^3 = 1$ — внешнюю базовую поверхность $\overset{(+)}{S}$, а при $\forall x'$ и $x^3 = \text{const}$, где $x^3 \in (0, 1)$ — эквидистантную от базовых $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ поверхность S .

Следовательно, соотношение (1.1.1) не что иное, как векторное параметрическое уравнение области тонкого тела².

1.1.2 Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности

Для производных по x^P от соотношений (1.1.1) и (1.1.2) в точках $M \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ введем соответственно обозначения

$$\mathbf{r}_P \equiv \partial_P \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^P}, \quad \mathbf{r}_P^* = \frac{\partial \overset{(*)}{\mathbf{r}}}{\partial x^P}, \quad * \in \{-, +\}. \quad (1.1.4)$$

Пары векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в точках $M \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, следовательно, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, а $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ — двумерные ковариантные поверхностные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемых поверхностей. По этим реперам (базисам), как известно [67, 209, 335], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $M\overset{(*)}{\mathbf{r}}_1^* \overset{(*)}{\mathbf{r}}_2^*$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ (базисы $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$). Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные геометрические характеристики.

Определяя в произвольных точках поверхностей $\overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, реперы (базисы), получим соответствующие семейства реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

¹ Под x' раз и навсегда подразумеваем произвольную точку базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, имеющую, если противное не будет оговорено, две координаты x^1 и x^2 , т.е. зависимость величин от x' означает их зависимость от x^1 и x^2 . Поэтому с целью сокращения письма в дальнейшем, выписывая соотношения, в которых величины зависят от x' , не будем указывать на то, что $x' = (x^1, x^2)$.

² Применяются обычные правила тензорного исчисления [67, 128, 133, 209, 335]. Прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1,2 и 1,2,3 соответственно. Кроме того, в дальнейшем часто применяются краткие записи, подобные, например, $M \in \overset{(*)}{S}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ или $\mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{p}\bar{q}}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, где \emptyset обозначает пустое множество. Первая запись означает: если $* = -$, то $M \in \overset{(-)}{S}$; если, $* = \emptyset$, то $M \in S$; если $* = +$, то $M \in \overset{(+)}{S}$. Вторая запись означает, что если, например, $\sim = \emptyset$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$, если $\sim = +$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_+ = g_+^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$ и т.д. Перебирая все значения, получим все соотношения.

Таким образом, всякое семейство гауссовых параметров на поверхности $\overset{(-)}{S}$, порождает соответствующие семейства реперов (базисов) и, следовательно, параметризаций на поверхностях $\overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

Введем определения:

Определение 1.1.7. Множество двумерных ковариантных и контравариантных реперов $\overset{(*)}{M}\mathbf{r}_1^*\mathbf{r}_2^*$ и $\overset{(*)}{M}\mathbf{r}^1\mathbf{r}^2$, называется $\overset{(*)}{S}$ -семейством ковариантных и контравариантных реперов соответственно, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $\overset{(*)}{S}$ -семейством реперов, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.8. Множество двумерных ковариантных и контравариантных базисов \mathbf{r}_1^* , \mathbf{r}_2^* и \mathbf{r}^1 , \mathbf{r}^2 , называется $\overset{(*)}{S}$ -семейством ковариантных и контравариантных базисов соответственно, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $\overset{(*)}{S}$ -семейством базисов, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.9. Порожденное $\overset{(*)}{S}$ -семейством реперов множество параметризаций называется $\overset{(*)}{S}$ -семейством параметризаций, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.10. Порожденное $\overset{(*)}{S}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $\overset{(*)}{S}$ -семейством геометрических характеристик, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.11. Компоненты, имеющие векторы, представленные в $\overset{(*)}{S}$ -семействе базисов, называются $\overset{(*)}{S}$ -семейством компонент, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$.

1.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области

Учитывая в первом соотношении (1.1.4) выражение радиус-вектора \mathbf{r} (1.1.1) и вводя обозначение

$$\mathbf{h}_p \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x^p} \equiv \partial_p \mathbf{h},$$

получим

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_- + x^3 \mathbf{h}_p = (1 - x^3) \mathbf{r}_- + x^3 \mathbf{r}_+. \quad (1.1.5)$$

Дифференцируя (1.1.1) по x^3 , получим

$$\mathbf{r}_3 \equiv \partial_3 \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{h}(x'), \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (1.1.6)$$

На основании (1.1.6) можно принять, что

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_+ \equiv \partial_3 \mathbf{r} = \mathbf{h}(x'), \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (1.1.7)$$

Соотношение (1.1.7) дает возможность в точках $M \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, +\}$, определить пространственные ковариантные базисы \mathbf{r}_p^* , $*$ $\in \{-, +\}$. Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках $M \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ — один и тот же вектор $\mathbf{h}(x')$.

Ввиду (1.1.7) соотношения (1.1.5) и (1.1.6) можно соединить и представить в виде

$$\mathbf{r}_p(x', x^3) = \mathbf{r}_-(x') + x^3 \mathbf{h}_p(x') = (1 - x^3) \mathbf{r}_-(x') + x^3 \mathbf{r}_+(x'). \quad (1.1.8)$$

Тройки векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в рассматриваемых точках $M \in S^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, следовательно, образуют трехмерные (пространственные) ковариантные базисы, а $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, трехмерные (пространственные) реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам), как известно [67, 209, 335], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ (базисы $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$). В самом деле, на основании их определения [67, 209, 335] имеем

$$\mathbf{r}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2} C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\} \quad (1.1.9)$$

где $C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = (\mathbf{r}^{\tilde{k}} \times \mathbf{r}^{\tilde{p}}) \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ — контравариантные компоненты дискриминантных тензоров [67] в рассматриваемых точках $M \in S^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, соответственно.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g^{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.10)$$

В силу (1.1.8) и (1.1.10), очевидно, получаем

$$\begin{aligned} g_{p\check{q}} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\check{q}} = (1 - x^3)g_{p\check{q}}^- + x^3g_{p\check{q}}^+, \\ g_p^{\check{q}} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^{\check{q}} = (1 - x^3)g_p^{\check{q}}^- + x^3g_p^{\check{q}}^+, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Нетрудно заметить, что в силу (1.1.10) между базисными векторами имеем следующие связи:

$$\mathbf{r}_{\tilde{p}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}} = g_{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.12)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

На основании (1.1.12) нетрудно доказать, что имеют место соотношения

$$g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = g_{\tilde{p}}^* g_n^{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim, * \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.1.13)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Не представляет большого труда получить выражение для g_{pq} . В самом деле, по (1.1.10) и (1.1.11) имеем

$$\begin{aligned} g_{pq} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q = g_{pn}^* g_q^n = (1 - x^3)^2 g_{p\check{q}}^- + x^3(1 - x^3)(g_{p\check{q}}^- + g_{p\check{q}}^+) + (x^3)^2 g_{p\check{q}}^+, \\ g_{p\check{q}}^+ &= g_{p\check{m}}^+ g_{\check{q}}^m, \quad * \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Найдем выражения для $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$. В силу (1.1.12) при $\sim = \emptyset$, $\sim \in \{-, +\}$ получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}} (\mathbf{r}_{\tilde{K}} \times \mathbf{r}_{\tilde{L}}) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}} = \\ &= \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}) = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\sqrt{g} = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}), \quad \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}) = \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (1.1.15)$$

где ϵ^{IJ} , ϵ_{KL} — символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{\overset{(-)}{g}} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{\overset{(+)}{g}} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=1}.$$

Из (1.1.15) в свою очередь имеем

$$\vartheta^{(\sim)} \equiv \sqrt{g^{(\sim)} g^{(\sim)-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^{\bar{L}} = \det(g_P^{\bar{Q}}), \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (1.1.16)$$

Нетрудно заметить, что имеет место более общее соотношение, чем (1.1.15), а именно

$$\sqrt{g^{(\sim)}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{(\sim)}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^{\bar{L}} = \sqrt{g^{(\sim)}} \det(g_P^{\bar{Q}}), \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.17)$$

Из (1.1.17) получаем

$$\det(g_P^{\bar{Q}}) = \det(g_P^{\check{Q}}) = \sqrt{g^{(\sim)(\smile)} g^{(\sim)(\smile)-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^{\bar{L}}, \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.18)$$

В силу (1.1.18) нетрудно доказать, что, $\smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$

$$\vartheta^{(\smile)} \equiv \sqrt{g^{(\smile)(\smile)} g^{(\smile)(\smile)-1}} = \vartheta^{(\smile)-1}, \quad \vartheta^{(\approx)} = 1, \quad \smile, \sim \in \{-, +\}. \quad (1.1.19)$$

Учитывая (1.1.18) и (1.1.19), соотношения (1.1.16) можно представить в более развернутом виде

$$\begin{aligned} \vartheta^{(-)} &= \sqrt{g^{(-)} g^{(-)-1}} = (1-x^3)^2 \vartheta^{(-)} + x^3(1-x^3) \text{tr}(g_{\bar{J}}^{\bar{I}}) + (x^3)^2 \vartheta^{(\mp)}, \\ \vartheta^{(+)} &= \sqrt{g^{(+)} g^{(+)-1}} = (1-x^3)^2 \vartheta^{(\pm)} + x^3(1-x^3) \text{tr}(g_{\bar{J}}^{\bar{I}}) + (x^3)^2 \vartheta^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Не представляет большого труда найти выражения для \mathbf{r}^k посредством векторов $\mathbf{r}_{\bar{m}}$ или $\mathbf{r}^{\bar{m}}$, $\sim \in \{-, +\}$. В самом деле, учитывая в соотношении (1.1.9) при $\sim = \emptyset$, например, соответствующее равенство (1.1.12), получим

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2} C^{kpq} \mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q = \frac{1}{2} C^{kpq} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \mathbf{r}_{\bar{n}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2} \vartheta^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (1.1.21)$$

где ϵ^{kpq} , ϵ_{lmn} — символы Леви-Чивиты.

Учитывая (1.1.18) и (1.1.19), нетрудно доказать, что имеет место более общее соотношение, чем (1.1.21), а именно

$$\mathbf{r}^{\check{k}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\smile)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (1.1.22)$$

В силу (1.1.22) имеем

$$\begin{aligned} g_{\bar{l}}^{\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{l}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\smile)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}}, \\ g^{\bar{l}\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{l}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\smile)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} g^{\bar{s}\bar{l}}, \quad \smile \in \{-, +\}, \quad \smile \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Из (1.1.23) при $\smile = \emptyset$ (или на основании (1.1.20)) получаем

$$\begin{aligned} g_{\bar{l}}^k &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_{\bar{l}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}}, \\ g^{k\bar{l}} &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^{\bar{l}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_p^{\bar{m}} g_q^{\bar{n}} g^{\bar{s}\bar{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Учитывая (1.1.18), нетрудно доказать, что из первых соотношений (1.1.23) и (1.1.24) находим

$$g_{\tilde{K}}^{\tilde{K}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad g_{\tilde{K}}^K = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (1.1.25)$$

Естественно, построенные выше пространственные ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке поверхностей $S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Целесообразно ввести следующие определения:

Определение 1.1.12. Множества пространственных ковариантных и контравариантных реперов $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$ и $M\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$ называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством ковариантных и контравариантных реперов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством реперов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.13. Множество пространственных ковариантных и контравариантных базисов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$ и $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством ковариантных и контравариантных базисов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.14. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством реперов множество параметризаций называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством параметризаций, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.15. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством геометрических характеристик, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.16. Компоненты векторов, представленные в $S_{(g)}^{(*)}$ -семействе базисов называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством компонент, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Отметим еще раз, что природа каждого построенного $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейства реперов (базисов), $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, такова, что третий базисный вектор $\mathbf{r}_3 = \mathbf{h}(x^1, x^2)$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, в общем случае не является перпендикуляром к соответствующей поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$. Однако в частном случае он может быть перпендикуляром, а также единичным вектором нормали к поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, обозначаемым через \mathbf{n} , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Введем определения:

Определение 1.1.17. $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейство реперов (базисов) называется нормальным $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством реперов (базисов), если третий базисный вектор $\mathbf{r}_3 = \mathbf{h}(x^1, x^2)$ перпендикулярен к соответствующей базовой поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.18. $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)g}$ -семейство реперов (базисов) называется естественным семейством реперов (базисов), обозначаемым через $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)a}$, если третий базисный вектор, обозначаемый через $\overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$, является единичным вектором нормали к соответствующей базовой поверхности $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.19. Порожденная (естественным) нормальным $(\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)a})$ $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)g}$ -семейством реперов параметризация называется (естественным) нормальным $(\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)a})$ $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)g}$ -семейством параметризации, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Следует заметить, что естественные семейства параметризаций довольно подробно рассмотрены в монографии И.Н.Векуа [67].

1.1.4 Мультипликативные базисы

Для представления при предлагаемой параметризации области тонкого тела тензоров, ранг которых не меньше двух, полезно ввести в рассмотрение мультипликативные базисы³ [67]. Так как мы в основном будем иметь дело с тензорами, ранг которых не больше четырех, целесообразно ввести мультипликативные базисы, образованные с помощью тензорного умножения двух, трех и четырех базисных векторов из рассмотренного выше различного семейства базисов.

Таким образом, определив $\overset{(*)}{S}_{(*)g}$ -семейство базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, не представляет никакого труда определить указанные выше мультипликативные базисы. В самом деле, введем следующее

Определение 1.1.20. Тензорные произведения базисных векторов из $\overset{(*)}{S}_{(*)g}$ -семейств, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, обозначаемые

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}}, & \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \\ \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{q}}, & \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\} \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются мультипликативными базисами.

Следует заметить, что по терминологии, принятой, например, в [335], (1.1.26) можно называть многоточечными базисами трехмерного евклидова пространства. Первый базис (1.1.26) — двухточечный базис, а второй и третий базисы (1.1.26) — трехточечный и четырехточечный базисы соответственно. Следовательно, можно было их называть двухвекторным, трехвекторным и четырехвекторным базисами соответственно.

Из сказанного выше следует, что для представления тензоров n -го ранга аналогично можно рассмотреть n -векторный мультипликативный базис, где $n \geq 2$ — натуральное число, однако на этом мы останавливаться не будем, а в случае необходимости будем им пользоваться. Подробное изложение, касающееся многоточечных (мультипликативных) базисов, заинтересованный читатель найдет в книгах [67, 335].

В качестве примера приведем представление тензоров второго, третьего и четвертого рангов при рассматриваемых параметризациях области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Имеем представления

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}} = P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \mathbf{C} &= C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} = C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \\ \mathbf{C} &= C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} = C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{q}}, & \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

³В монографии [67] они называются мультипликативными базисными тензорами.

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

1.1.5 Различные семейства символов Кристоффеля

Для нахождения ковариантных производных от тензоров и их компонент нам понадобятся символы Кристоффеля. Естественно, введенное выше каждое семейство базисов порождает свойственное ему семейство символов Кристоффеля, для которого следует вводить соответствующее обозначение. В связи с этим введем следующие определения:

Определение 1.1.21. Порожденное $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемые через $\Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}}$ и $\Gamma_{\tilde{p}q, \tilde{n}}$ соответственно, называются $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семействами символов Кристоффеля первого и второго рода, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

В рассматриваемом случае математические определения символов Кристоффеля первого и второго рода представляются в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{p}q, \tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Определение 1.1.22. Порожденное $\overset{(\sim)}{S}_a$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемые через $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q, \tilde{l}}$ и $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q}^{\tilde{l}}$ соответственно, называются $\overset{(\sim)}{S}_a$ -семейством символов Кристоффеля первого и второго рода, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $\overset{(\sim)}{S}_a$ -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Математически $\overset{(\sim)}{S}_a$ -семейства символов Кристоффеля определяются аналогично соотношениям (1.1.28) с учетом того, что $\mathbf{r}_{\tilde{z}} = \overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 1.1.23. Множество символов Кристоффеля первого (второго) рода $\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q, \tilde{L}}$ ($\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}}$) называется $\overset{(\sim)}{S}$ -семейством символов Кристоффеля первого (второго) рода, а их объединение — $\overset{(\sim)}{S}$ -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Математические определения этих семейств символов Кристоффеля имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q, \tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}_{\tilde{z}} = \mathbf{r}^{\tilde{z}} = \overset{(\sim)}{\mathbf{n}}, \\ \bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

Следует заметить, что тип применяемых индексов, зависит от типа рассматриваемого семейства параметризации. В связи с этим следует различать индексы, применяемые при разных семействах параметризаций.

Введем следующее

Определение 1.1.24. Индекс, применяемый при $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семействе параметризации, называется $\overset{(\sim)}{g}$ -индексом, а индекс, применяемый при $\overset{(\sim)}{S}_a$ -семействе параметризации — $\overset{(\sim)}{a}$ -индексом, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

1.1.6 Деривационные формулы для мультипликативных базисов

Нетрудно вывести деривационные формулы для мультипликативных базисов, зная аналогичные формулы для базисных векторов. В связи с этим сначала выпишем деривационные формулы для $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^g$ -семейства базисных векторов, которые в силу (1.1.28) примут вид

$$\mathbf{r}_{\tilde{p}\tilde{q}} \equiv \partial_{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}, \tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \mathbf{r}_{\tilde{q}}^{\tilde{n}} \equiv \partial_{\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = -\Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.30)$$

Теперь выведем деривационные формулы, например, для двухвекторных базисов. С этой целью в первом соотношении (1.1.26) поднимем, например, индекс \tilde{n} и продифференцируем его по $x^{\tilde{p}}$. Имеем

$$\partial_{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} = \partial_{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}^{\tilde{n}} + \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \partial_{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}\tilde{p}} \otimes \mathbf{r}^{\tilde{n}} + \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}}^{\tilde{n}}, \quad (1.1.31)$$

$$\sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}.$$

При выводе (1.1.31) было использовано правило дифференцирования обычного произведения функций, которое имеет место и в рассматриваемом случае. Его можно строго доказать, но на этом останавливаться не будем.

Учитывая (1.1.30) в (1.1.31), получаем искомое соотношение

$$\partial_{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} = \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\cdot \tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} - \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}^{\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.32)$$

Переносим члены из правой части в левую, получим

$$\partial_{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} - \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\cdot \tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} + \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{q}\tilde{p}}^{\tilde{n}} = 0, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.33)$$

Левая часть соотношения (1.1.33) представляет ковариантную производную от мультипликативного (двухвекторного) базиса. Вводя для ковариантной производной, как принято, обозначение $\nabla_{\tilde{p}}$, соотношение (1.1.33) можно представить в виде

$$\nabla_{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} = 0, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.1.34)$$

сохраняющее силу при жонглировании индексами.

Можно заметить, что, переносим члены из левых частей (1.1.30) в правые и вводя обозначение $\nabla_{\tilde{p}}$ для оператора ковариантной производной, аналогично (1.1.34) имеем соотношение

$$\nabla_{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = 0, \quad \nabla_{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = 0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.35)$$

Аналогично (1.1.34) и (1.1.35) доказывается справедливость утверждений для n -векторных базисов, $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому на этом не будем останавливаться. Эти утверждения можно сформулировать следующим образом:

Утверждение 1. *Ковариантная производная от любого мультипликативного базиса равна нулю.*

1.1.7 Представление единичного (изотропного) тензора второго ранга

Исходя из обычного представления этого тензора [67, 335], на основании (1.1.12) и (1.1.13) получаем

$$\mathbf{E} = g_{pq} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q = g_{pq} g_{\tilde{m}}^p g_{\tilde{n}}^q \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}\tilde{q}} g_{\tilde{n}}^q \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}},$$

т.е. имеем представление

$$\mathbf{E} = g_{\tilde{m}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.1.36)$$

сохраняющее силу при жонглировании⁴ немymi индексами.

По (1.1.36) видно, что элементы введенных выше матриц (1.1.10) представляют компоненты единичного тензора второго ранга (ЕТВР).

Введем следующие определения:

Определение 1.1.25. Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки в виде (1.1.1), называется новой параметризацией области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 . При этом новая параметризация называется регулярной, если внутренняя $\overset{(-)}{S}$ и внешняя $\overset{(+)}{S}$ поверхности — регулярные поверхности.

Определение 1.1.26. Компоненты $g_{\tilde{p}}^{\check{q}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, $\sim \neq \smile$ и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются компонентами переноса ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела.

Определение 1.1.27. Компоненты $g_{\tilde{p}\check{q}}, g_{\tilde{p}}^{\check{q}}, g_{\tilde{p}\check{q}} \sim = - (\sim = +)$, и компоненты переноса $g_{\tilde{p}\check{q}}, g_{\tilde{p}}^{\check{q}}, \sim = +, \smile = - (\sim = -, \smile = +)$, называются основными компонентами ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой применяется внутренняя (внешняя) базовая поверхность.

1.1.8 Представления изотропных тензоров четвертого ранга

Эти тензоры⁵ занимают особое место в МДТТ. В частности, ими пользуются, например, при записи определяющих соотношений в линейной теории упругости для изотропного материала. Поэтому целесообразно иметь их представления и в предлагаемом варианте теории. Нетрудно выписать эти представления. В самом деле, при полном сокращении индексов у мультипликативных базисов, составленных из четного числа базисных векторов, при условии, что каждая пара зацепленных индексов принадлежит только одному из $\overset{(\sim)}{g}$ -семейств индексов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, так что различные пары зацепленных индексов могут принадлежать разным семействам индексов, из мультипликативных базисов получаются изотропные тензоры. Более того, компоненты этих тензоров остаются неизменными не только при ортогональных преобразованиях, а и при замене одних $\overset{(\sim)}{S}_{\overset{(\sim)}{g}}$ -семейств реперов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, другими.

Обнаружив такую структуру, очевидно, при полном сокращении индексов у мультипликативного базиса из четырех базисных векторов надо ожидать получение всех изотропных тензоров четвертого ранга. Так как четырехвекторный мультипликативный базис определяется как тензорное произведение четырех базисных векторов, то число его изомеров равно $4! = 24$. Нетрудно показать, что при полном сокращении индексов у всех изомеров, указанным выше способом, несводимыми друг к другу окажутся только следующие три:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I &= \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\tilde{m}\tilde{n}\cdot\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{n}} = \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} = g_{\tilde{m}\tilde{n}}g_{\tilde{p}\tilde{q}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{p}}\mathbf{r}^{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} &= \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}\tilde{p}}g_{\tilde{n}\tilde{q}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{p}}\mathbf{r}^{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} &= \mathbf{R}_{\tilde{n}\tilde{m}\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\tilde{m}\tilde{n}\cdot\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{n}}\underline{\underline{\mathbb{E}}}\mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}\tilde{q}}g_{\tilde{n}\tilde{p}}\mathbf{r}^{\tilde{m}}\mathbf{r}^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{p}}\mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Нетрудно усмотреть, что если $\underline{\underline{\mathbb{H}}}$ — тензор второго ранга, то его внутренние 2-произведения с тензорами (1.1.37) приводят к тензорам

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{H}}} &= \underline{\underline{\mathbb{H}}} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I = I_1(\underline{\underline{\mathbb{H}}})\underline{\underline{\mathbb{E}}}, & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{H}}} &= \underline{\underline{\mathbb{H}}} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} = \underline{\underline{\mathbb{H}}}, \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{H}}} &= \underline{\underline{\mathbb{H}}} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} = \underline{\underline{\mathbb{H}}}^T, \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

⁴Под жонглированием немymi индексами понимается то, что, если один из индексов опускается, то соответствующий ему индекс поднимается, и наоборот.

⁵Различные применения этих тензоров можно найти в монографии [209]

где \mathbf{H}^T обозначает транспонированный тензор, $I_1(\mathbf{H})$ — первый инвариант тензора \mathbf{H} , \otimes^2 — знак внутреннего 2-произведения⁶ [67, 275, 276, 281, 288, 289, 301].

Пусть $\mathbf{S} = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)/2$ — симметричная, а $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)/2$ — кососимметричная часть тензора \mathbf{H} . Тогда, как легко заметить, в силу (1.1.38) имеем

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) \otimes^2 \mathbf{H} = \mathbf{S}, \quad \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) \otimes^2 \mathbf{H} = \mathbf{\Omega}. \quad (1.1.39)$$

Таким образом, тензор четвертого ранга $\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III})/2$ при внутреннем 2-произведении на тензор \mathbf{H} выделяет симметричную, а тензор $\underline{\underline{\mathbf{\kappa}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III})/2$ — кососимметричную часть и, следовательно, любой тензор \mathbf{N} второго ранга можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{S} + \mathbf{\Omega} = (\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} + \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}) \otimes^2 \mathbf{N} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \otimes^2 \mathbf{N}; \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{2}(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T), \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{N} - \mathbf{N}^T). \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

Отсюда и из второго соотношения (1.1.38) видно, что тензор

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} = \underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} + \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) \quad (1.1.41)$$

является единичным тензором в множестве тензоров вторых рангов относительно операции внутреннего 2-произведения. Очевидно, в этом смысле он будет единичным тензором (единицей) в любом множестве тензоров, ранг которых не меньше двух. Что касается тензора $\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III})/2$, он будет единичным тензором в том же смысле в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых и последних двух индексов. При этом $\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}}$ будет левой (правой) единицей в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых (последних) двух индексов.

Следует отметить, что общее выражение изотропного тензора четвертого ранга будет иметь вид

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \equiv \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_I + \mu(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) + \alpha(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} + 2\alpha \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}. \quad (1.1.42)$$

Нетрудно увидеть, что для тензоров $\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}$ и их компонент в силу соответствующих соотношений (1.1.37) имеют место представления

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{\Delta}}} &= \Delta_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} \mathbf{r}^{\dot{m}} \mathbf{r}^{\dot{n}} \mathbf{r}^{\dot{p}} \mathbf{r}^{\dot{q}}, \quad \Delta_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} = \frac{1}{2}(g_{\dot{m}\dot{p}}g_{\dot{n}\dot{q}} + g_{\dot{m}\dot{q}}g_{\dot{n}\dot{p}}), \\ \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}} &= \kappa_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} \mathbf{r}^{\dot{m}} \mathbf{r}^{\dot{n}} \mathbf{r}^{\dot{p}} \mathbf{r}^{\dot{q}}, \quad \kappa_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} = \frac{1}{2}(g_{\dot{m}\dot{p}}g_{\dot{n}\dot{q}} - g_{\dot{m}\dot{q}}g_{\dot{n}\dot{p}}), \quad \sim, \smile, \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (1.1.43)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

В силу первого соотношения (1.1.37) и (1.1.43) нетрудно выписать представления и для тензора (1.1.42) и его компонент, поэтому на этом останавливаться не будем.

Пусть два тензора второго ранга $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$, и $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ связаны между собой соотношениями

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{H}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad (1.1.44)$$

где $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ — тензоры четвертого ранга. Учитывая второе из соотношений (1.1.44) в первом, а потом, наоборот, первое во втором, получаем соответственно

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{J}}}) \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{H}}} = (\underline{\underline{\mathbf{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}) \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{H}}}. \quad (1.1.45)$$

⁶Например, если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ — тензоры второго ранга, то $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{B}}} = A_{ij}B^{ij}$, а если $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ — тензор четвертого ранга и $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — тензор второго ранга, то $\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j C^{ijkl} A_{kl}$. Следовательно, если $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ — тензоры четвертого ранга, то $\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n C_{ijkl} D^{klmn}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^3 \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_n C_{ijkl} D^{jkl n}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^4 \underline{\underline{\mathbf{D}}} = C_{ijkl} D^{ijkl}$.

Теперь, представляя тензоры \mathbf{P} и \mathbf{H} аналогично первому соотношению (1.1.40) и сравнивая с соотношениями (1.1.45) соответственно, нетрудно заметить, что

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{J}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{H}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}} \equiv \underline{\underline{\mathbb{E}}}. \quad (1.1.46)$$

Итак, в общем случае взаимобратные тензоры четвертого ранга удовлетворяют соотношению (1.1.46).

Нетрудно доказать, что результаты всевозможных внутренних 2-произведений тензоров $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_I, \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II}, \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}, \underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\varkappa}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}}$ можно представить в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} \otimes^2 & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & 3\underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & 3\underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\Delta}} & -\underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\varkappa}} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\varkappa}} & -\underline{\underline{\varkappa}} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \mathbf{0} \\ \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{E}}} & 3\underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & 3 \end{pmatrix}, \quad (1.1.47)$$

часть которой, получающаяся пересечением первых четырех строк и столбцов, приведена в приложении монографии [209]. Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой тензор четвертого ранга.

Теперь допустим, что $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$ — изотропный тензор четвертого ранга. Тогда аналогично (1.1.42) для него имеем представление

$$\underline{\underline{\mathbb{J}}} \equiv \lambda' \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I + \mu' (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) + \alpha' (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) = \lambda' \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\varkappa}}. \quad (1.1.48)$$

Найдем зависимости между постоянными λ, μ, α и λ', μ', α' . С этой целью, учитывая (1.1.42) и (1.1.48) в (1.1.46), получаем

$$(\lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha \underline{\underline{\varkappa}}) \otimes^2 (\lambda' \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\varkappa}}) = \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}}.$$

Отсюда в силу таблицы (1.1.47) имеем

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda') \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 4\mu\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 4\alpha\alpha' \underline{\underline{\varkappa}} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}},$$

или

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda') \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + (4\mu\mu' - 1) \underline{\underline{\Delta}} + (4\alpha\alpha' - 1) \underline{\underline{\varkappa}} = \mathbf{0},$$

а отсюда в свою очередь заключаем, что

$$\begin{cases} 3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda' = 0, \\ 4\mu\mu' = 1, \\ 4\alpha\alpha' = 1. \end{cases} \quad (1.1.49)$$

Разрешая (1.1.49) сперва относительно λ', μ' и α' , а потом относительно λ, μ и α , получим

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, & \mu' &= \frac{1}{4\mu}, & \alpha' &= \frac{1}{4\alpha}, \\ \lambda &= -\frac{\lambda'}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')}, & \mu &= \frac{1}{4\mu'}, & \alpha &= \frac{1}{4\alpha'}. \end{aligned} \quad (1.1.50)$$

Таким образом, если $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$ — взаимобратные изотропные тензоры четвертого ранга, то постоянные λ, μ, α и λ', μ', α' связаны между собой формулами (1.1.50).

В теории упругости λ и μ называются постоянными Ламе, которые с другой парой постоянных, например, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , связаны формулами

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \quad (1.1.51)$$

Тогда в силу (1.1.51) и (1.1.50) получаем

$$\lambda' = -\frac{\nu}{E}, \quad \mu' = \frac{1+\nu}{2E}, \quad \alpha' = \frac{1}{4\alpha}. \quad (1.1.52)$$

Следует заметить, что соотношения между основными парами упругих постоянных приведены в приложении V монографии [336].

Если $\underline{\mathbf{C}}$ и $\underline{\mathbf{J}}$ — взаимобратные изотропные тензоры четвертого ранга, то соотношения (1.1.44) в силу (1.1.42), (1.1.48), (1.1.50) и (1.1.52) представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{H}} = (\lambda \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{E}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha \underline{\underline{\mathcal{X}}}) \otimes \underline{\mathbf{H}}, \\ \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} \otimes \underline{\mathbf{P}} = \{E^{-1}[-\nu \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{E}} + (1+\nu) \underline{\underline{\Delta}}] + \frac{1}{2\alpha} \underline{\underline{\mathcal{X}}}\} \otimes \underline{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (1.1.53)$$

1.1.9 О ковариантной производной от компонент тензоров

Так как выписанные ниже формулы для ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга легко обобщаются на компоненты тензоров более высокого ранга, то ограничимся рассмотрением ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга.

Зная деривационные формулы для мультипликативных базисов, легко определить ковариантную производную от компонент тензоров. В самом деле, пусть \mathbf{A} — тензор первого ранга (вектор), тогда его можно представить в виде

$$\mathbf{A} = A^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\bar{p}} = A_{\check{p}} \mathbf{r}^{\check{p}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.54)$$

Дифференцируя первое равенство (1.1.54) по x^n и учитывая первую из деривационных формул (1.1.30), имеем

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{A} &= \partial_n (A^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\bar{p}}) = (\partial_n A^{\bar{p}}) \mathbf{r}_{\bar{p}} + A^{\bar{p}} \partial_n \mathbf{r}_{\bar{p}} = (\partial_n A^{\bar{p}}) \mathbf{r}_{\bar{p}} + A^{\bar{p}} \Gamma_{\bar{p}n}^{\bar{m}} \mathbf{r}_{\bar{m}} = \\ &= (\partial_n A^{\bar{m}} + A^{\bar{p}} \Gamma_{\bar{p}n}^{\bar{m}}) \mathbf{r}_{\bar{m}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя $\mathbf{A} = A_{\check{p}} \mathbf{r}^{\check{p}}$ по x^n и учитывая вторую из деривационных формул (1.1.30), получаем

$$\partial_n \mathbf{A} = \partial_n (A_{\check{p}} \mathbf{r}^{\check{p}}) = (\partial_n A_{\check{m}} - A_{\check{p}} \Gamma_{\check{m}n}^{\check{p}}) \mathbf{r}^{\check{m}}, \quad \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{A} = \nabla_n A^{\bar{m}} \mathbf{r}_{\bar{m}} = \nabla_n A_{\check{m}} \mathbf{r}^{\check{m}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантных производных введены обозначения

$$\nabla_n A^{\bar{m}} = \partial_n A^{\bar{m}} + A^{\bar{p}} \Gamma_{\bar{p}n}^{\bar{m}}, \quad \nabla_n A_{\check{m}} = \partial_n A_{\check{m}} - A_{\check{p}} \Gamma_{\check{m}n}^{\check{p}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.55)$$

Теперь рассмотрим тензор второго ранга $\underline{\mathbf{H}}$ и представим его в следующем виде:

$$\underline{\mathbf{H}} = H^{\bar{p}\check{q}} \mathbf{R}_{\bar{p}\check{q}} = H_{\bar{p}\check{q}} \mathbf{R}^{\bar{p}\check{q}} = H^{\check{q}} \mathbf{R}_{\bar{p}\check{q}} = H^{\bar{p}\check{q}} \mathbf{R}_{\bar{p}\check{q}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.56)$$

Дифференцируя, например, первое равенство (1.1.56) и учитывая деривационную формулу (1.1.32), получим

$$\begin{aligned} \partial_n \underline{\mathbf{H}} &= \partial_n (H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}) = (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \partial_n \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \\ &= (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \\ \sim, \simeq &\in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_n \underline{\mathbf{H}} = (\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантной производной введено обозначение

$$\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.57)$$

Как видно из формул (1.1.55) и (1.1.57), нахождение выражений ковариантных производных от компонент тензоров, представленных в разных семействах базисов, производится по обычному правилу [67, 209, 335] с тем отличием, что семейства символов Кристоффеля определяются семействами немых индексов. Так, например, во втором слагаемом в правой части (1.1.57) немой индекс принадлежит одному из $(\sim)g$ -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, и поэтому семейство символов Кристоффеля соответственно принадлежит одному из $S_{(\sim)g}$ -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Теперь докажем следующее

Утверждение 2. (аналог теоремы Риччи) Ковариантная производная от компонент единичного тензора второго ранга равна нулю.

Для доказательства этого утверждения продифференцируем, например, первое равенство (1.1.10) по x^n . Получим

$$\partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \partial_n (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}) = \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}} + \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда в силу первого соотношения деривационных формул (1.1.30) получаем

$$\partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = g_{\tilde{r}\tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{r}} + g_{\tilde{p}\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.58)$$

Переносим члены, находящиеся в правой части (1.1.58), в левую и вводя обозначение для ковариантной производной, получим

$$\nabla_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} - g_{\tilde{r}\tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{r}} - g_{\tilde{p}\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{r}} = 0, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.59)$$

Если бы мы исходили из других соотношений (1.1.10), то аналогично (1.1.59) доказали справедливость утверждения при любом другом расположении индексов \tilde{p} и \tilde{q} . Таким образом,

$$\nabla_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = 0, \quad \nabla_n g^{\tilde{p}\tilde{q}} = 0, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.60)$$

Равенства (1.1.60) полностью доказывают утверждение.

Из утверждения (1.1.60) непосредственно вытекает

Следствие 1.1.0.1. Ковариантная производная от компонент изотропных и демитропных тензоров равна нулю.

Заметим, что компоненты демитропных тензоров, которые являются тензорами нечетного ранга, меняют знак при несобственном ортогональном преобразовании, тогда как компоненты изотропных тензоров остаются неизменными при любом ортогональном преобразовании. Кроме того, единственным демитропным тензором третьего ранга является дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита) [209]. Поэтому, вводя в рассмотрение в предлагаемом варианте теории, например, дискриминантный тензор третьего ранга

$$\underline{\mathbf{C}} = C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{n}}, \quad C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} = (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}) \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.1.61)$$

в силу следствия 1.1.1 будем иметь

$$\nabla_m C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} = \partial_m C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} - C_{\tilde{r}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} \Gamma_{\tilde{p}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\tilde{r}\tilde{n}}^{\dots} \Gamma_{\tilde{q}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}}^{\dots} \Gamma_{\tilde{n}m}^{\tilde{r}} = 0, \quad \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.1.62)$$

Следует заметить, что с целью сокращения письма в (1.1.61) и (1.1.62) выписаны только ковариантные компоненты, хотя, конечно, при любом другом расположении индексов $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{n}, \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}$, имеет место аналогичное (1.1.62) утверждение. Следовательно, равенство (1.1.62) можно получить еще и иным путем. Например, дифференцированием второго соотношения (1.1.61) по x^m .

1.2 Связь между разными семействами параметризаций области тонкого тела

Введем следующее

Определение 1.2.1. Будем говорить, что связь между двумя семействами параметризаций области тонкого тела осуществлена, если найдены связи между порождающими эти семейства параметризаций семействами базисов и, вообще, между порожденными порождающими семействами базисов любыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими связываемые параметризации.

Очевидно, зная связь между двумя порождающими рассматриваемые семейства параметризаций семействами базисов, легко найти связь, например, между порожденными ими семействами символов Кристоффеля и, вообще, между порожденными ими любыми семействами соответствующих геометрических характеристик. Мы ограничимся нахождением связей между некоторыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими эти параметризации.

1.2.1 Связь между различными семействами мультипликативных базисов

В силу соотношения (1.1.12), дающего связь между различными семействами базисов, нетрудно найти связи между различными семействами мультипликативных базисов. В самом деле, легко усмотреть, что связи, например, между двухвекторными мультипликативными базисами будут иметь вид

$$\mathbf{R}_{\tilde{p}\cdot}^{\cdot\tilde{q}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{n}}^{\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\cdot}^{\cdot\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.2.1)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами.

Следует заметить, что обобщение (1.2.1) на мультипликативные базисы, состоящие из более чем двух базисных векторов, не представляет большого труда и поэтому на этом с целью сокращения письма не будем останавливаться, а в случае надобности по аналогии (1.2.1) выпишем нужные соотношения.

1.2.2 Связь между различными семействами символов Кристоффеля

Найдем связь между $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}$ - и $\overset{(\smile)}{S}_{(\smile)}$ -семействами символов Кристоффеля⁷, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$. Э этой целью, дифференцируя (1.1.12) по x^q и пользуясь определениями символов Кристоффеля (1.1.28), получим

$$\begin{aligned} \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} &= \partial_q (g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}) = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \sim, \smile &\in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q, \tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.2.2)$$

где второе равенство (1.2.2) получается аналогично первому.

Умножая (1.2.2) почленно сначала на $\mathbf{r}_{\tilde{l}} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{k}} \mathbf{r}_{\tilde{k}}$, а потом на $\mathbf{r}^{\tilde{l}} = g_{\tilde{k}}^{\tilde{l}} \mathbf{r}^{\tilde{k}}$ и учитывая определения символов Кристоффеля (1.1.28), найдем искомые связи

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{p}q, \tilde{l}} &= g_{\tilde{l}\tilde{n}} (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q}^{\tilde{n}}) = g_{\tilde{l}}^{\tilde{n}} (\partial_q g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q, \tilde{n}}), \\ \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{l}} &= g_{\tilde{n}}^{\tilde{l}} (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q}^{\tilde{n}}) = g_{\tilde{n}}^{\tilde{l}} (\partial_q g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}q, \tilde{n}}), \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Следует заметить, что соотношения (1.2.3) совпадают с аналогичными соотношениями из работ [234, 250].

1.2.3 Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора

Предполагается, что рассматриваемый тензор представлен в различных семействах мультипликативных базисов. Ограничимся рассмотрением тензора второго ранга $\underline{\mathbf{H}}$, представления которого имеют вид

$$\underline{\mathbf{H}} = H_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{r}} \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.2.4)$$

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Отсюда, учитывая линейную независимость мультипликативных базисов $\mathbb{R}_{\tilde{q}}^{\tilde{p}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, искомые связи между компонентами представляются в виде

$$H_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{r}} = g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}} H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.2.5)$$

сохраняющем силу при жонглировании индексами.

Нетрудно найти связи и между ковариантными производными от компонент тензора $\underline{\mathbf{H}}$. В самом деле, в силу утверждения 2 и правила нахождения ковариантной производной от суммы и произведения компонент тензоров из (1.2.5) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_s H_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{r}} &= \nabla_s (g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}} H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}}) = \nabla_s (g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}}) H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}} + g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}} \nabla_s H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}} = g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}} \nabla_s H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}}, \\ \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомые связи имеют вид

$$\nabla_s H_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{r}} = g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{q}\tilde{n}} \nabla_s H_{\tilde{n}\tilde{m}}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.2.6)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами, за исключением индекса s .

Заметим, что обобщение (1.2.5) и (1.2.6) на компоненты тензоров более высокого ранга не представляет труда, поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованный читатель легко справится с этой задачей самостоятельно.

⁷Классификация символов Кристоффеля подробнее рассмотрена в [234, 250].

1.3 О компонентах ЕТВР

В этом разделе подробнее рассматриваются различные семейства компонент ЕТВР. В частности, приводятся их удобные для пользования с точки зрения практики развернутые представления как при общих, так и при частных случаях семейств параметризаций.

Следует заметить, что на протяжении всего раздела за основную базовую принимается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$. Тогда в силу определения 1.1.27 основными компонентами ЕТВР являются компоненты $g_{pq}^{\bar{-}}$, $g_p^{\bar{q}}$, $g^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{pq}^{\bar{+}}$, $g_p^{\bar{q}}$, играющие важную роль в предлагаемой теории в том смысле, что остальные компоненты и большинство геометрических характеристик выражаются через них.

1.3.1 Об основных компонентах ЕТВР и число независимых основных компонент ЕТВР

В силу определения 1.1.27 в рассматриваемом случае, когда в качестве основной базовой принята внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$, можно ввести следующие определения:

Определение 1.3.1. Компоненты $g_{pq}^{\bar{-}}$, $g_p^{\bar{q}}$, $g^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{pq}^{\bar{+}}$, $g_p^{\bar{q}}$, называются основными компонентами ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$.

Определение 1.3.2. Компоненты $g_{pq}^{\bar{-}}$, $g_p^{\bar{q}}$ называются основными компонентами переноса ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$.

В рассматриваемом случае на первый взгляд число независимых основных компонент ЕТВР должно быть 15. Это 6 компонент $g_{pq}^{\bar{-}} = g_{qp}^{\bar{-}}$ и 9 основных компонент переноса $g_{pq}^{\bar{+}}$ ЕТВР (в силу (1.1.13) остальные основные компоненты выражаются через эти компоненты). Однако число независимых основных компонент значительно меньше 15. Следует заметить, что симметричный тензор второго ранга в рассматриваемой точке, конечно, имеет 6 независимых компонент. Однако, говоря о независимых компонентах ЕТВР, подразумеваются его компоненты при различных значениях координаты x^3 . В частности, компоненты $g_{pq}^{\bar{+}}$ определены в двух точках: при $x^3 = 0$ и $x^3 = 1$.

С целью установления числа независимых основных компонент ЕТВР найдем зависимости между ними. В этой связи продифференцируем $g_{q3}^{\bar{-}} = \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h}$ по x^p и учтем (1.1.3), второе соотношение (1.1.4) и (1.1.7). Имеем

$$\begin{aligned} \partial_p g_{q3}^{\bar{-}} &= \partial_p (\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h}) = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_q \cdot \partial_p \mathbf{h} = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_q \cdot (\mathbf{r}_p^+ - \mathbf{r}_p^-) = \\ &= \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}} = \Gamma_{qp,3}^{\bar{-}} + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_p g_{q3}^{\bar{-}} = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}} = \Gamma_{qp,3}^{\bar{-}} + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}},$$

Меняя в этом соотношении местами индексы p и q , получим

$$\partial_q g_{p3}^{\bar{-}} = \partial_q \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{h} + g_{qp}^{\bar{+}} - g_{qp}^{\bar{-}} = \Gamma_{pq,3}^{\bar{-}} + g_{qp}^{\bar{+}} - g_{qp}^{\bar{-}}.$$

Вычитая последнее соотношение почленно из предпоследнего, получим

$$\omega_{pq} \equiv \partial_p g_{q3}^{\bar{-}} - \partial_q g_{p3}^{\bar{-}} = (\partial_p \mathbf{r}_q - \partial_q \mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}} = (\Gamma_{qp,3}^{\bar{-}} - \Gamma_{pq,3}^{\bar{-}}) + g_{pq}^{\bar{+}} - g_{pq}^{\bar{-}}. \quad (1.3.1)$$

Нетрудно заметить, что $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$, т.е. ω_{pq} — кососимметричная матрица, поэтому из 9 элементов (1.3.1) отличными от нуля будут следующие три: $\omega_{I3} = -\omega_{3I}$, $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$.

Таким образом, получим следующие три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$\begin{aligned} \omega_{I3} &= \partial_I g_{\bar{3}\bar{3}} = 2h\partial_I h = 2\mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \partial_I \mathbf{h} = 2\Gamma_{\bar{3}I, \bar{3}} = 2(g_{\bar{3}\bar{3}}^+ - g_{\bar{3}\bar{3}}^-), \\ \omega_{IJ} &= \partial_I g_{\bar{J}\bar{3}} - \partial_J g_{\bar{I}\bar{3}} = g_{\bar{I}\bar{J}}^+ - g_{\bar{J}\bar{I}}^+. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Из первого соотношения (1.3.2) имеем

$$g_{\bar{I}\bar{3}}^+ = g_{\bar{I}\bar{3}}^- + h\partial_I h = g_{\bar{I}\bar{3}}^- + \Gamma_{\bar{3}I, \bar{3}}^-, \quad (1.3.3)$$

а отсюда получаем

$$g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{q}} g_{\bar{I}\bar{q}}^+ = g_{\bar{3}\bar{q}}^- \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{I}}^+ = \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot (\mathbf{r}_{\bar{I}}^- + \partial_I \bar{h}) = g_{\bar{I}}^{\bar{3}} + \Gamma_{\bar{3}\bar{I}}^{\bar{3}}, \quad (1.3.4)$$

где

$$\Gamma_{\bar{3}I, \bar{3}}^- = h\partial_I h, \quad \Gamma_{\bar{3}\bar{I}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{q}} \Gamma_{\bar{3}I, \bar{q}}^-. \quad (1.3.5)$$

Легко усмотреть, что в силу (1.1.7) имеем еще три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$g_{\bar{3}m}^+ = g_{\bar{3}m}^-. \quad (1.3.6)$$

Таким образом, в общем случае параметризации области тонкого тела, т.е. когда \mathbf{h} не является перпендикуляром к базовым поверхностям $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$, основные компоненты ЕТВР связаны между собой шестью соотношениями (1.3.2) и (1.3.6) и в рассматриваемом случае число независимых основных компонент ЕТВР равно $15-6=9$.

В качестве независимых основных компонент ЕТВР можно взять, например, следующие:

$$g_{\bar{p}\bar{q}}^- = g_{\bar{q}\bar{p}}^-; \quad g_{\bar{1}\bar{1}}^+, \quad g_{\bar{1}\bar{2}}^+, \quad g_{\bar{2}\bar{2}}^+. \quad (1.3.7)$$

Компоненты $g_{\bar{I}\bar{3}}^+$ и $g_{\bar{3}\bar{m}}^+$ определяются из соотношений (1.3.3) и (1.3.6) соответственно, а $g_{\bar{2}\bar{1}}^+$ можно определить из второго соотношения (1.3.2).

Теперь рассмотрим частный случай, когда \mathbf{h} перпендикулярен внутренней базовой поверхности $S^{(-)}$ ($\mathbf{h} \perp S^{(-)}$). В этом случае, нетрудно увидеть, что

$$g_{\bar{I}\bar{3}}^- = 0, \quad g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{I}\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1} \quad (1.3.8)$$

и, следовательно, в силу первого соотношения (1.3.8) число независимых основных компонент (1.3.7) сокращается на две единицы и их число становится равным 7.

Учитывая третье и четвертое соотношения (1.3.8) и первое соотношение (1.3.5), из второго соотношения (1.3.5) получаем

$$\Gamma_{\bar{3}\bar{I}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}} \Gamma_{\bar{3}I, \bar{3}}^- = \frac{1}{h} \partial_I h. \quad (1.3.9)$$

Теперь, подставляя первое соотношение (1.3.8) в (1.3.3), а второе соотношение (1.3.8) и (1.3.9) в (1.3.4), имеем соответственно

$$g_{\bar{I}\bar{3}}^+ = h\partial_I h, \quad g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = \frac{1}{h} \partial_I h \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \perp S^{(-)}. \quad (1.3.10)$$

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае из (1.3.2) получаем

$$g_{IJ}^{+-} = g_{JI}^{+-} \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \perp S^{(-)}. \quad (1.3.11)$$

На основании соотношения (1.3.11) заключаем, что $g_{21}^{+-} = g_{12}^{+-}$, а число независимых основных компонент ЕТВР в рассматриваемом случае больше не уменьшается.

Таким образом, в том случае, когда $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$ и на базовой поверхности $S^{(-)}$ координатные линии не являются ортогональными линиями, в качестве независимых основных компонент ЕТВР можно рассматривать следующие:

$$g_{IJ}^{--} = g_{JI}^{--}, \quad g_{33}^{--} = h^2; \quad g_{11}^{+-}, \quad g_{12}^{+-}, \quad g_{22}^{+-}. \quad (1.3.12)$$

Следовательно, если координатные линии на базовой поверхности $S^{(-)}$ являются ортогональными линиями и $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$, то $g_{12}^{--} = g_{21}^{--} = 0$ и число независимых основных компонент ЕТВР (1.3.12) уменьшается еще на одно и становится 6, т.е. в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты:

$$g_{11}^{--}, \quad g_{22}^{--}, \quad g_{33}^{--}; \quad g_{11}^{+-}, \quad g_{12}^{+-}, \quad g_{22}^{+-}. \quad (1.3.13)$$

Ниже увидим, что в более частных случаях параметризации на базовой поверхности $S^{(-)}$, число независимых основных компонент ЕТВР еще уменьшится.

Далее с целью более наглядного представления выражений компонент переноса ЕТВР g_{kl}^{--} , $g_k^{\bar{l}}$, g_{-}^k , $g_{-}^{k\bar{l}}$ и некоторых других геометрических характеристик через основные компоненты ЕТВР выпишем их в развернутом виде при различных частных случаях параметризаций области тонкого тела, а также рассмотрим некоторые вопросы теории.

1.3.2 Представления компонент ЕТВР через его основные компоненты переноса при различных семействах параметризации области тонкого тела

Рассматриваются различные семейства параметризаций области тонкого тела и даются развернутые представления компонент ЕТВР через его основные компоненты переноса при этих семействах параметризаций.

1.3.2.1 Вектор \mathbf{h} не перпендикулярен к базовым поверхностям

Получим представления компонент переноса ЕТВР через его основные компоненты переноса. Нетрудно заметить, что

$$g_{kl}^{--} \sim (g_{KL}^{--}, g_{K3}^{--}, g_{3L}^{--}, g_{33}^{--}), \quad g_k^{\bar{l}} \sim (g_K^{\bar{L}}, g_K^{\bar{3}}, g_3^{\bar{l}}),$$

где \sim — символ эквивалентности.

Требуется выписать выражения каждой из этих компонент. В силу (1.1.11) получаем

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}}^{--} &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}}^{--} + x^3g_{K\bar{L}}^{+-}, & g_K^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_K^{\bar{L}} + x^3g_K^{\bar{L}}, \\ g_{K\bar{3}}^{--} &= (1 - x^3)g_{K\bar{3}}^{--} + x^3g_{K\bar{3}}^{+-}, & g_K^{\bar{3}} &= x^3g_K^{\bar{3}}, \\ g_{3\bar{L}}^{--} &= g_{3\bar{L}}^{--}, & g_3^{\bar{l}} &= g_3^{\bar{l}}, \\ g_{3\bar{3}}^{--} &= g_{3\bar{3}}^{--} = h^2, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Аналогично (1.3.14) имеем

$$g^{k\bar{l}} \sim (g^{K\bar{L}}, g^{K\bar{3}}, g^{3\bar{L}}, g^{3\bar{3}}), \quad g_{\bar{l}}^k \sim (g_{\bar{L}}^K, g_{\bar{3}}^K, g_{\bar{L}}^3, g_{\bar{3}}^3). \quad (1.3.15)$$

Для нахождения выражений компонент (1.3.15) можно воспользоваться соотношением (1.1.24). Сначала из (1.1.21) найдем выражения для \mathbf{r}^K и \mathbf{r}^3 , а затем с их помощью – выражения для компонент (1.3.15).

Из (1.1.21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KPq} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{K3q} \epsilon_{lmn} g_3^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_3^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{K3Q} \epsilon_{L3N} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{LM3} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KQ3} \epsilon_{LN3} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \vartheta^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}. \end{aligned}$$

Не будет лишним, если укажем и другой путь, более короткий и удобный для нахождения выражений для \mathbf{r}^K . В самом деле, в силу (1.1.12) при $\sim \in \emptyset$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= C^{KL} \mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}_{\tilde{M}} \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} C_{\tilde{M}\tilde{3}\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \\ &= \sqrt{gg^{-1}} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \vartheta^{-1} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}}. \end{aligned}$$

Аналогично исходя из (1.1.24) можно найти выражение и для \mathbf{r}^3 . Однако найдем его более коротким путем. Из (1.1.12) получаем

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} = g_k^{\bar{3}} \mathbf{r}^k = g_3^{\bar{3}} \mathbf{r}^3 + g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^3 + g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K,$$

а отсюда, учитывая предыдущее соотношение, найдем

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^{\bar{3}} + \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}.$$

С другой стороны из (1.1.12) имеем

$$\mathbf{r}^3 = g_{\tilde{n}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_N^3 \mathbf{r}^{\tilde{N}}.$$

Сравнивая два последних соотношения, заключаем, что

$$g_L^3 = \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом, мы получили более общие соотношения, чем требовалось, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \vartheta^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_L^3 \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \\ g_L^3 &= \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Из (1.3.16) при $\sim = -$ получаем искомые соотношения

$$\mathbf{r}^K = \vartheta^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_L^3 \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad g_L^3 = \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}. \quad (1.3.17)$$

Приведем (1.3.17) к более компактному виду. Вводя обозначения

$$A_{\bar{M}}^K \equiv \epsilon^{KL} \epsilon_{M\tilde{N}} g_L^{\tilde{N}} = g_{\bar{M}}^{\bar{K}} + x^3 a_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \quad a_{\bar{M}}^{\bar{K}} \equiv (g_{\bar{I}}^{\bar{K}} - 1) g_{\bar{M}}^{\bar{K}} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \quad (1.3.18)$$

соотношения (1.3.17) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^K = \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^K \bar{\mathbf{r}}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = \bar{\mathbf{r}}^3 + g_{\bar{M}}^3 \bar{\mathbf{r}}^{\bar{M}}, \quad g_{\bar{M}}^3 = -\vartheta^{(-) -1} g_{\bar{K}}^3 A_{\bar{M}}^K. \quad (1.3.19)$$

Теперь в силу (1.3.19) нетрудно выписать искомые выражения для компонент (1.3.15). В самом деле, на основании их определения получаем

$$\begin{aligned} g^{K\bar{L}} &= \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{M}}^K &= \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\ g^{3\bar{L}} &= g^{\bar{3}\bar{L}} - \vartheta^{(-) -1} g_{\bar{K}}^3 A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{M}}^3 &= -\vartheta^{(-) -1} g_{\bar{K}}^3 A_{\bar{M}}^K, \\ g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} - \vartheta^{(-) -1} g_{\bar{K}}^3 A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g_{\bar{3}}^3 &= 1. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Теперь более внимательно рассмотрим, например, первое из соотношений (1.1.20). Запишем его в виде квадратного трехчлена относительно x^3 . Имеем

$$\vartheta^{(-)} = (1 - x^3)^2 + x^3(1 - x^3)g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + (x^3)^2 \vartheta^{(\mp)} = (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)})(x^3)^2 - (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}})x^3 + 1. \quad (1.3.21)$$

Учитывая (1.1.18) при $\sim = +$, $\smile = -$, соотношению (1.3.21) можно придать следующий вид

$$\vartheta^{(-)} = \left[(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}})(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) + g_{\bar{1}}^{\bar{2}} g_{\bar{2}}^{\bar{1}} \right] (x^3)^2 - \left[(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}}) + (1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) \right] x^3 + 1. \quad (1.3.22)$$

Рассмотрим дискриминант квадратного трехчлена. Исходя, например, из (1.3.21), имеем

$$D = (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4(1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)}) = (g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4\vartheta^{(\mp)} = (g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4 \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}}).$$

Далее, раскрывая детерминант, получим

$$D = (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - g_{\bar{2}}^{\bar{2}})^2 + 4g_{\bar{2}}^{\bar{1}} g_{\bar{1}}^{\bar{2}}. \quad (1.3.23)$$

Утверждение 3. Дискриминант (1.3.23) квадратного трехчлена (1.3.22) неотрицателен, т.е. $D \geq 0$.

Доказательство. В самом деле, $g_{\bar{I}}^{\bar{I}}$ и $\det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})$ — инварианты, поэтому и дискриминант D инвариантен. Так как D инвариантен, то утверждение достаточно доказать относительно специально выбранной системы координат. Выбирая в рассматриваемой точке ортогональную систему координат (необязательно декартову) и учитывая (1.3.11), имеем

$$g_{\bar{2}}^{\bar{1}} g_{\bar{1}}^{\bar{2}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g_{\bar{2}\bar{I}}^{\bar{I}} g_{\bar{1}\bar{J}}^{\bar{J}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} g_{\bar{2}\bar{1}} g_{\bar{1}\bar{2}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\bar{1}\bar{2}})^2 \geq 0.$$

Итак, в ортогональной пространственной системе координат в рассматриваемой точке (1.3.23) представляется в виде

$$D = (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - g_{\bar{2}}^{\bar{2}})^2 + 4g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\bar{1}\bar{2}})^2 \geq 0, \quad (1.3.24)$$

что и требовалось доказать. \square

В силу (1.3.24) квадратный трехчлен (1.3.22) обращается в нуль при следующих двух значениях x^3 :

$$(x^3)_{1,2} = \frac{2 - g_{\mp}^{\bar{1}} \pm \sqrt{(g_{\mp}^{\bar{1}} - g_{\mp}^{\bar{2}})^2 + 4g_{\mp}^{\bar{1}}g_{\mp}^{\bar{2}}}}{2\left[(1 - g_{\mp}^{\bar{1}})(1 - g_{\mp}^{\bar{2}}) - g_{\mp}^{\bar{1}}g_{\mp}^{\bar{2}}\right]}. \quad (1.3.25)$$

Далее рассмотрим два частных случая параметризации области тонкого тела: первый – вектор \mathbf{h} перпендикулярен к поверхности $S^{(-)}$, второй – вектор \mathbf{h} перпендикулярен к поверхности $S^{(-)}$ и при этом координатные линии на основной базовой поверхности $S^{(-)}$ являются линиями кривизны.

Можно также рассматривать случаи, когда на основной базовой поверхности параметризация осуществляется посредством асимптотических, изометрических и сопряженно-изометрических линий, однако после изложения двух указанных выше случаев рассмотрение этих случаев не представляет большого труда. Поэтому на них останавливаться не будем, а заинтересованный читатель может найти изложение этих случаев параметризации поверхности в [67, 69].

1.3.2.2 Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности

В этом случае, как известно, имеют место соотношения (1.3.8) и (1.3.10) и, учитывая их, (1.3.14) и (1.3.20) представляются в форме

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}} + x^3g_{K\bar{L}}, & g_{K\bar{L}}^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}}^{\bar{L}} + x^3g_{K\bar{L}}^{\bar{L}}, \\ g_{K\bar{3}} &= x^3g_{K\bar{3}} = x^3h\partial_I h, & g_{K\bar{3}}^{\bar{3}} &= x^3g_{K\bar{3}}^{\bar{3}} = x^3\frac{1}{h}\partial_I h, \\ g_{3\bar{L}} &= 0, & g_{3\bar{L}}^{\bar{L}} &= g_{3\bar{L}}^{\bar{L}}; \\ g_{3\bar{3}} &= g_{3\bar{3}} = h^2, & & \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

$$\begin{aligned} g^{K\bar{L}} &= \vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{L}}^K &= \vartheta^{-1}A_{\bar{L}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\ g^{3\bar{L}} &= -\vartheta^{-1}g_{\bar{K}}^{\bar{3}}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{L}}^{\bar{3}} &= \vartheta^{-1}g_{\bar{K}}^{\bar{3}}A_{\bar{L}}^K, \\ g^{3\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1}, & g_{\bar{3}}^{\bar{3}} &= 1. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

1.3.2.3 Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности и координатные линии на ней являются линиями кривизны

Прежде чем выписать в рассматриваемом случае выражения для компонент переноса ЕТВР, вспомним кое-что из дифференциальной геометрии, касающееся линии кривизны на поверхности. Во первых, они ортогональные линии и, во вторых, вектор Родрига (производная от единичного вектора нормали к поверхности по естественному параметру (дуге) этой линии) и единичный вектор касательной к той же линии коллинеарны. Кроме того, линия кривизны в каждой точке имеет направление, совпадающее с одним из главных направлений поверхности в этой же точке и геодезическое кручение линии кривизны равно нулю [67, 133, 348].

Обозначим единичный вектор нормали к поверхности $S^{(-)}$ через $\mathbf{n}^{(-)}$, единичный вектор касательной к линии кривизны на этой поверхности через $\mathbf{s}^{(-)}$, а естественный параметр

по этой линии через $\bar{s}^{(-)}$. Тогда имеем

$$\frac{d\bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{d\bar{s}^{(-)}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{\partial x^I} \frac{dx^I}{d\bar{s}^{(-)}} = \partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} \bar{s}^I = -k_s^{(-)} \bar{\mathbf{s}}^{(-)}, \quad (1.3.28)$$

где $k_s^{(-)}$ — нормальная кривизна поверхности в рассматриваемой точке, а $\bar{s}^I = \mathbf{r}^I \cdot \bar{\mathbf{s}}^{(-)} = dx^I/d\bar{s}^{(-)}$.

Нетрудно заметить, что для линий кривизн (x^I) , $I = 1, 2$, соотношение (1.3.28) можно представить в виде

$$\bar{s}^I_{(I)} \partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} = -k_I^{(-)} \bar{\mathbf{s}}^{(-)}_{(I)}, \quad \bar{s}^I_{(I)} = \frac{dx^I}{d\bar{s}^{(-)}_{(I)}} = \bar{\mathbf{s}}^{(-)}_{(I)} \cdot \mathbf{r}^I, \quad \langle I = 1, 2 \rangle.$$

Откуда имеем

$$\frac{dx^I}{d\bar{s}^{(-)}_{(I)}} \partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} = -k_I^{(-)} \frac{d\mathbf{r}}{d\bar{s}^{(-)}_{(I)}} = -k_I \mathbf{r}^I_{(I)} \frac{dx^I}{d\bar{s}^{(-)}_{(I)}}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle,$$

т.е.

$$\partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} = -k_I \mathbf{r}^I_{(I)}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle. \quad (1.3.29)$$

Здесь $k_I^{(-)}$ — главная кривизна поверхности \bar{S} в направлении $\mathbf{r}^I_{(I)}$.

Далее представим компоненты переноса g_{IJ}^{+-} , $g_{IJ}^{\bar{J}}$ ЕТВР в удобном виде. В силу определения g_{IJ}^{+-} и (1.1.3) имеем

$$\begin{aligned} g_{IJ}^{+-} &= \mathbf{r}^I_{(I)} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)} = [\partial_I (\mathbf{h} + \bar{\mathbf{r}}^{(-)})] \cdot \mathbf{r}^J_{(J)} = \partial_I \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)} + g_{IJ}^{--} = \partial_I (h \bar{\mathbf{n}}^{(-)}) \cdot \mathbf{r}^J_{(J)} + g_{IJ}^{--} = \\ &= \partial_I h (\bar{\mathbf{n}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)}) + h (\partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)}) + g_{IJ}^{--} = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)}) + g_{IJ}^{--}, \end{aligned}$$

где учтено, что $\bar{\mathbf{n}}^{(-)} \perp \mathbf{r}^J_{(J)}$.

Таким образом,

$$g_{IJ}^{+-} = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^J_{(J)}) + g_{IJ}^{--}, \quad g_{IJ}^{\bar{J}} = g^{\bar{J}K} g_{IK}^{+-} = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^{\bar{J}}) + g_{IJ}^{\bar{J}}. \quad (1.3.30)$$

Учитывая (1.3.29) в (1.3.30), получим их искомые представления

$$g_{IJ}^{+-} = (1 - h k_I^{(-)}) g_{IJ}^{--}, \quad g_{IJ}^{\bar{J}} = (1 - h k_I^{(-)}) g_{IJ}^{\bar{J}}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle. \quad (1.3.31)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае в силу первого соотношения (1.3.31) $g_{12}^{+-} = 0$ и число независимых основных компонент ЕТВР (1.3.13) уменьшится на одно, становясь равным 5. Таким образом, в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты ЕТВР: g_{11}^{--} , g_{22}^{--} , g_{33}^{--} , g_{11}^{+-} , g_{22}^{+-} . Кроме того, если на основной базовой поверхности гауссовы координаты являются изометрическими, то $g_{11}^{--} = g_{22}^{--}$ и, очевидно, число независимых основных компонент ЕТВР уменьшится еще на одно, становясь равным 4. В этом случае в качестве независимых основных компонент ЕТВР можно рассматривать, например, g_{11}^{--} , g_{33}^{--} , g_{11}^{+-} , g_{22}^{+-} .

Теперь нетрудно найти выражения для компонент переноса $g_{m\bar{n}}$, $g_m^{\bar{n}}$ ЕТВР. В самом деле, учитывая (1.3.10) и (1.3.31) из (1.3.14) получим

$$\begin{aligned}
 g_{I\bar{I}} &= g_{\bar{I}I} \left[1 + x^3 (g_{\bar{I}}^I - 1) \right], \quad \langle I = 1, 2 \rangle, & g_{\bar{I}}^I &= 1 + x^3 (g_{\bar{I}}^I - 1), \quad \langle I = 1, 2 \rangle, \\
 g_{I\bar{J}} &= 0, \quad I \neq J, & g_{\bar{I}}^J &= 0, \quad I \neq J, \\
 g_{I\bar{3}} &= x^3 g_{\bar{I}3} = x^3 h \partial_I h, & g_{\bar{I}}^{\bar{3}} &= x^3 g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = x^3 \frac{1}{h} \partial_I h, \\
 g_{3\bar{J}} &= g_{\bar{3}J} = 0, & g_{\bar{3}}^{\bar{I}} &= g_{\bar{3}}^{\bar{I}}. \\
 g_{\bar{3}\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3}} = h^2,
 \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Заметим, что из (1.3.25) легко получаем

$$(x^3)_I = (1 - g_{\bar{I}}^I)^{-1}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle \tag{1.3.33}$$

и, учитывая (1.3.33), квадратный трехчлен (1.3.22) представится в виде

$$\vartheta^{(-)} = \left[1 + x^3 (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1) \right] \left[1 + x^3 (g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1) \right]. \tag{1.3.34}$$

Легко получить выражения и для компонент переноса $g^{k\bar{l}}$, g_l^k ЕТВР. В самом деле, в силу (1.3.31) и (1.3.34) из (1.3.18) имеем

$$\begin{aligned}
 a_{\bar{1}}^{\bar{1}} &= g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1, \quad a_{\bar{2}}^{\bar{2}} = g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1; \quad a_{\bar{I}}^{\bar{J}} = 0, \quad I \neq J, \\
 A_{\bar{1}}^{\bar{1}} &= 1 + x^3 (g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1), \quad A_{\bar{2}}^{\bar{2}} = 1 + x^3 (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1); \quad A_{\bar{K}}^{\bar{I}} = 0, \quad I \neq K
 \end{aligned} \tag{1.3.35}$$

и, учитывая соотношения второй строки (1.3.35) в (1.3.20), получим искомые соотношения

$$\begin{aligned}
 g^{K\bar{K}} &= \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-1} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\bar{K}}^K &= \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-1}, \\
 g^{K\bar{L}} &= 0, \quad K \neq L, & g_{\bar{L}}^K &= 0, \quad K \neq L, \\
 g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\
 g^{3\bar{K}} &= -x^3 \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-1} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\bar{K}}^{\bar{3}} &= -x^3 \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-1} g_{\bar{K}}^{\bar{3}}, \\
 g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2}, & g_{\bar{3}}^{\bar{3}} &= g_{\bar{3}}^{\bar{3}} = 1, \\
 \langle K = 1, 2 \rangle; & & \langle K = 1, 2 \rangle &.
 \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

Здесь, конечно, $g_{\bar{K}}^{\bar{3}} = h^{-1} \partial_K h$.

Следует заметить, что имея выражения для компонент переноса ЕТВР, не представляет большого труда найти выражения и для компонент g_{pq} и g^{pq} ЕТВР, которые в силу (1.1.13) представляются в виде

$$g_{pq} = g_p^{\bar{n}} g_{\bar{n}q}, \quad g^{pq} = g^{p\bar{m}} g_{\bar{m}}^q. \tag{1.3.37}$$

Не останавливаясь на подробных представлениях (1.3.37) во всех рассмотренных выше случаях, приведем их выражения только в том случае, когда вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ и при этом координатные линии на ней являются линиями кривизны. На основании (1.3.32) и (1.3.36) из (1.3.37) получаем

$$\begin{aligned} g_{II} &= g_{\bar{I}\bar{I}} \left[1 + x^3 (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} - 1) \right]^2 + (x^3 \partial_I h)^2, \quad \langle I = 1, 2 \rangle \\ g_{IJ} &= (x^3)^2 \partial_I h \partial_J h, \quad I \neq J, \quad g_{I3} = x^3 h \partial_I h, \quad g_{33} = h^2; \\ g^{KK} &= g^{\bar{K}\bar{K}} \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-2}, \quad g^{K3} = -x^3 g^{\bar{K}\bar{K}} g_{\bar{K}}^3 \left[1 + x^3 (g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 1) \right]^{-2}, \quad \langle K = 1, 2 \rangle \\ g^{12} &= 0, \quad g^{33} = h^{-2} + (x^3)^2 \left\{ g^{\bar{1}\bar{1}} (g_{\bar{1}}^{\bar{3}})^2 \left[1 + x^3 (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1) \right]^{-2} + g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\bar{2}}^{\bar{3}})^2 \left[1 + x^3 (g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1) \right]^{-2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

1.4 Выражение различных семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР

Ограничимся рассмотрением $\overset{(\sim)}{S}$ -семейств символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, а за основную базовую примем внутреннюю базовую поверхность S . Тогда по определению 1.3.1 основными компонентами ЕТВР являются компоненты $g_{\bar{p}\bar{q}}, g_{\bar{p}}^{\bar{q}}, g^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{\bar{p}\bar{q}}^{\bar{q}}, g_{\bar{p}}^{\bar{q}}$ и задача заключается в выражении символов Кристоффеля (1.1.28) через них. С целью разрешения этой задачи разобьем ее на две задачи:

1. Выразим $\overset{(\sim)}{S}$ -семейства символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, +\}$, через основные компоненты ЕТВР.
2. Выразим S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР.

1.4.1 Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ЕТВР

По определениям (1.1.28) для $\overset{(\sim)}{S}$ -семейств символов Кристоффеля⁸, $\sim \in \{-, +\}$, будем иметь

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}}, \quad \Gamma_{\check{p}\check{q}}^{\check{k}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}}^{\check{k}} = g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (1.4.1)$$

Заметим, что

$$\partial_Q \mathbf{r}_{\check{P}} = \partial_P \mathbf{r}_{\check{Q}}, \quad \partial_3 \mathbf{r}_{\check{P}} = 0, \quad \partial_Q \mathbf{r}_{\check{3}} \neq 0, \quad \partial_3 \mathbf{r}_{\check{P}} \neq \partial_P \mathbf{r}_{\check{3}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (1.4.2)$$

а в силу (1.1.3), (1.1.7) и (1.1.12) аналог формулы Вейнгартена представится в виде

$$\partial_p \mathbf{h} = \mathbf{r}_{\bar{p}}^+ - \mathbf{r}_{\bar{p}}^- = (g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - g_{\bar{p}}^{\bar{q}}) \mathbf{r}_{\bar{q}} = (g_{\bar{p}\bar{q}}^+ - g_{\bar{p}\bar{q}}^-) \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.4.3)$$

Нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} \sim (\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{3}}, \Gamma_{\check{3}\check{Q},\check{l}}, \Gamma_{\check{p}\check{3},\check{l}}), \quad \sim \in \{-, +\}.$$

⁸Далее в некоторых соотношениях над вторым индексом у символов Кристоффеля пишем тот же самый знак, что и над другими. Хотя, как было сделано выше, это необязательно.

На основании второго соотношения (1.4.2), (1.4.3) и определения (1.4.1) легко показать, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{z},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{z}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}} = 0, \quad \Gamma_{\check{z}\check{Q},\check{l}} = g_{\check{Q}\check{l}}^+ - g_{\check{Q}\check{l}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \quad (1.4.4)$$

Кроме того,

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \frac{1}{2}(-\partial_L g_{\check{P}\check{Q}} + \partial_P g_{\check{Q}\check{L}} + \partial_Q g_{\check{L}\check{P}}) = \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}, \quad (1.4.5)$$

где $\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}$ в силу первой строки (1.1.29) — $\overset{(\check{\nu})}{S}$ -семейство символов Кристоффеля первого рода.

Далее на основании определения (1.4.1) и (1.4.3) имеем

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{z}} = \partial_Q \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h} = \partial_Q (\mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}_Q = \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}$$

и отсюда, учитывая второе соотношение (1.4.2), легко получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{z}} &= \Gamma_{\check{Q}\check{P},\check{z}} = \frac{1}{2} \left(\partial_P g_{\check{Q}\check{z}} + \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^- + g_{\check{Q}\check{P}}^- \right) = \\ &= \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^- = \partial_P g_{\check{Q}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Не представляет большого труда найти выражения и для символов Кристоффеля второго рода. В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}} \sim (\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{z}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{P}\check{z}}^{\check{k}})$$

и на основании определения (1.4.1) и (1.4.4)–(1.4.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}} &= g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{l}} = g^{\check{k}\check{z}} (\partial_P g_{\check{Q}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-) + g^{\check{k}\check{L}} \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \\ \Gamma_{\check{z}\check{Q}}^{\check{k}} &= g_{\check{Q}}^{\check{k}} - g_{\check{Q}}^{\check{k}}, \quad \Gamma_{\check{P}\check{z}}^{\check{k}} = 0, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Из полученных выше соотношений этого раздела при $\check{\nu} = -$ получаются соответствующие соотношения работы [250].

1.4.2 Выражение S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР

Рассмотрим два способа нахождения выражений для S_g -семейства символов Кристоффеля. Первый заключается в нахождении связей между S_g - и $\overset{(\check{\nu})}{S}_g$ -семействами символов Кристоффеля таким образом, что S_g -семейство символов оказалось бы определенным посредством $\overset{(\check{\nu})}{S}_g$ -семейств символов, а второй — в определении S_g -семейства символов непосредственно через компоненты переноса ЕТВР.

В первом случае по более общим соотношениям (1.2.3) остается только лишь выписать искомые связи. В самом деле, при $\sim = \emptyset$ из (1.2.3) получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{pq,l} &= g l^{\check{n}} \left(\partial_q g_{\check{p}}^{\check{n}} + g_{\check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}q}^{\check{n}} \right) = g l^{\check{n}} \left(\partial_q g_{p\check{n}} - g_{\check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{n}q,\check{m}} \right), \\ \Gamma_{pq}^s &= g^{sl} \Gamma_{pq,l} = g_{\check{n}}^s \left(\partial_q g_{\check{p}}^{\check{n}} + g_{\check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}q}^{\check{n}} \right) = g^{s\check{n}} \left(\partial_q g_{p\check{n}} - g_{\check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{n}q,\check{m}} \right), \quad \sim, \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Далее, учитывая (1.1.11) и (1.4.4) — (1.4.6) подходящим образом, из (1.4.8) окончательно получим искомые выражения для S_g -семейства символов Кристоффеля, на выписывании которых останавливаться не будем.

Во втором способе нахождения выражения для S_g -семейства символов Кристоффеля поступаем следующим образом: сначала выписываем представления S_g -семейства символов Кристоффеля через S_g -семейство компонент ЕТВР, а затем в силу (1.1.14) учитываем $g_{rs} = g_{r\check{n}}g_{s\check{n}}$, $\check{\nu} \in \{-, +\}$. В результате, например, для S_g -семейства символов Кристоффеля первого рода будем иметь

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2}(-\partial_l g_{pq} + \partial_p g_{ql} + \partial_q g_{lp}) = \frac{1}{2}[-\partial_l(g_{p\check{n}}g_{q\check{n}}) + \partial_p(g_{q\check{n}}g_{l\check{n}}) + \partial_q(g_{l\check{n}}g_{p\check{n}})] = \\ &= \frac{1}{2}[-(\partial_l g_{p\check{n}})g_{q\check{n}} - g_{p\check{n}}\partial_l g_{q\check{n}} + (\partial_p g_{q\check{n}})g_{l\check{n}} + g_{q\check{n}}\partial_p g_{l\check{n}} + (\partial_q g_{l\check{n}})g_{p\check{n}} + g_{l\check{n}}\partial_q g_{p\check{n}}], \\ &\check{\nu} \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (1.4.9)$$

Теперь, подставляя (1.1.11) в (1.4.9), получим искомое выражение. Однако с целью сокращения письма подставим выражения (1.1.11) не для всех компонент переноса, а только для тех, которые стоят под операцией дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2}\left\{-\{\partial_l g_{p\check{n}} + \partial_l[x^3(g_{p\check{n}}^+ - g_{p\check{n}}^-)]\}g_{q\check{n}} - g_{p\check{n}}\partial_l[x^3(g_{q\check{n}}^+ - g_{q\check{n}}^-)] + \right. \\ &\quad + \{\partial_p g_{q\check{n}} + \partial_p[x^3(g_{q\check{n}}^+ - g_{q\check{n}}^-)]\}g_{l\check{n}} + g_{q\check{n}}\partial_p[x^3(g_{l\check{n}}^+ - g_{l\check{n}}^-)] + \\ &\quad \left. + \{\partial_q g_{l\check{n}} + \partial_q[x^3(g_{l\check{n}}^+ - g_{l\check{n}}^-)]\}g_{p\check{n}} + g_{l\check{n}}\partial_q[x^3(g_{p\check{n}}^+ - g_{p\check{n}}^-)]\right\}, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (1.4.10)$$

Видно, что в связи с громоздкостью записи соотношения (1.4.10) предпочтительно пользоваться соотношениями (1.4.8).

Следует заметить, что, например, в силу первого соотношения (1.4.8) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} &= \Gamma'_{\check{q}\check{p},\check{l}} = g_{\check{q}}^{\check{3}}\Gamma_{\check{3}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = g_{\check{p}}^{\check{3}}\Gamma_{\check{3}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}} = \\ &= \frac{1}{2}(g_{\check{p}}^{\check{3}}\Gamma_{\check{3}\check{q},\check{l}} + g_{\check{q}}^{\check{3}}\Gamma_{\check{3}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}}), \quad \check{\nu} \in \{-, +\}, \\ \Gamma_{pq,l}\Big|_{x^3=0} &= \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=-}, \quad \Gamma_{pq,l}\Big|_{x^3=1} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=+},\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{pq,l}\Big|_{x^3=0} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=-} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=-}, \quad \Gamma_{pq,l}\Big|_{x^3=1} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=+} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}\Big|_{\check{\nu}=+}$$

Отсюда в свою очередь легко заключаем, что

$$\Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} \neq \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} = \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}.$$

1.5 Представление компонент вторых тензоров поверхностей посредством основных компонент ЕТВР

Зная выражения различных семейств символов Кристоффеля, не представляет большого труда нахождение представлений компонент вторых тензоров поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, по определению [67, 335] компоненты вторых тензоров поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, представляются в виде

$$\overset{(\sim)}{b}_{\check{P}\check{Q}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}}\Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{3}} = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{3}} + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}})\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\quad (1.5.1)$$

1.5.1 Представление компонент второго тензора поверхности \mathbb{S} посредством основных компонент ЕТВР

Подставляя подходящие выражения для символов Кристоффеля, получаемые на основании (1.4.8) и (1.4.10), поочередно в (1.5.1), будем иметь соответствующие представления для компонент второго тензора поверхности \mathbb{S} . Однако с целью сокращения письма всех их выписывать не будем. Выпишем компоненты второго тензора поверхности \mathbb{S} посредством основных компонент ЕТВР в том случае, когда за основную базовую поверхность принимается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{\mathbb{S}}$. В этой связи, представляя (1.5.1) в виде

$$b_{IJ} = (1/\sqrt{g^{33}})\Gamma_{IJ}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g^{33}}}g^{3k}(-\partial_k g_{IJ} + \partial_I g_{Jk} + \partial_J g_{kI})$$

и учитывая (1.1.14), после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} b_{IJ} = & \frac{1}{2}\sqrt{g^{33}}[(1-x^3)(\partial_J g_{I\bar{3}} + \partial_I g_{J\bar{3}} + 2g_{I\bar{J}}) - (1-2x^3)(g_{I\bar{J}} + g_{I\bar{J}}) + \\ & + x^3(\partial_J g_{I\bar{3}} + \partial_I g_{J\bar{3}} - 2g_{I\bar{J}})] + \\ & + \frac{1}{2}(g^{K3}/\sqrt{g^{33}})[(1-x^3)^2(\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}}) + \\ & + x^3(1-x^3)(\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} + \partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}} - \partial_K g_{J\bar{I}}) + \\ & + (x^3)^2(\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}})]. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Учитывая $g_{\bar{p}\bar{q}} = \bar{g}_{\bar{p}}^n \bar{g}_{\bar{q}}^n$ и, кроме того, выражения g^{33} и g^{K3} через основные компоненты ЕТВР, окончательно получим искомое представление для b_{IJ} .

1.5.2 Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ЕТВР

Учитывая (1.4.6) и (1.4.7), из (1.5.1) при $\sim = \smile \in \{-, +\}$ найдем искомые представления для компонент вторых тензоров поверхностей $\overset{(\smile)}{\mathbb{S}}$, $\smile \in \{-, +\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \overset{(\smile)}{b}_{\check{P}\check{Q}} = & \frac{1}{2}\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}(\partial_P g_{\check{Q}\check{3}} + \partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^- + g_{\check{Q}\check{P}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}})\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \\ = & \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}(\partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}})\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \\ = & \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}(\partial_P g_{\check{Q}\check{3}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}})\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \smile \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Следует заметить, что (1.5.3) при $\smile = -(\smile = +)$ можно еще получить из (1.5.2) при $x^3 = 0(x^3 = 1)$.

Теперь рассмотрим частные случаи:

a. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{\mathbb{S}}$. В этом случае выполняются условия (1.3.8) и поэтому, как легко усмотреть, из (1.5.3) при $\smile = -$ для компонент второго тензора поверхности $\overset{(-)}{\mathbb{S}}$ будем иметь

$$\overset{(-)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} = \frac{1}{2}\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}(2g_{\bar{P}\bar{Q}} - g_{\bar{P}\bar{Q}}^+ - g_{\bar{Q}\bar{P}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}(g_{\bar{Q}\bar{P}}^- - g_{\bar{P}\bar{Q}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}(g_{\bar{P}\bar{Q}}^- - g_{\bar{P}\bar{Q}}^+). \quad (1.5.4)$$

Нетрудно заметить, что из (1.5.4) следует (1.3.11).

Выражения для компонент второго тензора поверхности $\overset{(+)}{\mathbb{S}}$ получаются из (1.5.2) при $x^3 = 1$. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

б. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ и область тонкого тела имеет постоянную толщину ($h = |\mathbf{h}| = \text{const}$). Нетрудно увидеть, что в рассматриваемом случае имеет место (1.3.10) и так как $h = \text{const}$, из них получаем

$$g_{I\bar{3}}^{\pm} = h\partial_I h = 0, \quad g_{\bar{I}}^{\pm} = h^{-1}\partial_I h = 0 \text{ при } \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}, \quad h = |\mathbf{h}| = \text{const}. \quad (1.5.5)$$

В силу (1.5.5) из соответствующих соотношений (1.3.26) и (1.3.27) имеем

$$g_P^{\bar{3}} = x^3 g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = 0, \quad g_{\bar{K}}^{\bar{3}} = 0, \quad g^{3\bar{3}} = g^{3\bar{n}} g_{\bar{n}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}}. \quad (1.5.6)$$

В силу (1.5.1) при $\sim = -$ и (1.5.6) из второго соотношения (1.4.8) при $\smile = -$ получаем

$$\Gamma_{PQ}^{\bar{3}} = g_P^{\bar{M}} \Gamma_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}}. \quad (1.5.7)$$

Подставляя (1.5.7) в (1.5.1) при $\sim = \emptyset$ и учитывая последнее соотношение (1.5.6), найдем

$$b_{PQ} = g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}\bar{M}}^{\bar{3}} b_{\bar{Q}}^{\bar{M}} = g_P^{\bar{N}} b_{\bar{N}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}\bar{N}}^{\bar{3}} b_{\bar{Q}}^{\bar{N}},$$

где последние два равенства получаются аналогично.

Из последнего соотношения имеем

$$b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{P\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{M}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{M}} = g^{P\bar{N}} b_{\bar{N}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{N}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{N}}.$$

Легко усмотреть, что последние два соотношения можно представить в следующих кратких формах:

$$b_{PQ} = g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}\bar{M}}^{\bar{3}} b_{\bar{Q}}^{\bar{M}}, \quad b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{P\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{M}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{M}}, \quad \smile \in \{-, +\}. \quad (1.5.8)$$

Получим обратные к (1.5.8) соотношения. Умножая, например, первое равенство первого соотношения (1.5.8) на g_L^P с последующим суммированием по P и учитывая соотношение (1.1.13), будем иметь

$$(g_L^P g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}) \Rightarrow (g_L^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}) \Rightarrow (b_{L\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}).$$

Таким образом,

$$(b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}}^L b_{LQ} = g_{\bar{P}L} b_{\bar{Q}}^L) \Rightarrow (b_{\bar{Q}}^{\bar{P}} = g^{\bar{P}\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g^{\bar{P}L} b_{LQ} = g_{\bar{L}}^{\bar{P}} b_{\bar{Q}}^L), \quad \smile \in \{-, +\} \quad (1.5.9)$$

и верны соотношения

$$(b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}}^{\bar{L}} b_{\bar{L}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}\bar{L}}^{\bar{3}} b_{\bar{Q}}^{\bar{L}}) \Rightarrow (b_{\bar{Q}}^{\bar{P}} = g^{\bar{P}\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g^{\bar{P}\bar{L}} b_{\bar{L}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{L}}^{\bar{P}} b_{\bar{Q}}^{\bar{L}}), \quad (1.5.10)$$

$\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}.$

Очевидно, соотношения (1.5.10) содержат (1.5.8) и (1.5.9).

Теперь, учитывая, что в силу первого соотношения (1.5.5) \mathbf{h} перпендикулярен и поверхности $\overset{(+)}{S}$ ($\mathbf{h} \perp \overset{(+)}{S}$), аналогично (1.5.4) из (1.5.3) получим

$$b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} + g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}} - 2g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}}) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}}) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}}). \quad (1.5.11)$$

Соотношения (1.5.4) и (1.5.11) можно объединить и записать одним соотношением

$$b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} + g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} - g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}}) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}}) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}} - g_{\bar{Q}\bar{P}}^{\bar{3}}), \quad \smile \in \{-, +\}, \quad (1.5.12)$$

непосредственно следующим еще из (1.5.3).

1.5.2.1 Представление средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством основных компонент ЕТВР

Имея выражения для вторых тензоров поверхностей через основные компоненты ЕТВР, не представляет большого труда найти аналогичные представления для средних и гауссовых кривизн тех же поверхностей. В самом деле, обозначая средние и гауссовы кривизны поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$ через $\overset{(\sim)}{H}$ и $\overset{(\sim)}{K}$ соответственно, где $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, по их определениям [67, 133, 335, 348] будем иметь

$$\begin{aligned} 2\overset{(\sim)}{H} &= \overset{(\sim)}{k}_1 + \overset{(\sim)}{k}_2 = \overset{(\sim)}{b}^{\check{I}\check{J}} = \overset{(\sim)}{g}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}\check{J}} = (1/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}) g^{\check{I}\check{J}} \Gamma_{\check{I}\check{J}}^{\check{3}}, \\ \overset{(\sim)}{K} &= \overset{(\sim)}{k}_1 \overset{(\sim)}{k}_2 = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}^{\check{L}}_{\check{I}} \overset{(\sim)}{b}^{\check{M}}_{\check{J}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\check{L}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}\check{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{J}\check{M}} = \\ &= (1/(2g^{\check{3}\check{3}})) \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\check{L}\check{M}} \Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{3}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

где $\overset{(\sim)}{k}_1$ и $\overset{(\sim)}{k}_2$ — главные кривизны поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, а $\overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} = \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}\check{3}} = (\mathbf{r}^{\check{I}} \times \mathbf{r}^{\check{J}}) \cdot \mathbf{r}^{\check{3}}$, $\overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}} = \overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}\check{3}} = (\mathbf{r}_{\check{L}} \times \mathbf{r}_{\check{M}}) \cdot \mathbf{r}_{\check{3}}$ — компоненты дискриминантного тензора в рассматриваемой точке $M \in \overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Для представления средних и гауссовых кривизн поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, с помощью основных компонент переноса ЕТВР остается лишь соответствующим образом подставить (1.5.2) и (1.5.3) (или выражения символов Кристоффеля $\Gamma_{\check{I}\check{J}\check{3}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, из первого соотношения (1.4.7), а $\Gamma_{\check{I}\check{J}}^{\check{3}}$ из второго соотношения (1.4.8)) в (1.5.13), однако с целью сокращения письма в общем случае этими подстановками заниматься не будем. Более подробно рассмотрим случай, когда $\mathbf{h} \perp \overset{(\sim)}{S}$ и область тонкого тела имеет постоянную толщину ($h = |\mathbf{h}| = \text{const}$). В этом случае из первого соотношения (1.5.8) с учетом (1.5.12) имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= g_P^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} g_P^{\check{M}} (g_{\check{Q}\check{M}}^- - g_{\check{Q}\check{M}}^+) = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) = \\ &= [(1-x^3)g_P^{\check{M}} + x^3g_P^{\check{M}}] \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = [(1-x^3)\overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^- + x^3\overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^+] = \\ &= (1-x^3)\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) + x^3\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^+ - g_{P\check{Q}}^-). \end{aligned}$$

Аналогично из второго соотношения (1.5.8) с учетом (1.5.12) получаем

$$b_Q^P = g^{P\check{N}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}\check{N}} = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} g^{P\check{N}} (g_{\check{Q}\check{N}}^- - g_{\check{Q}\check{N}}^+) = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_Q^P - g_Q^P).$$

Таким образом, учитывая, что $g^{\check{3}\check{3}} = h^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= h^{-1} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) = h^{-1} [(1-x^3)(g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) + x^3(g_{P\check{Q}}^+ - g_{P\check{Q}}^-)] = \\ &= g_P^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = (1-x^3)\overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^- + x^3\overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^+, \\ b_Q^P &= h^{-1} g_{\check{N}}^P (g_{\check{Q}\check{N}}^- - g_{\check{Q}\check{N}}^+) = h^{-1} (g_Q^P - g_Q^P). \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Следует заметить, что первое соотношение (1.5.14) легко получается еще из (1.5.2), если учесть, что в рассматриваемом случае имеют место (1.3.8), (1.5.5), (1.5.6) и, кроме того, $\mathbf{h} \perp S$, т.е. $g_{I3} = 0$, $g^{I3} = 0$.

Теперь нетрудно найти выражения для средней и гауссовой кривизн поверхности S через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, на основании первого соотношения (1.5.13) при $\simeq = \emptyset$ и второго соотношения (1.5.14) для средней кривизны имеем

$$2H = b_1^1 + b_2^2 = h^{-1}(g_{-I}^I - g_{+I}^I) = h^{-1}g_{-N}^I(g_{-I}^{\bar{N}} - g_{+I}^{\bar{N}}),$$

а в силу второго соотношения (1.5.13) при $\simeq = \emptyset$ и второго соотношения (1.5.14) для гауссовой кривизны получаем

$$\begin{aligned} K &= h^{-2} \frac{1}{2} C^{IJ} C_{LM} (g_{-I}^L - g_{+I}^L)(g_{-J}^M - g_{+J}^M) = h^{-2} \det(g_{-I}^L - g_{+I}^L) = h^{-2} \det[g_{-N}^L (g_{-I}^{\bar{N}} - g_{+I}^{\bar{N}})] = \\ &= h^{-2} \det(g_{-N}^L) \det(g_{-I}^{\bar{M}} - g_{+I}^{\bar{M}}) = \det(g_{-N}^L) [h^{-2} \det(g_{-I}^{\bar{M}} - g_{+I}^{\bar{M}})]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$2H = h^{-1}(g_{-I}^I - g_{+I}^I) = h^{-1}g_{-N}^I(g_{-I}^{\bar{N}} - g_{+I}^{\bar{N}}), \quad K = \det(g_{-N}^L) [h^{-2} \det(g_{-I}^{\bar{M}} - g_{+I}^{\bar{M}})]. \quad (1.5.15)$$

Соотношения (1.5.15) можно представить и в других формах. Нетрудно заметить, что из (1.5.15) для средней и гауссовой кривизн внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ имеют место следующие выражения:

$$2H^{(-)} = h^{-1}(2 - g_{+I}^{\bar{I}}), \quad K^{(-)} = h^{-2} \det(g_{-I}^{\bar{M}} - g_{+I}^{\bar{M}}) = h^{-2}(1 - g_{+J}^{\bar{J}} + \vartheta^{(\mp)}). \quad (1.5.16)$$

Аналогично (1.5.16) из (1.5.15) при $x^3 = 1$ для средней и гауссовой кривизн внешней базовой поверхности $\overset{(+)}{S}$ имеем

$$2H^{(+)} = h^{-1}(g_{-I}^{\dagger} - 2), \quad K^{(+)} = h^{-2}(1 - g_{-I}^{\dagger} + \vartheta^{(\pm)}) = h^{-2} \det(g_{-I}^{\dagger}) K^{(-)} = \vartheta^{(\pm)(-)} K^{(-)}. \quad (1.5.17)$$

Заметим, что соотношения (1.5.16) и (1.5.17) можно было бы еще получить из (1.5.13) с учетом (1.5.12).

Как видно, в соотношениях (1.5.17) участвуют компоненты g_{-I}^{\dagger} и, так как в качестве основной базовой рассматривается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$, то кинематические характеристики целесообразно определить с помощью основных компонент ЕТВР.

В силу первых соотношений (1.1.19) и (1.1.25) имеем соответственно

$$\vartheta^{(\pm)} = \vartheta^{(\mp)-1}, \quad g_{-I}^{\dagger} = \vartheta^{(\mp)-1} g_{+K}^{\bar{K}}, \quad (K = 1, 2). \quad (1.5.18)$$

Учитывая (1.5.18) в (1.5.17), получим их выражения через основные компоненты ЕТВР:

$$2H^{(+)} = h^{-1}(\vartheta^{(\mp)-1} g_{+K}^{\bar{K}} - 2) = 2\vartheta^{(\mp)-1} [h^{-1}(1 - \vartheta^{(\mp)}) - H], \quad K^{(+)} = \vartheta^{(\mp)-1} K^{(-)}. \quad (1.5.19)$$

При получении последнего равенства первого соотношения (1.5.19) были использованы еще соотношения (1.5.16).

Легко усмотреть, что в силу (1.1.16) и (1.1.18) имеем

$$\vartheta^{(+)} = \sqrt{g g^{(+)-1}} = \sqrt{g g^{(-)-1}} \sqrt{g g^{(+)-1}} = \sqrt{g g^{(-)(+)-1}} \vartheta^{(-)} = \vartheta^{(\mp)-1} \vartheta^{(-)}.$$

а первое соотношение (1.1.20) с учетом (1.5.16) можно также представить в виде

$$\vartheta^{(-)} = 1 - x^3(2 - g_{+}^{\bar{I}}) + (x^3)^2(1 - g_{+}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)}) = 1 - 2(\mathfrak{h}x^3)\mathfrak{H} + (\mathfrak{h}x^3)^2\mathfrak{K}.$$

Таким образом,

$$\vartheta^{(-)} = 1 - 2(\mathfrak{h}x^3)\mathfrak{H} + (\mathfrak{h}x^3)^2\mathfrak{K}, \quad \vartheta^{(+)} = \vartheta^{(\mp)-1}\vartheta^{(-)}. \quad (1.5.20)$$

Рассматривая (1.5.16) как систему и разрешая относительно $g_{+}^{\bar{I}}$ и $\vartheta^{(\mp)}$, получаем

$$g_{+}^{\bar{I}} = 2(1 - \mathfrak{h}\mathfrak{H}), \quad \vartheta^{(\mp)} = 1 - 2\mathfrak{h}\mathfrak{H} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{K}. \quad (1.5.21)$$

Заметим, что второе соотношение (1.5.21) можно также получить из первого соотношения (1.5.20) при $x^3 = 0$.

Нетрудно определить и компоненты $g_{-}^{\bar{q}}$ с помощью компонент $g_{+}^{\bar{n}}$. В самом деле, эти компоненты в силу (1.1.13) образуют взаимобратные матрицы и поэтому удовлетворяют соотношению

$$g_{+}^{\bar{m}}g_{-}^{\bar{n}} = g_{-}^{\bar{m}}. \quad (1.5.22)$$

Рассматривая (1.5.22) как систему уравнений относительно неизвестных $g_{-}^{\bar{p}}$ и разрешая ее, приходим к соотношению

$$g_{-}^{\bar{p}} = \frac{1}{2}[\det(g_{+}^{\bar{n}})]^{-1}\epsilon_{lmn}\epsilon^{pqs}g_{+}^{\bar{m}}g_{+}^{\bar{n}} = \frac{1}{2}\vartheta^{(\mp)-1}\epsilon_{lmn}\epsilon^{pqs}g_{+}^{\bar{m}}g_{+}^{\bar{n}}. \quad (1.5.23)$$

Из (1.5.23) в свою очередь легко получаем

$$g_{-}^{\bar{P}} = \vartheta^{(\mp)-1}\epsilon_{LM}\epsilon^{QS}g_{+}^{\bar{M}}, \quad g_{-}^{\bar{3}} = \vartheta^{(\mp)-1}\epsilon_{LM}\epsilon^{QS}g_{+}^{\bar{M}}g_{+}^{\bar{3}}, \quad g_{-}^{\bar{3}} = g_{+}^{\bar{3}}. \quad (1.5.24)$$

Следует заметить, что (1.5.24) можно было бы вывести и из соответствующих соотношений второго столбца (1.3.20) при $x^3 = 1$.

Теперь вернемся к соотношениям (1.5.15) и придадим им другой вид. Из первого соотношения (1.5.15) с учетом второго соотношения первой строки (1.3.20) и (1.5.16) и из второго соотношения (1.5.15) с учетом (1.1.16) и второго соотношения (1.5.16) получаем соответственно

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{H} &= \mathfrak{h}^{-1}\vartheta^{(-)-1}\epsilon^{IP}\epsilon_{NL}[g_{-}^{\bar{L}} + x^3(g_{+}^{\bar{L}} - g_{-}^{\bar{L}})](g_{-}^{\bar{N}} - g_{+}^{\bar{N}}) = \\ &= \mathfrak{h}^{-1}\vartheta^{(-)-1}\epsilon^{IP}\epsilon_{NL}[g_{-}^{\bar{L}}g_{-}^{\bar{N}} - g_{-}^{\bar{L}}g_{+}^{\bar{N}} - x^3(g_{-}^{\bar{N}} - g_{+}^{\bar{N}})(g_{-}^{\bar{L}} - g_{+}^{\bar{L}})] = \\ &= \mathfrak{h}^{-1}\vartheta^{(-)-1}[\epsilon^{IL}\epsilon_{IL} - \epsilon^{IL}\epsilon_{NL}g_{+}^{\bar{N}} - x^3\epsilon^{IP}\epsilon_{NL}(g_{-}^{\bar{N}} - g_{+}^{\bar{N}})(g_{-}^{\bar{L}} - g_{+}^{\bar{L}})] = \\ &= \mathfrak{h}^{-1}\vartheta^{(-)-1}[2 - g_{+}^{\bar{I}} - 2(x^3\mathfrak{h}^2\mathfrak{K})] = 2\vartheta^{(-)-1}(\mathfrak{H} - x^3\mathfrak{h}\mathfrak{K}), \quad \mathfrak{K} = \vartheta^{(-)-1}\mathfrak{K}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{H} = \vartheta^{(-)-1}(\mathfrak{H} - x^3\mathfrak{h}\mathfrak{K}), \quad \mathfrak{K} = \vartheta^{(-)-1}\mathfrak{K}. \quad (1.5.25)$$

Нетрудно заметить, что соотношения (1.5.17) можно также получить из (1.5.25) при $x^3 = 1$ соответственно.

1.5.2.2 Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3

Заметим, что в дальнейшем для нахождения моментов различных величин нам понадобятся представления компонент переноса g_{-M}^P, g_{+M}^3 и компонент g^{PM}, g^{P3}, g^{33} ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3 . Очевидно, эти представления можно найти различными способами. Мы остановимся на двух из них. Первым способом представим g_{-M}^P в виде суммы простых дробей, а потом в искомом виде. Прежде всего с целью сокращения письма запишем (1.3.22) в удобной форме

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3)^2 - 2bx^3 + 1, \quad (1.5.26)$$

где введены обозначения

$$a = (1 - g_{+1}^{\bar{1}})(1 - g_{+2}^{\bar{2}}) + g_{+1}^{\bar{2}}g_{+2}^{\bar{1}} = 1 - \text{tr}(g_{+I}^{\bar{J}}) + \det(g_{+I}^{\bar{J}}), \quad 2b = 2 - g_{+I}^{\bar{I}} = 2 - \text{tr}(g_{+I}^{\bar{J}}). \quad (1.5.27)$$

Нетрудно заметить, что с помощью a и b значения x^3 , при которых квадратный трехчлен обращается в нуль (1.3.25), вычисляются по формулам

$$x_1^3 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a}}{a}, \quad x_2^3 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a}}{a}. \quad (1.5.28)$$

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = \frac{2b}{a}, \\ x_1^3 \cdot x_2^3 = \frac{1}{a}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{x_1^3 \cdot x_2^3}, \\ b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \right). \end{cases} \quad (1.5.29)$$

Квадратный трехчлен (1.5.26), очевидно, можно представить в виде следующего разложения

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3 - x_1^3)(x^3 - x_2^3) = a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3). \quad (1.5.30)$$

В силу первого соотношения (1.3.18), соответствующей формулы (1.3.20) и (1.5.30) получаем

$$g_{-M}^P = \vartheta^{(-)-1} A_{-M}^P = \frac{a_{+M}^{\bar{P}} x^3 + g_{-M}^{\bar{P}}}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)} = \frac{A}{a(x_1^3 - x^3)} + \frac{B}{a(x_2^3 - x^3)} = \frac{Ax_2^3 + Bx_1^3 - (A+B)x^3}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)}.$$

Отсюда для A и B находим выражения

$$\begin{cases} A + B = -a_{+M}^{\bar{P}}, \\ Ax_2^3 + Bx_1^3 = g_{-M}^{\bar{P}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left(g_{-M}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{+M}^{\bar{P}} \right), \\ B = \frac{1}{x_1^3 - x_2^3} \left(g_{-M}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{+M}^{\bar{P}} \right). \end{cases}$$

Подставляя выражения для A и B в предыдущее соотношение будем иметь

$$g_{-M}^P = \vartheta^{(-)-1} A_{-M}^P = \frac{g_{-M}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{+M}^{\bar{P}}}{ax_1^3(x_2^3 - x^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - \frac{g_{-M}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{+M}^{\bar{P}}}{ax_2^3(x_2^3 - x^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1}, \quad (1.5.31)$$

Учитывая в (1.5.31) значение a из (1.5.29), получим

$$g_{-M}^P = \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left[x_2^3 \left(g_{-M}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{+M}^{\bar{P}} \right) \left(1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - x_1^3 \left(g_{-M}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{+M}^{\bar{P}} \right) \left(1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1} \right]. \quad (1.5.32)$$

Заметим, что на основании (1.5.27) a и b — инварианты, тогда в силу (1.5.28) корни x_1^3 и x_2^3 также инварианты, т.е. x_1^3 и x_2^3 не зависят от выбора системы координат. Выбирая в качестве координатных линий на базовой поверхности $S^{(-)}$ линии кривизны при $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$, на основании первого соотношения (1.5.20) имеем

$$b = hH = \frac{h}{2}(k_1^{(-)} + k_2^{(-)}) = \frac{h}{2}(R_1^{-1}{}^{(-)} + R_2^{-1}{}^{(-)}), \quad a = h^2K = h^2k_1^{(-)}k_2^{(-)} = h^2R_1^{-1}{}^{(-)}R_2^{-1}{}^{(-)}, \quad (1.5.33)$$

где $k_1^{(-)}$ и $k_2^{(-)}$ — главные кривизны, а $R_1^{-1}{}^{(-)} = k_1^{(-)}$ и $R_2^{-1}{}^{(-)} = k_2^{(-)}$ — главные радиусы кривизны базовой поверхности $S^{(-)}$, h — толщина тонкого тела. Учитывая (1.5.33), из (1.5.28) найдем

$$x_1^3 = (hk_1^{(-)})^{-1} = \frac{R_1^{(-)}}{h}, \quad x_2^3 = (hk_2^{(-)})^{-1} = \frac{R_2^{(-)}}{h}, \quad (1.5.34)$$

где $h(\delta_{I1} + \delta_{I2}) < R_I^{(-)}$. Тогда из (1.5.34) следует, что $|x_I^3| = |R_I^{(-)}/h| > 1$. Это условие в силу инвариантности x_I^3 выполняется относительно любой системы координат. Так как $0 \leq x^3 \leq 1$, то

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x_I^3} \right| < 1. \quad (1.5.35)$$

В силу (1.5.35), функции

$$f_I \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right) = \left(1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1}, \quad I = 1, 2$$

являются суммами бесконечных убывающих геометрических прогрессий с знаменателями x^3/x_I^3 , $I = 1, 2$, т. е.

$$\left(1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1} = \frac{1}{1 - x^3/x_I^3} = 1 + \frac{x^3}{x_I^3} + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^2 + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^3 + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^4 + \dots \quad (1.5.36)$$

подставляя (1.5.36) в (1.5.32), получим представление g_{-M}^P в виде степенного ряда относительно x^3 . В самом деле, осуществляя простые выкладки, будем иметь

$$g_{-M}^P = \sum_{k=0}^{\infty} A_{(k)M}^{\bar{P}} (x^3)^k, \quad (1.5.37)$$

где

$$A_{(k)M}^{\bar{P}} = g_{-M}^{\bar{P}} a_k + a_{+M}^{\bar{P}} a_{k-1}, \quad a_k = \frac{(x_2^3)^{k+1} - (x_1^3)^{k+1}}{(x_1^3 x_2^3)^k (x_2^3 - x_1^3)}, \quad a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.5.38)$$

Выразим несколько первых коэффициентов a_k через a и b . В силу (1.5.29) из второго соотношения (1.5.38) имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 2b, & a_2 &= 4b^2 - a, & a_3 &= 4b(2b^2 - a), \\ a_4 &= 16b^4 - 12ab^2 + a^2, & a_5 &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2). \end{aligned} \quad (1.5.39)$$

Учитывая малость величин $|x^3/x_I^3|$, $I = 1, 2$, по сравнению с единицей ($|x^3/x_I^3| < 1$, $I = 1, 2$) и сохраняя в правой части (1.5.37), например, первые шесть членов, будем иметь следующее приближенное представление для g_{-M}^P :

$$g_{-M}^P \approx \sum_{k=0}^5 A_{(k)M}^{\bar{P}} (x^3)^k, \quad (1.5.40)$$

где в силу (1.5.39)

$$\begin{aligned}
 A_{(0)M}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, & A_{(1)M}^{\bar{P}} &= 2bg_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}}, & A_{(2)M}^{\bar{P}} &= (4b^2 - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + 2ba_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(3)M}^{\bar{P}} &= 4b(2b^2 - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + (4b^2 - a)a_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(4)M}^{\bar{P}} &= (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + 4b(2b^2 - a)a_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(5)M}^{\bar{P}} &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + (16b^4 - 12ab^2 + a^2)a_{\bar{M}}^{\bar{P}}.
 \end{aligned} \tag{1.5.41}$$

На основании второй формулы (1.5.27) второе соотношение (1.3.18) представится в виде

$$a_{\bar{M}}^{\bar{P}} = (1 - 2b)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}},$$

с учетом которого (1.5.41) можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 A_{(0)M}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, & A_{(1)M}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, & A_{(2)M}^{\bar{P}} &= (2b - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - 2bg_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(3)M}^{\bar{P}} &= (4b^2 - 2ab - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - (4b^2 - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(4)M}^{\bar{P}} &= (8b^3 - 4ab^2 - 4ab + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - 4b(2b^2 - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\
 A_{(5)M}^{\bar{P}} &= (16b^4 - 8ab^3 - 12ab^2 + 4a^2b + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}}.
 \end{aligned} \tag{1.5.42}$$

Теперь рассмотрим второй, более удобный, способ представления $g_{\bar{M}}^{\bar{P}}$ в виде степенного ряда относительно x^3 . Для этого с помощью соотношения (1.1.11) и (1.1.12) представим \mathbf{r}_p в форме

$$\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}} = [(1 - x^3)g_p^{\bar{q}} + x^3 g_p^{\bar{q}}] \mathbf{r}_{\bar{q}} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}), \tag{1.5.43}$$

где $\underline{\mathbf{E}}$ — единичный тензор второго ранга и введены обозначения

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{r}^{\bar{p}} \mathbf{r}_p = \underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}} = [g_p^{\bar{q}} - x^3 (g_p^{\bar{q}} - g_p^{\bar{q}})] \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \underline{\mathbf{B}} = (g_p^{\bar{q}} - g_p^{\bar{q}}) \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}. \tag{1.5.44}$$

Очевидно, $\underline{\mathbf{B}}^T = \underline{\mathbf{B}}$ при $\mathbf{h} \perp S$, а отсюда следует, что и $\underline{\mathbf{A}}^T = \underline{\mathbf{A}}$. Заметим, что в силу первого соотношения (1.5.44) для матрицы тензора $\underline{\mathbf{A}}$ будем иметь выражения

$$\text{matr } \underline{\mathbf{A}} = \text{matr}(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}}) & x^3 g_{\bar{1}}^{\bar{2}} & x^3 g_{\bar{1}}^{\bar{3}} \\ x^3 g_{\bar{2}}^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) & x^3 g_{\bar{2}}^{\bar{3}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5.45}$$

Учитывая (1.3.22) и (1.5.45), имеем

$$\det \underline{\mathbf{A}} = \det(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}) = \begin{vmatrix} 1 - x^3(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}}) & x^3 g_{\bar{1}}^{\bar{2}} \\ x^3 g_{\bar{2}}^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) \end{vmatrix} = \vartheta \neq 0. \tag{1.5.46}$$

На основании (1.5.46) можно утверждать, что существует единственный обратный тензор $\underline{\mathbf{A}}^{(-) -1}$ и соответственно единственная обратная матрица $\text{matr}(\underline{\mathbf{A}}^{(-)})^{-1}$. Поэтому (1.5.43) можно разрешить относительно \mathbf{r}_p^- . Получим

$$\mathbf{r}_p^- = \mathbf{r}_p \cdot \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1} = \mathbf{r}_p \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}})^{-1}. \quad (1.5.47)$$

Аналогично (1.5.43) для \mathbf{r}^p имеем

$$\mathbf{r}^p = g_q^p \mathbf{r}^{\bar{q}} = \underline{\mathbf{D}}^{(-)} \cdot \mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \underline{\mathbf{D}}^{(-)} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p^- = g_q^p \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_p^-. \quad (1.5.48)$$

Нетрудно усмотреть, что

$$\underline{\mathbf{D}}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{(-)} = \underline{\mathbf{A}}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{(-)} = \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{D}}^{(-)} = \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1}. \quad (1.5.49)$$

В самом деле, в силу первого соотношения (1.5.44) и второго соотношения (1.5.48) находим

$$\underline{\mathbf{D}}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{(-)} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p^- \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}_m^- = \mathbf{r}^p g_{\bar{p}}^{\bar{m}} \mathbf{r}_m^- = \mathbf{r}^m \mathbf{r}_m^-,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, учитывая второе соотношение (1.5.49), первое соотношение (1.5.48) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^p = g_q^p \mathbf{r}^{\bar{q}} = \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p^- = g_q^p \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_p^-. \quad (1.5.50)$$

Не представляет большого труда найти выражения для $\underline{\mathbf{A}}^{(-) -1}$ или для $\text{matr} \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1}$ через основные компоненты переноса ЕТВР. На основании второго соотношения (1.5.50) приходим к выражению

$$\text{matr} \underline{\mathbf{A}}^{(-) -1} = \vartheta^{(-) -1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) & -x^3 g_+^{\bar{2}} & (x^3)^2 g_+^{\bar{2}} g_+^{\bar{3}} - x^3 g_+^{\bar{3}} [1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}})] \\ x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) & (x^3)^2 g_+^{\bar{1}} g_+^{\bar{3}} - x^3 g_+^{\bar{3}} [1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}})] \\ 0 & 0 & \vartheta^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (1.5.51)$$

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{r}^P = g_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \vartheta^{(-)} A_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \underline{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{P}}, \quad (1.5.52)$$

где, очевидно,

$$\underline{\mathbf{d}} = \mathbf{r}^P \mathbf{r}_P^- = g_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_P^- = \vartheta^{(-) -1} A_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_P^-. \quad (1.5.53)$$

С помощью (1.3.18) нетрудно проверить, что матрицей тензору $\underline{\mathbf{d}}$ служит матрица, получающаяся при пересечении первых двух строк и двух столбцов в (1.5.51), т.е.

$$\text{matr} \underline{\mathbf{d}} = \text{matr} \left(\vartheta^{(-) -1} A_M^P \right) = \vartheta^{(-) -1} \text{matr} \left(A_M^P \right) = \vartheta^{(-) -1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) & -x^3 g_+^{\bar{2}} \\ -x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) \end{pmatrix}. \quad (1.5.54)$$

Следовательно,

$$\det \left(A_M^P \right) = \vartheta^{(-)}, \quad \det \underline{\mathbf{d}} = \det \left(\vartheta^{(-) -1} A_M^P \right) = \vartheta^{(-) -1}.$$

Теперь рассмотрим тензор

$$\underline{\mathbf{a}}^{(-)} = \underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)}, \quad \underline{\mathbf{b}}^{(-)} = (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) \mathbf{r}_{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} = (g_{\bar{P}\bar{M}} - g_{\bar{P}\bar{M}}^{\bar{+}}) \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}. \quad (1.5.55)$$

В первую очередь заметим, что $\underline{\mathbf{b}}^{(-)T} = \underline{\mathbf{b}}^{(-)}$ при $\mathbf{h} \perp S$, так как в этом случае (1.3.11) $g_{\bar{I}\bar{J}} = g_{\bar{J}\bar{I}}$ и, следовательно, $\underline{\mathbf{a}}^{(-)T} = \underline{\mathbf{a}}^{(-)}$.

Далее, очевидно, что

$$\text{matr } \underline{\mathbf{a}}^{(-)} = \text{matr}(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}}) & x^3 g_{\bar{1}}^{\bar{2}} \\ x^3 g_{\bar{2}}^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) \end{pmatrix}. \quad (1.5.56)$$

Сравнивая (1.5.56) с (1.5.45), заключаем, что (1.5.56) получается из (1.5.45) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В силу (1.5.46) нетрудно усмотреть, что

$$\det \underline{\mathbf{a}}^{(-)} = \det(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)}) = \det \underline{\mathbf{A}}^{(-)} = \vartheta^{(-)} \neq 0.$$

Поэтому на основании последнего соотношения утверждаем, что существует единственный обратный к $\underline{\mathbf{a}}^{(-)}$ тензор, который, как нетрудно доказать, совпадает с тензором (1.5.53), а его матрица — с матрицей (1.5.54).

Таким образом, для $\underline{\mathbf{d}}^{(-)}$ имеем представления

$$\underline{\mathbf{d}}^{(-)} = \underline{\mathbf{a}}^{(-)1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{P}} = \vartheta^{(-)1} A_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{P}}. \quad (1.5.57)$$

Теперь, учитывая (1.5.57), соотношение (1.5.52) можно представить в удобном для дальнейшего пользования виде

$$\mathbf{r}^{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{P}}. \quad (1.5.58)$$

Следует заметить, что в случае тонких тел $|x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)}| < 1$ ($|x^3 b_{\bar{P}}^{\bar{Q}}| < 1$). Поэтому имеем соотношения

$$(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (x^3)^s \underline{\mathbf{b}}^{(-)s} = \underline{\mathbf{E}} + x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)} + (x^3)^2 \underline{\mathbf{b}}^{(-)2} + (x^3)^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)3} + \dots, \quad (1.5.59)$$

$$(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-2} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \underline{\mathbf{b}}^{(-)s} (x^3)^s, \quad (1.5.60)$$

где, очевидно,

$$\underline{\mathbf{b}}^{(-)n} = (g_{\bar{K}_1}^{\bar{P}} - g_{\bar{K}_1}^{\bar{+}}) (g_{\bar{K}_2}^{\bar{K}_1} - g_{\bar{K}_2}^{\bar{+}}) \dots (g_{\bar{K}_{n-1}}^{\bar{K}_{n-2}} - g_{\bar{K}_{n-1}}^{\bar{+}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{K}_{n-1}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) \mathbf{r}_{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}. \quad (1.5.61)$$

С помощью (1.5.59) и (1.5.61) соотношение (1.5.58) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} = & [g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x^3 (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) + (x^3)^2 (g_{\bar{K}}^{\bar{P}} - g_{\bar{K}}^{\bar{+}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{K}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) + \\ & + (x^3)^3 (g_{\bar{K}_1}^{\bar{P}} - g_{\bar{K}_1}^{\bar{+}}) (g_{\bar{K}_2}^{\bar{K}_1} - g_{\bar{K}_2}^{\bar{+}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{K}_2} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) + \dots] \mathbf{r}^{\bar{M}}. \end{aligned}$$

Отсюда в свою очередь получаем второе (после (1.5.37)) искомое выражение для g_{-M}^P

$$g_{-M}^P = \mathbf{r}^P \cdot \mathbf{r}_{-M} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\mathbf{E} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}_{-M} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^s \cdot \mathbf{r}_{-M} (x^3)^s = g_{-M}^{\bar{P}} + x^3 (g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}) + (x^3)^2 (g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}) (g_{-M}^{\bar{K}} - g_{+M}^{\bar{K}}) + (x^3)^3 (g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}) (g_{-M}^{\bar{K}_1} - g_{+M}^{\bar{K}_1}) (g_{-M}^{\bar{K}_2} - g_{+M}^{\bar{K}_2}) + \dots \quad (1.5.62)$$

Сравнивая (1.5.62) с (1.5.37), можно утверждать, что

$$\begin{aligned} A_{(0)M}^{\bar{P}} &= \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^0 \cdot \mathbf{r}_{-M} = g_{-M}^{\bar{P}}, & A_{(1)M}^{\bar{P}} &= \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^1 \cdot \mathbf{r}_{-M} = g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}, \\ A_{(2)M}^{\bar{P}} &= \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^2 \cdot \mathbf{r}_{-M} = (g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}) (g_{-M}^{\bar{N}} - g_{+M}^{\bar{N}}), \dots, \\ A_{(n)M}^{\bar{P}} &= \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^n \cdot \mathbf{r}_{-M} = (g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}) (g_{-M}^{\bar{N}_1} - g_{+M}^{\bar{N}_1}) \dots (g_{-M}^{\bar{N}_{n-2}} - g_{+M}^{\bar{N}_{n-2}}) (g_{-M}^{\bar{N}_{n-1}} - g_{+M}^{\bar{N}_{n-1}}). \end{aligned} \quad (1.5.63)$$

Следует заметить, что идентичность представлений (1.5.38) и (1.5.63) можно доказать и непосредственной проверкой. Так как остальные рассматриваемые компоненты ЕТВР выражаются через g_{-M}^P , то представление (1.5.37) или, что то же самое (1.5.62), имеет важное значение. Кроме того, в зависимости от рассматриваемой конкретной задачи и требуемой точности приближения в правой части (1.5.40) следует менять (уменьшать или увеличивать) число слагаемых.

Не представляет труда найти искомое представление для g_{-M}^3 . В самом деле, из второго соотношения третьей строки (1.3.20) с учетом (1.5.37) получаем

$$g_{-M}^3 = -g_{+M}^{\bar{3}} g_{-M}^P = -g_{+M}^{\bar{3}} x^3 g_{-M}^P = -g_{+M}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1}. \quad (1.5.64)$$

Теперь найдем представление для g^{PQ} . В силу (1.5.58), (1.5.60) и (1.5.63) находим

$$\begin{aligned} g^{PQ} &= \mathbf{r}^P \cdot \mathbf{r}^Q = g_{-M}^P g_{-N}^Q g_{-MN} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\mathbf{E} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-2} \cdot \mathbf{r}^{\bar{Q}} \stackrel{(1.5.60)}{=} \\ &\stackrel{(1.5.60)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^s \cdot \mathbf{r}^{\bar{Q}} (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^s \cdot \mathbf{r}_{-M} g_{-M}^{\bar{Q}} (x^3)^s \stackrel{(1.5.63)}{=} \\ &\stackrel{(1.5.63)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g_{-M}^{\bar{Q}} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^s. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое представление для g^{PQ} имеет вид

$$g^{PQ} = g_{-M}^P g_{-N}^Q g_{-MN} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g_{-M}^{\bar{Q}} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^s. \quad (1.5.65)$$

Нетрудно найти представление и для g^{P3} . В самом деле, из второго соотношения (1.3.37) с учетом (1.5.64) и (1.5.65) получаем

$$g^{P3} = g_{-M}^P g_{-N}^3 g_{-MN} = -g_{+M}^{\bar{3}} x^3 g_{-M}^P g_{-N}^Q g_{-MN} = -g_{+M}^{\bar{3}} x^3 g^{PQ} = -g_{+M}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g_{-M}^{\bar{Q}} (x^3)^{s+1}.$$

Итак, искомое соотношение представляется в форме

$$g^{P3} = g_{-M}^P g_{-N}^3 g_{-MN} = -g_{+M}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g_{-M}^{\bar{Q}} (x^3)^{s+1}. \quad (1.5.66)$$

Наконец, найдем искомое выражение для g^{33} . Из второго соотношения (1.3.37) в силу (1.5.64) и (1.5.65) находим

$$\begin{aligned} g^{33} &= g_{\bar{m}}^3 g_{\bar{n}}^3 g^{\bar{m}\bar{n}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{M}}^3 g_{\bar{N}}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^3 g_{\bar{Q}}^3 (x^3)^2 g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^3 g_{\bar{Q}}^3 (x^3)^2 g^{PQ} = \\ &= g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^3 g_{\bar{Q}}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к представлению

$$g^{33} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^3 g_{\bar{Q}}^3 (x^3)^2 g^{PQ} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^3 g_{\bar{Q}}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \quad (1.5.67)$$

Найдем еще выражение в виде ряда относительно x^3 произведения $g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q$. С этой целью воспользуемся представлением (1.5.37) и правилом умножения рядов в форме Коши. В результате получим

$$g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^s A_{(s-r)\bar{M}}^{\bar{P}} A_{(r)\bar{N}}^{\bar{Q}} \right) (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s, \quad B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} = \sum_{r=0}^s A_{(s-r)\bar{M}}^{\bar{P}} A_{(r)\bar{N}}^{\bar{Q}}. \quad (1.5.68)$$

Следует заметить, что число слагаемых в правых частях (1.5.64)–(1.5.68) аналогично (1.5.37) определяется характером рассматриваемой задачи и точностью приближения. Нетрудно найти представления компонент ЕТВР в частных случаях рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Заметим также, что соотношения (1.5.37), (1.5.64)–(1.5.68) играют важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел с применением разложения по ортогональным полиномам.

1.5.2.3 О представлении расширенного второго тензора поверхности

Обозначим через $\overset{(\sim)}{\mathbf{b}}$ второй тензор поверхности $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$. Тогда, очевидно, в силу (1.1.12) и (1.1.13) для вторых тензоров поверхностей будем иметь следующие представления:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{b}} &= \overset{(-)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{+}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^{\bar{-}} = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}} = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^{\bar{\sim}}, \\ \mathbf{b} &= b_{PQ} \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}} = b_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}} = b_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^{\bar{\sim}}, \\ \overset{(+)}{\mathbf{b}} &= \overset{(+)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{+}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^{\bar{-}} = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}} = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^{\bar{\sim}}, \quad \wedge, \sim \in \{-, \emptyset, +\} \end{aligned} \quad (1.5.69)$$

где

$$\overset{(\sim)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} = g_{\bar{P}}^{\bar{M}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} \overset{(\sim)}{b}_{\bar{M}}^{\bar{N}}, \quad \sim, \vee, \wedge, \sim, * \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Всевозможные представления тензоров (1.5.69), конечно, получаются жонглированием индексами. Каждый из этих тензоров в силу (1.5.10) в качестве своих компонент имеет компоненты вторых тензоров поверхностей $\overset{(-)}{S}$, $\overset{(+)}{S}$, а также отличные от этих компонент компоненты. В этом смысле они называются расширенными вторыми тензорами.

Можно было вводить в рассмотрение расширенные до трехмерного пространства тензоры. В самом деле, определяя компоненты этих тензоров в виде

$$\overset{(\sim)}{b}_{\bar{p}}^{\bar{q}} = g_{\bar{p}}^{\bar{M}} g_{\bar{N}}^{\bar{q}} \overset{(\sim)}{b}_{\bar{M}}^{\bar{N}}, \quad \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.5.70)$$

их можно представить следующим образом:

$$\overset{(\sim)}{\mathbf{b}} = \overset{(\sim)}{b}_{\bar{p}}^{\bar{q}} \mathbf{r}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.5.71)$$

Из (1.5.70) следует, что компоненты тензоров (1.5.71) равны нулю, если хотя бы один индекс равен трем. Очевидно, тензоры (1.5.71) содержат (1.5.69).

1.5.3 О тензорах Римана-Кристоффеля в \mathbb{R}^3

К определению тензора Римана-Кристоффеля можно прийти различными путями, среди которых чаще всего рассматриваются условия перестановочности (коммутативности) повторного ковариантного дифференцирования компонент тензора, ранг которого не меньше 1, а компоненты принадлежат классу C^k , $k \geq 2$, [67,174,219,335,377,388], евклидовости пространства [376,377], совместности деформаций [156,388] и др.

Следует заметить, что тензор Римана-Кристоффеля, к определению которого можно еще прийти, рассматривая условия перестановочности повторного обычного дифференцирования тензора, принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, ранг которого не меньше 1, играет существенную роль в дифференциальной геометрии, динамике твердого и деформируемого твердого тела, электродинамике и теории относительности. Заметим также, что принадлежность компонент тензора классу C^2 является достаточным условием для равенства смешанных частных производных от них. Этим обстоятельством мы часто будем пользоваться.

Ниже определим тензор Римана-Кристоффеля путем, указанным в предыдущем абзаце, приведем его представления при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 , исходя из тензора Римана-Кристоффеля трехмерного евклидова пространства, определим аналогичные им тензоры для двумерных поверхностей, а также дадим представления последних и найдем связь между ними. Кроме того, введем в рассмотрение расширенные тензоры Римана-Кристоффеля для двумерных пространств при рассматриваемой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Определение 1.5.1. Будем говорить, что произвольный локальный базис принадлежит классу C^k , $k \in \mathbb{N}$, если каждый базисный вектор этого базиса принадлежит тому же классу.

Определение 1.5.2. Будем говорить, что произвольный вектор $\mathbf{a} \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, если его компоненты и базис, в котором он представлен, принадлежат тому же классу.

Пусть \mathbf{a} — произвольный вектор, принадлежащий классу C^k , $k \geq 2$. Тогда в некотором локальном базисе его можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{r}_m = a_m \mathbf{r}^m. \quad (1.5.72)$$

Заметим, что \mathbf{r}_m и \mathbf{r}^n в (1.5.72) — ковариантные и контравариантные базисные вектора при любой параметризации некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. За криволинейные координаты примем x^1, x^2, x^3 .

Дифференцируя, например, первое равенство (1.5.72) по x^p , а полученное соотношение по x^q , получим

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = [\partial_q (\partial_p a^m + a^n \Gamma_{np}^m) + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m] \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \partial_p a^m + \partial_q a^n \Gamma_{np}^m + a^n \partial_q \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (1.5.73)$$

После перестановки местами индексов q и p в (1.5.73), будем иметь

$$\partial_p \partial_q \mathbf{a} = [\partial_p \partial_q a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + (\partial_p \Gamma_{lq}^m - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (1.5.74)$$

Теперь вычитая из (1.5.73) почленно (1.5.74), в силу определения 1.5.2 получаем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l \mathbf{r}_m. \quad (1.5.75)$$

Вводя обозначение

$$\mathbb{R}_{pql}^{\dots m} = \partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m, \quad (1.5.76)$$

соотношение (1.5.75) можно представить в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} a^l \mathbf{r}_m. \quad (1.5.77)$$

Нетрудно установить закон преобразования левой части (1.5.77) при переходе одной системы координат к другой. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 закон перехода от одной системы координат x^1, x^2, x^3 к другой x^1, x^2, x^3 в виде

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \quad (1.5.78)$$

и обратно

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}). \quad (1.5.79)$$

Следовательно, определители якобиевых матриц

$$D_{i'}^{i'} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_{i'}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (1.5.80)$$

отличны от нуля и связаны между собой соотношениями

$$D_{j'}^{i'} D_{i'}^j = \delta_{j'}^{i'}, \quad D_{j'}^i D_i^{j'} = \delta_j^i. \quad (1.5.81)$$

Заметим, что выполнение условий (1.5.81) влечет за собой неравенство нулю определителей якобиевых матриц (1.5.80) и, конечно, существование обратного преобразования (1.5.79). Заметим также, что при выполнении (1.5.81) преобразование координат (1.5.78) называется общим [335]. Итак, наша задача заключается в установлении поведения левой части (1.5.77) относительно общей группы преобразования (1.5.78) в \mathbb{R}^3 . В этой связи найдем $\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a}$. В силу (1.5.78) и (1.5.80) имеем

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} = \partial_{q'} \left(\partial_{p'} \mathbf{a} \frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}} \right) = \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_{p'} \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_q \partial_{p'} \mathbf{a},$$

т.е.

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{q'}^q D_{p'}^p \partial_q \partial_{p'} \mathbf{a}, \quad \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{q'} \partial x^{p'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_p \partial_{q'} \mathbf{a}, \quad (1.5.82)$$

где второе соотношение (1.5.82) получено из первого при замене местами индексы q' и p' .

Теперь вычитая из первого соотношения (1.5.82) почленно второе и учитывая, что \mathbf{a} и преобразование (1.5.78) или (1.5.79) принадлежат классу C^k , $k \geq 2$, будем иметь

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a} = D_{q'}^q D_{p'}^p (\partial_q \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_p \partial_{q'} \mathbf{a}). \quad (1.5.83)$$

Очевидно, в силу (1.5.81) обратное к (1.5.83) соотношение представится в виде

$$\partial_q \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_q \mathbf{a} = D_q^q D_{p'}^p (\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a}). \quad (1.5.84)$$

На основании (1.5.83) и (1.5.84) заключаем, что левая часть (1.5.77) преобразуется как ковариантные компоненты тензора второго ранга, т.е. по ковариантному закону. Так как a^l , как контравариантные компоненты вектора \mathbf{a} , преобразуются по контравариантному закону, а \mathbf{r}_m — по ковариантному, то по обратному тензорному признаку $\mathbb{R}_{pql}^{\dots m}$ являются компонентами тензора четвертого ранга, который называется тензором Римана-Кристоффеля или тензором кривизны. Ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля получим, если опустим индекс m . Очевидно, имеем

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = g_{mn} \mathbb{R}_{pql}^{\dots n}. \quad (1.5.85)$$

Нетрудно получить выражение для ковариантных компонент тензора кривизны посредством символов Кристоффеля. В самом деле, учитывая (1.5.76) в (1.5.85) и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} + \Gamma_{lq}^n \Gamma_{mp,n} - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mq,n}. \quad (1.5.86)$$

Следует заметить, что смешанные производные $\partial_q \partial_p \mathbf{a}$ можно представить и в другом виде

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = \partial_q (\nabla_p a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m) \mathbf{r}_m + \nabla_p a^m \partial_q \mathbf{r}_m = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^m \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \nabla_p a^m - \nabla_p a^m \Gamma_{pq}^n + \nabla_p a^m \Gamma_{nq}^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т.е. искомое представление имеет форму

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m + \nabla_n a_m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}^m. \quad (1.5.87)$$

Меняя местами индексы p и q в (1.5.87), вычитая почленно получаемое равенство из (1.5.87) и учитывая симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов, найдем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m - \nabla_p \nabla_q a_m) \mathbf{r}^m. \quad (1.5.88)$$

В силу (1.5.77) и (1.5.88) имеем, например, соотношение

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} a_l \mathbf{r}_m. \quad (1.5.89)$$

На основании (1.5.89) можно утверждать, что $\mathbb{R}_{pql}^{\dots m}$ являются компонентами тензора четвертого ранга.

Заметим, что обобщение, например, (1.5.89) на случай тензора с рангом больше единицы и пространства с размерностью больше трех не представляет большого труда. Поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованного читателя отошлем, например, к монографии [67].

По (1.5.89) легко заключаем справедливость следующей теоремы:

Теорема 1.5.1. *Операция обычного повторного дифференцирования принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, тензора с рангом не меньше единицы и повторного ковариантного дифференцирования компонент того же тензора перестановочна (коммутативна) тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = g_{mn} \mathbb{R}_{pql}^{\dots n} = 0 \quad (\mathbb{R} = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q \mathbf{r}^l \mathbf{r}_m = 0), \quad (1.5.90)$$

т.е. тензор Римана-Кристоффеля равен нулю.

Как видно из (1.5.76) и (1.5.86), компоненты тензора кривизны зависят только от символов Кристоффеля, а последние – только от производных компонент метрического тензора g_{mn} по координатам. Однако, как известно, в евклидовом пространстве постулируется существование таких систем координат, в которых компоненты метрического тензора постоянны во всем пространстве. Это, например, косоугольная система или ее частный случай – декартова прямоугольная система. Следовательно, в этих системах тензор Римана-Кристоффеля тождественно равен нулю. Но, если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой системе.

Таким образом, в евклидовом пространстве во всех системах координат тензор Римана-Кристоффеля тождественно равен нулю, а операция повторного дифференцирования тензора класса C^k , $k \geq 2$, с рангом больше единицы во всех системах координат перестановочна. Заметим, что для римановых (неевклидовых) пространств тензор Римана-Кристоффеля может быть отличен от нуля.

Нетрудно доказать, что компоненты тензора Римана-Кристоффеля $\mathbf{R}_{pqlm}^{\dots}$ обладают следующими основными свойствами:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{qplm}^{\dots}, \\ 2. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{pqml}^{\dots}, \\ 3. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = \mathbb{R}_{lmpq}^{\dots}, \\ 4. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} + \mathbb{R}_{qlpm}^{\dots} + \mathbb{R}_{lpqm}^{\dots} = 0. \end{aligned} \tag{1.5.91}$$

В самом деле, первое свойство очевидно, так как каждая из двух разностей, входящих в правую часть (1.5.86) кососимметрична относительно индексов p и q . Вторая разность в правой части (1.5.86) кососимметрична как относительно индексов p и q , так и относительно индексов l и m . Кроме того, она симметрична относительно пар индексов pq и lm .

Для доказательства второго и третьего свойств (1.5.91) необходимы дополнительные преобразования и вспомогательные соотношения, посредством которых легко доказать упомянутые выше свойства. В частности, преобразуем первую разность в правой части (1.5.86). Имеем

$$\begin{aligned} \partial_q \Gamma_{lp,m} &= \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q [\partial_p (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_l \cdot \partial_p \mathbf{r}_m] = \partial_q (\partial_p g_{lm} - \Gamma_{mp,l}) = \\ &= \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l}, \quad \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_p \partial_q g_{lm} - \partial_p \Gamma_{mq,l}$$

где второе соотношение получено из первого при перестановке индексов p и q .

Вычитая из первого соотношения второе, получим первое искомое соотношение

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = -(\partial_q \Gamma_{mp,l} - \partial_p \Gamma_{mq,l}). \tag{1.5.92}$$

Из (1.5.92) видно, что первая разность в правой части (1.5.86) кососимметрична относительно индексов l и m и т.к. и вторая разность кососимметрична относительно тех же индексов, то второе свойство доказано.

Теперь первую разность в правой части (1.5.86) представим в другом виде. Имеем

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \partial_q \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \partial_q \mathbf{r}_m.$$

Переставляя в этом соотношении индексы p и q и вычитая полученное соотношение из существующего, найдем второе искомое соотношение

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_q \mathbf{r}_m \cdot \partial_p \mathbf{r}_l - \partial_p \mathbf{r}_m \cdot \partial_q \mathbf{r}_l. \tag{1.5.93}$$

Меняя в нем местами пары индексов pq и lm и считая, что $\partial_s \mathbf{r}_t = \partial_t \mathbf{r}_s$, имеем

$$\partial_m \Gamma_{pl,q} - \partial_l \Gamma_{pm,q} = \partial_m \mathbf{r}_q \cdot \partial_l \mathbf{r}_p - \partial_l \mathbf{r}_q \cdot \partial_m \mathbf{r}_p = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m}. \tag{1.5.94}$$

В силу (1.5.94) утверждаем, что первая разность в правой части (1.5.86) симметрична относительно пар индексов pq и lm . Так как и вторая разность также симметрична относительно тех же пар индексов, то и третье свойство доказано.

Нетрудно заметить, что на основании (1.5.93) можно доказать кососимметричность первой разности в правой части (1.5.86) как относительно индексов p и q , так и относительно индексов l и m .

На доказательстве четвертого свойства (1.5.91), которое можно проверить непосредственно, мы останавливаться не будем. Заметим, что в указанной выше литературе можно найти иные пути доказательств этих свойств.

1.5.4 Тождества Ламе

Равенство нулю компонент тензора Римана-Кристоффеля (1.5.90) в трехмерном евклидовом пространстве дают 81 тождество. Однако, можно доказать, что вследствие существования у компонент тензора кривизны свойств симметрии (1.5.91) независимых тождеств получится только шесть. Эти тождества были получены Ламе за пятьдесят лет до возникновения тензорного анализа и носят его имя.

Получим тождества Ламе [128, 130, 174, 219]. С этой целью образуем компоненты тензора второго ранга

$$S^{kl} = \frac{1}{4} C^{kpq} C^{lst} \mathbb{R}_{pqst}, \quad (1.5.95)$$

где C^{kpq} — компоненты дискриминантного тензора. Умножая обе части (1.5.95) на $C_{ijk} C_{mnl}$ с последующим суммированием по k и l и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{ijmn} = C_{ijk} C_{mnl} S^{kl}, \quad (1.5.96)$$

В силу (1.5.95) и (1.5.96) легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Утверждение 4. *Для равенства нулю всех компонент тензора Римана-Кристоффеля необходимо и достаточно равенство нулю компонент тензора второго ранга S^{kl} .*

Покажем, что $S^{kl} = S^{lk}$, т.е. S^{kl} — симметричная матрица. Из третьего свойства (1.5.91) имеем

$$S^{kl} = \frac{1}{4} C^{kpq} C^{lst} \mathbb{R}_{pqst} = \frac{1}{4} C^{kpq} C^{lst} \mathbb{R}_{stpq} = \frac{1}{4} C^{lst} C^{kpq} \mathbb{R}_{stpq} = S^{lk}.$$

Таким образом, среди компонент тензора Римана-Кристоффеля независимых компонент только шесть (1.5.95), а остальные компоненты выражаются через эти шесть компонент посредством (1.5.96). Поэтому тождественное равенство нулю тензора Римана-Кристоффеля дает всего шесть независимых тождеств, которые называются тождествами Ламе. Итак, искомые тождества получим, если элементы матрицы S^{kl} приравняем нулю, т.е.

$$S^{kl} = \frac{1}{4} C^{kpq} C^{lst} \mathbb{R}_{pqst} = 0,$$

или в матричном виде

$$\text{matr}(S^{kl}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2323} & \mathbb{R}_{2331} & \mathbb{R}_{2312} \\ \mathbb{R}_{3123} & \mathbb{R}_{3131} & \mathbb{R}_{3112} \\ \mathbb{R}_{1223} & \mathbb{R}_{1231} & \mathbb{R}_{1212} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.5.97)$$

Учитывая симметричность S^{kl} , тождества Ламе можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{2323} &= 0, & \mathbb{R}_{3131} &= 0, & \mathbb{R}_{1212} &= 0, \\ \mathbb{R}_{2331} &= 0, & \mathbb{R}_{2312} &= 0, & \mathbb{R}_{3112} &= 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что вышеприведенную теорему можно сформулировать и по другому.

Теорема 1.5.2. *Для коммутативности операции обычного повторного дифференцирования принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, тензора ранга не меньше единицы и повторного ковариантного дифференцирования компонент того же тензора, необходимо и достаточно выполнение тождеств Ламе.*

Сформулируем еще одну теорему.

Теорема 1.5.3. Для коммутативности операции обычного повторного дифференцирования принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, тензора, необходимо и достаточно коммутативность операции повторного ковариантного дифференцирования компонент того же тензора.

Теперь представим тождества Ламе в удобном для дальнейшего пользования в виде. В этой связи заметим, что

$$S^{kl} \sim (S^{KL}, S^{K3}, S^{33}). \quad (1.5.98)$$

Тогда тождества Ламе приобретут вид

$$S^{KL} = 0, \quad S^{K3} = 0, \quad S^{33} = 0. \quad (1.5.99)$$

В силу (1.5.95) левые части (1.5.99) представляются в виде

$$S^{KL} = C^{KP} C^{LS} \mathbb{R}_{P3S3}, \quad S^{K3} = \frac{1}{2} C^{KP} C^{ST} \mathbb{R}_{P3ST}, \quad S^{33} = \frac{1}{4} C^{PQ} C^{ST} \mathbb{R}_{PQST}. \quad (1.5.100)$$

Аналогично из (1.5.96) получим обратные к (1.5.100) соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{P3S3} &= C_{PK} C_{SL} S^{KL}, & \mathbb{R}_{P3ST} &= \mathbb{R}_{STP3} = C_{ST} C_{KP} S^{K3}, \\ \mathbb{R}_{PQST} &= C_{PQ} C_{ST} S^{33} = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} \mathbb{R}_{1212}. \end{aligned} \quad (1.5.101)$$

Следует заметить, что соотношения (1.5.101) можно было получить и непосредственно из соответствующих соотношений (1.5.100), разрешая их относительно искомых величин.

Очевидно, тождества Ламе получаются, приравнивая нулю как соотношений (1.5.100), так и соотношений (1.5.101). Таким образом, в силу (1.5.98)–(1.5.101) заключаем, что

$$\mathbb{R}_{pqst} \sim (\mathbb{R}_{P3S3}, \mathbb{R}_{P3ST}, \mathbb{R}_{PQST})$$

и тождества Ламе можно представить и в виде

$$\mathbb{R}_{P3S3} = 0, \quad \mathbb{R}_{P3ST} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQST} = 0. \quad (1.5.102)$$

Этим мы будем пользоваться в дальнейшем для вывода аналогичных соотношений при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

1.6 О тензорах Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3

Как известно, при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 представление произвольного вектора \mathbf{A} дается соотношением (1.1.54). Поэтому в рассматриваемом случае, например, соотношение (1.5.89) представится в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{A} - \partial_p \partial_q \mathbf{A} = (\nabla_q \nabla_p \mathbf{A}^{\tilde{m}} - \nabla_p \nabla_q \mathbf{A}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\tilde{m}} A^{\tilde{l}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\tilde{t}} A^{\tilde{s}} \mathbf{r}_{\tilde{t}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда в силу (1.1.12) и подобных формул для компонент вектора аналогично (1.2.5) получаем

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\tilde{m}} = g^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{n}} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} g_{\tilde{t}}^{\tilde{m}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\tilde{t}} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} g^{\tilde{m}\tilde{t}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (1.6.1)$$

где аналогично (1.5.76) и (1.5.86) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\tilde{m}} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{q}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{p}}^{\tilde{m}}, \\ \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}}^{\tilde{n}} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p},\tilde{m}}^{\tilde{n}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q},\tilde{m}}^{\tilde{n}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{p},\tilde{n}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q},\tilde{n}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Очевидно, представление тензора Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 будет иметь вид

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\dots}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} \mathbf{r}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \smile, \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.6.3)$$

Закон перехода от одной системы координат к другой задается в виде специальной группы преобразования

$$x^{I'} = x^{I'}(x^1, x^2), \quad x^{3'} = x^3, \quad (1.6.4)$$

т.е. в дальнейшем, говоря о тензорах или о компонентах тензора, всегда будем полагать, что они являются тензорами или компонентами тензора относительно группы преобразования (1.6.4).

Ниже подробнее рассмотрим компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при различных семействах параметризаций области тонкого тела в \mathbb{R}^3 . Иными словами, рассмотрим их в различных семействах базисов.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при $S_{(-)g}^{(-)}$ -семействе параметризации. В этом случае ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля можно получить из второго соотношения (1.6.2) при $\sim = -$, т.е. имеем

$$\mathbb{R}^{\dots}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}} = \partial_{\tilde{q}} \Gamma^{\dots}_{\tilde{s}\tilde{p},\tilde{t}} - \partial_{\tilde{p}} \Gamma^{\dots}_{\tilde{s}\tilde{p},\tilde{t}} + \Gamma^{\tilde{n}}_{\tilde{s}\tilde{q}} \Gamma^{\dots}_{\tilde{t}\tilde{p},\tilde{n}} - \Gamma^{\tilde{n}}_{\tilde{s}\tilde{p}} \Gamma^{\dots}_{\tilde{t}\tilde{q},\tilde{n}}. \quad (1.6.5)$$

В рассматриваемом случае матричное соотношение (1.5.97), очевидно, представится в виде

$$\text{matr}(S^{\bar{k}l}) = \overset{(-)}{g}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\dots}_{2323} & \mathbb{R}^{\dots}_{2331} & \mathbb{R}^{\dots}_{2312} \\ \mathbb{R}^{\dots}_{3123} & \mathbb{R}^{\dots}_{3131} & \mathbb{R}^{\dots}_{3112} \\ \mathbb{R}^{\dots}_{1223} & \mathbb{R}^{\dots}_{1231} & \mathbb{R}^{\dots}_{1212} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.6.6)$$

Заметим сразу, что в данном случае $\partial_3 \mathbf{r}_s \neq \partial_s \mathbf{r}_3$, поэтому третье свойство (1.5.91) компонент Римана-Кристоффеля $\mathbb{R}^{\dots}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}$ не выполняется, если, например, один из индексов равен трем. В этой связи следует более подробно рассматривать матричное соотношение (1.6.6) и изучать в отдельности каждое его соотношение, выделяя из них существенные тождества Ламе, из которых в свою очередь получают уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци.

Учитывая первое соотношение (1.4.4) и последнее соотношение (1.4.7), нетрудно заметить, что, если хотя бы один из индексов p и q равен трем, то компоненты тензора Римана-Кристоффеля (1.6.5) равны нулю так, что в правой части (1.6.5) каждое слагаемое равно нулю. Отсюда заключаем, что соотношения, получаемые из первых двух строк (1.6.6) рассматривать не следует. Они выполняются, но ничего нового не дают. Остаются соотношения последней строки (1.6.6)

$$\mathbb{R}^{\dots}_{1223} = 0, \quad \mathbb{R}^{\dots}_{1231} = 0, \quad \mathbb{R}^{\dots}_{1212} = 0, \quad (1.6.7)$$

являющиеся в рассматриваемом случае существенными тождествами Ламе. Учитывая, что

$$\mathbb{R}^{\dots}_{PQS3} = -\mathbb{R}^{\dots}_{PQ3S} = 0, \quad \mathbb{R}^{\dots}_{PQST} = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} \mathbb{R}^{\dots}_{1212}, \quad (1.6.8)$$

соотношения (1.6.7) можно представить, например, в виде

$$\mathbb{R}^{\dots}_{PQST} = 0, \quad \mathbb{R}^{\dots}_{PQS3} = 0 \quad (\mathbb{R}^{\dots}_{PQSt} = 0), \quad (1.6.9)$$

или

$$\mathbb{R}^{\dots\bar{T}}_{PQS} = 0, \quad \mathbb{R}^{\dots\bar{3}}_{PQS} = 0 \quad (\mathbb{R}^{\dots\bar{t}}_{PQS} = 0). \quad (1.6.10)$$

Итак, предметом нашего исследования является (1.6.9) или (1.6.10). Рассмотрим каждое соотношение в отдельности, например, в (1.6.9). Первое соотношение (1.6.9) в силу (1.6.5) представится в виде

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{n}} \Gamma_{TP,\bar{n}} - \Gamma_{SP}^{\bar{n}} \Gamma_{TQ,\bar{n}} = \\
 &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,\bar{N}} + \Gamma_{SQ}^{\bar{3}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,\bar{N}} - \Gamma_{SP}^{\bar{3}} \Gamma_{TQ,\bar{3}} = \\
 &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,\bar{N}} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,\bar{N}} + g^{\bar{3}\bar{k}} (\Gamma_{SQ,\bar{k}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \Gamma_{SP,\bar{k}} \Gamma_{TQ,\bar{3}}) = \\
 &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,\bar{N}} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,\bar{N}} + g^{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{SQ,\bar{K}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \Gamma_{SP,\bar{K}} \Gamma_{TQ,\bar{3}}) + \\
 &+ g^{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{SQ,\bar{3}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \Gamma_{SP,\bar{3}} \Gamma_{TQ,\bar{3}}).
 \end{aligned}$$

Далее, учитывая выражения символов Кристоффеля из (1.4.6), преобразуем последнее слагаемое в правой части этого соотношения. Имеем

$$\begin{aligned}
 g^{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{SQ,\bar{3}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \Gamma_{SP,\bar{3}} \Gamma_{TQ,\bar{3}}) &= g^{\bar{3}\bar{3}} [\partial_Q g_{S\bar{3}} \partial_P g_{T\bar{3}} - \partial_P g_{S\bar{3}} \partial_Q g_{T\bar{3}} + \partial_Q g_{S\bar{3}} (g_{PT}^- - g_{PT}^+) - \\
 &- \partial_P g_{S\bar{3}} (g_{QT}^- - g_{QT}^+) + \partial_P g_{T\bar{3}} (g_{QS}^- - g_{QS}^+) - \partial_Q g_{T\bar{3}} (g_{PS}^- - g_{PS}^+)] + \\
 &+ g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{QS}^- - g_{QS}^+) (g_{PT}^- - g_{PT}^+) - (g_{PS}^- - g_{PS}^+) (g_{QT}^- - g_{QT}^+)].
 \end{aligned}$$

Учитывая последнее и предпоследнее соотношения и вводя обозначение

$$\begin{aligned}
 R_{PQST}^{\dots} &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,\bar{N}} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,\bar{N}} + g^{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{SQ,\bar{K}} \Gamma_{TP,\bar{3}} - \\
 &- \Gamma_{SP,\bar{K}} \Gamma_{TQ,\bar{3}}) + g^{\bar{3}\bar{3}} [\partial_Q g_{S\bar{3}} \partial_P g_{T\bar{3}} - \partial_P g_{S\bar{3}} \partial_Q g_{T\bar{3}} + \partial_Q g_{S\bar{3}} (g_{PT}^- - g_{PT}^+) - \\
 &- \partial_P g_{S\bar{3}} (g_{QT}^- - g_{QT}^+) + \partial_P g_{T\bar{3}} (g_{QS}^- - g_{QS}^+) - \partial_Q g_{T\bar{3}} (g_{PS}^- - g_{PS}^+)], \quad (1.6.11)
 \end{aligned}$$

получим

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = R_{PQST}^{\dots} + g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{QS}^- - g_{QS}^+) (g_{PT}^- - g_{PT}^+) - (g_{PS}^- - g_{PS}^+) (g_{QT}^- - g_{QT}^+)] = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$R_{PQST}^{\dots} = g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{PS}^- - g_{PS}^+) (g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+) (g_{PT}^- - g_{PT}^+)]. \quad (1.6.12)$$

Правая часть (1.6.12) (как сумма произведений компонент ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела и с учетом того, что $g^{\bar{3}\bar{3}}$ — инвариант) образует ковариантные компоненты тензора четвертого ранга. Поэтому и левая часть, выражающаяся еще в виде (1.6.11), является компонентами тензора четвертого ранга. Вспомним, что тензориальность величин рассматривается относительно группы преобразований (1.6.4).

Нетрудно доказать, что компоненты (1.6.11) обладают аналогичными (1.5.91) свойствами. В самом деле, эти свойства вытекают из соотношения (1.6.12), точнее из его правой части. Докажем их еще другим путем. В частности, преобразуем правую часть (1.6.12), приводя ее к такому виду, на основании которого легко доказываются приведенные выше свойства. Имеем

$$\begin{aligned}
 &(g_{PS}^- - g_{PS}^+) (g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+) (g_{PT}^- - g_{PT}^+) = \\
 &= \epsilon_{PQ} [(g_{1S}^- - g_{1S}^+) (g_{2T}^- - g_{2T}^+) - (g_{2S}^- - g_{2S}^+) (g_{1T}^- - g_{1T}^+)] = \quad (1.6.13) \\
 &= \epsilon_{PQ} \epsilon^{KL} (g_{KS}^- - g_{KS}^+) (g_{LT}^- - g_{LT}^+).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$A_{\overline{ST}} \equiv \epsilon^{KL} (g_{\overline{KS}} - g_{\overline{KS}^+}) (g_{\overline{LT}} - g_{\overline{LT}^+}) = -\epsilon^{LK} (g_{\overline{LT}} - g_{\overline{LT}^+}) (g_{\overline{KS}} - g_{\overline{KS}^+}) = -A_{\overline{TS}}.$$

Итак, $A_{\overline{ST}}$ — кососимметричная матрица. Поэтому

$$A_{\overline{ST}} = \epsilon_{ST} A_{\overline{12}} = \epsilon_{ST} \epsilon^{KL} (g_{\overline{K1}} - g_{\overline{K1}^+}) (g_{\overline{L2}} - g_{\overline{L2}^+}) = \epsilon_{ST} \det (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}).$$

Учитывая последнее соотношение в (1.6.13), получим

$$(g_{\overline{PS}} - g_{\overline{PS}^+}) (g_{\overline{QT}} - g_{\overline{QT}^+}) - (g_{\overline{QS}} - g_{\overline{QS}^+}) (g_{\overline{PT}} - g_{\overline{PT}^+}) = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} \det (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}). \quad (1.6.14)$$

В силу (1.6.14) соотношение (1.6.12) представится в искомом виде

$$R_{\overline{PQST}} = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} g^{\overline{33}} \det (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}). \quad (1.6.15)$$

Учитывая свойства символов Леви-Чивиты, из (1.6.15) видно, что компоненты $R_{\overline{PQST}}$ обладают аналогичными (1.5.91) свойствами. Заметим, что соотношение (1.6.15) является аналогом уравнения Гаусса при $S_{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в

\mathbb{R}^3 в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен к базовыми поверхностями $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$.

Теперь найдем выражение детерминанта в правой части (1.6.15). Имеем

$$\begin{aligned} \det (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}) &= \frac{1}{2} \epsilon^{KL} \epsilon^{MN} (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}) (g_{\overline{LN}} - g_{\overline{LN}^+}) = \\ &= g \frac{1}{2} C^{\overline{KL}} C^{\overline{MN}} (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}) (g_{\overline{LN}} - g_{\overline{LN}^+}) = \\ &= g \frac{1}{2} C^{\overline{KL}} C^{\overline{MN}} (g_{\overline{K}}^{\overline{M}} - g_{\overline{K}^+}^{\overline{M}}) (g_{\overline{L}}^{\overline{N}} - g_{\overline{L}^+}^{\overline{N}}) = g \det (g_{\overline{I}}^{\overline{J}} - g_{\overline{I}^+}^{\overline{J}}) = \\ &= g \frac{1}{2} \epsilon^{KL} \epsilon_{\overline{MN}} [g_{\overline{K}}^{\overline{M}} g_{\overline{L}}^{\overline{N}} - (g_{\overline{K}}^{\overline{M}} g_{\overline{L}}^{\overline{N}} + g_{\overline{LN}} g_{\overline{KM}^+}) + g_{\overline{K}^+}^{\overline{M}} g_{\overline{L}^+}^{\overline{N}}] = g [1 - g_{\overline{I}^+}^{\overline{I}} + \det (g_{\overline{I}}^{\overline{J}})], \end{aligned}$$

т. е.

$$\det (g_{\overline{KM}} - g_{\overline{KM}^+}) = g \det (g_{\overline{I}}^{\overline{J}} - g_{\overline{I}^+}^{\overline{J}}) = g [1 - g_{\overline{I}^+}^{\overline{I}} + \det (g_{\overline{I}}^{\overline{J}})]. \quad (1.6.16)$$

На основании (1.6.16) уравнение (1.6.15) получит более удобный вид

$$R_{\overline{PQST}} = C_{\overline{PQ}} R_{\overline{ST}} g^{\overline{33}} \det [1 - g_{\overline{I}^+}^{\overline{I}} + \det (g_{\overline{I}}^{\overline{J}})]. \quad (1.6.17)$$

Заметим, что для получения уравнения Гаусса мы могли поступить иначе. В частности, первое соотношение (1.6.9) можно было представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\overline{PQST}} &= \partial_Q \Gamma_{\overline{SP}, \overline{T}} - \partial_P \Gamma_{\overline{SQ}, \overline{T}} + \Gamma_{\overline{SQ}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{TP}, \overline{N}} - \Gamma_{\overline{SP}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{TQ}, \overline{N}} + g_{\overline{3K}} (\Gamma_{\overline{SQ}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TP}}^{\overline{K}} - \Gamma_{\overline{SP}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TQ}}^{\overline{K}}) + \\ &+ g_{\overline{33}} (\Gamma_{\overline{SQ}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TP}}^{\overline{3}} - \Gamma_{\overline{SP}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TQ}}^{\overline{3}}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, вводя обозначение

$$R_{\overline{PQST}} = \partial_Q \Gamma_{\overline{SP}, \overline{T}} - \partial_P \Gamma_{\overline{SQ}, \overline{T}} + \Gamma_{\overline{SQ}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{TP}, \overline{N}} - \Gamma_{\overline{SP}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{TQ}, \overline{N}} + g_{\overline{3K}} (\Gamma_{\overline{SQ}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TP}}^{\overline{K}} - \Gamma_{\overline{SP}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{TQ}}^{\overline{K}}),$$

имеем

$$R_{\overline{PQST}} = g_{\overline{33}} (\Gamma_{\overline{PS}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{QT}}^{\overline{3}} - \Gamma_{\overline{QS}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{PT}}^{\overline{3}}). \quad (1.6.18)$$

Теперь, умножая обе части последнего соотношения (1.5.13) на $C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}$ и учитывая свойства компонент дискриминантного тензора, получим

$$\begin{aligned} g^{33(\check{\cdot})}K C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} &= \frac{1}{2}C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} = \\ &= \frac{1}{2}(\delta_P^I\delta_Q^J - \delta_P^J\delta_Q^I)(\delta_S^L\delta_T^M - \delta_S^M\delta_T^L)\Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} = \Gamma_{\check{P}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{Q}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - \Gamma_{\check{P}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{Q}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$g^{33(\check{\cdot})}K C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} = \Gamma_{\check{P}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{Q}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - \Gamma_{\check{P}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{Q}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}, \quad \check{\cdot} \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (1.6.19)$$

В силу (1.6.19), предварительно записывая его при $\check{\cdot} = -$, соотношение (1.6.18) представится в виде

$$R_{\check{P}\check{Q}\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = g_{33}^{-}g^{33(\check{\cdot})}K C_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}C_{\check{S}\check{T}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}. \quad (1.6.20)$$

Сравнивая (1.6.20) с (1.6.17), можно утверждать, что

$$K^{(-)} = g_{33}^{-1}[1 - g_{\check{I}}^{\check{I}} + \det(g_{\check{I}}^{\check{J}})] = h^{-2}(1 - g_{\check{I}}^{\check{I}} + \vartheta^{\check{I}}). \quad (1.6.21)$$

На основании второго соотношения (1.5.16) и (1.6.21), заключаем, что гауссова кривизна $K^{(-)}$ в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен $S^{(-)}$, имеет такое же выражение, что и при $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$, несмотря на то, что основные компоненты переноса ЕТВР при рассматриваемых случаях имеют различные значения.

Теперь рассмотрим второе соотношение (1.6.9). Это соотношение в силу (1.6.5) можно записать в форме

$$\mathbb{R}_{\check{P}\check{Q}\check{S}\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = \partial_Q\Gamma_{\check{S}\check{P},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} - \partial_P\Gamma_{\check{S}\check{Q},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} + \Gamma_{\check{S}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{3}\check{P},\check{n}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - \Gamma_{\check{S}\check{P}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{3}\check{Q},\check{n}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} = 0. \quad (1.6.22)$$

Записывая (1.4.6) при $\check{\cdot} = -$, имеем

$$\partial_Q\Gamma_{\check{S}\check{P},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = \partial_Q\partial_P g_{\check{S}\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} + \partial_Q(g_{\check{P}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - g_{\check{P}\check{S}}^{\check{+}\check{-}}), \quad \partial_P\Gamma_{\check{S}\check{Q},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = \partial_P\partial_Q g_{\check{S}\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} + \partial_P(g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{+}\check{-}}).$$

Вычитая из первого соотношения почленно второе, получим

$$\partial_Q\Gamma_{\check{S}\check{P},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} - \partial_P\Gamma_{\check{S}\check{Q},\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = \partial_Q(g_{\check{P}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - g_{\check{P}\check{S}}^{\check{+}\check{-}}) - \partial_P(g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{+}\check{-}}). \quad (1.6.23)$$

Аналогично (1.6.23), представляя второе соотношение (1.4.4) при $\check{\cdot} = -$, а затем учитывая во второй разности (1.6.22), будем иметь

$$\Gamma_{\check{S}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{3}\check{P},\check{n}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} - \Gamma_{\check{S}\check{P}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}\Gamma_{\check{3}\check{Q},\check{n}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}} = \Gamma_{\check{S}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}(g_{\check{P}\check{n}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{P}\check{n}}^{\check{-}\check{+}}) - \Gamma_{\check{S}\check{P}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}(g_{\check{Q}\check{n}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{Q}\check{n}}^{\check{-}\check{+}}). \quad (1.6.24)$$

Подставляя (1.6.23) и (1.6.24) в (1.6.22) и, кроме того, добавляя и вычитая выражение $(g_{\check{n}\check{S}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{n}\check{S}}^{\check{-}\check{+}})\Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}}$, получим

$$\mathbb{R}_{\check{P}\check{Q}\check{S}\check{3}}^{\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}\check{\cdot}} = \bar{\nabla}_P(g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{-}\check{+}}) - \bar{\nabla}_Q(g_{\check{P}\check{S}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{P}\check{S}}^{\check{-}\check{+}}) = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\bar{\nabla}_P(g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{Q}\check{S}}^{\check{-}\check{+}}) = \bar{\nabla}_Q(g_{\check{P}\check{S}}^{\check{+}\check{-}} - g_{\check{P}\check{S}}^{\check{-}\check{+}}), \quad \bar{\nabla}_P(g_{\check{Q}}^{\check{S}} - g_{\check{Q}}^{\check{-}\check{S}}) = \bar{\nabla}_Q(g_{\check{P}}^{\check{S}} - g_{\check{P}}^{\check{-}\check{S}}), \quad (1.6.25)$$

или, учитывая

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^- = 0, \quad \bar{\nabla}_P g_{Q\bar{S}}^- = 0, \quad (1.6.26)$$

из (1.6.25) получим

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^+ = \bar{\nabla}_Q g_{PS}^+, \quad \bar{\nabla}_P g_{Q\bar{S}}^+ = \bar{\nabla}_Q g_{P\bar{S}}^+. \quad (1.6.27)$$

Здесь $\bar{\nabla}_P$ — оператор (пространственный) ковариантного дифференцирования при $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Соотношения (1.6.25), или получаемые из них соотношения (1.6.27), представляют аналог уравнений Петерсона-Кодацци при $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 . Очевидно, если бы мы исходили из соотношений (1.6.10), то получили те же самые соотношения.

Заметим, что имеют место соотношения

$$(\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^- = \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^- = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} = \mathbf{0}). \quad (1.6.28)$$

Заметим также, что в силу определения ковариантной производной $\bar{\nabla}_K$ верны равенства

$$\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^+ = \partial_P \mathbf{r}_Q^+ - \mathbf{r}_m^- \Gamma_{QP}^m = \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}_m^- \Gamma_{QP}^m, \quad \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^+ = \partial_Q \mathbf{r}_P^+ - \mathbf{r}_m^- \Gamma_{PQ}^m = \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}_m^- \Gamma_{PQ}^m,$$

из которых видно, что справедливы формулы

$$(\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^+ = \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^+) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)}). \quad (1.6.29)$$

Вычитая из (1.6.29) почленно (1.6.28), получим

$$(\bar{\nabla}_P (\mathbf{r}_Q^+ - \mathbf{r}_Q^-) = \bar{\nabla}_Q (\mathbf{r}_P^+ - \mathbf{r}_P^-)) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{h} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{h}). \quad (1.6.30)$$

Далее, умножая обе части (1.6.30) на x^3 и потом прибавляя почленно к равенству (1.6.28), будем иметь

$$\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (1.6.31)$$

Очевидно, из (1.6.31), при $x^3 = 0$ получаем (1.6.28), а при $x^3 = 1$ — (1.6.29). Вычитая из (1.6.30) почленно (1.6.31), получим (1.6.29).

Умножая скалярно обе части (1.6.30), (1.6.28) и (1.6.29) на \mathbf{r}_S^- и \mathbf{r}_S^+ и учитывая

$$\bar{\nabla}_K \mathbf{r}_L^- = \mathbf{0}, \quad \bar{\nabla}_K \mathbf{r}_L^+ = \mathbf{0},$$

получим соотношения (1.6.25) — (1.6.27) соответственно.

Таким образом, имея соотношение (1.6.31), можно получить (1.6.25), (1.6.27), (1.6.28) и (1.6.30).

Умножая обе части соотношений

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^- = \bar{\nabla}_Q g_{PS}^-, \quad \bar{\nabla}_P g_{Q\bar{S}}^- = \bar{\nabla}_Q g_{P\bar{S}}^-,$$

получаемых при скалярном умножении обеих частей (1.6.28) на $\mathbf{r}_{\bar{S}}$ и $\mathbf{r}^{\bar{S}}$ соответственно, на $1 - x^3$, а соотношений (1.6.27) на x^3 и складывая полученные равенства почленно, будем иметь

$$\bar{\nabla}_P g_{Q\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{P\bar{S}}, \quad \bar{\nabla}_P g_{Q\bar{S}}^{\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{P\bar{S}}^{\bar{S}}. \quad (1.6.32)$$

Следует заметить, что аналогичное второму соотношению (1.6.32) соотношение при классической параметризации (когда в качестве базовой рассматривается срединная поверхность) области тонкого тела в \mathbb{R}^3 приведено в монографии [367] (соотношение (1.3.44)).

Заметим также, что компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела рассматриваются совершенно аналогично рассмотренному случаю, поэтому на этом случае мы останавливаться не будем. Ниже рассмотрим их при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при S_g -семействе параметризации. В рассматриваемом случае чисто ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля получим из второго соотношения (1.6.2) при $\sim = \emptyset$

$$\mathbb{R}_{pqst}^{\dots} = \partial_q \Gamma_{sp,t} - \partial_p \Gamma_{sq,t} + \Gamma_{sq}^n \Gamma_{tp,n} - \Gamma_{sp}^n \Gamma_{tq,n}. \quad (1.6.33)$$

Эти компоненты обладают свойствами, аналогичными (1.5.91), поэтому в этом случае тождества Ламе представляются в виде соотношений (1.5.102). Наша задача заключается в рассмотрении каждого из них.

Учитывая (1.6.33), первое соотношение (1.5.102) можно записать в виде

$$\mathbb{R}_{P\bar{3}S\bar{3}}^{\dots} = \partial_3 \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{S\bar{3},3} + \Gamma_{S\bar{3}}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{\bar{3}\bar{3},n} = 0. \quad (1.6.34)$$

На основании (1.4.4), (1.4.6) и (1.4.7) из (1.4.8), производя простые выкладки, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{SP,3} = \Gamma_{PS,3} = \partial_P g_{S3} - g_{P\bar{k}}^{\bar{k}} (g_{P\bar{k}}^+ - g_{P\bar{k}}^-), \quad \Gamma_{S\bar{3},3} = \Gamma_{3S,3} = \partial_3 g_{S3} = g_{S\bar{3}}^+ - g_{S\bar{3}}^-, \\ \Gamma_{S\bar{3}}^n = \Gamma_{3S}^n = g_{\bar{k}}^n (g_{S\bar{k}}^+ - g_{S\bar{k}}^-), \quad \Gamma_{P\bar{3},n} = \Gamma_{3P,n} = g_{nm} (g_{P\bar{n}}^+ - g_{P\bar{n}}^-), \quad \Gamma_{\bar{3}\bar{3},n} = 0. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

Подставляя (1.6.34) в (1.6.33), имеем

$$(\mathbb{R}_{P\bar{3}S\bar{3}}^{\dots} = 0) \Rightarrow [\partial_P (g_{S\bar{3}}^+ - g_{S\bar{3}}^-) - \partial_S (g_{P\bar{3}}^+ - g_{P\bar{3}}^-) = 0].$$

Отсюда добавляя и вычитая недостающие до ковариантных производных слагаемые, будем иметь

$$\bar{\nabla}_P (g_{S\bar{3}}^+ - g_{S\bar{3}}^-) = \bar{\nabla}_S (g_{P\bar{3}}^+ - g_{P\bar{3}}^-),$$

или

$$\nabla_P (g_{S\bar{3}}^+ - g_{S\bar{3}}^-) = \nabla_S (g_{P\bar{3}}^+ - g_{P\bar{3}}^-), \quad (1.6.36)$$

где ∇_P — оператор (пространственный) ковариантного дифференцирования при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Теперь рассмотрим второе соотношение (1.5.102). Так как $\mathbb{R}_{P\bar{3}S\bar{T}}^{\dots} = \mathbb{R}_{S\bar{T}P\bar{3}}^{\dots}$, то вместо него можно рассматривать $\mathbb{R}_{P\bar{Q}S\bar{3}}^{\dots} = 0$, которое в силу (1.6.33) представится в виде

$$\mathbb{R}_{P\bar{Q}S\bar{3}}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{SQ,3} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{Q\bar{3},n} = 0.$$

Учитывая соответствующие соотношения (1.6.35), после простых преобразований получим

$$(\mathbb{R}_{P\bar{Q}S\bar{3}}^{\dots} = 0) \Rightarrow [\nabla_P (g_{Q\bar{S}}^+ - g_{Q\bar{S}}^-) = \nabla_Q (g_{P\bar{S}}^+ - g_{P\bar{S}}^-)]. \quad (1.6.37)$$

Нетрудно заметить, что (1.6.36) и (1.6.37) можно представить одним соотношением

$$\nabla_P(g_{Q_s^+} - g_{Q_s^-}) = \nabla_Q(g_{P_s^+} - g_{P_s^-}), \quad (1.6.38)$$

или

$$\nabla_P(g_{Q^s}^+ - g_{Q^s}^-) = \nabla_Q(g_{P^s}^+ - g_{P^s}^-). \quad (1.6.39)$$

Из (1.6.38) и (1.6.39) посредством элементарных преобразований следуют соотношения

$$\nabla_P g_{Q_s} = \nabla_Q g_{P_s}, \quad \nabla_P g_{Q^s} = \nabla_Q g_{P^s}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (1.6.40)$$

Соотношения (1.6.38)–(1.6.40) — аналоги уравнений Петерсона-Кодацци, представленных в различных формах, при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Легко видеть, что верны равенства

$$\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} - \partial_M^{(-)} \Gamma_{PQ}^M = \nabla_P \mathbf{r}_Q^-, \quad \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} = \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} - \partial_M^{(-)} \Gamma_{QP}^M = \nabla_Q \mathbf{r}_P^-, \quad (1.6.41)$$

на основании которых можно написать

$$(\nabla_P \mathbf{r}_Q^- = \nabla_Q \mathbf{r}_P^-) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)}). \quad (1.6.42)$$

Аналогично (1.6.41) находим формулы

$$\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} - \partial_M^{(+)} \Gamma_{PQ}^M = \nabla_P \mathbf{r}_Q^+, \quad \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} = \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} - \partial_M^{(+)} \Gamma_{QP}^M = \nabla_Q \mathbf{r}_P^+,$$

в силу которых имеем

$$(\nabla_P \mathbf{r}_Q^+ = \nabla_Q \mathbf{r}_P^+) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)}). \quad (1.6.43)$$

Вычитая из (1.6.43) почленно (1.6.42), будем иметь

$$(\nabla_P (\mathbf{r}_Q^+ - \mathbf{r}_Q^-) = \nabla_Q (\mathbf{r}_P^+ - \mathbf{r}_P^-)) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{h} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{h}). \quad (1.6.44)$$

Умножая обе части первого соотношения (1.6.42) на $1 - x^3$, а (1.6.43) на x^3 и потом складывая полученные равенства почленно, найдем

$$\nabla_P \partial_Q \mathbf{r} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (1.6.45)$$

Заметим, что (1.6.45) можно еще получить, если обе части равенства (1.6.44) умножить на x^3 и потом прибавить почленно к соотношению (1.6.42).

Нетрудно усмотреть, что имея соотношение (1.6.45), можно получить все соотношения (1.6.38)–(1.6.44).

Остается рассмотреть третье соотношение (1.5.102). В силу (1.6.33) имеем

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} &= \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{TP,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{TQ,n} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \\ &+ \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + \Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP,3} - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ,3} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \\ &- \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K) + g_{33} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$R_{PQST}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K) \quad (1.6.46)$$

из предыдущего соотношения получим

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = R_{PQST}^{\dots} + g_{33} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3) = 0.$$

Отсюда в свою очередь следует

$$R_{P\dot{\dot{Q}}\dot{\dot{S}}\dot{\dot{T}}} = g_{33}(\Gamma_{SP}^3\Gamma_{TQ}^3 - \Gamma_{SQ}^3\Gamma_{TP}^3). \quad (1.6.47)$$

Учитывая в правой части (1.6.47) значение разности произведений символов Кристоффеля из (1.6.19) при $\smile = \emptyset$, будем иметь

$$R_{P\dot{\dot{Q}}\dot{\dot{S}}\dot{\dot{T}}} = g_{33}g^{33}KC_{P\dot{\dot{Q}}}C_{S\dot{\dot{T}}}. \quad (1.6.48)$$

Очевидно, в силу (1.6.48) можно утверждать, что (1.6.46) являются компонентами тензора четвертого ранга относительно группы преобразований (1.6.4), а также то, что они обладают свойствами, аналогичным (1.5.91).

Поступая так же, как и при выводе соотношения (1.6.12), в рассматриваемом случае аналогичное соотношение представится в виде

$$R_{P\dot{\dot{Q}}\dot{\dot{S}}\dot{\dot{T}}} = g^{33}[(g_{PS}^- - g_{PS}^+)(g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+)(g_{PT}^- - g_{PT}^+)]. \quad (1.6.49)$$

Далее, преобразуя правую часть (1.6.49) аналогично правой части (1.6.12), получим

$$R_{P\dot{\dot{Q}}\dot{\dot{S}}\dot{\dot{T}}} = \epsilon_{PQ}\epsilon_{ST}g^{33}\det(g_{MN}^- - g_{MN}^+). \quad (1.6.50)$$

Представим определитель в правой части (1.6.50) в другой форме

$$\begin{aligned} \det(g_{MN}^- - g_{MN}^+) &= \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\epsilon^{KL}(g_{IK}^- - g_{IK}^+)(g_{JL}^- - g_{JL}^+) = \\ &= \frac{1}{2}gC^{IJ}C^{KL}(g_{IK}^- - g_{IK}^+)(g_{JL}^- - g_{JL}^+) = \frac{1}{2}gC^{IJ}C_{KL}(g_I^K - g_+^K)(g_J^L - g_+^L) = g\det(g_I^K - g_+^K), \end{aligned}$$

т.е.

$$\det(g_{MN}^- - g_{MN}^+) = g\det(g_I^K - g_+^K). \quad (1.6.51)$$

Учитывая (1.6.51) и (1.6.50), получим

$$R_{P\dot{\dot{Q}}\dot{\dot{S}}\dot{\dot{T}}} = C_{P\dot{\dot{Q}}}C_{S\dot{\dot{T}}}g^{33}\det(g_I^K - g_+^K). \quad (1.6.52)$$

Сравнивая (1.6.48) и (1.6.52), заключаем, что

$$K = g_{33}^{-1}\det(g_I^K - g_+^K). \quad (1.6.53)$$

Придадим (1.6.53) другой вид. В этой связи в правой части (1.6.53) преобразуем определитель. В силу (1.1.16), (1.1.18) и (1.6.16) имеем

$$\det(g_I^K - g_+^K) = \det[g_J^K(g_{\bar{J}}^I - g_{\bar{I}}^J)] = \det(g_L^K)\det(g_{\bar{I}}^J - g_{\bar{J}}^I) = \vartheta^{(-) -1}[1 - g_{\bar{I}}^I + \det(g_{\bar{I}}^J)]. \quad (1.6.54)$$

Подставляя (1.6.54) в (1.6.53) и учитывая (1.6.21), найдем искомые выражения для K , а именно

$$K = \vartheta^{(-) -1}g_{33}^{-1}[1 - g_{\bar{I}}^I + \det(g_{\bar{I}}^J)] = \vartheta^{(-) -1}K. \quad (1.6.55)$$

На основании (1.6.55) заключаем, что второе соотношение (1.5.25) имеет место и в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен $\overset{(-)}{S}$.

Ниже приведем формулировку фундаментальной теоремы теории поверхностей и резюмируя изложенное выше, дадим формулировку аналогичной теоремы для области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Теорема 1.6.1. (Фундаментальная теорема теории поверхностей) Наличие двух любых тензоров

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J, \quad \underline{\mathbf{b}} = b_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J,$$

первый из которых является положительно определенным и компоненты которых связаны между собой уравнениями Гаусса и Петерсона-Кодацци, необходимо и достаточно для существования, и притом единственной, с точностью до движения в \mathbb{R}^3 некоторой регулярной поверхности, для которой эти тензоры являются первым и вторым тензорами.

Заметим, что необходимая часть этой теоремы — теорема Бонне [133, 348].

Теорема 1.6.2. (Фундаментальная теорема для области тонкого тела в \mathbb{R}^3 при ее новой параметризации) Наличие единичного тензора второго ранга, представленного в виде

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\hat{p}\hat{q}} \mathbf{r}^{\hat{p}} \mathbf{r}^{\hat{q}}, \quad \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\},$$

необходимо и достаточно для существования, и притом единственной, с точностью до движения в \mathbb{R}^3 некоторой регулярной области тонкого тела при ее новой параметризации. При этом число независимых основных компонент ЕТВР зависит от типа семейства параметризации.

Следует заметить, что материал этой главы был опубликован в виде второй главы работы [276] (см. также [281, 287, 289, 301, 303]). Кроме того, заметим, что при написании следующих глав диссертации были использованы материалы с большими объемами депонированных и в рецензируемых журналах опубликованных работ. Перечень этих работ приведена в списке литературы. Отметим также, что замеченные в опубликованных работах опечатки были устранены при написании данной диссертационной работы.

Глава 2

Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей, некоторых выражений и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов

Приведена теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности. Выписаны основные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго родов, с помощью которых в свою очередь получены несколько дополнительных соотношений, играющих важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел, как при классической, так и при новой параметризации областей этих тел. Определены моменты тензорных полей, их компонент и некоторых дифференциальных операторов от них в криволинейных координатах. В частности, определены моменты тензорных функций, а также их производных и повторных производных. Кроме того, получены представления и найдены моменты относительно полиномов Чебышева лапласиана, градиента, ротора, повторного градиента, дивергенции, повторной дивергенции тензора второго ранга, градиента дивергенции. Получены выражения для моментов k -го порядка произведения двух функций на произвольную степень поперечной координаты x^3 .

2.1 Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Моменты тензорных полей их компонент и некоторых дифференциальных операторов

2.1.1 Теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности

Известно [70, 165, 201, 305, 392, 400, 514], что как системы полиномов Чебышева, так и система полиномов Лежандра — ортогональная система на сегменте $[-1, 1]$ и, как всякая ортогональная система, является полной и замкнутой системой. Эти полиномы являются классическими ортогональными полиномами, производные которых также являются классическими ортогональными полиномами [305]. Кроме того, эти полиномы удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям, представления которых при линейном преобразовании сегмента ортогональности, в частности, при замене сегмента $[-1, 1]$ сег-

ментом $[0, 1]$ имеют для нас важное значение, так как поперечная координата при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 принимает значения из сегмента $[0, 1]$.

Прежде чем выписать эти рекуррентные соотношения для сегмента $[0, 1]$ и получить следующие из них некоторые дополнительные соотношения, заметим, что имеет место теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности.

Теорема 2.1.1. *Если система многочленов $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ ортогональна с весом $h(x)$ на сегменте $[a, b]$, то при $p > 0$ система многочленов $\{\psi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, где*

$$\psi_m(t) = \varphi_m(pt + q), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.1)$$

ортогональна с весом $g(t) = h(pt + q)$ на сегменте $[c, d]$, который переходит в сегмент $[a, b]$ при линейном преобразовании $x = pt + q$. При этом нормы связаны следующими зависимостями:

$$\|\psi_m\| = \frac{1}{\sqrt{p}} \|\varphi_m\|, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

Доказательство. В силу (2.1.1) и определения ортогональности системы $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_c^d g(t) \psi_m(t) \psi_n(t) dt &= \frac{1}{p} \int_c^d h(pt + q) \varphi_m(pt + q) \varphi_n(pt + q) d(pt + q) = \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b h(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{p} \|\varphi_m\|^2 \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Соотношение (2.1.3) доказывает ортогональность системы $\{\psi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ на сегменте $[c, d]$.

Вводя обозначения

$$\|\psi_m\|^2 = \int_c^d g(t) \psi_m^2(t) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

из (2.1.3) при $n = m$, получим

$$\|\psi_m\|^2 = \frac{1}{p} \|\varphi_m\|^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

Отсюда, извлекая квадратный корень из обеих частей и учитывая $p > 0$, будем иметь (2.1.2). Этим теорема доказана полностью. Заметим, что для ортонормальной системы полиномов аналогичная теорема рассмотрена в [392].

Обозначая в рассматриваемом случае систему полиномов Лежандра через $\{Q_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ и учитывая, что весовая функция $h(x) = 1$, а также то, что сегмент $[0, 1]$ переходит в сегмент $[-1, 1]$ при линейном преобразовании $x = 2t - 1$, в силу доказанной выше теоремы система полиномов $\{P_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, где

$$P_m(t) = Q_m(2t - 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

является ортогональной системой на сегменте $[0, 1]$ и норма, вычисляемая по (2.1.2), будет

$$\|P_m\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|Q_m\| = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, для системы полиномов Лежандра $\{P_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ на сегменте ортогональности $[0, 1]$ будем иметь соотношение

$$\int_0^1 P_m(t) P_n(t) dt = \|P_m\|^2 \delta_{mn} = \frac{1}{2m+1} \delta_{mn}, \quad < m, n > .$$

2.1.2 Производящая функция и основные рекуррентные соотношения

Как известно (см., например, [392]), производящая функция для системы многочленов Лежандра $\{Q_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ имеет вид $\Psi(\rho, x) = 1/\sqrt{1 - 2\rho x + \rho^2}$, $0 < \rho < 1$. Учитывая $x = 2t - 1$, для системы многочленов Лежандра $\{P_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$, $0 \leq t \leq 1$, производящая функция представится в форме

$$\Psi(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \rho)^2 - 4\rho t}}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.1.5)$$

Разлагая (2.1.5) в ряд по степеням ρ , получим

$$\Psi(\rho, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t)\rho^m. \quad (2.1.6)$$

Коэффициенты $P_m(t)$ разложения (2.1.6), являясь полиномами m -й степени, представляют систему полиномов Лежандра на сегменте $[0, 1]$.

Имея производящую функцию (2.1.6), не представляет большого труда получить рекуррентные и другие, свойственные этой системе полиномов, соотношения. В самом деле, при $t = 0$ и $t = 1$, в силу (2.1.5) и (2.1.6) находим

$$\Psi(\rho, 0) = \frac{1}{1 + \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\rho^n, \quad \Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1 - \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\rho^n. \quad (2.1.7)$$

Из этих соотношений получаем соответственно

$$P_n(0) = (-1)^n, \quad P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.8)$$

В рассматриваемом случае формула Родрига (дифференциальная формула для полиномов Лежандра) [70, 165, 201, 392, 400, 514] представится в виде

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t(t-1))^n], \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.1.9)$$

Теперь получим основные рекуррентные соотношения. В этой связи продифференцируем (2.1.5) по ρ и t . Имеем

$$\Psi_{\rho}(\rho, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{-(\rho - 2t + 1)\Psi(\rho, t)}{(1 + \rho)^2 - 4\rho t}, \quad \Psi_t(\rho, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\rho\Psi(\rho, t)}{(1 + \rho)^2 - 4\rho t}. \quad (2.1.10)$$

Отсюда получаем следующие два тождества

$$\begin{aligned} [(1 + \rho)^2 - 4\rho t]\Psi_{\rho}(\rho, t) + (\rho - 2t + 1)\Psi(\rho, t) &= 0, \\ [(1 + \rho)^2 - 4\rho t]\Psi_t(\rho, t) - 2\rho\Psi(\rho, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

В силу (2.1.6) для производных Ψ_{ρ} и Ψ_t будем иметь выражения

$$\Psi_{\rho}(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(t)\rho^n, \quad \Psi_t(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t)\rho^n. \quad (2.1.12)$$

Учитывая (2.1.6) и первое соотношение (2.1.12), из первого тождества (2.1.11) найдем

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)(2t-1)P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0. \quad (2.1.13)$$

Соотношение (2.1.13) представляет рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Лежандра. Она позволяет определить последовательно все $P_n(t)$, $n > 1$, если учесть, что из (2.1.9) имеем $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 2t - 1$.

Аналогично [400] можно найти следующие рекуррентные соотношения:

$$(2t - 1)P'_n(t) = 2nP_n(t) + P'_{n-1}(t). \quad (2.1.14)$$

$$P'_n(t) = 2(2n - 1)P_{n-1}(t) + P'_{n-2}(t). \quad (2.1.15)$$

Соотношения (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.15) являются основными рекуррентными соотношениями для полиномов Лежандра на сегменте $[0, 1]$.

Найдем значения $P'_k(0)$ и $P'_k(1)$. В силу вторых соотношений (2.1.10) и (2.1.12) имеем

$$\Psi_t(\rho, t) = \frac{2\rho\Psi(\rho, t)}{(1 + \rho)^2 - 4\rho t} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(t)\rho^k.$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$\begin{aligned} \Psi'_t(\rho, 0) &= \frac{2\rho\Psi(\rho, 0)}{(1 + \rho)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(0)\rho^k, \\ \Psi'_t(\rho, 1) &= \frac{2\rho\Psi(\rho, 1)}{(1 - \rho)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(1)\rho^k. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Учитывая (см. (2.1.7))

$$\Psi(\rho, 0) = \frac{1}{1 + \rho} \quad \Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1 - \rho}, \quad 0 < \rho < 1,$$

из (2.1.16) будем иметь соотношения

$$2\rho(1 + \rho)^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(0)\rho^k, \quad 2\rho(1 - \rho)^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(1)\rho^k,$$

откуда простыми выкладками получим искомые значения

$$P'_k(0) = (-1)^{k-1}k(k + 1), \quad P'_k(1) = k(k + 1). \quad (2.1.17)$$

Следует заметить, что аналогично (2.1.17) можно получить следующие формулы для значений производных полиномов Лежандра на концах сегмента $[0, 1]$ (на концах сегмента $[-1, 1]$ они приведены в [186]):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k P_n(x^3)}{d^k x^3} \right|_{x^3=0} &= \frac{(-1)^{n-k}(n + k)!}{(n - k)!k!} = (-1)^{n-k}k!C_n^k C_{n+k}^k, \\ \left. \frac{d^k P_n(x^3)}{d^k x^3} \right|_{x^3=1} &= \frac{(n + k)!}{(n - k)!k!} = k!C_n^k C_{n+k}^k, \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

2.1.3 Дополнительные рекуррентные соотношения

Эти соотношения получаются с помощью основных рекуррентных соотношений. В самом деле, заменяя в (2.1.15) n последовательно на $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, ..., найдем

$$\begin{aligned} P'_{n-1}(t) &= 2(2n - 3)P_{n-2}(t) + P'_{n-3}(t), \quad P'_{n-2}(t) = 2(2n - 5)P_{n-3}(t) + P'_{n-4}(t), \\ P'_{n-3}(t) &= 2(2n - 7)P_{n-4}(t) + P'_{n-5}(t), \quad P'_{n-4}(t) = 2(2n - 9)P_{n-5}(t) + P'_{n-6}(t), \dots \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Учитывая соответствующие соотношения (2.1.19) в правых частях (2.1.14) и (2.1.15), получим два из искомым соотношений

$$(2t - 1)P'_n(t) = 2nP_n(t) + 2(2n - 3)P_{n-2}(t) + 2(2n - 7)P_{n-4}(t) + \dots, \quad (2.1.20)$$

$$P'_n(t) = 2(2n-1)P_{n-1}(t) + 2(2n-5)P_{n-3}(t) + 2(2n-9)P_{n-5}(t) + \dots \quad (2.1.21)$$

Складывая (2.1.20) и (2.1.21) почленно и деля на два обе части полученного соотношения, будем иметь еще одно искомое соотношение

$$tP'_n(t) = nP_n(t) + (2n-1)P_{n-1}(t) + (2n-3)P_{n-2}(t) + (2n-5)P_{n-3}(t) + \dots \quad (2.1.22)$$

Заметим, что аналогичные (2.1.21) и (2.1.22) соотношения для полиномов Лежандра на сегменте $[-1, 1]$ применял И.Н.Векуа в [68], ссылаясь на [514].

Осуществляя простые выкладки, из (2.1.13) получим соотношение

$$tP_n(t) = \frac{1}{2}P_n(t) + \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}(t) + \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}(t). \quad (2.1.23)$$

Отсюда, заменяя n последовательно на $n-1$ и $n+1$, придем к соотношениям

$$tP_{n-1}(t) = \frac{1}{2}P_{n-1}(t) + \frac{n-1}{2(2n-1)}P_{n-2}(t) + \frac{n}{2(2n-1)}P_n(t), \quad (2.1.24)$$

$$tP_{n+1}(t) = \frac{1}{2}P_{n+1}(t) + \frac{n+1}{2(2n+3)}P_n(t) + \frac{n+2}{2(2n+3)}P_{n+2}(t). \quad (2.1.25)$$

Теперь нетрудно получить очередное рекуррентное соотношение. Действительно, умножая обе части (2.1.23) на t и учитывая в правой части полученного соотношения (2.1.23)–(2.1.25), получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} t^2P_n(t) &= \frac{1}{4} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}(t) + \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}(t) + \\ &+ \frac{3n^2+3n-2}{2(2n-1)(2n+3)}P_n(t) + \frac{n+1}{2(2n+1)}P_{n+1}(t) + \frac{1}{4} \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}(t). \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Аналогично (2.1.26), осуществляя простые выкладки, будем иметь рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} t^3P_n(t) &= \frac{(n-2)(n-1)n}{8(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-3}(t) + \frac{3(n-1)n}{8(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}(t) + \\ &+ \frac{3n(5n^2-11)}{8(2n-3)(2n+1)(2n+3)}P_{n-1}(t) + \frac{5n^2+5n-3}{4(2n-1)(2n+3)}P_n(t) + \\ &+ \frac{3(n+1)(5n^2+10n-6)}{8(2n-1)(2n+1)(2n+5)}P_{n+1}(t) + \frac{3(n+1)(n+2)}{8(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}(t) + \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8(2n+1)(2n+3)(2n+5)}P_{n+3}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^4P_n(t) &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{16(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-4}(t) + \frac{(n-2)(n-1)n}{4(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-3}(t) + \\ &+ \frac{(n-1)n(7n^2-7n-26)}{4(2n-5)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_{n-2}(t) + \frac{n(23n^2+29n-17)}{16(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_{n-1}(t) + \\ &+ \frac{35n^4+70n^3-115n^2-150n+72}{8(2n-3)(2n-1)(2n+3)(2n+5)}P_n(t) + \frac{(n+1)(7n^2+14n-8)}{4(2n-1)(2n+1)(2n+5)}P_{n+1}(t) + \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)(7n^2+21n-12)}{4(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+7)}P_{n+2}(t) + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4(2n+1)(2n+3)(2n+5)}P_{n+3}(t) + \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{16(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}P_{n+4}(t). \end{aligned}$$

Найдем еще рекуррентное соотношение для $t^2 P'_n(t)$. С этой целью из (2.1.14) определим $tP'_n(t)$. Имеем

$$tP'_n(t) = nP_n(t) + \frac{1}{2}[P'_{n-1}(t) + P'_n(t)]. \quad (2.1.27)$$

Теперь в (2.1.27) заменяя n на $n - 1$, получим

$$tP'_{n-1}(t) = (n - 1)P_{n-1}(t) + \frac{1}{2}[P'_{n-2}(t) + P'_{n-1}(t)]. \quad (2.1.28)$$

Умножая обе части (2.1.27) на t , найдем

$$t^2 P'_n(t) = ntP_n(t) + \frac{1}{2}t[P'_{n-1}(t) + P'_n(t)]. \quad (2.1.29)$$

Складывая (2.1.27) и (2.1.28) почленно, придем к соотношению

$$\begin{aligned} t[P'_n(t) + P'_{n-1}(t)] &= (n - 1)P_{n-1}(t) + nP_n(t) + \frac{1}{2}[P'_{n-1}(t) + P'_n(t)] + \\ &+ \frac{1}{2}[P'_{n-2}(t) + P'_{n-1}(t)]. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Далее, учитывая (2.1.23) и (2.1.30) в (2.1.29), получим

$$\begin{aligned} t^2 P'_n(t) &= \frac{3n^2 - n - 1}{2(2n + 1)}P_{n-1}(t) + nP_n(t) + \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}P_{n+1}(t) + \frac{1}{4}[P'_{n-1}(t) + P'_n(t)] + \\ &+ \frac{1}{4}[P'_{n-2}(t) + P'_{n-1}(t)]. \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Нетрудно заметить, что из (2.1.21) заменяя n сперва на $n - 1$, а потом на $n - 2$, следуют соотношения

$$P'_{n-1}(t) = 2(2n - 3)P_{n-2}(t) + 2(2n - 7)P_{n-4}(t) + 2(2n - 11)P_{n-6}(t) + \dots \quad (2.1.32)$$

$$P'_{n-2}(t) = 2(2n - 5)P_{n-3}(t) + 2(2n - 9)P_{n-5}(t) + 2(2n - 13)P_{n-7}(t) + \dots \quad (2.1.33)$$

Складывая (2.1.21) и (2.1.32) почленно и деля на 4 обе части полученного соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[P'_{n-1}(t) + P'_n(t)] &= \frac{1}{2}[(2n - 1)P_{n-1}(t) + (2n - 3)P_{n-2}(t) + (2n - 5)P_{n-3}(t) + \\ &+ (2n - 7)P_{n-4}(t) + (2n - 9)P_{n-5}(t) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Аналогично (2.1.34) из (2.1.32) и (2.1.33) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[P'_{n-2}(t) + P'_{n-1}(t)] &= \frac{1}{2}[(2n - 3)P_{n-2}(t) + (2n - 5)P_{n-3}(t) + (2n - 7)P_{n-4}(t) + \\ &+ (2n - 9)P_{n-5}(t) + (2n - 11)P_{n-6}(t) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Учитывая (2.1.34) и (2.1.35), из (2.1.31) получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} t^2 P'_n(t) &= \frac{7n^2 - n - 2}{2(2n + 1)}P_{n-1}(t) + nP_n(t) + \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}P_{n+1}(t) + (2n - 3)P_{n-2}(t) + \\ &+ (2n - 5)P_{n-3}(t) + (2n - 7)P_{n-4}(t) + (2n - 9)P_{n-5}(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Представляет интерес нахождение рекуррентного соотношения и для $P''(t)$. В этой связи продифференцируем (2.1.15). Имеем

$$P''_n(t) = 2(2n - 1)P'_{n-1}(t) + P''_{n-2}(t). \quad (2.1.37)$$

Учитывая первое соотношение (2.1.19), из (2.1.37) получим

$$P_n''(t) = 4(2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + 2(2n-1)P_{n-3}'(t) + P_{n-2}''(t). \quad (2.1.38)$$

Заменяя в (2.1.37) n на $n-2$, найдем

$$P_{n-2}''(t) = 2(2n-5)P_{n-3}'(t) + P_{n-4}''(t). \quad (2.1.39)$$

В силу (2.1.39) из (2.1.38) имеем

$$P_n''(t) = 4(2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + 4(2n-3)P_{n-3}'(t) + P_{n-4}''(t). \quad (2.1.40)$$

После замены в (2.1.39) n на $n-2$ получим

$$P_{n-4}''(t) = 2(2n-9)P_{n-5}'(t) + P_{n-6}''(t). \quad (2.1.41)$$

Далее учитывая третье соотношение (2.1.19) и (2.1.41) в (2.1.40), придем к соотношению

$$P_n''(t) = 4(2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + 8(2n-3)(2n-7)P_{n-4}(t) + 6(2n-5)P_{n-5}'(t) + P_{n-6}''(t). \quad (2.1.42)$$

Аналогично, заменяя в (2.1.41) n на $n-2$, будем иметь

$$P_{n-6}''(t) = 2(2n-13)P_{n-7}'(t) + P_{n-8}''(t). \quad (2.1.43)$$

Тогда из (2.1.42) с учетом пятого соотношения (2.1.19) и (2.1.43) имеем

$$P_n''(t) = 4(2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + 8(2n-3)(2n-7)P_{n-4}(t) + 12(2n-5)(2n-11)P_{n-6}(t) + 8(2n-7)P_{n-7}'(t) + P_{n-8}''(t).$$

Продолжая этот процесс, окончательно искомое соотношение можно представить в виде

$$P_n''(t) = 4[(2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + 2(2n-3)(2n-7)P_{n-4}(t) + 3(2n-5)(2n-11)P_{n-6}(t) + 4(2n-7)(2n-15)P_{n-8}(t) + \dots]. \quad (2.1.44)$$

Теперь найдем рекуррентное соотношение для $tP_n''(t)$. В связи с этим продифференцируем (2.1.22) по t . Будем иметь

$$P_n'(t) + tP_n''(t) = nP_n'(t) + (2n-1)P_{n-1}'(t) + (2n-3)P_{n-2}'(t) + (2n-5)P_{n-3}'(t) + \dots$$

Отсюда получаем

$$tP_n''(t) = (n-1)P_n'(t) + (2n-1)P_{n-1}'(t) + (2n-3)P_{n-2}'(t) + (2n-5)P_{n-3}'(t) + \dots \quad (2.1.45)$$

Учитывая выражения для $P_n'(t)$, $P_{n-1}'(t)$, $P_{n-2}'(t)$, \dots , в силу (2.1.21) в (2.1.45) приходим к искомому соотношению

$$tP_n''(t) = 2[(n-1)(2n-1)P_{n-1}(t) + (2n-1)(2n-3)P_{n-2}(t) + (3n-4)(2n-5)P_{n-3}(t) + (4n-6)(2n-7)P_{n-4}(t) + (5n-11)(2n-9)P_{n-5}(t) + (6n-15)(2n-11)P_{n-6}(t) + (7n-22)(2n-13)P_{n-7}(t) + (8n-28)(2n-15)P_{n-8}(t) + (9n-37)(2n-17)P_{n-9}(t) + \dots]. \quad (2.1.46)$$

Не представляет большого труда получить рекуррентное соотношение и для $t^2P_n''(t)$. В самом деле, умножая обе части (2.1.45) на t , найдем

$$t^2P_n''(t) = (n-1)tP_n'(t) + (2n-1)tP_{n-1}'(t) + (2n-3)tP_{n-2}'(t) + (2n-5)tP_{n-3}'(t) + \dots \quad (2.1.47)$$

Далее, подставляя определяемые с помощью (2.1.22) выражения для $tP'_n(t)$, $tP'_{n-1}(t)$, $tP'_{n-2}(t)$, \dots в (2.1.47), получим искомое рекуррентное соотношение в виде

$$\begin{aligned} t^2 P''_n(t) = & n(n-1)P_n(t) + 2[(n-1)(2n-1)P_{n-1}(t) + (2n-2)(2n-3)P_{n-2}(t) + \\ & + (3n-4)(2n-5)P_{n-3}(t) + (4n-7)(2n-7)P_{n-4}(t) + (5n-11)(2n-9)P_{n-5}(t) + \\ & + (6n-16)(2n-11)P_{n-6}(t) + (7n-22)(2n-13)P_{n-7}(t) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Следует отметить, что в правых частях (2.1.46) и (2.1.48) первый множитель коэффициента при $P_{n-k}(t)$, $\forall k \geq 3$, получается путем сложения множителей коэффициента при $P_{n-(k-2)}(t)$ и -2 , а второй множитель коэффициента при $P_{n-k}(t)$, $k \geq 1$, представляет квадрат обратной величины нормы $\|P_{n-k}\|$.

2.2 Моменты скалярной функции и их производных

Прежде всего сформулируем важные теоремы, которыми будем пользоваться в дальнейшем, считая, что применяемые ниже функции удовлетворяют условиям этих теорем.

Теорема 2.2.1. К. Вейерштрасса. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $Q(x)$, что при всех $x \in [a, b]$ [233]

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.2.2. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, 1]$ ($[-1, 1]$), то она разлагается в ряд Фурье-Лежандра, сходящийся равномерно на этом сегменте [392].

Теорема 2.2.3. Джексона. Если производные относительно x^3 от $f(x', x^3)$ представляют функции ограниченной вариации в промежутке $[0, 1]$ равномерно относительно точки $x' = (x^1, x^2) \in \overset{(-)}{S} \cup \overset{(-)}{\partial S}$, то имеем неравенства

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x^2, x^2)| &< Mn^{-\frac{3}{2}}, \quad n \geq 1, \quad (x^1, x^2) \in \overset{(-)}{S} \cup \overset{(-)}{\partial S}, \\ |R_{n+1}(x', x^3)| &= |f(x', x^3) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x')P_k(x^3)| < Mn^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где M – положительная постоянная, которая от n не зависит [68].

2.2.1 Моменты скалярной функции

Рассматривается скалярная функция $f(x^1, x^2, x^3)$, зависящая от координат x^1, x^2, x^3 области тонкого тела, параметризация которой осуществляется соотношением (1.1.1). Поэтому с целью сокращения письма часто вместо $f(x^1, x^2, x^3)$ будем писать $f(x', x^3)$, где, очевидно, $\forall x^3 \in [0, 1]$. Кроме того, будем предполагать, что рассматриваемые функции в достаточной степени гладкие, например, $f(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$. Тогда в силу теоремы 2.2.2 функция $f(x', x^3)$ относительно поперечной координаты $x^3 \in [0, 1]$ для каждой фиксированной точки $x' = (x^1, x^2) \in \overset{(-)}{S}$ можно разлагать в ряд по системе полиномов Лежандра $[P_k(x^3)]_{k=0}^\infty$. Разложение функции имеет вид [68, 201, 392]

$$f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x')P_k(x^3), \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad x^3 \in [0, 1], \quad (2.2.1)$$

где

$$M(f) \equiv f^{(k)}(x') = (2k+1) \int_0^1 f(x', x^3)P_k(x^3)dx^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

Коэффициент $f^{(k)}(x')$ ряда (2.2.1) с номером k еще называется *моментом функции* $f(x', x^3)$ *порядка* k .

В дальнейшем, рассматривая ряды вида (2.2.1), будем всегда предполагать, что они равномерно сходятся в замкнутой области $V \cup \partial V$, где V — область, занимаемая оболочкой, а ∂V — ее граница.

В силу (2.1.8) на лицевых поверхностях оболочечной области, т.е. при $x^3 = 0$ и $x^3 = 1$ из (2.2.1) будем иметь равномерно сходящиеся ряды

$$f^{(-)} = f(x', 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(x'), \quad f^{(+)} = f(x', 1) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x'), \quad x' \in S \cup \partial S. \quad (2.2.3)$$

2.2.2 Моменты производных $\partial_i f$ и $\partial_i \partial_j f$

Найдем выражения моментов производных $\partial_i f = \partial f / \partial x^i$. Для этого, продифференцируя почленно ряд (2.2.1) относительно x^I и x^3 , получим

$$\partial_I f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_I f^{(k)}(x') P_k(x^3), \quad \partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x') P'_k(x^3), \quad \partial_3 P_k(x^3) = P'_k(x^3). \quad (2.2.4)$$

Учитывая (2.1.21), из второго соотношения (2.2.4) найдем

$$\partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_i f^{(k)}(x') 2[(2k-1)P_{k-1}(x^3) + (2k-5)P_{k-3}(x^3) + (2k-9)P_{k-5}(x^3) + \dots].$$

Отсюда в силу формул

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) f^{(k)} P_{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) f^{(k+1)} P_k, & \sum_{k=0}^{\infty} (2k-5) f^{(k)} P_{k-3} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) f^{(k+3)} P_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (2k-9) f^{(k)} P_{k-5} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) f^{(k+5)} P_k, & \dots, \end{aligned}$$

приходим к соотношению

$$\partial_3 f(x', x^3) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2k+1) P_k^{(k+2n+1)} f = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k \left(f^{(k+1)} + f^{(k+3)} + f^{(k+5)} + \dots \right). \quad (2.2.5)$$

Вводя обозначение для моментов производных $\partial_i f$

$$M(\partial_i f) = (2k+1) \int_0^1 \partial_i f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3, \quad (2.2.6)$$

в силу первого соотношения (2.2.4) и (2.2.5) моменты (2.2.6) можно представить в виде

$$M(\partial_i f) = (2k+1) \int_0^1 \partial_i f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = \begin{cases} \partial_I f^{(k)}(x'), & \text{если } i = I, \\ f^{(k)}(x'), & \text{если } i = 3, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

где

$$f^{(k)}(x') = 2(2k+1) \left(f^{(k+1)} + f^{(k+3)} + f^{(k+5)} + \dots \right) = 2(2k+1) \sum_{m=0}^{\infty} f^{(k+2m+1)}. \quad (2.2.8)$$

Следует заметить, что (2.2.7) при $i = 3$ можно получить еще иным путем, применяя к (2.2.7) при $i = 3$ правило интегрирования по частям, а также рекуррентное соотношение (2.1.21). Этот способ имеет то преимущество, что не требует допущения почленной

дифференцируемости ряда (2.2.1). Таким путем можно также в несколько иной форме выразить моменты производной $\partial_3 f(x', x^3)$.

В самом деле, используя правило интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} (2k+1) \int_0^1 \partial_3 f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 &= (2k+1) \int_0^1 \{ \partial_3 [f P_k] - f P_k' \} dx^3 = \\ &= (2k+1) [f(x', x^3) P_k(x^3)] \Big|_0^1 - (2k+1) \int_0^1 f(x', x^3) P_k'(x^3) dx^3. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

С помощью (2.1.8) и (2.2.3) первый член в правой части представится в виде

$$(2k+1) [f(x', x^3) P_k(x^3)] \Big|_0^1 = (2k+1) [f^{(+)}(x') - (-1)^k f^{(-)}(x')]. \quad (2.2.10)$$

Для второго члена в правой части (2.2.9) с учетом (2.1.21) имеем

$$\begin{aligned} (2k+1) \int_0^1 f(x', x^3) P_k'(x^3) dx^3 &= 2(2k+1) [(2k-1) \int_0^1 f P_{k-1} dx^3 + \\ &+ (2k-5) \int_0^1 f P_{k-3} dx^3 + (2k-9) \int_0^1 f P_{k-5} dx^3 + \dots] = \\ &= 2(2k+1) [f^{(k-1)} + f^{(k-3)} + f^{(k-5)} + \dots]. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Учитывая (2.2.10) и (2.2.11) в (2.2.9), будем иметь

$$(2k+1) \int_0^1 \partial_3 f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1) [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \underline{f}^{(k)'}, \quad (2.2.12)$$

где введено обозначение

$$\underline{f}^{(k)'}(x') = 2(2k+1) [f^{(k-1)}(x') + f^{(k-3)}(x') + \dots] = (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] f^{(p)}(x'). \quad (2.2.13)$$

Таким образом, моменты производных $\partial_i f$ в силу (2.2.12) еще можно представить в форме

$$M(\partial_i f) = \begin{cases} \partial_I f^{(k)}(x'), & \text{если } i = I, \\ (2k+1) [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \underline{f}^{(k)'}, & \text{если } i = 3. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Соотношения (2.2.14) удобно использовать в тех случаях, когда $f^{(-)}$ и $f^{(+)}$ заданы на поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ соответственно.

Найдем выражения моментов k -го порядка вторых производных $\partial_i \partial_j f(x', x^3)$. С этой целью рассмотрим моменты производных $\partial_I \partial_J f(x', x^3)$, $\partial_3 \partial_I f(x', x^3) = \partial_I \partial_3 f(x', x^3)$ и $\partial_3 \partial_3 f(x', x^3)$ по отдельности. Дифференцируя почленно ряд (2.2.1) сперва относительно x^J , а потом x^I , будем иметь

$$\partial_I \partial_J f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_I \partial_J f^{(k)}(x') P_k(x^3). \quad (2.2.15)$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$\partial_I \partial_J f^{(k)}(x') = (2k+1) \int_0^1 \partial_I \partial_J f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3. \quad (2.2.16)$$

Аналогично (2.2.16), дифференцируя почленно ряд (2.2.1) сперва относительно x^I , а потом относительно x^3 или наоборот, сперва по x^3 , а потом по x^I найдем

$$\partial_3 \partial_I f(x', x^3) = \partial_I \partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_I f^{(k)}(x') P'_k(x^3).$$

Учитывая в этом соотношении (2.1.21), аналогично (2.2.5) с учетом (2.2.8) придем к соотношению

$$\partial_3 \partial_I f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(2k+1) P_k(x^3) \sum_{m=0}^{\infty} \partial_I f^{(k+2m+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_I f^{(k)}(x') P_k(x^3). \quad (2.2.17)$$

Теперь, дифференцируя почленно ряд (2.2.1) два раза относительно x^3 , будем иметь

$$\partial_3 \partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x') P''_k(x^3). \quad (2.2.18)$$

Учитывая рекуррентное соотношение (2.1.44), из (2.2.18) получим

$$\begin{aligned} \partial_3 \partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x') & 4[(2k-1)(2k-3)P_{k-2}(x^3) + 2(2k-3)(2k-7)P_{k-4}(x^3) + \\ & + 3(2k-5)(2k-11)P_{k-6}(x^3) + 4(2k-7)(2k-15)P_{k-8}(x^3) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1)(2k-3) f^{(k)} P_{k-2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3)(2k+1) f^{(k+2)} P_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (2k-3)(2k-7) f^{(k)} P_{k-4} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+5)(2k+1) f^{(k+4)} P_k, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (2k-5)(2k-11) f^{(k)} P_{k-6} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+7)(2k+1) f^{(k+6)} P_k, \dots \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Тогда с учетом (2.2.20) соотношение (2.2.19) представится в виде

$$\begin{aligned} \partial_3 \partial_3 f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} 4(2k+1) P_k(x^3) & [(2k+3) f^{(k+2)}(x') + 2(2k+5) f^{(k+4)}(x') + \\ & + 3(2k+7) f^{(k+6)}(x') + 4(2k+9) f^{(k+8)}(x') + \dots]. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Вводя обозначение $M^{(k)}(\partial_i \partial_j f)$ для момента порядка k вторых производных $\partial_I \partial_j f$, в силу (2.2.15), (2.2.17) и (2.2.21) будем иметь

$$M^{(k)}(\partial_i \partial_j f) = \begin{cases} \partial_I \partial_J f^{(k)}(x'), & \text{если } i = I, j = J, \\ \partial_I f^{(k)}(x'), & \text{если } i = I, j = 3, \\ f^{(k)}(x''), & \text{если } i = j = 3, \end{cases} \quad (2.2.22)$$

где

$$f^{(k)}(x'') = 4(2k+1) [(2k+3) f^{(k+2)} + 2(2k+5) f^{(k+4)} + 3(2k+7) f^{(k+6)} + \dots]. \quad (2.2.23)$$

Следует заметить, что (2.2.22) аналогично (2.2.14) можно представить в другой форме. В самом деле, на основании (2.2.12) (или (2.2.14)) будем иметь

$$M^{(k)}(\partial_I \partial_3 f) = \partial_I M^{(k)}(\partial_3 f) = (2k+1) \partial_I [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \partial_I \underline{f}^{(k)}. \quad (2.2.24)$$

Применяя правило интегрирования по частям, из (2.2.22) получим

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\partial_3 \partial_3 f) &= (2k+1) \int_0^1 \partial_3 \partial_3 f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1) \int_0^1 \partial_3 [\partial_3 f P_k - f P_k'] dx^3 + \\ &+ (2k+1) \int_0^1 f P_k'' dx^3 = (2k+1) [\partial_3 f P_k - f P_k'] \Big|_0^1 + (2k+1) \int_0^1 f P_k'' dx^3. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

В силу (2.1.8) и (2.1.17) первый член в правой части (2.2.25) представится в виде

$$(2k+1) [\partial_3 f P_k - f P_k'] \Big|_0^1 = (2k+1) [\partial_3^{(+)} f - (-1)^k \partial_3^{(-)} f - k(k+1) (f^{(+)} + (-1)^k f^{(-)})]. \quad (2.2.26)$$

Здесь $\partial_3^{(-)} f = \partial_3 f(x', x^3) \Big|_{x^3=0}$, $\partial_3^{(+)} f = \partial_3 f(x', x^3) \Big|_{x^3=1}$.

На основании (2.1.44) второй член в правой части (2.2.25) приводится к виду

$$(2k+1) \int_0^1 f(x', x^3) P_k''(x^3) dx^3 = 4(2k+1) [(2k-1) f^{(k-2)} + 2(2k-3) f^{(k-4)} + \dots]. \quad (2.2.27)$$

В силу (2.2.26) и (2.2.27) соотношение (2.2.25) представится в форме

$$M^{(k)}(\partial_3 \partial_3 f) = \underline{f}''^{(k)} = (2k+1) [\partial_3^{(+)} f - (-1)^k \partial_3^{(-)} f - k(k+1) (f^{(+)} + (-1)^k f^{(-)})] + \underline{f}''^{(k)}, \quad (2.2.28)$$

где введено обозначение

$$\underline{f}''^{(k)} = 4(2k+1) [(2k-1) f^{(k-2)} + 2(2k-3) f^{(k-4)} + 3(2k-5) f^{(k-6)} + \dots]. \quad (2.2.29)$$

Теперь (2.2.22) с помощью (2.2.24) и (2.2.28) можно придать искомый вид

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\partial_i \partial_j f) &= (2k+1) \int_0^1 \partial_i \partial_j f(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = \\ &= \begin{cases} \partial_I \partial_J \underline{f}^{(k)}(x'), & \text{если } i = I, j = J \\ (2k+1) \partial_I [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \partial_I \underline{f}'^{(k)}, & \text{если } i = I, j = 3 \\ (2k+1) [\partial_3^{(+)} f - (-1)^k \partial_3^{(-)} f - \\ - k(k+1) (f^{(+)} + (-1)^k f^{(-)})] + \underline{f}''^{(k)}, & \text{если } i = j = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Следовательно, соотношение (2.2.30) удобно использовать в тех случаях, когда $\partial_3^{(-)} f$, $f^{(-)}$ и $\partial_3^{(+)} f$, $f^{(+)}$ заданы на поверхностях S и S соответственно.

Заметим, что приведенных выше формулах в качестве $f(x', x^3)$ можно рассматривать любое тензорное поле (поле вектора перемещений, поле тензора напряжений и др.).

2.3 Производящая функция и основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева первого рода

Как известно [392], одна из производящих функций для системы полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$ имеет вид

$$\Psi(r, x) = \frac{1 - rx}{1 - 2rx + r^2}, \quad 0 < r < 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.3.1)$$

Разлагая (2.3.1) в ряд по степеням r , имеем

$$\Psi(r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)r^k. \quad (2.3.2)$$

Коэффициенты $T_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, разложения (2.3.2) являются полиномами k -й степени. Они представляют систему полиномов Чебышева I рода на сегменте $[-1, 1]$. Эти полиномы определяются также формулой [70, 124, 165, 201, 305, 392]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

Основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева I рода на сегменте $[-1, 1]$ имеют вид

$$\begin{aligned} 2xT_n(x) &= T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x), \quad n \geq 1, \\ 2xT'_n(x) &= \frac{n}{n-1}T'_{n-1}(x) + \frac{n}{n+1}T'_{n+1}(x), \quad n > 1, \\ T'_n(x) &= 2nT_{n-1}(x) + \frac{n}{n-2}T'_{n-2}(x), \quad n > 2. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Нетрудно заметить, что, из (2.3.3) находим $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Тогда в силу первого соотношения (2.3.4) их можно вычислять последовательно. Имеем

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \quad \dots \end{aligned}$$

Утверждение 1. *Многочлены (2.3.3) ортогональны на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией [392]*

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (2.3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_{nm} = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.3.6)$$

Сделаем в (2.3.6) замену переменной $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Тогда на основании (2.3.3) получаем $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, а интеграл (2.3.6) приводится к виду

$$\begin{aligned} J_{nm} &= \int_{\pi}^0 T_n(\cos \theta)T_m(\cos \theta) \frac{-\sin \theta}{|\sin \theta|} d\theta = \int_0^{\pi} T_n(\cos \theta)T_m(\cos \theta) d\theta = \\ &= \|T_n\|^2 \delta_{mn} = \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

что и доказывает ортогональность полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$.

Следовательно, ортонормированные многочлены Чебышева первого рода выражаются через многочлены (2.3.3) по формулам

$$\hat{T}_n(x) = \frac{1}{\|T_n\|} T_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.8)$$

где в силу (2.3.7)

$$\|T_0\| = \sqrt{\pi}, \quad \|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (2.3.9)$$

Нетрудно заметить, что при линейном преобразовании $x = 2t - 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, при котором сегмент $[0, 1]$ переходит в сегмент $[-1, 1]$, производящая функция (2.3.1) получит вид

$$\Psi^*(r, t) \equiv \Psi(r, 2t - 1) = \frac{1 + r - 2rt}{(1 + r)^2 - 4rt}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.3.10)$$

Аналогично (2.3.2), разлагая (2.3.10) в ряд по степеням относительно r , получим

$$\Psi^*(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^*(t) r^k. \quad (2.3.11)$$

Коэффициенты $T_k^*(t)$, $k \in \mathbb{N}_0$, разложения (2.3.11), являясь полиномами k -й степени, представляют систему полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[0, 1]$. С другой стороны при указанном выше линейном преобразовании из (2.3.3) будем иметь

$$T_n^*(t) = T_n(2t - 1) = \cos[n \arccos(2t - 1)], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.12)$$

В силу теоремы (о линейном преобразовании сегмента ортогональности) [392] система полиномов (2.3.12) ортогональна на сегменте $[0, 1]$, а весовая функция на основании (2.3.5) представится в виде

$$h^*(t) = h(2t - 1) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2t - 1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{t(1 - t)}}, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.3.13)$$

Тогда соотношение (2.3.7) для полиномов $\{T_k^*(t)\}_{k=0}^{\infty}$, которые еще называются смещенными полиномами Чебышева первого рода, можно записать в форме

$$\begin{aligned} J_{nm}^* &= (T_n^*, T_m^*) = \int_0^1 T_n^*(t) T_m^*(t) h^*(t) dt = \int_0^1 \frac{T_n^*(t) T_m^*(t)}{2\sqrt{t(1-t)}} dt = \\ &= \int_{\pi}^0 T_n^*(\cos \theta^*) T_m^*(\cos \theta^*) \frac{-\frac{1}{2} \sin \theta^*}{|\sin \theta^*|} d\theta^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} T_n^*(\cos \theta^*) T_m^*(\cos \theta^*) d\theta^* = \\ &= \|T_n^*\|^2 \delta_{nm} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(n\theta^*) \cos(m\theta^*) d\theta^* = \frac{1}{2} \|T_n\|^2 \delta_{nm} = \frac{1}{2} J_{nm}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

где

$$\theta^* \equiv \arccos(2t - 1), \quad 2t = 1 + \cos \theta^*, \quad dt = -\frac{1}{2} \sin \theta^* d\theta^*.$$

В силу (2.3.7) из (2.3.14) имеем

$$J_{nm}^* = \|T_n^*\|^2 \delta_{nm} = \frac{1}{2} \|T_n\|^2 \delta_{nm} = \frac{1}{2} J_{nm} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{4}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Следовательно, из (2.3.15) аналогично (2.3.9) для норм смещенных полиномов Чебышева первого рода будем иметь формулы

$$\|T_0^*\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \|T_n^*\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \geq 1, \quad (2.3.16)$$

а ортонормированные смещенные многочлены Чебышева первого рода аналогично (2.3.8) представляются в виде

$$\hat{T}_n^*(t) = \frac{1}{\|T_n^*\|} T_n^*(t), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.17)$$

Теперь получим основные рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Чебышева первого рода. Продифференцируем по t соотношение

$$T_n^*(t) = T_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x = 2t - 1. \quad (2.3.18)$$

Имеем

$$T_n'(x) = 2^{-1}T_n^{*'}(t), \quad T_n^{(k)}(x) = 2^{-k}T_n^{*(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.19)$$

где, очевидно, второе соотношение (2.3.19) получим, если найдем производную k -го порядка от (2.3.18).

Учитывая $x = 2t - 1$ в первом соотношении (2.3.4), а первое соотношение (2.3.19) в последних двух соотношениях (2.3.4), получим искомые рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} 4tT_n^*(t) &= T_{n-1}^*(t) + 2T_n^*(t) + T_{n+1}^*(t), \quad n \geq 1, \\ 4tT_n^{*'}(t) &= \frac{n}{n-1}T_{n-1}^{*'}(t) + 2T_n^{*'}(t) + \frac{n}{n+1}T_{n+1}^{*'}(t), \quad n > 1, \\ T_n^{*'}(t) &= 4nT_{n-1}^*(t) + \frac{n}{n-2}T_{n-2}^{*'}(t), \quad n > 2. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

2.4 Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[0, 1]$

Получены некоторые интересные для нас рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева I рода на сегменте $[0, 1]$. Подобные рекуррентные соотношения на сегменте $[-1, 1]$, которые можно получить совершенно аналогично, исходя из основных рекуррентных соотношений на сегменте $[-1, 1]$ (2.3.4), выписываются без доказательства.

Искомые рекуррентные соотношения нетрудно получить, используя основные рекуррентные соотношения (2.3.20). В самом деле, умножая первое соотношение (2.3.20) на $4t$ будем иметь

$$4^2t^2T_n^*(t) = 4tT_{n-1}^*(t) + 2 \cdot 4tT_n^*t + 4tT_{n+1}^*(t), \quad n \geq 1. \quad (2.4.1)$$

Далее заменяя в первом соотношении (2.3.20) n на $n - 1$ и $n + 1$, получим

$$\begin{aligned} 4tT_{n-1}^*(t) &= T_{n-2}^*(t) + 2T_{n-1}^*t + T_n^*(t), \quad n \geq 2, \\ 4tT_{n+1}^*(t) &= T_n^*(t) + 2T_{n+1}^*t + T_{n+2}^*(t), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Учитывая первое соотношение (2.3.20) и (2.4.2) в правой части (2.4.1), получим следующее рекуррентное соотношение:

$$2^4t^2T_n^*(t) = \sum_{m=0}^4 C_4^m T_{n+m-2}^*(t), \quad n \geq 2. \quad (2.4.3)$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что имеет место общая формула

$$2^{2s}t^s T_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p T_{n+p-s}^*(t), \quad n - s \geq 0. \quad (2.4.4)$$

Аналогичное (2.4.4) рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$ представляется в виде

$$2^s x^s T_n(x) = \sum_{p=0}^s C_s^p T_{n-s+2p}(x), \quad n \geq s. \quad (2.4.5)$$

Легко получить рекуррентное соотношение для $T_n^{*'}(t)$. В самом деле, заменяя n на $n - 2$ в третьем соотношении (2.3.20), получим

$$T_{n-2}^{*'}(t) = 4(n-2)T_{n-3}^*(t) + \frac{n-2}{n-4}T_{n-4}^{*'}(t). \quad (2.4.6)$$

Учитывая (2.4.6) в третьем соотношении (2.3.20), найдем

$$T_n^{*'}(t) = 4n[T_{n-1}^*(t) + T_{n-3}^*t] + \frac{n}{n-4}T_{n-4}^{*'}(t). \quad (2.4.7)$$

Теперь меняя n на $n-2$ в (2.4.6), приходим к соотношению

$$T_{n-4}^{*'}(t) = 4(n-4)T_{n-5}^*(t) + \frac{n-4}{n-6}T_{n-6}^{*'}(t),$$

с помощью которого (2.4.7) можно записать в форме

$$T_n^{*'}(t) = 4n[T_{n-1}^*(t) + T_{n-3}^*t + T_{n-5}^*t] + \frac{n}{n-6}T_{n-6}^{*'}(t).$$

Продолжая этот процесс, получим соотношение

$$T_n^{*'}(t) = 4n[T_{n-1}^*(t) + T_{n-3}^*t + T_{n-5}^*t + \dots + T_{n-(2k-1)}^*t] + \frac{n}{n-2k}T_{n-2k}^{*'}(t), \quad k < \left[\frac{n}{2}\right],$$

где $[n/2]$ обозначает целую часть числа $n/2$. Запишем последнее соотношение в более краткой форме. Имеем

$$T_n^{*'}(t) = 4n \sum_{p=1}^k T_{n-2p+1}^*(t) + \frac{n}{n-2k}T_{n-2k}^{*'}(t), \quad k < \left[\frac{n}{2}\right]. \quad (2.4.8)$$

Рассмотрим два случая: $n = 2m$ и $n = 2m + 1$. При $n = 2m$ из (2.4.8) получаем

$$\begin{aligned} T_{2m}^{*'}(t) &= 4(2m)[T_{2m-1}^*(t) + T_{2m-3}^*(t) + \dots + T_{2m-2k+1}^*(t)] + \frac{2m}{2m-2k}T_{2m-2k}^{*'}(t) = \\ &= 4(2m)[T_{2m-1}^*(t) + T_{2m-3}^*(t) + \dots + T_5^*(t) + T_3^*t] + \frac{2m}{2}T_2^{*'}(t). \end{aligned}$$

Заметим, что $T_2^*(t) = 2(2t-1)^2 - 1$, тогда $T_2^{*'}(t) = 8(2t-1) = 8T_1^*(t)$. Учитывая это в последнем соотношении, получим

$$T_{2m}^{*'}(t) = 4(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k-1}^*(t) = 4(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2k+1}^*(t). \quad (2.4.9)$$

Аналогично при $n = 2m + 1$ из (2.4.8) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} T_{2m+1}^{*'}(t) &= 4(2m+1) \left[\sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k}^*(t) + \frac{1}{2}T_0^*(t) \right] = \\ &= 4(2m+1) \left[\frac{1}{2}T_0^*(t) + \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k}^*(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Соотношения (2.4.9) и (2.4.10) являются искомыми рекуррентными соотношениями.

Заметим, что в силу (2.3.12) имеем

$$T_n^*(0) = \cos(n\pi) = (-1)^n, \quad T_n^*(1) = \cos(n\theta) = 1, \quad (2.4.11)$$

а на основании (2.4.9) и (2.4.10) с учетом (2.4.11) получим

$$T_n^{*'}(0) = (-1)^{n+1}2n^2, \quad T_n^{*'}(1) = 2n^2. \quad (2.4.12)$$

Теперь прежде чем найти другие рекуррентные соотношения, докажем следующую лемму [392].

Аналогично (2.4.17) при $n = 2m + 1$ умножая (2.4.10) на $2^{2s}t^s$ и учитывая (2.4.4), получим искомое рекуррентное соотношение в форме

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^s T_{2m+1}^{*'}(t) &= 4(2m+1) \left[\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-s}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p T_{2m-2k+p-s}^*(t) + 2^{2s-1}t^s T_0^*(t) \right] = \\ &= 4(2m+1) \left[2^{2s-1}t^s T_0^*(t) + \sum_{k=\lfloor 1+\frac{s}{2} \rfloor}^m \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p T_{2k+p-s}^*(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Получим рекуррентное соотношение для $T_n^{*''}(t)$. С этой целью воспользуемся третьим соотношением (2.3.20). Дифференцируя его, найдем

$$T_n^{*''}(t) = 4nT_{n-1}^{*'}(t) + \frac{n}{n-2}T_{n-2}^{*''}(t), \quad n > 2. \quad (2.4.19)$$

Меняя индекс n в третьем соотношении (2.3.20) на $n-1$, а в (2.4.19) на $n-2$, придем к соотношениям

$$T_{n-1}^{*'}(t) = 4(n-1)T_{n-2}^*(t) + \frac{n-1}{n-3}T_{n-3}^{*'}(t), \quad n > 3, \quad (2.4.20)$$

$$T_{n-2}^{*''}(t) = 4(n-2)T_{n-3}^{*'}(t) + \frac{n-2}{n-4}T_{n-4}^{*''}(t), \quad n > 4. \quad (2.4.21)$$

Учитывая (2.4.20) и (2.4.21), из (2.4.19) получим

$$T_n^{*''}(t) = 16n(n-1)T_{n-2}^*(t) + 4n \frac{2(n-2)}{n-3}T_{n-3}^{*'}(t) + \frac{n}{n-4}T_{n-4}^{*''}(t), \quad n > 4. \quad (2.4.22)$$

Меняя индекс n в (2.4.20) и (2.4.21) на $n-2$, будем иметь

$$\begin{aligned} T_{n-3}^{*'}(t) &= 4(n-3)T_{n-4}^*(t) + \frac{n-3}{n-5}T_{n-5}^*(t), \quad n > 5, \\ T_{n-4}^{*''}(t) &= 4(n-4)T_{n-5}^{*'}(t) + \frac{n-4}{n-6}T_{n-6}^{*''}(t), \quad n > 6. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

В силу (2.4.23) из (2.4.22) имеем

$$T_n^{*''}(t) = 16n \left[(n-1)T_{n-2}^*(t) + 2(n-2)T_{n-4}^*(t) \right] + 4n \frac{3(n-3)}{n-5}T_{n-5}^{*'}(t) + \frac{n}{n-6}T_{n-6}^{*''}(t), \quad n > 6.$$

Продолжая этот процесс, найдем соотношение

$$\begin{aligned} T_n^{*''}(t) &= 16n \left[(n-1)T_{n-2}^*(t) + 2(n-2)T_{n-4}^*(t) + 3(n-3)T_{n-6}^*(t) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + k(n-k)T_{n-2k}^*(t) \right] + 4n \frac{(k+1)[n-(k+1)]}{n-(2k+1)}T_{n-(2k+1)}^{*'}(t) + \\ &\quad + \frac{n}{n-(2k+2)}T_{n-(2k+2)}^{*''}(t), \quad n > 2k+2, \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

справедливость которого можно доказать посредством метода математической индукции. Далее рассмотрим два случая: $n = 2m$ и $n = 2m+1$. При $n = 2m$ из (2.4.24) получим

$$\begin{aligned} T_{2m}^{*''}(t) &= 16(2m) \left\{ [m^2 - (m-1)^2]T_{2m-2}^*(t) + [m^2 - (m-2)^2]T_{2m-4}^*(t) + \right. \\ &\quad \left. + [m^2 - (m-3)^2]T_{2m-6}^*(t) + \dots + [m^2 - (m-k)^2]T_{2m-2k}^*(t) \right\} + \\ &\quad + 4(2m) \frac{[m^2 - (m-(k+1))^2]}{2m-(2k+1)}T_{2m-(2k+1)}^{*'} + \frac{2m}{2m-(2k+2)}T_{2m-(2k+2)}^{*''}, \quad m > k+1. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

В правой части (2.4.25) найдем выражения последних двух членов. Нетрудно заметить, что они определяются при $k = m - 2$. Учитывая это, из (2.4.25) получим

$$\begin{aligned} T_{2m}^{*''}(t) &= 16(2m) \{ [m^2 - (m-1)^2] T_{2m-2}^*(t) + [m^2 - (m-2)^2] T_{2m-4}^*(t) + \\ &+ [m^2 - (m-3)^2] T_{2m-6}^*(t) + \dots + [m^2 - 4^2] T_8^*(t) + [m^2 - 2^2] T_4^*(t) \} + \\ &+ 4(2m) \frac{[m^2 - 1^2]}{3} T_3^{*'}(t) + \frac{2m}{2} T_2^{*''}(t). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$T_2^{*''}(t) = [2(2t-1)^2 - 1]'' = 16 = 16T_0^*(t), \quad T_3^{*'}(t) = [4(2t-1)^3 - 3(2t-1)]' = 12T_2^*(t) + 6,$$

в силу которых последнее соотношение представится в виде

$$\begin{aligned} T_{2m}^{*''}(t) &= 4(2m) \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} [(2m)^2 - (2m-2k)^2] T_{2m-2k}^*(t) + \frac{1}{2} (2m)^2 T_0^*(t) \right\} = \\ &= 4(2m) \left\{ \frac{1}{2} (2m)^2 T_0^*(t) + \sum_{k=1}^{m-1} [(2m)^2 - (2k)^2] T_{2k}^*(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Аналогично (2.4.26) при $n = 2m + 1$ из (2.4.24) находим

$$\begin{aligned} T_{2m+1}^{*''}(t) &= 4(2m+1) \sum_{k=0}^{m-1} [(2m+1)^2 - (2m-(2k+1))^2] T_{2m-2k-1}^*(t) = \\ &= 4(2m+1) \sum_{k=0}^{m-1} [(2m+1)^2 - (2k+1)^2] T_{2k+1}^*(t). \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Соотношения (2.4.26) и (2.4.27) являются искомыми рекуррентными соотношениями.

Теперь с помощью (2.4.26) и (2.4.27) найдем значения $T_n^{*''}(t)$ при $t = 0$ и $t = 1$. Легко усмотреть, что в силу (2.4.11) имеем

$$T_{2m}^*(0) = T_{2m}^*(1) = 1, \quad T_{2m+1}^*(0) = -T_{2m+1}^*(1) = -1. \quad (2.4.28)$$

Учитывая (2.4.28) из (2.4.26) и (2.4.27) простыми выкладками получим

$$T_n^{*''}(0) = (-1)^n \frac{4}{3} n^2 (n^2 - 1), \quad T_n^{*''}(1) = \frac{4}{3} n^2 (n^2 - 1). \quad (2.4.29)$$

В силу (2.3.19) нетрудно показать, что аналогичные (2.4.9), (2.4.10), (2.4.26) и (2.4.27) рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$ представляются в виде

$$\begin{aligned} T_{2m}^{*'}(x) &= 2(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k-1}^*(x) = 2(2m) \sum_{k=0}^{m-1} T_{2k+1}^*(x), \\ T_{2m+1}^{*'}(x) &= 2(2m+1) \left[\sum_{k=0}^m T_{2m-2k}^*(x) + \frac{1}{2} T_0^*(x) \right] = 2(2m+1) \left[\frac{1}{2} T_0^*(x) + \sum_{k=1}^m T_{2k}^*(x) \right], \\ T_{2m}^{*''}(x) &= 2m \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} [(2m)^2 - (2m-2k)^2] T_{2m-k}^*(x) + \frac{1}{2} (2m)^2 T_0^*(x) \right\} = \\ &= 2m \left\{ \frac{1}{2} (2m)^2 T_0^*(x) + \sum_{k=1}^{m-1} [(2m)^2 - (2k)^2] T_{2k}^*(x) \right\}, \\ T_{2m+1}^{*''}(x) &= (2m+1) \sum_{k=0}^{m-1} [(2m+1)^2 - (2m-(2k+1))^2] T_{2m-2k-1}^*(x) = \\ &= (2m+1) \sum_{k=0}^{m-1} [(2m+1)^2 - (2k+1)^2] T_{2k+1}^*(x). \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Получим рекуррентное соотношение для $2^{2s}t^s T_n^{*''}(t)$. Очевидно, следует рассматривать два случая: $n = 2m$ и $n = 2m + 1$. Умножая (2.4.26) на $2^{2s}t^s$ и учитывая (2.4.4), после простых вычислений получим искомое рекуррентное соотношение в виде

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^s T_{2m}^{*''}(t) &= 4(2m) \left\{ \sum_{k=1}^{[m-1-\frac{s}{2}]} \sum_{p=0}^{2s} [(2m)^2 - (2m-2k)^2] C_{2s}^p T_{2m-2k+p-s}^*(t) + (2m)^2 2^{2s-1} t^s T_0^*(t) \right\} = \\ &= 4(2m) \left\{ (2m)^2 2^{2s-1} t^s T_0^*(t) + \sum_{k=[1+\frac{s}{2}]}^{m-1} \sum_{p=0}^{2s} [(2m)^2 - (2k)^2] C_{2s}^p T_{2k+p-s}^*(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Аналогично (2.4.31), умножая (2.4.27) на $2^{2s}t^s$ и учитывая (2.4.4), получим искомое рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^s T_{2m+1}^{*''}(t) &= \\ &= 4(2m+1) \sum_{k=0}^{[m-1-\frac{s}{2}]} \sum_{p=0}^{2s} [(2m+1)^2 - (2m-(2k+1))^2] C_{2s}^p T_{2m-2k-1+p-s}^*(t) = \\ &= 4(2m+1) \sum_{k=[\frac{1+s}{2}]}^{m-1} \sum_{p=0}^{2s} [(2m+1)^2 - (2k+1)^2] C_{2s}^p T_{2k+1+p-s}^*(t). \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Следует заметить, что соотношения (2.4.9), (2.4.10), (2.4.26) и (2.4.27) представлены как по убывающему, так и по возрастающему индексу, что часто очень удобно при нахождении моментов различных величин относительно этих полиномов. Кроме того, как видно, в правых частях (2.4.18) и (2.4.31) — слагаемые с множителем $2^{2s-1}t^s$, а это создает некоторое неудобство. Однако, в силу приведенной выше следствия леммы 2.4.1 т.е. $2^{2s-1}t^s$ всегда можно представить в виде линейной комбинации полиномов Чебышева $T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_s^*(t)$, после чего в правых частях (2.4.18) и (2.4.31) будут лишь полиномы Чебышева, что и будет их окончательный вид.

Заметим также, что при построении теории тонких тел соотношения (2.4.4), (2.4.17), (2.4.18), (2.4.31) и (2.4.32) нужны при некоторых значениях s ($s = 1, 2, 3, 4$), которые легко получить из этих соотношений. Используя (2.4.5) и (2.4.30), при необходимости легко получить аналогичные (2.4.17), (2.4.18), (2.4.31) и (2.4.32) соотношения для полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$. Поэтому на этом останавливаться не будем.

2.5 Производящая функция. Основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева второго рода

Многочлены

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T_{n+1}'(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5.1)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, — многочлены Чебышева первого рода, называются многочленами Чебышева второго рода [70, 124, 165, 201, 305, 392] на сегменте $[-1, 1]$.

Нетрудно видеть, что многочлены Чебышева можно представить в виде

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5.2)$$

Утверждение 2. *Многочлены Чебышева второго рода (2.5.2) ортогональны на сегменте $[-1, 1]$ с весом*

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.5.3)$$

Доказательство. Производя замену $x = \cos \theta$, имеем

$$\begin{aligned} J_{nm} &= \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^1 \sin[(n+1)\arccos x] \sin[(m+1)\arccos x] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

т.е.

$$J_{nm} = \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \|U_n\|^2 \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & n = m, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

что и доказывает утверждение.

Для ортонормированных многочленов Чебышева второго рода имеем представления

$$\hat{U}_n(x) = \frac{1}{\|U_n\|} U_n(x) = \frac{1}{\|U_n\|} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \|U_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5.5)$$

Нетрудно заметить, что, учитывая (2.3.1), соотношение (2.3.2) можно представить в виде

$$\frac{1/r - x}{1 - 2rx + r^2} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} T_n(x).$$

Отсюда имеем

$$\frac{2x - 2r}{1 - 2rx + r^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} T_n(x). \quad (2.5.6)$$

Интегрируя тождество (2.5.6) по r в пределах от 0 до r , получим разложение

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \frac{r^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1}(x) \frac{r^{n+1}}{n+1}, \quad (2.5.7)$$

которое сходится при условиях $|r| < 1$, $|x| \leq 1$. Найдя производную по x от обеих частей (2.5.7) и учитывая определение многочленов Чебышева второго рода (2.5.1), будем иметь

$$F(r, x) \equiv \frac{1}{1 - 2rx + r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) r^n, \quad |r| < 1, \quad |x| \leq 1. \quad (2.5.8)$$

Из (2.5.8) следует, что функция [95]

$$F(r, x) = \frac{1}{1 - 2rx + r^2}, \quad |r| < 1, \quad |x| \leq 1, \quad (2.5.9)$$

является производящей функцией для полиномов Чебышева второго рода.

Получим основные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева второго рода на сегменте ортогональности $[-1, 1]$. С помощью производящей функции (2.5.9) аналогично полиномам Лежандра и Чебышева первого рода находим следующие основные рекуррентные формулы полиномов Чебышева второго рода:

$$2xU_n(x) = U_{n-1}(x) + U_{n+1}(x), \quad n \geq 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.5.10)$$

$$xU'_n(x) = nU_n(x) + U'_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.5.11)$$

$$U'_n(x) = 2nU_{n-1}(x) + U'_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.5.12)$$

Из соотношения (2.5.2) имеем $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Очевидно, следующие многочлены можно находить с помощью рекуррентного соотношения (2.5.10). Выпишем несколько первых многочленов. Имеем

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_2(x) &= 4x^2 - 1, & U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 13x + 1, & U_5(x) &= 32x^4 - 32x^3 + 6x, \dots \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Теперь осуществим линейное преобразование $x = 2t - 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, при котором сегмент $[0, 1]$ переходит в сегмент $[-1, 1]$. Тогда в силу теоремы о линейном преобразовании сегмента ортогональности [392] система полиномов

$$U_n^*(t) \equiv U_n(2t - 1) = \frac{\sin[(n + 1) \arccos(2t - 1)]}{2\sqrt{t(1 - t)}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5.14)$$

которые называются смещенными полиномами Чебышева второго рода, является ортогональной. Производящей функцией этих полиномов в силу (2.5.9) будет

$$F^*(r, t) = F(r, 2t - 1) = \frac{1}{(1 + r)^2 - 4rt}, \quad |r| < 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.5.15)$$

а весовая функция на основании (2.5.3) представится в виде

$$h^*(t) = h(2t - 1) = 2\sqrt{t(1 - t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

В силу (2.5.4) будем иметь

$$J_{nm}^* = \int_0^1 U_n^*(t) U_m^*(t) h^*(t) dt = \|U_n^*\|^2 \delta_{mn} = \frac{1}{2} \|U_n\|^2 \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \end{cases} \quad (2.5.16)$$

Кроме того, имеет место разложение

$$F^*(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^*(t) r^n, \quad |r| < 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.5.17)$$

Очевидно, ортонормированные смещенные многочлены Чебышева второго рода аналогично (2.5.5) представляются в виде

$$\hat{U}_n^*(t) = \frac{1}{\|U_n^*\|} U_n^*(t) = \frac{1}{\|U_n^*\|} \frac{\sin[(n + 1) \arccos(2t - 1)]}{2\sqrt{t(1 - t)}}, \quad \|U_n^*\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5.18)$$

где норма определяется с помощью (2.5.16).

Нетрудно найти значения полиномов Чебышева второго рода на концах сегмента ортогональности $[0, 1]$. В самом деле, осуществляя простые выкладки, в силу (2.5.14) и (2.5.18) будем иметь

$$U_n^*(0) = (-1)^n (n + 1), \quad U_n^*(1) = n + 1, \quad (2.5.19)$$

$$\hat{U}_n^*(0) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} (n + 1), \quad \hat{U}_n^*(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (n + 1). \quad (2.5.20)$$

Итак, многочлены Чебышева второго рода на концах сегмента ортогональности $[0, 1]$ возрастают со скоростью n , а во внутренних точках интервала $(0, 1)$ ограничены, что можно легко показать в силу формул (2.5.14) и (2.5.18).

Далее, поступая так же как при выводе (2.5.10) — (2.5.12), с помощью производящей функции (2.5.15) и разложения (2.5.17) можно получить основные рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Чебышева второго рода (2.5.14) на сегменте $[0, 1]$. Однако получим их иным путем, исходя из основных рекуррентных соотношений на сегменте $[-1, 1]$. С этой целью заметим, что имеют место формулы

$$U_n'(x) = \frac{1}{2} U_n^{*'}(t), \quad U_n''(x) = \frac{1}{2^2} U_n^{*''}(t), \quad \dots, \quad U_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k} U_n^{*(k)}(t), \quad k, n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5.21)$$

Учитывая $x = 2t - 1$ в (2.5.10) — (2.5.12), простыми выкладками в силу обозначений (2.5.14) и подходящих соотношений (2.5.21) получим основные рекуррентные соотношения для смещенных полиномов Чебышева второго рода на сегменте ортогональности $[0, 1]$

$$4tU_n^*(t) = U_{n-1}^*(t) + 2U_n^*(t) + U_{n+1}^*(t), \quad n \geq 1, \quad (2.5.22)$$

$$2tU_n^{*'}(t) = 2nU_n^*(t) + U_{n-1}^{*'}(t) + U_n^{*'}(t), \quad n \geq 1, \quad (2.5.23)$$

$$U_n^{*'}(t) = 4nU_{n-1}^*(t) + U_{n-2}^{*'}(t), \quad n \geq 2. \quad (2.5.24)$$

Нетрудно заметить, что в силу первого соотношения (2.3.19) и (2.5.14) из (2.5.1) найдем

$$U_n^*(t) = \frac{1}{2(n+1)} T_{n+1}^{*'}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5.25)$$

Заменяя в (2.5.25) n сперва на $2m - 1$, а потом на $2m$ и в полученных соотношениях учитывая (2.4.9) и (2.4.10) соответственно, будем иметь

$$U_{2m-1}^*(t) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k-1}^*(t) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} T_{2k+1}^*(t), \quad (2.5.26)$$

$$U_{2m}^*(t) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} T_{2m-2k}^*(t) + T_0^*(t) = T_0^*(t) + 2 \sum_{k=0}^m T_{2k}^*(t). \quad (2.5.27)$$

2.6 Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышева второго рода на сегменте $[0, 1]$

Эти рекуррентные соотношения можно получить с помощью основных рекуррентных соотношений (см. [267, 273, 274, 281]). Не останавливаясь на их выводах, выпишем некоторые из них, играющие важную роль при построении различных вариантов теории тонких тел. Они имеют вид

$$2^{2s} t^s U_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p U_{n-s+p}^*(t), \quad s, n \in \mathbb{N}_0; \quad (2.6.1)$$

$$2^{2s} t^s U_m^*(t) U_n^*(t) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q U_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n, m, s \in \mathbb{N}_0; \quad (2.6.2)$$

$$U_n^{*'}(t) = 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (n-2k) U_{n-(2k+1)}^*(t) = 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k+1+a) U_{2k+a}^*(t), \quad n \geq 1; \quad (2.6.3)$$

$$\begin{aligned} 2^{2s} t^s U_n^{*'}(t) &= 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{p=0}^{2s} (n-2k) C_{2s}^p U_{n-(s+2k+1)+p}^*(t) = \\ &= 4 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k+1+a) U_{2k+a-s+p}^*, \quad n \geq 1, \quad s \geq 0; \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} U_n^{*''}(t) &= 2^4 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (k+1)(n-k)[n-(2k+1)] U_{n-(2k+2)}^*(t) = \\ &= 2^2 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (2k+2-a)[(n+1)^2 - (2k+2-a)^2] U_{2k+1-a}^*(t), \quad n \geq 2; \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

$$\begin{aligned} 2^{2s} t^s U_n^{*''}(t) &= 2^4 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} \sum_{p=0}^{2s} (k+1)(n-k)[n-(2k+1)] C_{2s}^p U_{n-(s+2k+2)+p}^* = \\ &= 2^2 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (2k+2-a)[(n+1)^2 - (2k+2-a)^2] C_{2s}^p U_{2k+1-a-s+p}^*, \quad n \geq 2, \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Здесь $a = n - 1 - 2[(n - 1)/2] = 1/2(1 + (-1)^n)$, $[x]$ — целая часть числа x , а C_m^n — биномиальные коэффициенты. Следует заметить, что все соотношения (2.6.1) – (2.6.6), справедливые, за исключением (2.6.2), и для системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^\infty$, можно доказать методом математической индукции. Для системы ортонормированных полиномов (2.6.2) представляется в виде

$$2^{2s}t^s\hat{U}_m^*(t)\hat{U}_n^*(t) = \hat{U}_0^* \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q \hat{U}_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n, m, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.6.7)$$

Заметить, что, распространяя определение системы полиномов Чебышева второго рода и на множество отрицательных целых чисел, имеет место равенство $U_{-n}^* = -U_{n-2}^*$, $n \in \mathbb{N}_0$ при предположении которого получены (2.6.1) – (2.6.6). В дальнейшем, не оговариваясь каждый раз, будем предполагать, что определение системы полиномов Чебышева второго рода распространено на множество отрицательных целых чисел.

Легко найти значения производных полиномов Чебышева на концах сегмента $[0,1]$. В самом деле, на основании (2.6.3) с учетом (2.5.19) и (2.5.20) и простыми вычислениями получим

$$U_n^{*'}(0) = (-1)^{n+1} \frac{2}{3} n(n+1)(n+2), \quad U_n^{*'}(1) = \frac{2}{3} n(n+1)(n+2); \quad (2.6.8)$$

$$\hat{U}_n^{*'}(0) = (-1)^{n+1} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} n(n+1)(n+2), \quad \hat{U}_n^{*'}(1) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} n(n+1)(n+2). \quad (2.6.9)$$

Далее в силу (2.5.19) и (2.5.20) и простыми вычислениями из (2.6.5) найдем

$$\begin{aligned} U_n^{*''}(0) &= (-1)^n \frac{4}{15} (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3), \\ U_n^{*''}(1) &= \frac{4}{15} (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_n^{*''}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_n^{*''}(0) = (-1)^n \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3), \\ \hat{U}_n^{*''}(1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_n^{*''}(1) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Заметим, что, имея соотношения (2.6.1)–(2.6.6) не представляет большого труда записать эти соотношения при фиксированном значении s и n . В самом деле, осуществляя простые выкладки, используемые часто соотношения при $s = 1$ и $s = 2$ представляются в виде

$$\begin{aligned} tU_{2m}^{*'}(t) &= 2 \left[\sum_{k=1}^{2m} kU_{k-1}^* + mU_{2m}^* \right] = 2 \left[mU_{2m}^* + \sum_{k=1}^{2m} (2m-k+1)U_{2m-k}^* \right], \quad m \geq 1, \\ tU_{2m+1}^{*'}(t) &= 2 \sum_{k=0}^{2m} (k+1)U_k^*(t) + (2m+1)U_{2m+1}^*(t), \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

$$\begin{aligned} 2t^2U_{2m}^{*'}(t) &= 4 \sum_{k=0}^{2m-2} (k+1)U_k^* + (7m-1)U_{2m-1}^* + 4mU_{2m}^*(t) + mU_{2m+1}^*, \quad m \geq 1, \\ 2^4t^2U_{2m+1}^{*'} &= 2^3 \sum_{k=0}^{2m-1} (k+1)U_k^* + (14m+5)U_{2m}^* + 4(2m+1)U_{2m+1}^* + \\ &+ (2m+1)U_{2m+2}^*, \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

$$\begin{aligned} tU_{2m}^{*''}(t) &= 2 \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ (2k+1)[(2m+1)^2 - (2k+1)^2]U_{2k}^* + \right. \\ &\quad \left. + (2k+2)[(2m+1)^2 - (2k+2)^2 - 3]U_{2k+1}^* \right\}, \quad m \geq 1, \\ tU_{2m+1}^{*''}(t) &= 2 \sum_{k=0}^m \left\{ (2k+1)[(2m+2)^2 - (2k+1)^2 - 3]U_{2k}^* + \right. \\ &\quad \left. + (2k+2)[(2m+2)^2 - (2k+2)^2]U_{2k+1}^* \right\}, \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

$$\begin{aligned}
 t^2 U_{2m}^{*''}(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2\{(2k+1)[(2m+1)^2 - (2k+1)^2 - 3]U_{2k}^*(t) + \\
 &\quad + (2k+2)[(2m+1)^2 - (2k+2)^2 - 3]U_{2k+1}^*(t)\} + 2m(2m-1)U_{2m}^*(t), \quad m \geq 1, \\
 t^2 U_{2m+1}^{*''}(t) &= 2 \sum_{k=0}^{m-1} 2\{(2k+1)[(2m+2)^2 - (2k+1)^2 - 3]U_{2k}^*(t) + \\
 &\quad + (2k+2)[(2m+2)^2 - (2k+2)^2 - 3]U_{2k+1}^*(t)\} + \\
 &\quad + 8m(2m+1)U_{2m}^*(t) + 2m(2m+1)U_{2m+1}^*(t), \quad m \geq 1.
 \end{aligned} \tag{2.6.15}$$

Заметим, что первое соотношение (2.6.12) представлено как по убывающему индексу, так и по возрастающему. Следовательно, и остальные соотношения (2.6.13) – (2.6.15) при необходимости можно записать по убывающему индексу, поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Заметим также, что приведенные выше рекуррентные соотношения играют важную роль при построении различных вариантов теории тонких тел. В частности, с их помощью можно получить моменты производных первого, второго и более высокого порядков скалярной функции, тензоров и их компонент, а также дифференциальных операторов (градиента, дивергенции, лапласиана и др.) от этих величин относительно полиномов Чебышева. Следовательно, используя эти рекуррентные соотношения, из трехмерных постановок задач как по классической, так и по микрополяриной термомеханики деформируемого твердого тела (ТМДТТ) можно получить соответствующие постановки задач относительно моментов входящих в рассматриваемые трехмерные постановки задач величин для тонких тел. При этом при построении теорий тонких тел (высшего порядка) по мнению автора, предпочтительно использование разложения по системе полиномам Чебышева второго рода, так как для этих полиномов легко удастся получить более компактные и общие рекуррентные соотношения (2.6.1)–(2.6.6), чем для других систем полиномов (Лежандра и др.). Однако, система полиномов Лежандра имеет другие преимущества, о которых речь пойдет ниже.

Следует заметить, что различные соотношения для систем полиномов Лежандра, Чебышева и других специальных функций приведены в [363].

2.7 Моменты тензорного поля, производных и некоторых выражений относительно системы многочленов Чебышева второго рода

Рассмотрим какое-нибудь тензорное поле $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$, которое зависит от координат x^1, x^2, x^3 области тела при ее новой параметризации [234, 251]. С целью сокращения письма, как и выше, часто вместо $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$ будем писать $\mathbb{F}(x', x^3)$, где $x' = (x^1, x^2)$, а $x^3 \in [0, 1]$. Кроме того будем полагать, что рассматриваемые тензорные поля в достаточной степени гладки. Например, $\mathbb{F}(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$, где V — область, занимаемая тонким телом, а ∂V — ее граница. Тогда тензорное поле $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно координаты $x^3 \in [0, 1]$ для каждой фиксированной точки $x' \in \overset{(-)}{S}$ можно разлагать в ряд по системе смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ [201, 392]. Это разложение представляется в виде

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad x^3 \in [0, 1], \tag{2.7.1}$$

где $\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x')$ называется коэффициентом с номером k при разложении $\mathbb{F}(x', x^3)$ в ряд по системе полиномов $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$.

Введем определение момента k -го порядка какого-нибудь тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода.

Определение 2.7.1. Моментом k -го порядка тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^\infty$, обозначаемом через $\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.2)$$

Нетрудно доказать, что справедливо следующие утверждения:

Утверждение 3. (Свойство обобщенной линейности). Для любых тензорных полей $\mathbb{F}(x', x^3)$ и $\mathbb{G}(x', x^3)$ и любых функций $\alpha(x')$ и $\beta(x')$ справедливо соотношение

$$\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] = \alpha(x')\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{F}) + \beta(x')\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{G}). \quad (2.7.3)$$

Доказательство. В силу определения (2.7.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] &= \int_0^1 [\alpha(x')\mathbb{F}(x', x^3) + \beta(x')\mathbb{G}(x', x^3)] \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= \alpha(x') \int_0^1 \mathbb{F} \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 + \beta(x') \int_0^1 \mathbb{G} \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= \alpha(x') \mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{F}) + \beta(x') \mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{G}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.7.0.1. Оператор моментов $\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}$, $k \in \mathbb{N}_0$ — линейный оператор.

Утверждение 4. Момент k -го порядка тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^\infty$ равен коэффициенту с номером k при разложении $F(x', x^3)$ относительно x^3 по этой системе полиномов, т.е.

$$\mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7.4)$$

В самом деле, подставляя (2.7.1) в (2.7.2), в силу ортонормированности системы полиномов $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^\infty$ получим (2.7.4).

Пусть $\{\varphi_n(x^3)\}_{n=0}^\infty$ — одна система ортогональных полиномов, а $\{\psi_n(x^3)\}_{n=0}^\infty$ — другая система ортогональных полиномов. Тогда разлагая тензорное поле $\mathbb{F}(x', x^3)$ по этим системам полиномов, будем иметь

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbb{F}}_{\varphi}(x') \varphi_k(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{\mathbb{F}}_{\psi}(x') \psi_n(x^3). \quad (2.7.5)$$

Возникает вопрос: какая связь между моментами $\overset{(k)}{\mathbb{F}}_{\varphi}(x')$ и $\overset{(n)}{\mathbb{F}}_{\psi}(x')$? Считаем, что интервал ортогональности этих систем полиномов один и тот же. Ответить на этот вопрос не представляет большого труда. В самом деле, в силу леммы 2.4.1, например, $\psi_n(x^3)$ можно представить в виде линейной комбинации, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, т.е.

$$\psi_n(x^3) = \sum_{s=0}^n A_s \varphi_s(x^3). \quad (2.7.6)$$

Подставляя (2.7.6) в (2.7.5), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{\mathbb{F}}_{\psi}(x') \psi_n(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left[\sum_{p=0}^{\infty} \overset{(k+p)}{\mathbb{F}}_{\varphi}(x') \right] \varphi_k(x^3). \quad (2.7.7)$$

Учитывая (2.7.7) в (2.7.5) и приравнивая коэффициенты при $\varphi_k(x^3)$, получим искомую связь, которую можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.7.1.

$$\mathbb{F}_\varphi^{(k)}(x') = A_k \left[\sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}_\psi^{(k+p)}(x') \right], \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.8)$$

Из (2.7.8) видно, что момент k -го порядка $\mathbb{F}_\varphi^{(k)}(x')$ тензорного поля $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{\varphi_k(x^3)\}_{k=0}^{\infty}$ определяется с помощью моментов $\mathbb{F}_\psi^{(k)}(x')$, $\mathbb{F}_\psi^{(k+1)}(x')$, $\mathbb{F}_\varphi^{(k+2)}(x')$, ... и коэффициентов A_k при $\varphi_k(x^3)$, $k = \overline{0, n}$ в представлении $\psi_n(x^3)$ в виде линейной комбинации $\varphi_0(x^3), \varphi_1(x^3), \dots, \varphi_n(x^3)$ (2.7.6).

В дальнейшем, рассматривая ряды вида (2.7.1), будем всегда предполагать, что они равномерно сходятся в замкнутой области $V \cup \partial V$.

В силу (2.5.20) на внутренней и внешней поверхностях области тонкого тела (при $x^3 = 0$ и $x^3 = 1$) из (2.7.1) получим равномерно сходящиеся ряды

$$\mathbb{F}^{(-)}(x') = \mathbb{F}(x', 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \mathbb{F}^{(k)}(x'), \quad \mathbb{F}^{(+)}(x') = \mathbb{F}(x', 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathbb{F}^{(k)}(x'). \quad (2.7.9)$$

2.7.1 Моменты производных $\partial_i^p \mathbb{F}(x', x^3)$ и $\partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}(x', x^3)$, $p, q \in \mathbb{N}_0$

Найдем выражения для моментов производных $\partial_i \mathbb{F}(x', x^3)$. В этой связи воспользуемся определением (2.7.2), в котором $\mathbb{F}(x', x^3)$ следует заменить на $\partial_i \mathbb{F}(x', x^3)$. Будем иметь

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \mathbb{F}) = \mathbb{M}_{\hat{U}_k^*}(\partial_i \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_i \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3. \quad (2.7.10)$$

Рассмотрим два случая: первое, когда $i = I$, и второе, когда $i = 3$. При $i = I$ из (2.7.10) с учетом определения (2.7.2) и утверждения (2.7.4) получаем

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_I \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_I \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \partial_I \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \partial_I \mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{F}^{(k)}(x').$$

Таким образом,

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_I \mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{F}^{(k)}(x'). \quad (2.7.11)$$

При $i = 3$ из (2.7.10) в силу (2.6.3) и (2.7.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}(\partial_3 \mathbb{F}) &= \int_0^1 \partial_3 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(n+1)} \int_0^1 \hat{U}_{n+1}'(x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= 4(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+1)}(x'). \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Заметим, что при доказательстве (2.7.12) воспользовались тождеством

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2p+1) \mathbb{F}^{(n+1)}(x') \delta_{n-2p,k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (m+1) \mathbb{F}^{(m+2p+1)}(x') \delta_{mk}, \quad (2.7.13)$$

которое доказывается, если левую часть представить в развернутом виде.

Объединяя (2.7.11) и (2.7.12), можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.7.2.

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_i \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = g_i^K \mathbb{F}^{(k)}(x') + g_i^3 \mathbb{F}'^{(k)}(x'), \quad (2.7.14)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{F}'^{(k)}(x') = 2^2(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+1)}(x') = 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.15)$$

Теперь найдем выражения для моментов вторых производных $\partial_i \partial_j \mathbb{F}(x', x^3)$. Рассмотрим в отдельности производные $\partial_I \partial_J \mathbb{F}(x', x^3)$, $\partial_3 \partial_I \mathbb{F}(x', x^3)$ и $\partial_3 \partial_3 \mathbb{F}(x', x^3) = \partial_3^2 \mathbb{F}(x', x^3)$ и найдем их моменты. В силу определения (2.7.2), в котором теперь $\mathbb{F}(x', x^3)$ заменяется на $\partial_i \partial_j \mathbb{F}(x', x^3)$, получим

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \partial_j \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_i \partial_j \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.16)$$

С помощью определения (2.7.2) и утверждения (2.7.4) из (2.7.16) при $i = I$ и $j = J$ имеем

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_I \partial_J \mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{M}^{(k)}(\partial_J \mathbb{F}) = \partial_I \partial_J \mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) = \partial_I \partial_J \mathbb{F}^{(k)}(x'). \quad (2.7.17)$$

На основании (2.7.14) из (2.7.16) при $i = 3$ и $j = I$ или $i = I$ и $j = 3$ приходим к соотношению

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_I \partial_3 \mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{M}^{(k)}(\partial_3 \mathbb{F}) = \partial_I \mathbb{F}'^{(k)}(x'). \quad (2.7.18)$$

В силу (2.6.5) и (2.7.1) из (2.7.16) при $i = j = 3$ находим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}(\partial_3^2 \mathbb{F}) &= \int_0^1 \partial_3^2 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(n+2)}(x') \int_0^1 \hat{U}_{n+2}^*(x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= 2^4 (k+1) \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2) \mathbb{F}^{(k+2p+2)}(x'). \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Соотношения (2.7.17) – (2.7.19) аналогично (2.7.14) можно представить в виде следующей теоремы:

Теорема 2.7.3.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}(\partial_i \partial_j \mathbb{F}) &= \int_0^1 \partial_i \partial_j \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= g_i^L g_j^M \partial_L \partial_M \mathbb{F}^{(k)}(x') + (g_i^L g_j^3 + g_i^3 g_j^L) \partial_L \mathbb{F}'^{(k)}(x') + g_i^3 g_j^3 \mathbb{F}''^{(k)}(x'), \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

где $\mathbb{F}'^{(k)}$ определяется с помощью (2.7.15), а

$$\begin{aligned} \mathbb{F}''^{(k)} &= 2^4 (k+1) \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2) \mathbb{F}^{(k+2p+2)}(x') = \\ &= 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (p-k+2)(k+p+4)[1 + (-1)^{k+p}] \mathbb{F}^{(p+2)}(x'). \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

Следует заметить, что посредством (2.6.3) и (2.6.5) при необходимости нетрудно найти рекуррентное соотношение для $\hat{U}_k^{*(m)}(x^3)$, $0 \leq m \leq k$. Тогда для моментов производной $\partial_3^m \mathbb{F}(x', x^3)$ аналогично (2.7.19) в силу (2.7.1) будем иметь

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_3^m \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_3^m \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \mathbb{F}^{(m)}(x'). \quad (2.7.22)$$

Определяя моменты производной $\partial_3^m \mathbb{F}(x', x^3)$ с помощью (2.7.22), не доставляет труда доказать следующую теорему:

Теорема 2.7.4.

$$\mathbb{M}^{(k)}(\partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}) = \int_0^1 \partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \begin{cases} \partial_I^p \partial_J^q \mathbb{F}^{(k)}(x'), & i = I, j = J, \\ \partial_I^p \mathbb{F}^{(q)}(x'), & i = I, j = 3, \\ \mathbb{F}^{(p+q)}(x'), & i = j = 3. \end{cases} \quad (2.7.23)$$

Заметить также, что выражение для $\mathbb{F}''^{(k)}$ можно найти еще другим путем. В этой связи введем определение оператора «штрих» соотношением (2.7.15) и докажем следующие утверждения:

Утверждение 5. (Свойство обобщенной линейности) Для любых тензорных полей $\mathbb{F}(x', x^3)$ и $\mathbb{G}(x', x^3)$ и любых функций $\alpha(x')$ и $\beta(x')$ имеем

$$\left(\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G} \right)' = \alpha(x')\mathbb{F}' + \beta(x')\mathbb{G}'. \quad (2.7.24)$$

Доказательство. В силу определения оператора «штрих» получаем

$$\begin{aligned} (\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G})' &= \int_0^1 \partial_3 [\alpha(x')\mathbb{F}(x', x^3) + \beta(x')\mathbb{G}(x', x^3)] \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= \alpha(x') \int_0^1 \partial_3 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 + \beta(x') \int_0^1 \partial_3 \mathbb{G}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= \alpha(x')\mathbb{F}' + \beta(x')\mathbb{G}', \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.7.3.1. Оператор «штрих» — линейный оператор.

Утверждение 6. Имеет место формула

$$\mathbb{F}''^{(k)} = (\mathbb{F}')'. \quad (2.7.25)$$

Доказательство. С помощью (2.7.15) и (2.7.20) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{F}''^{(k)} &= \int_0^1 \partial_3^2 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \int_0^1 \partial_3 (\partial_3 \mathbb{F}(x', x^3)) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= (\partial_3 \mathbb{F})' = \left(\int_0^1 \partial_3 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 \right)' = (\mathbb{F}')'. \end{aligned}$$

Этим утверждение (2.7.25) доказано.

Методом математической индукции можно доказать справедливость теоремы.

Теорема 2.7.5.

$$\mathbb{F}^{(k)(n)} = \left(\mathbb{F}^{(n-m)} \right)^{(m)}, \quad n \geq m, \quad (2.7.26)$$

где $\mathbb{F}^{(k)(p)}$, $p \geq 0$, означает, что оператор «штрих» применяется p раз, а $\mathbb{F}^{(k)(0)} = \mathbb{F}^{(k)}$.

Теперь нетрудно получить (2.7.21). В самом деле, в силу определения оператора «штрих» (2.7.15) и (2.7.24) и (2.7.25) получим

$$\mathbb{F}''^{(k)}(x') = 2^4(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (k+2p+2)^{(k+2p+2q+2)} \mathbb{F}^{(k+2p+2q+2)}(x'). \quad (2.7.27)$$

Преобразуя двойную сумму в правой части последнего соотношения, найдем

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (k+2p+2)^{(k+2p+2q+2)} \mathbb{F}^{(k+2p+2q+2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2)^{(k+2p+2)} \mathbb{F}^{(k+2p+2)}. \quad (2.7.28)$$

Учитывая (2.7.28), из (2.7.27) получим (2.7.21), что и требуется.

Подобным путем можно найти выражения для $\mathbb{F}^{(k)''''}(x')$. В самом деле, применяя оператор «штрих» к (2.7.21) и пользуясь его линейностью (2.7.24) и определением (2.7.15), на основании (2.7.26) найдем

$$\mathbb{F}^{(k)''''}(x') = 2^6(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2)(k+2p+3) \mathbb{F}^{(k+2p+2q+3)}(x'), \quad (2.7.29)$$

Приведем двойную сумму в правой части этого соотношения к одной. Будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (p+1)(k+p+2)(k+2p+3) \mathbb{F}^{(k+2p+2q+3)} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+1}(k+p+2)(k+p+3) \mathbb{F}^{(k+2p+3)}. \quad (2.7.30)$$

Учитывая (2.7.30), из (2.7.29) получим искомое выражение для $\mathbb{F}^{(k)''''}(x')$

$$\mathbb{F}^{(k)''''} = \int_0^1 \partial_3^3 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = 2^6(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+1}(k+p+2)(k+p+3) \mathbb{F}^{(k+2p+3)}, \quad (2.7.31)$$

где, $a_p, p \in \mathbb{N}$, определяется с помощью следующей формулы:

$$a_p = C_{p+1}^2 = \frac{1}{2}p(p+1), \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.7.32)$$

Очевидно, (2.7.31) можно еще получить, применяя оператор «штрих» два раза к (2.7.15).

Таким образом, с помощью оператора «штрих», применяя его последовательно, можно найти выражения для моментов производной любого порядка по координате x^3 от требуемого тензорного поля относительно системы смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода.

Выпишем еще выражение для $\mathbb{F}^{(k)IV}(x')$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{(k)IV}(x') &= \int_0^1 \partial_3^4 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= 2^8(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} b_{p+1}(k+p+2)(k+p+3)(k+p+4) \mathbb{F}^{(k+2p+4)}(x') = \\ &= 2^4(k+1) \sum_{s=k}^N b_{\lfloor \frac{s-k+2}{2} \rfloor} (k+s+4)(k+s+6)(k+s+8) [1 + (-1)^{k+s}] \mathbf{u}^{(s+4)}, \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

где значения коэффициентов $b_p, p \in \mathbb{N}$, вычисляются с помощью формулы

$$b_p = C_{p+2}^3 = \frac{1}{3!}p(p+1)(p+2), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что (2.7.33) можно еще получить, применяя оператор «штрих» три раза к (2.7.15) или два раза к (2.7.21).

2.7.2 Моменты некоторых выражений

В дальнейшем для нас представляет интерес найти выражения для моментов n -го порядка

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}] &= \int_0^1 (x^3)^s \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \\ \mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^s \partial_3^q \mathbb{F}] &= \int_0^1 (x^3)^s \partial_3^q \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad s, k, q \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (2.7.34)$$

а также для моментов

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}[P_s(x^3)\mathbb{F}] &= \int_0^1 P_s(x^3)\mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3, \\ \mathbb{M}^{(k)}[P_s(x^3)\partial_3^q\mathbb{F}] &= \int_0^1 P_s(x^3)\partial_3^q\mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3, \quad s, k, q \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (2.7.35)$$

через моменты $\mathbb{F}(x', x^3)$, где $\mathbb{F}(x', x^3)$, как это было выше обозначено, — какое-нибудь тензорное поле, а $P_s(x^3) = \sum_{n=0}^s c_n(x^3)^n$ — полином степени $s \geq 0$.

В силу линейности оператора моментов нетрудно доказать, что будем иметь

$$\mathbb{M}^{(k)}[P_s(x^3)\mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s c_n \mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^n \mathbb{F}], \quad \mathbb{M}^{(k)}[P_s(x^3)\partial_3^m \mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s c_n \mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^n \partial_3^m \mathbb{F}], \quad k \geq 0, s \geq 0. \quad (2.7.36)$$

Видно, что, зная выражения для (2.7.34), нетрудно найти с помощью (2.7.36) выражения и для (2.7.35).

В силу (2.6.1) и первого соотношения (2.7.34) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(n)}[2^{2s}(x^3)^s \mathbb{F}] &= \int_0^1 2^{2s}(x^3)^s \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_n^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \\ &= \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_{n-s+p}^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)}(x'), \end{aligned}$$

т.е. имеет место теорема

Теорема 2.7.6.

$$\mathbb{M}^{(n)}[2^{2s}(x^3)^s \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \mathbb{M}^{(n-s+p)}(\mathbb{F}) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)}(x'), \quad n, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.37)$$

Очевидно, искомое выражение для первого момента (2.7.34) является следствием (2.7.37).

Следствие.

$$\mathbb{M}^{(n)}[(x^3)^s \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)}(x'), \quad n, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.38)$$

Далее с помощью (2.6.1) и (2.7.22) или (2.7.23) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(n)}[2^{2s}(x^3)^s \partial_3^m \mathbb{F}] &= \int_0^1 2^{2s}(x^3)^s \partial_3^m \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_n^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \\ &= \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \int_0^1 \partial_3^m \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_n^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)(m)}, \quad n, s, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Следовательно, верна теорема

Теорема 2.7.7.

$$\mathbb{M}^{(n)}[2^{2s}(x^3)^s \partial_3^m \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)(m)}(x'), \quad n, s, m \in \mathbb{N}_0, \quad (2.7.39)$$

Легко усмотреть, что искомое выражение для второго момента (2.7.34) получим в виде следствия (2.7.39).

Следствие.

$$\mathbb{M}^{(n)}[(x^3)^s \partial_3^m \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \mathbb{F}^{(n-s+p)(m)}(x'), \quad n, s, m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.40)$$

В силу (2.7.38) нетрудно доказать справедливость теоремы.

Теорема 2.7.8.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s c_n \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^n \mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s \sum_{p=0}^{2n} 2^{-2n} c_n C_{2n}^p \overset{(k-n+p)}{\mathbb{F}}, \quad k, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.41)$$

Аналогично (2.7.41) с помощью (2.7.40) легко доказывается теорема

Теорема 2.7.9.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\partial_3^m \mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s c_n \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^n \partial_3^m \mathbb{F}] = \sum_{n=0}^s \sum_{p=0}^{2n} 2^{-2n} c_n C_{2n}^p \overset{(k-n+p)}{\mathbb{F}}^{(m)}, \quad k, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.42)$$

Сравнивая (2.7.37) и (2.7.39), (2.7.38) и (2.7.40), а также (2.7.41) и (2.7.42), нетрудно заметить, что для любого полинома $P_s(x^3)$ степени s справедлива теорема.

Теорема 2.7.10.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\partial_3^m \mathbb{F}] = [\overset{(n)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}]]^{(m)} = \overset{(k)}{\mathbb{M}}^{(m)}[P_s(x^3)\mathbb{F}], \quad k, m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.43)$$

Заметим, что в соотношениях (2.7.39), (2.7.40) и (2.7.42) $\overset{(k)}{\mathbb{F}}^{(m)}(x')$ при $m = 1, 2, 3, 4$ определяются с помощью (2.7.15), (2.7.21), (2.7.31) и (2.7.33) соответственно, а при $m \geq 5$ выражение для $\overset{(k)}{\mathbb{F}}^{(m)}(x')$ при необходимости можно получить из указанных выше соотношений, применяя к ним нужное число раз оператор «штрих». Кроме того, из (2.7.41) и (2.7.42) нетрудно получить соответствующие выражения для моментов в том случае, когда $P_s(x^3) = (1 - x^3)^s = \sum_{n=0}^s (-1)^n C_s^n (x^3)^n$. Действительно, для этого достаточно в соотношениях (2.7.41) и (2.7.42) $P_s(x^3)$ заменить на $(1 - x^3)^s$, а c_n на $(-1)^n C_s^n$. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

На основании определения (2.7.2) для любой функции $f(x^3)$ и $\forall m \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[f(x^3)\partial_I^m \mathbb{F}] = \partial_I^m \overset{(k)}{\mathbb{M}}[f(x^3)\mathbb{F}], \quad \forall f(x^3), \quad \forall k, m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.44)$$

В частности, (2.7.44), очевидно, имеет место, если $f(x^3) = (x^3)^s$ или $f(x^3) = (1 - x^3)^s$, или $f(x^3) = P_s(x^3)$, где $P_s(x^3)$ — полином степени s , $\forall s \in \mathbb{N}_0$.

Теперь на основании (2.7.43) и (2.7.44) можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.7.11.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\partial_i^m \mathbb{F}] = \begin{cases} \partial_I^m \overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}], & i = I, \\ \{\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}]\}^{(q)}, & i = 3, \end{cases} \quad k, m, s \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7.45)$$

Нетрудно усмотреть, что имеет место более общая теорема, чем (2.7.23) и (2.7.45).

Теорема 2.7.12.

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}] = \begin{cases} \partial_I^p \partial_J^q \overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}], & i = I, j = J, \\ \partial_I^p \{\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}]\}^{(q)}, & i = I, j = 3, \\ \{\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_s(x^3)\mathbb{F}]\}^{(p+q)}, & i = j = 3, \end{cases} \quad (2.7.46)$$

где $P_s(x^3)$ — полином степени s ; $k, s, p, q \in \mathbb{N}_0$.

В частности, (2.7.45), (2.7.46), конечно, справедливы и в тех случаях, когда $P_s(x^3) = (x^3)^s$ или $P_s(x^3) = (1 - x^3)^s$.

Следует заметить, что приведенные выше соотношения справедливы при выполнении равенства $\overset{(-n)}{\mathbb{F}} = -\overset{(n-2)}{\mathbb{F}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, что следует из того, что определение системы полиномов Чебышева распространено на все множество целых чисел и, как было выше сказано, имеет место соотношение $U_{-n}^* = -U_{n-2}^*$, $n \in \mathbb{N}_0$, которое полагаем выполненным и в дальнейшем.

2.8 Моменты компонент тензоров и их производных

Рассмотрены различные семейства компонент тензоров при НПОРТ и определены их моменты и моменты их производных. В частности, определены моменты компонент вектора и тензора второго ранга, а также их производных.

2.8.1 Моменты компонент вектора

Пусть $\mathbf{u}(x', x^3)$ — некий вектор. Тогда его представления при новой параметризации области тонкого тела имеют вид (1.1.54)

$$\mathbf{u} = u_{\bar{p}} \mathbf{r}^{\bar{p}} = u^{\check{q}} \mathbf{r}_{\check{q}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.8.1)$$

а связь между различными семействами компонент осуществляется с помощью компонент единичного тензора второго ранга (1.1.36)

$$u_{\bar{p}} = g_{\bar{p}}^{\check{q}} u_{\check{q}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.2)$$

Следует заметить, что момент k -го порядка $\mathbf{u}^{(k)}(x')$ вектора $\mathbf{u}(x', x^3)$, который в силу (2.7.2) и (2.7.4) можно представить в виде

$$\mathbf{u}^{(k)}(x') = \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \int_0^1 \mathbf{u}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.8.3)$$

конечно, не зависит от x^3 , а его компоненты из-за индекса могут зависеть от x^3 . В самом деле, так как $\mathbf{u}^{(k)}(x')$ — вектор, то для него аналогично (2.8.1) имеем разложения

$$\mathbf{u}^{(k)}(x') = u_{\bar{p}}^{(k)}(x') \mathbf{r}^{\bar{p}} = u^{\check{q}(k)}(x') \mathbf{r}_{\check{q}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.4)$$

Очевидно, между различными семействами компонент $\mathbf{u}^{(k)}(x')$ имеем аналогичную (2.8.2) связь

$$u_{\bar{p}}^{(k)} = g_{\bar{p}}^{\check{q}(k)} u_{\check{q}}^{(k)}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда при $\sim = \emptyset$ получаем

$$u_p^{(k)} = g_p^{\check{q}(k)} u_{\check{q}}^{(k)}, \quad \simeq \in \{-, \emptyset, +\}.$$

и так как p — g -индекс, поэтому $u_p^{(k)}$ зависит от x^3 ($g_p^{\check{q}}$, $\simeq \in \{-, +\}$, зависит от x^3 (1.1.11)).

Нетрудно заметить, что, учитывая (2.8.1) и (2.8.4), из (2.8.3) будем иметь

$$u_{\bar{p}}^{(k)} \mathbf{r}^{\bar{p}} = \int_0^1 u_{\check{q}} \mathbf{r}_{\check{q}} \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \mathbf{r}_{\check{m}} \int_0^1 u^{\check{m}} \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \wedge \in \{-, +\}.$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$u_{\bar{p}}^{(k)} = g_{\bar{p}}^{\check{m}} \int_0^1 u_{\check{m}} \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \simeq \in \{-, +\}. \quad (2.8.5)$$

Нетрудно найти выражения для моментов компонент вектора $\mathbf{u}(x', x^3)$. В самом деле, в силу определения (2.7.2) для моментов ковариантных и контравариантных компонент вектора $\mathbf{u}(x', x^3)$ будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} M(u_{\bar{p}}^{(k)}) &= \int_0^1 u_{\bar{p}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \\ M(u^{\check{p}(k)}) &= \int_0^1 u^{\check{p}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

Очевидно, из (2.8.6) при $\sim \in \{-, +\}$ находим

$$\begin{aligned} u_{\bar{p}}^{(k)}(x') &= M(u_{\bar{p}}^{(k)}) = \int_0^1 u_{\bar{p}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \\ u_{\tilde{p}}^{(k)}(x') &= M(u_{\tilde{p}}^{(k)}) = \int_0^1 u_{\tilde{p}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Первое соотношение (2.8.7) можно еще получить из (2.8.5) при $\sim \in \{-, +\}$, а второе из полученного жонглированием индексом.

Теперь, прежде чем найти выражение для момента $M(u_p)$, заметим, что на основании (2.5.22) имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} x^3 \hat{U}_k^*(x^3) &= 2^{-2} [\hat{U}_{k-1}^*(x^3) + 2\hat{U}_k^*(x^3) + \hat{U}_{k+1}^*(x^3)], \\ (1-x^3) \hat{U}_k^*(x^3) &= -2^{-2} [\hat{U}_{k-1}^*(x^3) - 2\hat{U}_k^*(x^3) + \hat{U}_{k+1}^*(x^3)], \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

Тогда из первого соотношения (2.8.6) при $\sim = \emptyset$ с помощью второго соотношения (1.1.11), (2.7.3), (2.8.2) и (2.8.8) искомое соотношение представится в виде

$$\begin{aligned} M(u_p) &= M(g_p^{\check{q}} u_{\check{q}}) = g_p^{\check{q}} M[(1-x^3)u_{\check{q}}] + g_p^{\check{q}} M[x^3 u_{\check{q}}] = \\ &= 2^{-2} [(g_p^{\check{q}} - g_p^{\check{q}}) (u_{\check{q}}^{(k-1)}(x') + u_{\check{q}}^{(k+1)}(x')) + 2(g_p^{\check{q}} + g_p^{\check{q}}) u_{\check{q}}^{(k)}(x')], \quad \sim \in \{-, +\}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

При выводе (2.8.9) были использованы соотношения

$$\begin{aligned} M((1-x^3)u_{\check{q}}) &= -2^{-2} [u_{\check{q}}^{(k-1)}(x') - 2u_{\check{q}}^{(k)}(x') + u_{\check{q}}^{(k+1)}(x')], \\ M(x^3 u_{\check{q}}) &= 2^{-2} [u_{\check{q}}^{(k-1)}(x') + 2u_{\check{q}}^{(k)}(x') + u_{\check{q}}^{(k+1)}(x')], \quad \sim \in \{-, +\}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

получающиеся с помощью (2.8.8) и сохраняющие силу при жонглировании индексом \check{q} . Заметим, что первое соотношение (2.8.10) получается еще из первого соотношения (2.7.46) при $s = 1$, а второе — из следствия (2.7.38) при $s = 1$.

Теперь найдем выражения для $M(u^p)$. Рассмотрим в отдельности $M(u^P)$ и $M(u^3)$. При $\sim = \emptyset$ и $p = P$ из векторного соотношения (2.8.6) с учетом (1.5.37), (2.7.3), (2.8.2) и (2.7.38) находим искомое соотношение в форме

$$M(u^P) = M(g_M^P u^{\bar{M}}) = \int_0^1 u^P(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p u^{(k-s+p)\bar{M}}. \quad (2.8.11)$$

Далее при $\sim = \emptyset$ и $p = 3$ из второго соотношения (2.8.6) в силу (1.5.64), (2.7.3) и (2.8.2) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} M(u^3) &= u^{\bar{3}} - g_P^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} M[(x^3)^{s+1} u^{\bar{M}}] = \int_0^1 u^3(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \\ &= u^{\bar{3}} - g_P^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2(s+1)} 2^{-2(s+1)} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2(s+1)}^p u^{(p-u)\bar{M}}, \quad u = s + 1 - k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

2.8.2 Моменты ковариантных производных от компонент вектора

На основании определения (2.7.2) моменты k -го порядка ковариантных производных от ковариантных и контравариантных компонент вектора представляются соответственно

соотношениями

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_p u_{\bar{q}}) &= \int_0^1 \nabla_p u_{\bar{q}}(x', x^3) \hat{U}_k^* x^3 h^*(x^3) dx^3, \\ M^{(k)}(\nabla_p u^{\bar{q}}) &= \int_0^1 \nabla_p u^{\bar{q}}(x', x^3) \hat{U}_k^* x^3 h^*(x^3) dx^3, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

Рассмотрим по отдельности следующие случаи: а) $p = P, \sim \in \{-, +\}$; б) $p = 3, \sim \in \{-, +\}$; в) $p = P, \sim = \emptyset$; г) $p = 3, \sim = \emptyset$.

а) При $p = P, \sim \in \{-, +\}$ например, из первого соотношения (2.8.13) имеем

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_P u_{\bar{q}}) &= \int_0^1 \nabla_P u_{\bar{q}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \nabla_P M^{(k)}(u_{\bar{q}}) = \nabla_P^{(k)} u_{\bar{q}}(x'), \\ M^{(k)}(\nabla_P u^{\bar{q}}) &= \int_0^1 \nabla_P u^{\bar{q}}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \nabla_P M^{(k)}(u^{\bar{q}}) = \nabla_P^{(k)} u^{\bar{q}}(x'), \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

Заметим, что имеют место более общие соотношения, чем (2.8.14). А именно

$$M^{(k)}(f(x^3) \nabla_P u_{\bar{q}}) = \nabla_P M^{(k)}(f(x^3) u_{\bar{q}}), \quad M^{(k)}(f(x^3) \nabla_P u^{\bar{q}}) = \nabla_P M^{(k)}(f(x^3) u^{\bar{q}}), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (2.8.15)$$

где $f(x^3)$ — произвольная функция переменного x^3 .

б) При $p = 3, \sim \in \{-, +\}$ из второго соотношения (2.8.13) в силу последней части теоремы (2.7.14) находим

$$M^{(k)}(\nabla_3 u_{\bar{q}}) = M^{(k)}(\partial_3 u_{\bar{q}}) = u_{\bar{q}}'(x'), \quad M^{(k)}(\nabla_3 u^{\bar{q}}) = M^{(k)}(\partial_3 u^{\bar{q}}) = u^{\bar{q}}'(x'), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (2.8.16)$$

где, конечно, первое соотношение получается аналогично второму. Заметим, что при выводе (2.8.16) были использованы соотношения

$$\nabla_3 u_{\bar{q}}(x', x^3) = \partial_3 u_{\bar{q}}(x', x^3), \quad \nabla_3 u^{\bar{q}}(x', x^3) = \partial_3 u^{\bar{q}}(x', x^3), \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.8.17)$$

в) При $p = P, \sim = \emptyset$ из первого соотношения (2.8.13) с учетом второго соотношения (1.1.11), (1.2.6), (2.7.3), (2.8.10) и (2.8.15) получим

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_P u_q) &= M^{(k)}(g_q^{\check{m}} \nabla_P u_{\check{m}}) = g_q^{\check{m}} \nabla_P M^{(k)}[(1 - x^3) u_{\check{m}}] + g_q^{\check{m}} \nabla_P M^{(k)}[x^3 u_{\check{m}}] = \\ &= M^{(k)}(\nabla_P (g_q^{\check{m}} u_{\check{m}})) = \nabla_P M^{(k)}(g_q^{\check{m}} u_{\check{m}}) = \nabla_P M^{(k)}(u_q) = 2^{-2} \{ (g_q^{\check{m}} - g_q^{\check{m}}) \nabla_P [u_{\check{m}}^{(k-1)}(x') + \\ &+ u_{\check{m}}^{(k+1)}(x')] + 2(g_q^{\check{m}} + g_q^{\check{m}}) \nabla_P u_{\check{m}}^{(k)}(x') \}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.18)$$

Теперь рассмотрим второе соотношение (2.8.13). Выделим два случая: первый при $q = Q$, и второй при $q = 3$. В первом случае, т.е. при $q = Q$ с помощью (1.2.6), (1.5.37), (2.7.3), (2.7.38) и второго соотношения (2.8.15) будем иметь

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_P u^Q) &= M^{(k)}(g_N^Q \nabla_P u^{\bar{N}}) = \int_0^1 \nabla_P u^Q(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \nabla_P M^{(k)}(u^Q) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p A_{(s)N}^{\bar{Q}} \nabla_P^{(k-s+n)} u^{\bar{N}}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

Заметим, что последнее соотношение можно получить из (2.8.11), если к нему применим оператор ковариантной производной ∇_P и учтем $\nabla_P A_{(s)M}^{\bar{Q}} = 0$.

Во втором случае, т.е. при $q = 3$ аналогично (2.8.19) в силу (1.2.6), (1.5.64), (2.7.3) и второго соотношения (2.8.15) приходим к соотношению

$$M^{(k)}(\nabla_P u^3) = M^{(k)}(g_n^3 \nabla_P u^{\bar{n}}) = M^{(k)}[\nabla_P(g_n^3 u^{\bar{n}})] = \nabla_P M^{(k)}(u^3) - g_{\frac{3}{Q}}^{\bar{3}(k)} M^{(k)}(g_{\frac{Q}{N}}^Q \nabla_P u^{\bar{N}}).$$

Отсюда, учитывая (2.8.19), получим

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_P u^3) &= \int_0^1 \nabla_P u^3(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = \nabla_P M^{(k)}(u^3) - g_{\frac{3}{Q}}^{\bar{3}(k)} M^{(k)}(g_{\frac{Q}{N}}^Q \nabla_P u^{\bar{N}}) = \\ &= \nabla_P M^{(k)}(u^3) - g_{\frac{3}{Q}}^{\bar{3}(k)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p A_{(s)N}^{\bar{Q}} \nabla_P^{(k-s+n)\bar{N}} u^{\bar{N}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.20)$$

Нетрудно заметить, что на основании (2.8.14), (2.8.18), (2.8.19) и (2.8.20) убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$M^{(k)}(\nabla_P u_{\tilde{q}}) = \nabla_P M^{(k)}(u_{\tilde{q}}), \quad M^{(k)}(\nabla_P u^{\tilde{q}}) = \nabla_P M^{(k)}(u^{\tilde{q}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.21)$$

г) При $p = 3$, $\sim = \emptyset$ из первого соотношения (2.8.13), учитывая второе соотношение (1.1.11), (1.2.6), утверждения (2.7.3), (2.8.2), (2.8.8) и первое соотношение (2.8.16), (2.8.17), получим

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_3 u_q) &= M^{(k)}(g_q^{\tilde{m}} \partial_3 u_{\tilde{m}}) = 2^{-2} \{ (g_{\frac{3}{q}}^{\tilde{m}} - g_{\frac{q}{3}}^{\tilde{m}}) [u_{\tilde{m}}^{(k-1)'}(x') + u_{\tilde{m}}^{(k+1)'}(x')] + \\ &+ 2(g_{\frac{3}{q}}^{\tilde{m}} + g_{\frac{q}{3}}^{\tilde{m}}) u_{\tilde{m}}^{(k)'}(x') \}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.22)$$

Заметим, что при выводе (2.8.22) были использованы соотношения

$$\begin{aligned} M^{(k)}[(1-x^3)\partial_3 u_{\tilde{m}}] &= M^{(k)}[(1-x^3)u_{\tilde{m}}] = -2^{-2} [u_{\tilde{m}}^{(k-1)'}(x') - 2u_{\tilde{m}}^{(k)'}(x') + u_{\tilde{m}}^{(k+1)'}(x')], \\ M^{(k)}[x^3\partial_3 u_{\tilde{m}}] &= M^{(k)}[x^3 u_{\tilde{m}}] = 2^{-2} [u_{\tilde{m}}^{(k-1)'}(x') + 2u_{\tilde{m}}^{(k)'}(x') + u_{\tilde{m}}^{(k+1)'}(x')], \quad \sim \in \{-, +\}, \end{aligned} \quad (2.8.23)$$

которые доказываются с помощью (2.7.43) при $m = 1$, (2.8.10) и линейности оператора «штрих».

Учитывая (2.8.23) момент $M^{(k)}(\nabla_3 u_q)$ можно еще представить в виде

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_3 u_q) &= M^{(k)}(g_q^{\tilde{m}} \partial_3 u_{\tilde{m}}) = g_{\frac{q}{3}}^{\tilde{m}} [M^{(k)}((1-x^3)u_{\tilde{m}})]' + g_{\frac{3}{q}}^{\tilde{m}} [M^{(k)}(x^3 u_{\tilde{m}})]' = \\ &= [g_{\frac{q}{3}}^{\tilde{m}} M^{(k)}((1-x^3)u_{\tilde{m}}) + g_{\frac{3}{q}}^{\tilde{m}} M^{(k)}(x^3 u_{\tilde{m}})]' = [M^{(k)}(u_q)]' = M^{(k)'}(u_q), \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.24)$$

г) В данном случае при рассмотрении второго соотношения (2.8.13) выделим два случая: первый при $q = Q$, а второй при $q = 3$.

При $q = Q$ с помощью (1.2.6), (1.5.37), (2.7.3), второго соотношения (2.8.17), (2.7.24) и (2.7.43) при $m = 1$ получаем

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla_3 u^Q) &= M^{(k)}(g_M^Q \partial_3 u^{\bar{M}}) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{Q}} M^{(k)}[(x^3)^s \partial_3 u^{\bar{M}}] \stackrel{(2.7.43)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{Q}} \{M^{(k)}[(x^3)^s u^{\bar{M}}]\}' \stackrel{(2.7.24)}{=} \\ &\stackrel{(2.7.24)}{=} [M^{(k)}(g_M^Q u^{\bar{M}})]' = [M^{(k)}(u^Q)]' = M^{(k)'}(u^Q). \end{aligned}$$

При $q = 3$ в силу (1.2.6), (1.5.64), (2.7.3), вторых соотношений (2.8.16) и (2.8.17), (2.7.24) и (2.7.43) при $m = 1$ находим

$$\begin{aligned}
 {}^{(k)}M(\nabla_3 u^3) &= {}^{(k)}M(g_m^3 \partial_3 u^{\bar{m}}) = {}^{(k)}M(\partial_3 u^{\bar{m}} + g_-^3 \partial_3 u^{\bar{M}}) = \\
 &= {}^{(k)}M(\partial_3 u^{\bar{m}}) + {}^{(k)}M(g_-^3 \partial_3 u^{\bar{M}}) = {}^{(k)}\bar{u}^{\bar{m}'} - g_+^3 \sum_{Q=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{Q}} {}^{(k)}M[(x^3)^{s+1} \partial_3 u^{\bar{m}}] \stackrel{(2.7.43)}{=} \\
 &\stackrel{(2.7.43)}{=} {}^{(k)}\bar{u}^{\bar{m}'} - g_+^3 \sum_{Q=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{Q}} \{ {}^{(k)}M((x^3)^{s+1} u^{\bar{m}}) \}' \stackrel{(2.7.24)}{=} \\
 &\stackrel{(2.7.43)}{=} \{ {}^{(k)}M(u^{\bar{m}}) - g_+^3 \sum_{Q=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{Q}} {}^{(k)}M[(x^3)^{s+1} u^{\bar{m}}] \}' = [{}^{(k)}M(u^3)]' = {}^{(k)}M'(u^3).
 \end{aligned}$$

На основании (2.8.16), (2.8.24) и последних двух соотношений заключаем, что имеют место соотношения

$${}^{(k)}M(\nabla_3 u_{\bar{q}}) = {}^{(k)}M'(u_{\bar{q}}), \quad {}^{(k)}M(\nabla_3 u^{\bar{q}}) = {}^{(k)}M'(u^{\bar{q}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.25)$$

Легко усмотреть, что (2.8.21) и (2.8.25) можно сформулировать в виде теорем.

Теорема 2.8.1.

$${}^{(k)}M(\nabla_p u_{\bar{q}}) = \begin{cases} \nabla_P {}^{(k)}M(u_{\bar{q}}), & p = P, \\ {}^{(k)}M'(u_{\bar{q}}), & p = 3, \end{cases} \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.26)$$

Теорема 2.8.2.

$${}^{(k)}M(\nabla_p u^{\bar{q}}) = \begin{cases} \nabla_P {}^{(k)}M(u^{\bar{q}}), & p = P, \\ {}^{(k)}M'(u^{\bar{q}}), & p = 3, \end{cases} \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.8.27)$$

Не представляет труда с помощью (2.8.26) и (2.8.27) доказать более общие аналогичные (2.7.20) и (2.7.23) теоремы. Сформулируем эти теоремы.

Теорема 2.8.3.

$${}^{(k)}M(\nabla_p \nabla_q u_{\bar{m}}), \quad {}^{(k)}M(\nabla_p \nabla_q u^{\bar{m}}) = \begin{cases} \nabla_P \nabla_Q {}^{(k)}M(u_{\bar{m}}), & \nabla_P \nabla_Q {}^{(k)}M(u^{\bar{m}}), & p = P, q = Q, \\ \nabla_P {}^{(k)}M'(u_{\bar{q}}), & \nabla_P {}^{(k)}M'(u^{\bar{q}}), & p = P, q = 3, \\ {}^{(k)}M''(u_{\bar{q}}), & {}^{(k)}M''(u^{\bar{q}}), & p = q = 3, \\ \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{cases} \quad (2.8.28)$$

Теорема 2.8.4.

$${}^{(k)}M(\nabla_p^m \nabla_q^n u_{\bar{l}}), \quad {}^{(k)}M(\nabla_p^m \nabla_q^n u^{\bar{l}}) = \begin{cases} \nabla_P^m \nabla_Q^n {}^{(k)}M(u_{\bar{l}}), & \nabla_P^m \nabla_Q^n {}^{(k)}M(u^{\bar{l}}), & p = P, q = Q, \\ \nabla_P^m [{}^{(k)}M(u_{\bar{l}})]^{(n)}, & \nabla_P^m [{}^{(k)}M(u^{\bar{l}})]^{(n)}, & p = P, q = 3, \\ [{}^{(k)}M(u_{\bar{l}})]^{(m+n)}, & [{}^{(k)}M(u^{\bar{l}})]^{(m+n)}, & p = q = 3, \\ \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{cases} \quad (2.8.29)$$

Заметим, что (2.8.28) можно доказать, используя (2.8.26) и (2.8.27), а (2.8.29) методом математической индукции.

2.8.3 Моменты компонент тензора второго ранга

В силу первого соотношения (1.1.27) несимметричный тензор второго ранга имеет представления

$$\underline{P} = P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} = P_{\cdot\tilde{q}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} = P_{\tilde{p}}^{\cdot\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} = P^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.8.30)$$

где различные семейства компонент связаны соотношением

$$P_{\tilde{p}}^{\cdot\tilde{q}} = g_{\tilde{p}\tilde{m}} g^{\tilde{q}\tilde{n}} P_{\cdot\tilde{n}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.8.31)$$

которое сохраняет силу при жонглировании индексами.

Итак, тензор второго ранга характеризуется четырьмя типами компонент (2.8.30), поэтому необходимо найти моменты всех этих типов компонент. С целью нахождения этих моментов рассмотрим следующие случаи: а) $\sim, \cdot \in \{-, +\}$; б) $\sim = \emptyset, \cdot \in \{-, +\}$; в) $\sim = \emptyset, \cdot = \emptyset$.

а) При $\sim, \cdot \in \{-, +\}$ в силу определения (2.7.2) имеем выражение

$$M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot}) = \int_0^1 P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot}(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3 = P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}, \quad \sim, \cdot \in \{-, +\}, \quad (2.8.32)$$

сохраняющее силу при жонглировании индексами \tilde{p}, \tilde{q} .

б) При $\sim = \emptyset, \cdot \in \{-, +\}$ достаточно рассматривать моменты $M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)})$, $M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)P})$ и $M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3})$. Нетрудно найти выражения этих моментов, используя соотношения (2.8.9), (2.8.11) и (2.8.12) соответственно. В самом деле, с помощью (2.8.9) и (2.8.31) получаем

$$M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}) = 2^{-2} [(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}) (P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k-1)} + P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k+1)}) + 2(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}) P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}], \quad \sim, \cdot \in \{-, +\}. \quad (2.8.33)$$

На основании (2.8.11) и (2.8.31) будем иметь

$$M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)P}) = M(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p A_{(s)\tilde{m}}^{\tilde{p}} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)P}, \quad u = s - k, \quad \cdot \in \{-, +\}. \quad (2.8.34)$$

Аналогично (2.8.34), посредством (2.8.12) и (2.8.31) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} M(P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3}) &= M(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}) = P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3} + M(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}) = P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3} - \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\tilde{p}}^{\tilde{m}} M[(x^3)^{s+1} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)}] = \\ &= P_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2(s+1)} 2^{-2(s+1)} C_{2(s+1)}^p A_{(s)\tilde{m}}^{\tilde{p}} P_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\cdot\cdot(k)3}, \quad u = s + 1 - k, \quad \cdot \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.35)$$

Очевидно, соотношения (2.8.33)–(2.8.35) сохраняют силу при жонглировании индексом \tilde{q} , а (2.8.33) при жонглировании и немым индексом \tilde{m} . Заметим, что случай, когда $\sim \in \{-, +\}$, $\cdot = \emptyset$ будет рассматриваться аналогично, поэтому на этом останавливаться не будем.

в) Подробнее рассмотрим случай, когда $\sim = \emptyset, \cdot = \emptyset$. В этом случае достаточно найти выражения для моментов $M(P_{pq}^{\cdot\cdot(k)})$, $M(P_{pq}^{\cdot\cdot(k)P})$ и $M(P_{pq}^{\cdot\cdot(k)3})$.

Нетрудно заметить, что в силу второго соотношения (1.1.11), утверждения (2.7.3) и (2.8.31) находим

$$\begin{aligned} M(P_{pq}^{\cdot\cdot(k)}) &= M(g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{q}}^{\tilde{n}} P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot(k)}) = g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{q}}^{\tilde{n}} M[(1 - x^3)^2 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot(k)}] + \\ &+ (g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{q}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{q}}^{\tilde{n}}) M[(1 - x^3) x^3 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot(k)}] + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{q}}^{\tilde{n}} M[(x^3)^2 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot(k)}], \quad \sim, \cdot \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.8.36)$$

Теперь, прежде чем найти моменты в правой части (2.8.36), отметим, что на основании (2.6.1) не представляет труда проверить справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (x^3)^2 \hat{U}_k^*(x^3) &= \frac{1}{16} [\hat{U}_{k-2}^* + 4\hat{U}_{k-1}^* + 6\hat{U}_k^* + 4\hat{U}_{k+1}^* + \hat{U}_{k+2}^*], \quad k \geq 0, \\ (1-x^3)x^3 \hat{U}_k^*(x^3) &= \frac{1}{16} [\hat{U}_{k-2}^* + 8\hat{U}_{k-1}^* + 14\hat{U}_k^* + 8\hat{U}_{k+1}^* + \hat{U}_{k+2}^*], \quad k \geq 0, \\ (1-x^3)^2 \hat{U}_k^*(x^3) &= \frac{1}{16} [\hat{U}_{k-2}^* - 4\hat{U}_{k-1}^* + 6\hat{U}_k^* - 4\hat{U}_{k+1}^* + \hat{U}_{k+2}^*], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8.37)$$

Учитывая (2.8.37), после простых преобразований из (2.8.36) получим

$$\begin{aligned} M(P_{pq}^{\cdot\cdot}) &= \frac{1}{16} \left\{ g_{-p}^{\tilde{m}} g_{-q}^{\tilde{n}} \left[P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} - 4 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 6 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} - 4 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} \right] + \right. \\ &+ (g_{-p}^{\tilde{m}} g_{+q}^{\tilde{n}} + g_{+p}^{\tilde{m}} g_{-q}^{\tilde{n}}) \left[P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 8 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 14 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 8 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} \right] + \\ &\left. + g_{+p}^{\tilde{m}} g_{+q}^{\tilde{n}} \left[P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 4 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 6 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + 4 P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} + P_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot} \right] \right\}, \quad \sim, \smile \in \{-, +\}. \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8.38)$$

Теперь найдем выражение для $M(P_{\cdot q}^{p\cdot})$. Рассмотрим в отдельности $M(P_{\cdot q}^{p\cdot})$ и $M(P_{\cdot q}^{3\cdot})$. В силу второго соотношения (1.1.11), (1.5.37), (2.7.3) и (2.8.31), находим

$$M(P_{\cdot q}^{p\cdot}) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[g_{-q}^{\tilde{n}} A_{(s)M}^{\bar{p}} + (g_{+q}^{\tilde{n}} - g_{-q}^{\tilde{n}}) A_{(s-1)M}^{\bar{p}} \right] M[(x^3)^s P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}], \quad \smile \in \{-, +\}, \quad (2.8.39)$$

где $A_{(-1)M}^{\bar{p}} = 0$. Отсюда аналогично (2.8.11) в силу (2.7.38) искомое выражение примет вид

$$\begin{aligned} M(P_{\cdot q}^{p\cdot}) &= M(g_{-M}^{\tilde{n}} g_{+q}^{\tilde{n}} P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2s} 2^{-2s} \left[g_{-q}^{\tilde{n}} A_{(s)M}^{\bar{p}} + (g_{+q}^{\tilde{n}} - g_{-q}^{\tilde{n}}) A_{(s-1)M}^{\bar{p}} \right] C_{2s}^l P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}, \\ u &= s - k, \quad \smile \in \{-, +\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.40)$$

С помощью (1.5.64), (2.7.3), (2.8.31) аналогично (2.8.39) для $M(P_{\cdot q}^{3\cdot})$ получим

$$\begin{aligned} M(P_{\cdot q}^{3\cdot}) &= M(g_{+q}^{\tilde{n}} P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{3}}) - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \left[g_{-q}^{\tilde{n}} A_{(s)M}^{\bar{p}} + (g_{+q}^{\tilde{n}} - g_{-q}^{\tilde{n}}) A_{(s-1)M}^{\bar{p}} \right] M[(x^3)^{s+1} P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}], \\ \smile &\in \{-, +\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.41)$$

Выражение для первого слагаемого в правой части (2.8.41) можно получить с помощью (2.8.9), а для второго аналогично (2.8.12) на основании (2.7.38). В конечном счете после простых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} M(P_{\cdot q}^{3\cdot}) &= M(g_{-m}^{\tilde{3}} g_{+q}^{\tilde{n}} P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}) = 2^{-2} \left[(g_{+q}^{\tilde{n}} - g_{-q}^{\tilde{n}}) \left(P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{3}} + P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{3}} \right) + 2(g_{+q}^{\tilde{n}} + g_{-q}^{\tilde{n}}) P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{3}} \right] - \\ &- g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} \left[g_{-q}^{\tilde{n}} A_{(s)M}^{\bar{p}} + (g_{+q}^{\tilde{n}} - g_{-q}^{\tilde{n}}) A_{(s-1)M}^{\bar{p}} \right] C_{2(s+1)}^l P_{\cdot\tilde{n}}^{\bar{m}}, \quad u = s + 1 - k, \\ \smile &\in \{-, +\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.42)$$

Теперь рассмотрим $M(P^{pq})$. Здесь выделим три момента k -го порядка: $M(P^{PQ})$, $M(P^{P^3})$ и $M(P^{3^3})$. Нетрудно заметить, что в силу (1.5.68), утверждения (2.7.3) и (2.8.31) получаем

$$M(P^{PQ}) \stackrel{(2.8.31)}{=} M(g_{-M}^{\tilde{p}} g_{+N}^{\tilde{q}} P_{\cdot\cdot}^{\bar{m}\bar{n}}) \stackrel{(2.7.3)}{\stackrel{(1.5.68)}{=}} \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)MN}^{\bar{p}\bar{q}} M[(x^3)^s P_{\cdot\cdot}^{\bar{m}\bar{n}}], \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отсюда в силу (2.7.38) находим искомое выражение

$$M^{(k)}(P^{PQ}) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} B_{(s)MN}^{\overline{PQ}} C_{2s}^p P^{\overline{MN}}, \quad u=s-k, \quad k \geq 0. \quad (2.8.43)$$

Далее с помощью (1.5.37), (1.5.68), (2.7.3) и (2.8.31) находим

$$\begin{aligned} M^{(k)}(P^{P3}) &= M^{(k)}(g_M^P g_n^3 P^{\overline{MN}}) = M^{(k)}(g_M^P P^{\overline{M3}}) + M^{(k)}(g_M^P g_N^3 P^{\overline{MN}}) = M^{(k)}(g_M^P P^{\overline{M3}}) - \\ &- g_Q^3 M^{(k)}(x^3 g_M^P g_N^Q P^{\overline{MN}}) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\overline{P}} M^{(k)}[(x^3)^s P^{\overline{M3}}] - g_Q^3 \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)MN}^{\overline{PQ}} M^{(k)}[(x^3)^{s+1} P^{\overline{MN}}], \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

С целью получения выражения для первой суммы в правой части последнего соотношения можно использовать, например, (2.8.34), для второй суммы, например, (2.8.12). В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned} M^{(k)}(P^{P3}) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p A_{(s)M}^{\overline{P}} P^{\overline{M3}} - g_Q^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} B_{(s)MN}^{\overline{PQ}} C_{2(s+1)}^p P^{\overline{MN}}, \\ u &= s-k, \quad v = u+1 = s+1-k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.44)$$

Теперь рассмотрим $M^{(k)}(P^{33})$. Заметим, что на основании (2.8.31) имеем

$$P^{33} = P^{\overline{33}} - g_P^3 x^3 g_M^P (P^{\overline{M3}} + P^{\overline{3M}}) + g_P^3 g_Q^3 (x^3)^2 g_M^P g_N^Q P^{\overline{MN}},$$

Тогда в силу (1.5.37), (1.5.68) и (2.7.3) получаем

$$M^{(k)}(P^{33}) = P^{\overline{33}} - g_P^3 \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\overline{P}} M^{(k)}[(x^3)^{s+1} (P^{\overline{M3}} + P^{\overline{3M}})] + g_P^3 g_Q^3 \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)MN}^{\overline{PQ}} M^{(k)}[(x^3)^{s+2} P^{\overline{MN}}], \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отсюда, используя приведенные выше соответствующие соотношения, нетрудно получить искомое соотношение в виде

$$\begin{aligned} M^{(k)}(P^{33}) &= P^{\overline{33}} - g_P^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p A_{(s)M}^{\overline{P}} (P^{\overline{M3}} + P^{\overline{3M}}) + \\ &+ g_P^3 g_Q^3 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+4} 2^{-2(s+2)} B_{(s)MN}^{\overline{PQ}} C_{2s+4}^p P^{\overline{MN}}, \quad u = s+1-k, \quad v = u+1 = s+2-k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8.45)$$

2.8.4 Моменты ковариантных производных от компонент тензора второго ранга

Нетрудно доказать, что имеют место аналогичные (2.8.26)–(2.8.29) соотношения, которые в рассматриваемом случае можно сформулировать в виде следующих теорем:

Теорема 2.8.5.

$$M^{(k)}(\nabla_l P^{\overline{pq}}) = \begin{cases} \nabla_L M^{(k)}(P^{\overline{pq}}), & l = L, \\ M^{(k)}(P^{\overline{pq}}), & l = 3, \\ \sim, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{cases} \quad (2.8.46)$$

Теорема 2.8.6.

$$M^{(k)}(\nabla_t \nabla_l P^{\overline{pq}}) = \begin{cases} \nabla_T \nabla_L M^{(k)}(P^{\overline{pq}}), & t = T, l = L, \\ \nabla_T M^{(k)}(P^{\overline{pq}}), & t = T, l = 3, \\ M^{(k)}(P^{\overline{pq}}), & t = l = 3, \\ \sim, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{cases} \quad (2.8.47)$$

Теорема 2.8.7.

$$M^{(k)}(\nabla_t^m \nabla_l^n P_{\check{q}}^{\check{p}}) = \begin{cases} \nabla_T^m \nabla_L^n M^{(k)}(P_{\check{q}}^{\check{p}}), & t = T, l = L, \\ \nabla_T^m [M^{(k)}(P_{\check{q}}^{\check{p}})]^{(n)}, & t = T, l = 3, \\ [M^{(k)}(P_{\check{q}}^{\check{p}})]^{(m+n)}, & t = l = 3, \\ \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{cases} \quad (2.8.48)$$

Следует заметить, что аналогично (2.7.46) нетрудно доказать справедливость более общего соотношения, чем (2.8.46)–(2.8.48). В самом деле, имеет место теорема.

Теорема 2.8.8.

$$M^{(k)}[(x^3)^s \nabla_t^m \nabla_l^n P_{\check{q}}^{\check{p}}] = \begin{cases} \nabla_T^m \nabla_L^n M^{(k)}[(x^3)^s P_{\check{q}}^{\check{p}}], & t = T, l = L, \\ \nabla_T^m \{M^{(k)}[(x^3)^s P_{\check{q}}^{\check{p}}]\}^{(n)}, & t = T, l = 3, \\ \{M^{(k)}[(x^3)^s P_{\check{q}}^{\check{p}}]\}^{(m+n)}, & t = l = 3, \\ \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad k, s, n, m \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \quad (2.8.49)$$

Здесь $\nabla_t^m = \underbrace{\nabla_t \nabla_t \dots \nabla_t}_m$, а $\nabla_t^0 P_{\check{q}}^{\check{p}} = P_{\check{q}}^{\check{p}}$.

Следует заметить, что соотношения (теоремы) (2.8.46)–(2.8.49) справедливы при жонглировании индексами $\check{p}, \check{q}, \sim \sim \in \{-, \emptyset, +\}$. При этом (2.8.49) справедлива и в том случае, когда в качестве $(x^3)^s$ выбран произвольный полином относительно x^3 .

Теперь на основании (2.8.46)–(2.8.49) и соотношений (2.8.32)–(2.8.35), (2.8.38), (2.8.40), (2.8.42)–(2.8.45) для моментов компонент тензора второго ранга не представляет большого труда выписать выражения для моментов ковариантных производных от компонент тензора второго ранга. В самом деле, для этого достаточно в правых и левых частях в указанных выше соотношениях перед компонентами тензора написать оператор ковариантной производной, если индекс у оператора прописная латинская буква, принимающая значения 1, 2, а если индекс оператора равняется 3, то в правых частях следует писать оператор с индексом 3, а к левым частям применять оператор «штрих». При этом принадлежность оператора ковариантной производной к тому или иному семейству определяется семействами индексов у компонент тензора. Кроме того, кратность применяемых операторов не имеет значения. Очевидно, все это справедливо для компонент тензора любого ранга.

2.9 Представления и моменты k -го порядка некоторых дифференциальных операторов от тензора

Даны представления градиента, повторного градиента, дивергенции, ротора, градиента дивергенции, лапласиана, повторной дивергенции и найдены их моменты относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода.

2.9.1 Представления и момент k -го порядка градиента от тензора

Обозначим какой-нибудь тензор символом $\mathbb{F}(x', x^3)$. Тогда в силу определения градиента (набла-оператора) от тензора при НПОТТ

$$\overset{(\sim)}{\nabla} \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\check{p}} \partial_p \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\check{p}} \nabla_p \mathbb{F}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.9.1)$$

Отсюда при $\sim = \emptyset$ получаем

$$\nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^p \nabla_p \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{m}} g_{\bar{m}}^p \nabla_p \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P \nabla_P \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{m}} g_{\bar{m}}^3 \nabla_3 \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} (g_{\bar{M}}^P \nabla_P \mathbb{F} + g_{\bar{M}}^3 \nabla_3 \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \mathbb{F}.$$

Учитывая (1.5.64), последнее соотношение можно записать в виде

$$\nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P (\nabla_P - g_{\bar{P}}^3 \nabla_3) \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P (\nabla_P - x^3 g_{\bar{P}}^3 \nabla_3) \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \mathbb{F}.$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$N_p = \partial_p - g_p^3 \partial_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}^p N_p = \mathbf{r}^P N_P = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P, \quad N_3 = 0, \quad (2.9.2)$$

Тогда, очевидно, градиент тензора $\nabla \mathbb{F}$ представится в форме

$$\nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^P N_P \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \mathbb{F}. \quad (2.9.3)$$

Заметим, что, имея представление оператора градиента (2.9.3), легко получить представления операторов дивергенции и ротора. Ниже будут получены представления и этих операторов.

Теперь нетрудно найти искомые выражения для моментов градиентов от тензора. В самом деле по (2.9.1) с помощью определения (2.7.2), (2.7.3) и (2.7.14) находим

$$\underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}(\nabla \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{P}} \nabla_P \mathbb{F}^{(\bar{\sim})}(x') + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbb{F}'^{(\bar{\sim})}(x'), \quad \bar{\sim} \in \{-, +\}. \quad (2.9.4)$$

где, конечно, $\mathbb{F}'^{(\bar{\sim})}(x')$ определяется соотношением (2.7.14). Заметим, что в (2.7.14) оператор частной производной ∂_i можно заменить на оператор ковариантной производной ∇_i . Поэтому сослаться на (2.7.14) при получении (2.9.4) уместно.

Аналогично (2.9.4) на основании (2.7.2) и (2.7.3) из (2.9.3) получаем

$$\underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}(\nabla \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{M}} \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}(\nabla_3 \mathbb{F}). \quad (2.9.5)$$

Теперь, прежде чем получить выражения для правой части (2.9.5), заметим, что не представляет большого труда доказать справедливость следующих соотношений:

$$\underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^s N_P \mathbb{F}] = \nabla_P \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^3 \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}], \quad \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}(\nabla_3 \mathbb{F}) = \mathbb{F}'^{(\bar{\sim})}(x'), \quad (2.9.6)$$

$$\nabla_P \underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^s \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P^{(p-u)} \mathbb{F}, \quad u = s - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9.7)$$

$$\underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}'^{(p-v)}, \quad v = s + 1 - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9.8)$$

В самом деле, первое соотношение (2.9.6) доказывается на основании (2.7.3) и (2.9.2), а второе — с помощью (2.7.14). Соотношение (2.9.7) можно доказать непосредственным применением оператора ∇_P к (2.7.38), а (2.9.8) — применением оператора «штрих» к (2.7.38), заменяя (до или после применения оператора «штрих») n на k , а s на $s+1$. Выпишем еще соотношения, которые получаются из (2.9.8) применением оператора «штрих». Имеем

$$\underline{\mathbb{M}}^{(\bar{\sim})}[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}''^{(p-v)}, \quad v = s + 1 - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9.9)$$

Далее в силу (1.5.37), (2.7.3), первого соотношения (2.9.6), (2.9.7) и (2.9.8) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(g_M^P N_P \mathbb{F}) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} \mathbb{M}[(x^3)^s N_P \mathbb{F}] = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} \{ \nabla_P \mathbb{M}[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_P^{\bar{3}} \mathbb{M}'[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] \} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P^{(p-u)} \mathbb{F} - g_P^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p \mathbb{F}'^{(p-v)}, \quad u = s - k, \quad v = u + 1. \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Учитывая второе соотношение (2.9.6) и (2.9.10) в правой части (2.9.5), получим искомое выражение для момента k -го порядка градиента от произвольного тензора в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\nabla \mathbb{F}) &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P^{(p-u)} \mathbb{F} - g_P^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p \mathbb{F}'^{(p-v)} \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbb{F}'(x'), \\ u &= s - k, \quad v = u + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.9.11)$$

2.9.2 Представления и момент k -го порядка повторного градиента от тензора

Применяя к обеим частям (2.9.1) набла-оператор ∇^{\sim} , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, получим градиент от градиента тензора. А именно

$$\nabla^{\sim} \nabla^{\sim} \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{p}} \partial_p (\mathbf{r}^{\bar{q}} \partial_q \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{p}} \mathbf{r}^{\bar{q}} \nabla_p \partial_q \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{p}} \mathbf{r}^{\bar{q}} \nabla_p \nabla_q \mathbb{F}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\nabla^{\sim} \nabla^{\sim} \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} \nabla_3 \nabla_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_3 \mathbb{F}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.9.12)$$

Далее рассмотрим два случая: а) $\sim = \sim = -$, б) $\sim = \sim = \emptyset$.

а) При $\sim = \sim = -$ по (2.9.12) в силу (2.7.2), (2.7.3) и (2.7.20) находим искомое соотношение

$$\mathbb{M}(\nabla^{\sim} \nabla^{\sim} \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}^{(k)} + (\mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} \nabla_Q) \mathbb{F}'^{(k)} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbb{F}''^{(k)}, \quad (2.9.13)$$

где $\mathbb{F}''^{(k)}(x')$ определяется формулой (2.7.21).

б) При $\sim = \sim = \emptyset$ представление оператора повторного градиента, примененного к какому-нибудь тензору \mathbb{F} , можно получить как с помощью (2.9.3), так и из (2.9.12). В силу (2.9.3) находим

$$\text{gradgrad} \mathbb{F} = \nabla \nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_M^{\bar{P}} N_P (\nabla \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 (\nabla \mathbb{F}). \quad (2.9.14)$$

Нетрудно заметить, что с помощью третьего соотношения (2.9.2) получаем

$$\begin{aligned} N_P (\nabla \mathbb{F}) &= N_P (\mathbf{r}^{\bar{q}} \partial_q \mathbb{F}) = N_P (\mathbf{r}^{\bar{n}} g_n^{\bar{q}} \partial_q \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{n}} N_P (g_n^{\bar{q}} \partial_q \mathbb{F}) = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{N}} N_P (g_N^{\bar{q}} \partial_q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} N_P (\partial_3 \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{N}} N_P (g_N^{\bar{Q}} N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} N_P (\partial_3 \mathbb{F}). \end{aligned}$$

Представим первый член в правой части последнего соотношения в другой форме. В силу (2.9.2) находим

$$N_P (g_N^{\bar{Q}} N_Q \mathbb{F}) = N_P (g_N^{\bar{q}} N_q \mathbb{F}) = g_N^{\bar{q}} N_P (N_q \mathbb{F}) = g_N^{\bar{Q}} N_P (N_Q \mathbb{F}) + g_N^{\bar{3}} N_P (N_3 \mathbb{F}) = g_N^{\bar{Q}} N_P (N_Q \mathbb{F}).$$

Таким образом,

$$N_P(\nabla\mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{N}} N_P(g_{\bar{N}}^Q N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} N_P(\partial_3 \mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} N_P \partial_3 \mathbb{F}. \quad (2.9.15)$$

Аналогично в силу третьего соотношения (2.9.2) имеем

$$\partial_3(\nabla\mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{N}} \nabla_3(g_{\bar{N}}^Q N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2 \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2 \mathbb{F}. \quad (2.9.16)$$

Учитывая (2.9.15) и (2.9.16), из (2.9.14) получим следующие искомые представления оператора повторного градиента

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\mathbb{F} &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^P N_P(g_{\bar{N}}^Q N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P N_P \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{N}} \nabla_3(g_{\bar{N}}^Q N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2 \mathbb{F} = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P N_P \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3^2 \mathbb{F}, \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

где

$$\begin{aligned} N_P N_Q &= \nabla_P \nabla_Q - (g_P^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}} \nabla_3^2, \\ N_P N_Q &= \nabla_P \nabla_Q - (g_P^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}} \nabla_3^2 = \\ &= \nabla_P \nabla_Q - x^3 (g_P^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + (x^3)^2 g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}} \nabla_3^2. \end{aligned} \quad (2.9.18)$$

Соотношением (2.9.17) даны две формы представления оператора градиента градиента. Приведем еще более развернутые формы представления этого оператора. В этой связи заметим, что в силу (1.3.19) и (1.3.20) имеем

$$\mathbf{r}^P = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^{\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_P^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}}, \quad g_{\bar{M}}^{\bar{3}} = -g_P^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P = -x^3 g_{\bar{M}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}}^{\bar{3}},$$

с помощью которых находим

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\mathbb{F} &= \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F} = \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q [\nabla_P \nabla_Q - (g_P^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}} \nabla_3^2] \mathbb{F} + \\ &\quad + [\mathbf{r}^P \mathbf{r}^{\bar{3}} N_P \nabla_3 + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^Q \nabla_3 N_Q + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_3] \mathbb{F} = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q [\nabla_P \nabla_Q - (g_P^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_P^{\bar{3}} g_Q^{\bar{3}} \nabla_3^2] \mathbb{F} + \\ &\quad + [\mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{N}} g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_3] \mathbb{F}. \end{aligned} \quad (2.9.19)$$

Очевидно, второе равенство (2.9.19) можно еще получить из второго равенства (2.9.17), учитывая (2.9.18).

Имея представления оператора повторного градиента (2.9.17) и (2.9.19), не представляет труда из них получить представления лапласиана и дивергенции дивергенции. Ниже мы получим представления этих операторов.

На основании (2.9.17) нетрудно получить выражение для $\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\nabla\nabla\mathbb{F})$. В самом деле в силу (2.7.2) и (2.7.3) имеем

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\nabla\nabla\mathbb{F}) &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^P N_P \partial_3 \mathbb{F}) + \\ &\quad + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{N}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{M}} \mathbb{F}'', \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое получено в силу (2.7.20). Из последнего соотношения, учитывая

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^P N_P \partial_3 \mathbb{F}) = \overset{(k)}{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^P \nabla_3 N_P \mathbb{F}) = \overset{(k)}{\mathbb{M}}'(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F}), \quad (2.9.20)$$

справедливость которого можно доказать на основании (2.7.46) и (2.8.28), получим

$$\underline{\mathbb{M}}^{(k)}(\nabla\nabla\mathbb{F}) = \mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{N}}\underline{\mathbb{M}}(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F}) + (\mathbf{r}^{\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{3}} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{M}})\underline{\mathbb{M}}'(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F}) + \mathbf{r}^{\bar{3}}\mathbf{r}^{\bar{3}}\underline{\mathbb{M}}'', \quad k \geq 0. \quad (2.9.21)$$

Теперь нетрудно увидеть, что с помощью (2.7.3), теоремы (2.8.49) и (2.9.18) находим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s N_P N_Q \mathbb{F}] &= \nabla_P \nabla_Q \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}] - (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P) \underline{\mathbb{M}}'[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] + \\ &+ g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \underline{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+2} \mathbb{F}], \quad k, s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9.22)$$

Далее в силу (1.5.68), (2.7.3) и (2.9.22) получаем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F}) &= \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)_{\bar{M}\bar{N}}}^{\bar{P}\bar{Q}} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s N_P N_Q \mathbb{F}] = \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)_{\bar{M}\bar{N}}}^{\bar{P}\bar{Q}} \{ \nabla_P \nabla_Q \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}] - \\ &- (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P) \underline{\mathbb{M}}'[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \underline{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+2} \mathbb{F}] \}, \quad k, s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9.23)$$

Заметим, что, применяя оператор ковариантного дифференцирования к (2.9.7) и (2.9.8), получим

$$\nabla_P \nabla_Q \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}^{(p-u)}, \quad u = s - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0, \quad (2.9.24)$$

$$\nabla_P \underline{\mathbb{M}}'[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \nabla_P \mathbb{F}'^{(p-v)}, \quad v = s + 1 - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9.25)$$

Кроме того, меняя в (2.9.8) s и $s + 1$ и к полученному соотношению применяя оператор «штрих», в силу его линейности будем иметь

$$\underline{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+2} \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s+4} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \mathbb{F}''^{(p-w)}, \quad w = s + 2 - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2.9.26)$$

Учитывая (2.9.24)–(2.9.26), из (2.9.22) найдем искомое соотношение в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbb{F}] &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} B_{(s)_{\bar{M}\bar{N}}}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}^{(p-u)} - \\ &- \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} B_{(s)_{\bar{M}\bar{N}}}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P) \mathbb{F}'^{(p-v)} + \\ &+ g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+4} B_{(s)_{\bar{M}\bar{N}}}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \mathbb{F}''^{(p-w)}, \quad u = s - k, \quad v = s + 1 - k, \quad w = s + 2 - k, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9.27)$$

Далее на основании (1.5.37), (2.7.3), (2.8.49) и (2.9.2) находим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}(g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 \mathbb{F}) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)_{\bar{M}}}^{\bar{P}} \{ \nabla_P \underline{\mathbb{M}}'[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \underline{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] \}, \\ \underline{\mathbb{M}}^{(k)}[(x^3)^s N_P \nabla_3 \mathbb{F}] &= \nabla_P \underline{\mathbb{M}}'[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \underline{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}], \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (2.9.28)$$

где второе соотношение (2.9.28) непосредственно следует из первого. Его, конечно, можно доказать и с помощью (2.8.49) и (2.9.2).

Учитывая (2.9.9) и (2.9.25), из первого соотношения (2.9.28) получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}}^{(k)}(g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 \mathbb{F}) &= \underline{\mathbb{M}}'^{(k)}(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbb{F}) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s} A_{(s)_{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \mathbb{F}'^{(p-u)} - \\ &- g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2s+2} A_{(s)_{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}''^{(p-v)}, \quad u = s - k, \quad v = u + 1, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9.29)$$

Далее в силу (2.9.9) и (2.9.25) из второго соотношения (2.9.28) будем иметь

$$\mathbb{M}^{(k)}[(x^3)^s N_P \nabla_3 \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \mathbb{F}' - g_+^3 \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}''^{(p-v)}, \quad (2.9.30)$$

$$u = v - 1 = s - k, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Заметим, что при выводе (2.9.29) и (2.9.30) было использовано (2.9.25), в котором предварительно s была заменена на $s - 1$.

Учитывая (2.9.27) и (2.9.29), из (2.9.21) получим искомое выражение для $\mathbb{M}^{(k)}(\nabla \nabla \mathbb{F})$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(k)}(\nabla \nabla \mathbb{F}) = & \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{N}} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F} - \right. \\ & \left. - \sum_{p=0}^{2s+2} B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p (g_+^3 \nabla_Q + g_+^3 \nabla_P) \mathbb{F}' + g_+^3 g_+^3 \sum_{p=0}^{2s+4} B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \mathbb{F}'' \right] + \\ & + (\mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} 2^{-2s} C_{2s}^p \nabla_P \mathbb{F}' - g_+^3 \sum_{p=0}^{2s+2} A_{(s)M}^{\bar{P}} 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p \mathbb{F}'' \right] + \\ & + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbb{F}''^{(k)}, \quad u = s - k, \quad v = u + 1 = s + 1 - k, \quad w = u + 2 = s + 2 - k, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9.31)$$

2.9.3 Представления и моменты k -го порядка дивергенции и ротора от тензора

Получены представления дивергенций и роторов от вектора и тензора второго ранга, а также выражения для моментов этих операторов.

По определению [67, 209, 335] дивергенции вектора \mathbf{u} и тензора второго ранга \mathbf{P} при НПОТТ можно соответственно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r}^{\check{p}} \cdot \partial_p \mathbf{u} = \nabla_P u^{\check{p}} = \vartheta^{\check{p}} = \nabla_P u^{\check{P}} + \nabla_3 u^{\check{3}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{r}^{\check{p}} \cdot \partial_p \mathbf{P} = \nabla_P \mathbf{P}^{\check{p}} = \nabla_P \mathbf{P}^{\check{P}} + \nabla_3 \mathbf{P}^{\check{3}}, \quad \mathbf{P}^{\check{p}} = \mathbf{r}^{\check{p}} \mathbf{P}, \quad \check{p} \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.9.32)$$

Очевидно, следует рассматривать два случая: а) $\check{p} \in \{-, +\}$ и б) $\check{p} = \emptyset$.

а) При $\check{p} \in \{-, +\}$ по соотношениям (2.9.32) в силу определения (2.7.2), (2.7.3) и (2.8.27) получим соответственно

$$\begin{aligned} M^{(k)}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = M^{(k)}(\vartheta^{\check{p}}) = \vartheta^{\check{p}(k)} = \nabla_P u^{\check{P}} + u^{\check{3}'} \\ M^{(k)}(\nabla \cdot \mathbf{P}) = M^{(k)}(\mathbf{\Theta}) = \mathbf{\Theta}^{(k)} = \nabla_P \mathbf{P}^{\check{P}} + \mathbf{P}^{\check{3}'}, \quad \check{p} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.9.33)$$

б) При $\check{p} = \emptyset$ с целью получения представления дивергенции какого-нибудь тензора, ранг которого не меньше единицы, достаточно в (2.9.3) \mathbb{F} заменить на соответствующий тензор, а знаки тензорного умножения, которые в связи сокращением письма опущены, — на знаки однократного умножения. Поступая таким образом, для дивергенций вектора \mathbf{u} и тензора второго ранга \mathbf{P} получим следующие представления:

$$\begin{aligned} \theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r}^p \cdot \partial_p \mathbf{u} = \nabla_P u^p = g_M^P N_P u^{\bar{M}} + \partial_3 u^{\bar{3}}, \\ \mathbf{\Theta} \equiv \nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{r}^p \cdot \partial_p \mathbf{P} = \nabla_P \mathbf{P}^p = g_M^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}}. \end{aligned} \quad (2.9.34)$$

Применяя к соотношениям (2.9.34) оператор момента k -го порядка в силу (2.7.2), линейности оператора и (2.7.14) имеем

$$\begin{aligned} \theta = M^{(k)}(\theta) = M^{(k)}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = M^{(k)}(g_M^P N_P u^{\bar{M}}) + u^{\bar{3}'}, \\ \mathbf{\Theta} = M^{(k)}(\mathbf{\Theta}) = M^{(k)}(\nabla \cdot \mathbf{P}) = M^{(k)}(g_M^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}}) + \mathbf{P}^{\bar{3}'}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.9.10), для моментов k -го порядка вектора и тензора второго ранга получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \theta &= M(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P u_{\bar{M}}^{(p-u)} - g_{\bar{P}}^3 \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p u_{\bar{M}'}^{(p-v)} \right] + u_{\bar{3}'}^{(k)}, \\ u &= s - k, \quad v = u + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (2.9.35)$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathbf{M}(\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P \mathbf{P}_{\bar{M}}^{(p-u)} - g_{\bar{P}}^3 \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s+2}^p \mathbf{P}_{\bar{M}'}^{(p-v)} \right] + \mathbf{P}_{\bar{3}'}^{(k)}, \\ u &= s - k, \quad v = u + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.9.36)$$

Заметим, что соотношения (2.9.35) и (2.9.36) проще всего получить из (2.9.11) с помощью указанной выше замены.

Нетрудно получить представления и для роторов вектора \mathbf{u} и тензора второго ранга $\underline{\mathbf{P}}$ при новой параметризации области тонкого тела. В самом деле, в силу определения ротора имеем

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{\nabla} \times \mathbf{u} &= \mathbf{r}^{\check{p}} \times \partial_p \mathbf{u} = \mathbf{r}^{\check{p}} \times \mathbf{r}^{\check{p}} \nabla_P u_{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\check{p}} \times \mathbf{r}^{\bar{m}} \nabla_P u_{\bar{m}}, \\ \overset{\sim}{\nabla} \times \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{r}^{\check{p}} \times \partial_p \underline{\mathbf{P}} = \mathbf{r}^{\check{p}} \times \mathbf{r}^{\check{p}} \nabla_P \mathbf{P}_{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\check{p}} \times \mathbf{r}^{\bar{m}} \nabla_P \mathbf{P}_{\bar{m}}, \quad \mathbf{P}_{\bar{m}} = \mathbf{r}_{\check{m}} \cdot \underline{\mathbf{P}}, \quad \sim, \check{\cdot} \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.9.37)$$

Далее рассмотрим случай, когда $\sim = \emptyset$, т.к. рассмотрение остальных случаев не представляет большого труда. При $\sim = \emptyset$, конечно, искомые представления можно получить из (2.9.37), однако мы их получим из (2.9.3). В этой связи достаточно в (2.9.3) \mathbb{F} заменить на соответствующий тензор, ранг которого не меньше единицы, а знаки тензорного умножения — на знаки векторного умножения. В самом деле, например, для вектора \mathbf{u} и тензора второго ранга $\underline{\mathbf{P}}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u} &= \nabla \times \mathbf{u} = C^{\bar{L}\bar{M}} (g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{3}} - \nabla_3 u_{\bar{M}}) \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \\ \text{rot } \underline{\mathbf{P}} &= \nabla \times \underline{\mathbf{P}} = C^{\bar{L}\bar{M}} (g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}_{\bar{3}} - \nabla_3 \mathbf{P}_{\bar{M}}) \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \end{aligned} \quad (2.9.38)$$

Применяя оператор моментов k -го порядка к (2.9.38) на основании (2.7.2), (2.7.3) и (2.7.14) находим

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\text{rot } \mathbf{u}) &= \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \times \mathbf{u}) = C^{\bar{L}\bar{M}} [M(g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{3}}) - u_{\bar{M}}'] \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} M(g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{N}}) \mathbf{r}_{\bar{3}}, \\ \overset{(k)}{\underline{\mathbf{M}}}(\text{rot } \underline{\mathbf{P}}) &= \overset{(k)}{\underline{\mathbf{M}}}(\nabla \times \underline{\mathbf{P}}) = C^{\bar{L}\bar{M}} [M(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}_{\bar{3}}) - \mathbf{P}_{\bar{M}}'] \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} M(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}_{\bar{N}}) \mathbf{r}_{\bar{3}}. \end{aligned} \quad (2.9.39)$$

Видно, что в правые части (2.9.39) входят моменты, которые определяются с помощью (2.9.10). Выписывая эти моменты и подставляя их в (2.9.39), получим искомые соотношения. Однако эти соотношения проще всего получить из (2.9.11) указанной выше заменой. Очевидно, они будут громоздкими. Поэтому с целью сокращения письма их выписывать не будем.

2.9.4 Представления и момент k -го порядка градиента дивергенции от тензора

Рассмотрим моменты градиентов дивергенции вектора и тензора второго ранга при новой параметризации области тонкого тела. Используя представление (2.9.3) и обозначения (2.9.34), будем иметь

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \theta = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P \theta + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \theta, \quad \nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla \Theta = \mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P \Theta + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \Theta. \quad (2.9.40)$$

Теперь, поступая так же, как при получении (2.9.11), нетрудно получить искомые выражения для моментов. Однако эти соотношения можно получить и другим путем. В самом деле, для этого достаточно в (2.9.11) \mathbb{F} заменить просто на θ и Θ соответственно, а для получения окончательных выражений в полученных соотношениях следует учитывать выражения для $\overset{(k)}{\theta}$ и $\overset{(k)}{\Theta}$ по (2.9.35) и (2.9.36) соответственно. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Очевидно, при необходимости осуществить это не представляет большого труда.

Теперь дадим еще другие, быть может, более удобные для дальнейшего использования представления градиентов дивергенций вектора и тензора второго ранга при новой параметризации области тонкого тела. Эти представления легко получить из представлений повторного градиента (2.9.17) и (2.9.19), если в них заменить \mathbb{F} на соответствующий тензор, а также в каждом члене второй знак тензорного умножения (слева направо) — на знак однократного умножения. В результате таких замен, например, из второго представления (2.9.17) находим

$$\begin{aligned}\nabla\theta &= \mathbf{r}^{\bar{m}} g_{\bar{m}}^p g_{\bar{n}}^q \nabla_P \nabla_q u^{\bar{n}} = \mathbf{r}^{\bar{M}} \left(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q u^{\bar{N}} + g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 u^{\bar{3}} \right) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \left(g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q u^{\bar{N}} + \nabla_3^2 u^{\bar{3}} \right), \\ \nabla\Theta &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \left(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbf{P}^{\bar{N}} + g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} \right) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \left(g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q \mathbf{P}^{\bar{N}} + \nabla_3^2 \mathbf{P}^{\bar{3}} \right) = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{l}} \left(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q P^{\bar{N}\bar{l}} + g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 P^{\bar{3}\bar{l}} \right) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}_{\bar{l}} \left(g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q P^{\bar{N}\bar{l}} + \nabla_3^2 P^{\bar{3}\bar{l}} \right).\end{aligned}\tag{2.9.41}$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$\nabla_3 P^{\tilde{m}\tilde{n}} = \partial_3 P^{\tilde{m}\tilde{n}}, \quad \nabla_3 \nabla_I P^{\tilde{m}\tilde{n}} = \nabla_I \nabla_3 P^{\tilde{m}\tilde{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, +\},$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами \tilde{m} , \tilde{n} и дающие возможность во втором соотношении (2.9.41) оператор ковариантной производной ∇_3 заменить на оператор частной производной ∂_3 . В силу (2.8.17) то же самое относится и к первому соотношению (2.9.41).

Теперь не представляет большого труда найти искомые выражения для моментов $\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla\theta)$ и $\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla\Theta)$. В самом деле, с помощью (2.7.2), (2.7.3) и (2.7.20), (2.9.20) из (2.9.41) получим

$$\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla\theta) = \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[M \left(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q u^{\bar{N}} \right) + M' \left(g_{\bar{M}}^P N_P u^{\bar{3}} \right) \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \left[M' \left(g_{\bar{N}}^Q N_Q u^{\bar{N}} \right) + u^{\bar{3}''} \right],\tag{2.9.42}$$

$$\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla\Theta) = \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\mathbf{M} \left(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q \mathbf{P}^{\bar{N}} \right) + \mathbf{M}' \left(g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{3}} \right) \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \left[\mathbf{M}' \left(g_{\bar{N}}^Q N_Q \mathbf{P}^{\bar{N}} \right) + \mathbf{P}^{\bar{3}''} \right].\tag{2.9.43}$$

Видно, что в правые части (2.9.42) и (2.9.43) входят моменты, выражения для которых нетрудно найти на основании (2.9.27) и (2.9.29). Однако заметим, что те же самые соотношения проще получить из (2.9.31) посредством указанной выше в рассматриваемом случае заменой. Очевидно, выражения для искомым моментов будут громоздкими, в связи с чем их выписывать не будем.

2.9.5 Представления и момент k -го порядка оператора Лапласа от тензора

Представления лапласиана от какого-нибудь тензора можно легко получить из (2.9.17) и (2.9.19). С этой целью достаточно в каждом члене этих соотношений первый знак тензорного умножения (слева направо) заменить на знак однократного умножения. Если

при этом $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$, то $g^{\bar{M}\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{M}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{3}} = 0$ и тогда, например, из второго соотношения (2.9.17) получим

$$\Delta \mathbb{F} = \nabla \cdot \nabla \mathbb{F} = \nabla^2 \mathbb{F} = g^{PQ} N_P N_Q + g^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \mathbb{F} = g^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + g^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \mathbb{F}. \quad (2.9.44)$$

Аналогично (2.9.44) из второго соотношения (2.9.19) находим

$$\Delta \mathbb{F} = g^{pq} \nabla_p \nabla_q \mathbb{F} = g^{PQ} [\nabla_P \nabla_Q - x^3 (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_{\bar{3}}) + (x^3)^2 g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2] \mathbb{F} + g^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2 \mathbb{F}. \quad (2.9.45)$$

Нетрудно получить выражения и для момента k -го порядка лапласиана от тензора. Его можно найти как из (2.9.44), так и из (2.9.45). С целью нахождения выражения указанного выше момента, учитывая (1.5.65), перепишем (2.9.45) в виде

$$\Delta \mathbb{F} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} [(x^3)^s \nabla_P \nabla_Q - (x^3)^{s+1} (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_{\bar{3}}) + (x^3)^{s+2} g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2] \mathbb{F} + g^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2 \mathbb{F}. \quad (2.9.46)$$

Теперь, применяя оператор момента k -го порядка к (2.9.46), в силу (2.7.2), (2.7.3), (2.7.20) и (2.9.20) получим

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\Delta \mathbb{F}) = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} \left\{ \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^s \nabla_P \nabla_Q \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}'[(x^3)^{s+1} \nabla_Q \mathbb{F}] + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+2} \mathbb{F}] \right\} + g^{\bar{3}\bar{3}} \mathbb{F}''', \quad k \geq 0.$$

Отсюда с помощью (2.8.49) имеем

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\Delta \mathbb{F}) = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} \left\{ \nabla_P \nabla_Q \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^s \mathbb{F}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_Q \overset{(k)}{\mathbb{M}}'[(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \overset{(k)}{\mathbb{M}}''[(x^3)^{s+2} \mathbb{F}] \right\} + g^{\bar{3}\bar{3}} \mathbb{F}''', \quad k \geq 0. \quad (2.9.47)$$

Учитывая (2.9.24), (2.9.25) и (2.9.26), из (2.9.47) найдем искомое соотношение в виде

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\Delta \mathbb{F}) = g^{\bar{M}\bar{Q}} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{2s} (s+1) 2^{-2s} A_{(s)M}^{\bar{P}} C_{2s}^p \nabla_P \nabla_Q \overset{(p-v)}{\mathbb{F}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{-2s+2} (s+1) 2^{-2(s+1)} C_{2s+2}^p A_{(s)M}^{\bar{P}} \nabla_Q \overset{(p-v)}{\mathbb{F}}' + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{-2s+4} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} 2^{-2(s+2)} C_{2s+4}^p \overset{(p-w)}{\mathbb{F}}'' \right] + g^{\bar{3}\bar{3}} \mathbb{F}''',$$

$$u = s - k, \quad v = u + 1 = s + 1 - k, \quad w = u + 1 = s + 2 - k, \quad k \geq 0. \quad (2.9.48)$$

Заметим, что выражения (2.9.48) для лапласиана, конечно, можно было получить и из (2.9.31) с помощью указанной выше замены и равенства

$$g^{\bar{M}\bar{N}} B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} = g^{\bar{Q}\bar{N}} A_{(s)M}^{\bar{P}} = g^{\bar{P}\bar{N}} A_{(s)N}^{\bar{Q}},$$

доказательства которого не представляет труда.

2.9.6 Представления и момент k -го порядка повторной дивергенции тензора

Ограничимся рассмотрением тензора второго ранга $\underline{\mathbf{P}}$. Хотя, можно рассматривать любой тензор, ранг которого не меньше двух.

Представления повторной дивергенции от произвольного тензора, ранг которого не меньше двух, можно найти с помощью представлений повторного градиента того же тензора (2.9.17) и (2.9.19). Для этого достаточно в левых частях соотношений (2.9.17) и (2.9.19) знак тензорного умножения между вторым набла-оператором (слева направо) и тензором заменить на знак двукратного умножения, а в правых частях в каждом члене после второго базисного вектора (слева направо) вместо знака тензорного умножения поставить знак двукратного умножения. Рассматривая тензор второго ранга $\underline{\mathbf{P}}$ и производя указанную выше замену, например, из вторых представлений (2.9.17) и (2.9.19) находим представления

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \operatorname{div} \underline{\mathbf{P}} &= \nabla \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla \nabla \otimes \underline{\mathbf{P}}^T = \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}) = \nabla_p \nabla_q P^{qp} = g_{\bar{m}}^p g_{\bar{n}}^q \nabla_p \nabla_q P^{\bar{n}\bar{m}} = \\
 &= g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q P^{\bar{N}\bar{M}} + g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 P^{\bar{3}\bar{M}} + g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q P^{\bar{N}\bar{3}} + \nabla_3^2 P^{\bar{3}\bar{3}} = \\
 &= g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q [\nabla_P \nabla_Q - (g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \nabla_3^2] P^{\bar{N}\bar{M}} + \\
 &+ g_{\bar{M}}^P N_P \nabla_3 P^{\bar{3}\bar{M}} + g_{\bar{N}}^Q \nabla_3 N_Q P^{\bar{N}\bar{3}} + \nabla_3^2 P^{\bar{3}\bar{3}}.
 \end{aligned} \tag{2.9.49}$$

На основании определения (2.7.2), (2.7.3), (2.7.20) и (2.9.20) из (2.9.49) получаем

$$M(\nabla \nabla \otimes \underline{\mathbf{P}}^T) = M(g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q P^{\bar{N}\bar{M}}) + M'[g_{\bar{M}}^P N_P (P^{\bar{3}\bar{M}} + P^{\bar{N}\bar{3}})] + P^{\bar{3}\bar{3}''}, \quad k \geq 0. \tag{2.9.50}$$

Окончательное выражение для момента k -го порядка повторной дивергенции тензора второго ранга найдем из (2.9.50), учитывая (2.9.27) и (2.9.29). Проще всего искомое выражение можно получить из (2.9.31) с помощью указанной выше заменой знаков умножения. Видно, что получается громоздкое выражение. Поэтому выписывать его не будем. При необходимости это сделать нетрудно.

Следует заметить, что посредством (2.9.17) и (2.9.19) легко получить представления операторов повторного ротора тензора и ротора транспонированного ротора тензора второго ранга (тензора несовместности), а моменты же k -го порядка этих операторов можно найти с помощью (2.9.31), заменяя знаки тензорного умножения на знаки векторного умножения соответствующим образом. Заметим также, что материал этой главы изложен в [303].

Глава 3

Представления основных уравнений и определяющих соотношений механики деформируемого твердого тела для теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач

Приведены представления уравнений и определяющих соотношений (ОС) МДТТ как для классической, так и для микрополярной теорий тонких тел при НПОТТ, а также уравнения притока тепла и закона теплопроводности Фурье. В частности, выписаны трехмерные постановки задач, уравнений в перемещениях (Ламе) и уравнений в перемещениях и вращениях микрополярной теории как при изотермических, так и неизотермических процессах при новой параметризации области тонкого тела. Выписаны законы термодинамики и теплопроводности Фурье, а также уравнение притока тепла, граничные и начальные условия и даны их представления при новой параметризации.

Далее из представленных уравнений (движения, притока тепла и др.) и ОС (законов Гука и теплопроводности Фурье) при новой параметризации области тонкого тела, используя рекуррентные соотношения для систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода, а также выражения для моментов величин, выражений и дифференциальных операторов из второй главы, получены соответствующие уравнения и ОС в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах. При этом получены системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах как классической (в тензоре напряжений), так и микрополярной (в тензорах напряжений и моментных напряжений) механики деформируемого твердого тонкого тела (МДТТТ). Выведены системы уравнений в перемещениях, перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах как при изотермических, так и неизотермических процессах, а также системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах.

Получены ОС классической и микрополярной теорий и закон теплопроводности Фурье нулевого приближения и приближения порядка r в моментах как для однородного, так и неоднородного относительно x^3 материала. Получены выражения граничных условий физического и теплового содержаний (первого, второго и третьего родов) на лицевых поверхностях и выведены системы уравнений для нахождения векторов-функций $\mathbf{u}^{(-)}$, $\mathbf{u}^{(+)}$, $\varphi^{(-)}$, $\varphi^{(+)}$ и функций $T^{(-)}$, $T^{(+)}$, применяемых при представлении ОС в нормированных моментах. Даны определения систем уравнений в моментах приближения (r, N) , а также систем законов Гука и теплопроводности Фурье в нормированных моментах приближения (r, N) и в моментах приближения (r, N) . Получены граничные условия физического

и теплового (второго и третьего родов) содержаний на граничном контуре в моментах приближения (r, N) . Кроме того, выписаны кинематические и тепловые (первого рода) граничные условия на контуре и начальные условия в моментах приближения N .

Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) для тел с одним малым размером ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах указанного выше приближения. Рассмотрены частные случаи постановок задач. Обсуждены способы получения некоторых частных случаев постановок задач из них.

Следует заметить, что с помощью рассматриваемого метода построения теории тонких тел получается бесконечная система уравнений, которая имеет то преимущество, что она содержит величины, зависящие от двух переменных – гауссовых координат x^1 и x^2 базовой поверхности. Итак, уменьшение числа независимых переменных на единицу достигается ценой увеличения количества уравнений до бесконечности, что разумеется, имеет свои очевидные практические неудобства. В этой связи сделан следующий необходимый шаг для упрощения проблемы. Производится редукция бесконечной системы к конечной. При этом приводится несколько различных способов такой редукции. После редукции к конечной системе рассматриваемую задачу можно решить приближенно с соответствующими граничными условиями на граничном контуре $\partial S^{(-)}$ базовой поверхности $S^{(-)}$. При этом степень приближения шаг за шагом можно увеличить. Здесь возникает известная проблема выполнения граничных условий на лицевых поверхностях. В рассматриваемой теории тонких тел в теоретически возможных случаях удается и эту проблему решить. При упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной для любого приближенного решения построено корректирующее слагаемое, учет которого обеспечивает выполнение граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела. В частности, построены корректирующие слагаемые, обеспечивающие выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях, а также при постановках задач в тензорах напряжений и моментных напряжениях.

3.1 Различные представления уравнений движения механики деформируемого твердого тела при НПОТТ

Даны различные формы записи уравнений движения классической и микрополярной МДТТ при НПОТТ.

3.1.1 Представления уравнений движения классической МДТТ при НПОТТ

Как известно [209, 423, 425], уравнения движения классической МДТТ в тензорах напряжений в актуальной и отсчетной конфигурациях представляются в виде¹

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{P}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{F} = \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.1.1)$$

где \mathbf{P} – тензор напряжений Коши, $\overset{\circ}{\mathbf{P}} = \sqrt{g g^{-1}} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{P}$ – тензор напряжений Пиолы, ρ ($\overset{\circ}{\rho}$) – плотность материала в актуальной (отсчетной) конфигурации, \mathbf{F} – плотность массовой силы, \mathbf{u} – вектор перемещения, $\nabla = \mathbf{r}^i \partial_i$ – набла оператор в актуальной конфигурации, $\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \partial_i$ – набла оператор в отсчетной конфигурации. В дальнейшем нам понадобятся представления уравнений (3.1.1) в удобных для нас формах. Прежде чем получить эти представления, заметим, что нет надобности в отдельности заниматься уравнениями

¹Величины, относящиеся к отсчетной (недеформированной) конфигурации снабжаются сверху кружком, а к актуальной (деформируемой) конфигурации используются без кружка.

(3.1.1). Так как, если получим нужные представления для первого векторного уравнения (3.1.1), то из них аналогичные представления для второго векторного уравнения получаются, снабжая соответствующие величины в этих представлениях кружком сверху.

Итак, получим различные представления для первого векторного уравнения (3.1.1) при новой параметризации (1.1.1) области тонкого тела. В силу первого соотношения (1.1.27), очевидно, для тензора напряжений $\underline{\mathbf{P}}$ имеем представления

$$\underline{\mathbf{P}} = P^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \mathbf{P}^{\tilde{p}}, \quad \mathbf{P}^{\tilde{p}} = P^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (3.1.2)$$

где $\mathbf{P}^{\tilde{p}}$, $p = 1, 2, 3$, называются контравариантными составляющими тензора напряжений. Нетрудно заметить, что в силу (1.1.35), (1.2.6) и (3.1.2) дивергенция тензора напряжений можно представить в виде

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla_p (g_m^p \mathbf{P}^{\tilde{m}}) = g_m^p \nabla_p \mathbf{P}^{\tilde{m}} = \nabla_p \mathbf{P}^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial(\sqrt{g} \mathbf{P}^p), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда при $\sim = -$ имеем

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla_p (g_m^p \mathbf{P}^{\tilde{m}}) = g_m^p \nabla_p \mathbf{P}^{\tilde{m}} = \nabla_p \mathbf{P}^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial(\sqrt{g} \mathbf{P}^p) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial(\sqrt{g} g_m^p \mathbf{P}^{\tilde{m}}). \quad (3.1.3)$$

Не представляет большого труда убедиться в том, что из (3.1.3) получаем следующие выражения для дивергенции тензора напряжений:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla_P (g_M^P \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \partial_3 (g_M^3 \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}}, \quad (3.1.4)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = g_M^P \nabla_P \mathbf{P}^{\tilde{M}} + g_M^3 \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}}, \quad (3.1.5)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{\sqrt{g^{(-)} \vartheta^{(-)}}} \partial_P (\sqrt{g^{(-)} \vartheta^{(-)}} \mathbf{P}^P) + \partial_3 (\vartheta^{(-)} \mathbf{P}^3). \quad (3.1.6)$$

При написании (3.1.6) было учтено (1.1.16), когда $\sim = -$. В силу (3.1.4)–(3.1.6) первое уравнение (3.1.1) представится в следующих формах:

$$\nabla_P (g_M^P \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \partial_3 (g_M^3 \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.1.7)$$

$$g_M^P \nabla_P \mathbf{P}^{\tilde{M}} + g_M^3 \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g^{(-)} \vartheta^{(-)}}} \partial_P (\sqrt{g^{(-)} \vartheta^{(-)}} \mathbf{P}^P) + \partial_3 (\vartheta^{(-)} \mathbf{P}^3) + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{F} = \rho \vartheta^{(-)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.9)$$

С помощью вторых соотношений первой и третьей строк (1.3.20), например уравнение (3.1.8) можно представить в виде

$$g_M^P (\nabla_P \mathbf{P}^{\tilde{M}} - g_P^{\tilde{3}} \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.10)$$

Отсюда, очевидно, в свою очередь получаем

$$A_M^P (\nabla_P \mathbf{P}^{\tilde{M}} - g_P^{\tilde{3}} \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{M}}) + \vartheta^{(-)} \partial_3 \mathbf{P}^{\tilde{3}} + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{F} = \rho \vartheta^{(-)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.11)$$

Теперь заметить, что посредством введенного дифференциального оператора (2.9.2) уравнения (3.1.10) и (3.1.11) можно представить следующим образом:

$$g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad A_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \vartheta \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \vartheta \mathbf{F} = \rho \vartheta \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.12)$$

Заметим, что представления (3.1.12) сразу можно было получить, учитывая второе соотношение (2.9.34).

Приведем (3.1.8) еще к другому виду. В этой связи преобразуем $\nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}}$. На основании второго соотношения (1.4.7) при $\smile = -$ имеем

$$\nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} = \nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) \mathbf{P}^{\bar{3}}, \quad \text{где} \quad \nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} = \partial_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \mathbf{P}^{\bar{N}} \Gamma_{\bar{N}P}^{\bar{M}}. \quad (3.1.13)$$

Здесь ∇_P^0 – поверхностный оператор ковариантного дифференцирования или оператор ковариантного дифференцирования относительно $S^{(-)}$ -семейства базисов.

Учитывая первое соотношение (3.1.13) в (3.1.8), получим искомый вид этого уравнения

$$g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) \mathbf{P}^{\bar{3}}] + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.1.14)$$

Аналогично (3.1.14) из (3.1.11) получаем

$$A_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) \mathbf{P}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{M}}] + \vartheta \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \vartheta \mathbf{F} = \rho \vartheta \mathbf{a}. \quad (3.1.15)$$

Не представляет большого труда представить в компонентах, например, (3.1.8) и (3.1.14). В самом деле, из (3.1.8) легко находим

$$g_{\bar{M}}^P \nabla_P P^{\bar{M}\bar{n}} + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 P^{\bar{M}\bar{n}} + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{n}} + \rho F^{\bar{n}} = \rho a^{\bar{n}}. \quad (3.1.16)$$

Для того, чтобы представить (3.1.14) в компонентах необходимо преобразовать $\nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}}$. В силу (1.4.7) при $\smile = -$ имеем

$$\nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} = [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}}] \mathbf{r}_{\bar{N}} + (\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + \Gamma_{\bar{L}\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{L}} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{3}}) \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad (3.1.17)$$

где

$$\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} = \partial_P P^{\bar{M}\bar{N}} + P^{\bar{L}\bar{N}} \Gamma_{\bar{L}P}^{\bar{M}} + P^{\bar{M}\bar{L}} \Gamma_{\bar{L}P}^{\bar{N}}, \quad \nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} = \partial_P P^{\bar{M}\bar{3}} + P^{\bar{L}\bar{3}} \Gamma_{\bar{L}P}^{\bar{M}},$$

а $\Gamma_{\bar{L}\bar{P}}^{\bar{3}}$ определяется по первому соотношению (1.4.7) при $\smile = -$.

С помощью (3.1.17) из (3.1.14) получим искомые представления в виде

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{N}}] + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 P^{\bar{M}\bar{N}} + \\ + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{N}} + \rho F^{\bar{N}} = \rho a^{\bar{N}}, \\ g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + \Gamma_{\bar{L}\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{L}} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{3}}] + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 P^{\bar{M}\bar{3}} + \\ + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{3}} + \rho F^{\bar{3}} = \rho a^{\bar{3}}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Если вектор \mathbf{h} перпендикулярен к базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ ($\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$), то из первого соотношения (1.4.7), как легко усмотреть, при $\smile = -$ имеем

$$\Gamma_{\bar{L}\bar{P}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{L}\bar{P}}^- - g_{\bar{L}\bar{P}}^+) = g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{P}\bar{L}}^- - g_{\bar{P}\bar{L}}^+) = h^{-2}(g_{\bar{P}\bar{L}}^- - g_{\bar{P}\bar{L}}^+). \quad (3.1.19)$$

Учитывая (3.1.19), уравнения (3.1.18), можно записать в форме

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{N}}] + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 P^{\bar{M}\bar{N}} + \\ + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{N}} + \rho F^{\bar{N}} = \rho a^{\bar{N}}, \\ g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{P}\bar{L}}^- - g_{\bar{P}\bar{L}}^+) P^{\bar{M}\bar{L}} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{3}}] + g_{\bar{M}}^3 \partial_3 P^{\bar{M}\bar{3}} + \\ + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{3}} + \rho F^{\bar{3}} = \rho a^{\bar{3}}, \quad \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае ($\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$) в силу (1.3.10) и вторых соотношений второй строки (1.3.26) и третьей строки (1.3.27) имеют место соотношения

$$g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = h^{-1} \partial_P h, \quad g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = x^3 g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = x^3 h^{-1} \partial_P h, \quad g_{\bar{M}}^3 = -g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P = -x^3 g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^P, \quad (3.1.21)$$

которые следует учесть в уравнениях (3.1.20). С целью сокращения письма с учетом (3.1.21) уравнения (3.1.20) выписывать не будем.

Если $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$ и $h = |\mathbf{h}| = \text{const}$, то, как это следует из (3.1.21), $g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = 0$, $g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = 0$, $g_{\bar{M}}^3 = 0$ (см. (1.5.5) и (1.5.6)) и уравнения (3.1.8) и (3.1.20) представляются соответственно в виде

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{a}, \\ g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{N}}] + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{N}} + \rho F^{\bar{N}} = \rho a^{\bar{N}}, \\ g_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{P}\bar{L}}^- - g_{\bar{P}\bar{L}}^+) P^{\bar{M}\bar{L}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{3}}] + \partial_3 P^{\bar{3}\bar{3}} + \rho F^{\bar{3}} = \rho a^{\bar{3}}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (3.1.20) можно записать в форме

$$\begin{aligned} A_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \partial_3 P^{\bar{M}\bar{N}}] + \\ + \vartheta \partial_3 P^{\bar{3}\bar{N}} + \rho \vartheta F^{\bar{N}} = \rho \vartheta \frac{\partial^2 u^{\bar{N}}}{\partial t^2}, \\ A_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{P}\bar{N}}^- - g_{\bar{P}\bar{N}}^+) P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}}^{\bar{3}} P^{\bar{M}\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \partial_3 P^{\bar{M}\bar{3}}] + \\ + \vartheta \partial_3 P^{\bar{3}\bar{3}} + \rho \vartheta F^{\bar{3}} = \rho \vartheta \frac{\partial^2 u^{\bar{3}}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Отсюда, при $h = |\mathbf{h}| = \text{const}$ получаем

$$\begin{aligned} A_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{N}}) P^{\bar{M}\bar{3}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{N}}] + \vartheta \partial_3 P^{\bar{3}\bar{N}} + \rho \vartheta F^{\bar{N}} = \rho \vartheta \frac{\partial^2 u^{\bar{N}}}{\partial t^2}, \\ A_{\bar{M}}^P [\nabla_P^0 P^{\bar{M}\bar{3}} + g^{\bar{3}\bar{3}}(g_{\bar{P}\bar{N}}^- - g_{\bar{P}\bar{N}}^+) P^{\bar{M}\bar{N}} + (g_{\bar{P}}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{M}}) P^{\bar{3}\bar{3}}] + \vartheta \partial_3 P^{\bar{3}\bar{3}} + \rho \vartheta F^{\bar{3}} = \rho \vartheta \frac{\partial^2 u^{\bar{3}}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Уравнения (3.1.4)–(3.1.12), (3.1.14)–(3.1.16), (3.1.18), (3.1.20) и (3.1.22)–(3.1.24) являются различными формами представления уравнений классической МДТТ (первого векторного уравнения (3.1.1)) при рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Назовем их различными представлениями уравнений классической МДТТ при НПОТТ.

Следует заметить, что исходя из различных представлений уравнений движения при НПОТТ и используя разложения величин, входящих в эти уравнения, в ряд по системам ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева и др.), получим различные варианты уравнений тонких тел относительно моментов величин, входящих в рассматриваемые уравнения. Ниже эти уравнения мы получим, исходя, например из представлений (3.1.9) и (3.1.12). Так как из остальных представлений соответствующие им уравнения в моментах аналогично выводятся.

Заметим также, что при новой параметризации отсчетной конфигурации области тонкого тела аналогичные (3.1.4)–(3.1.12), (3.1.14)–(3.1.16), (3.1.18), (3.1.20) и (3.1.22)–(3.1.24) представления для второго векторного уравнения (3.1.1) получаются из них, если входящие в эти уравнения величины, заменим соответствующими величинами, снабженными кружком сверху (над \mathbf{F} , \mathbf{u} и \mathbf{a} кружок не пишется). Аналогично получаются и другие соотношения для отсчетной конфигурации области тонкого тела.

3.1.2 Представления уравнений движения микрополярной МДТТ при НПОТТ

Известно [22, 23, 196, 307, 319], что в актуальной конфигурации уравнения движения в тензорах напряжений и моментных напряжений имеют вид

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.1.25)$$

В отсчетной конфигурации аналогично второму векторному уравнению (3.1.1) классической МДТТ они представляются в форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{F} = \overset{\circ}{\rho} \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} + \overset{\circ}{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{m} = \overset{\circ}{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.1.26)$$

Здесь $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры истинных напряжений и моментных напряжений, а $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} = \sqrt{g \overset{\circ}{g}^{-1}} \nabla \mathbf{r}^T$. $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}}$ и $\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \sqrt{g \overset{\circ}{g}^{-1}} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры условных напряжений и моментных напряжений, $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{C}}}$ — дискриминантный тензор (тензор третьего ранга) [67], \mathbf{u} — вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор вращений, ρ — плотность материала в актуальной конфигурации, \mathbf{F} — плотность массовой силы, \mathbf{m} — плотность массового момента, знак "Т" в верхнем правом углу у величин означает операцию транспонирования. Заметим, что представления (3.1.25) и (3.1.26) при новой параметризации области тонкого тела будут отличаться друг от друга только тем, что в отсчетной конфигурации над соответствующими величинами надо ставить кружок. В этой связи нет надобности по отдельности для (3.1.25) и (3.1.26) выписать эти представления. Поэтому, как и выше, в рассматриваемом случае самые необходимые представления выпишем для (3.1.25). Так как в левых частях (3.1.25) первые слагаемые — дивергенции тензоров второго ранга, а из предыдущего подраздела нам уже известны различные представления дивергенции тензора второго ранга и тем самым получены представления уравнений классической МДТТ, то, пользуясь этими представлениями, нетрудно получить аналогичные представления для (3.1.25). В самом деле, например аналогичные (3.1.9) и (3.1.12) представления будут иметь вид

$$\begin{aligned} \left(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}}\right) \partial_P \left(\sqrt{\overset{(-)}{g}} \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{P}^P\right) + \partial_3 \left(\overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{P}^3\right) + \rho \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{F} &= \rho \overset{(-)}{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \left(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}}\right) \partial_P \left(\sqrt{\overset{(-)}{g}} \overset{(-)}{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^P\right) + \partial_3 \left(\overset{(-)}{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^3\right) + \overset{\circ}{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \left(\overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}\right) + \rho \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{m} &= \overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

$$g_{\underline{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_{\underline{M}}^P N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \quad (3.1.28)$$

$$\begin{aligned} A_{\underline{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \vartheta^{(-)} \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{F} &= \rho \vartheta^{(-)} \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ A_{\underline{M}}^P N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \vartheta^{(-)} \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes (\vartheta^{(-)} \underline{\mathbf{P}}) + \rho \vartheta^{(-)} \mathbf{m} &= \vartheta^{(-)} \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Нетрудно заметить, что

$$g_{\underline{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} = g_{\underline{m}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{m}} = N_P (g_{\underline{m}}^P \mathbf{P}^{\bar{m}}) = N_P (g_{\underline{M}}^P \mathbf{P}^{\bar{M}}) = N_P \mathbf{P}^P.$$

Поэтому уравнения (3.1.28) можно еще представить в видах

$$N_P \mathbf{P}^P + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad N_P \boldsymbol{\mu}^P + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.1.30)$$

$$N_P (g_{\underline{M}}^P \mathbf{P}^{\bar{M}}) + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad N_P (g_{\underline{M}}^P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}) + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.1.31)$$

Уравнения (3.1.27) – (3.1.31) являются различными формами представления уравнений микрополярной МДТТ (3.1.25) при рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Назовем их различными представлениями уравнений микрополярной МДТТТ при НПOTT.

Учитывая (1.5.37), уравнения (3.1.28) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} A_{\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} A_{\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Видно, что уравнения (3.1.32) содержат бесконечно много слагаемых. Поэтому на практике ими пользоваться нецелесообразно. Естественно, следует рассматривать приближенные уравнения с конечным числом слагаемых. В этой связи введем определение.

Определение 3.1.1. Уравнения, которые получаются из (3.1.28), если в разложении $g_{\underline{M}}^P$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются уравнениями приближения порядка r .

В силу этого определения, очевидно, уравнения приближения порядка r представляются в виде

$$g_{(\underline{r})\underline{M}}^P N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_{(\underline{r})\underline{M}}^P N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.1.33)$$

где введено обозначение

$$g_{(\underline{r})\underline{M}}^P = \sum_{s=0}^r A_{\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s. \quad (3.1.34)$$

Из (3.1.33) при $r = 0$ получим уравнения нулевого приближения, при $r = 1$ — уравнения первого приближения и т.д.

3.2 Различные формы записи определяющих соотношений по классической и микрополярной теориям упругости

Приведены различные формы записи определяющих соотношений (закона Гука) для модели линейного упругого тела при различных случаях анизотропии [307, 334, 336], а также даются их соответствующие представления при новой параметризации области тонкого тела.

3.2.1 Определяющие соотношения для модели линейного упругого тела

Наиболее простой моделью МДТТ является модель линейного упругого тела. Почти все деформируемые твердые тела (а иногда даже и жидкости) в той или иной степени обладают упругими свойствами, хотя бы при кратковременных нагрузках.

1. *Обобщенный закон Гука для анизотропного линейного упругого тела.* Этот закон представляется в виде

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \underline{\mathbf{e}}, \quad P^{pq} = C^{pqkl} e_{kl}, \quad (3.2.1)$$

где тензор 4-го ранга $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ — тензор модулей упругости, который для композита является разрывной функцией координат.

Обратный к (3.2.1) закон для упругой среды имеет вид

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^2 \underline{\mathbf{P}}, \quad e_{kl} = J_{klpq} P^{pq}, \quad (3.2.2)$$

где тензор 4-го ранга $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ — тензор упругих податливостей, который для композита также является разрывной функцией координат, причем тензоры $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ взаимно-обратны, т.е.

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{J}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{\Delta}}}, \quad C^{pqkl} J_{klmn} = J_{mnkl} C^{klpq} = \Delta_{mn}^{pq}. \quad (3.2.3)$$

Здесь $\underline{\underline{\mathbf{\Delta}}}$ — единичный тензор четвертого ранга, представления которого при новой параметризации области тонкого тела задается первым соотношением (1.1.43), а его компонент — вторым соотношением; $\underline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ — линейный тензор деформаций.

Заметим, что в рассматриваемом случае существуют потенциалы, имеющие вид

$$W = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \underline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} C^{pqkl} e_{pq} e_{kl}; \quad w = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{P}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{J}}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} J_{pqkl} P^{pq} P^{kl},$$

с помощью которых тензоры напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\mathbf{e}}} = \frac{\partial W}{\partial e_{kl}} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l, \quad \underline{\mathbf{e}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial w}{\partial P^{pq}} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q. \quad (3.2.4)$$

Нетрудно доказать (вытекает из (3.2.4)), что в самом общем случае тензоры $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ имеют 21 независимую компоненту.

В случае анизотропии общего вида тензор $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ можно изобразить в виде симметричной матрицы 6×6 , составленной из его независимых компонент [334]

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2} C_{1112} & \sqrt{2} C_{1113} & \sqrt{2} C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2} C_{2212} & \sqrt{2} C_{2213} & \sqrt{2} C_{2223} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2} C_{3312} & \sqrt{2} C_{3313} & \sqrt{2} C_{3323} \\ & & & 2C_{1212} & 2C_{1213} & 2C_{1223} \\ & & & & 2C_{1313} & 2C_{1323} \\ & & & & & 2C_{2323} \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

Из-за симметрии матрицы (3.2.5) ее элементы ниже главной диагонали не выписываем.

Следует заметить, что (\mathbf{C}) — матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, представленного в четырехвекторном мультибазисе, составленном из ортонормированного относительно операции внутреннего 2-произведения двухвекторного мультибазиса, в котором представляются тензоры напряжений и деформаций и который имеет вид

$$\underline{\mathbf{e}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \underline{\mathbf{e}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \underline{\mathbf{e}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3).$$

Тензоры напряжений, деформаций и модулей упругости представляются в форме

$$\underline{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^6 P_{\alpha} \underline{\mathbf{e}}_{\alpha}, \quad \underline{\mathbf{e}} = \sum_{\alpha=1}^6 e_{\alpha} \underline{\mathbf{e}}_{\alpha}, \quad \underline{\mathbf{C}} = \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\beta=1}^6 C_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{e}}_{\alpha} \underline{\mathbf{e}}_{\beta}, \quad \underline{\mathbf{e}}_p \otimes \underline{\mathbf{e}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, 6}.$$

Ниже мы представим матрицу (\mathbf{C}) при различных видах анизотропии и для некоторых важных случаев анизотропии выпишем закон Гука.

2. *Упругое тело обладает плоскостью симметрии.* Пусть плоскостью симметрии является плоскость x^1, x^2 . Тогда связь между новыми (штрихованными) и старыми координатами имеют вид

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = -x^3,$$

поэтому и компоненты тензора деформаций преобразуются так:

$$e_{1'1'} = e_{11}, \quad e_{2'2'} = e_{22}, \quad e_{3'3'} = e_{33}, \quad e_{1'2'} = e_{12}, \quad e_{1'3'} = -e_{13}, \quad e_{2'3'} = -e_{23}$$

и, как нетрудно вычислить тензор $\underline{\mathbf{C}}$ имеет 13 независимых компонент [203, 307, 334, 335, 366], а матрица (\mathbf{C}) представится в виде [334]

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2} C_{1112} & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2} C_{2212} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & \sqrt{2} C_{3312} & 0 & 0 \\ & & & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{1313} & 2C_{1323} \\ & & & & & 2C_{2323} \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

3. *Упругое тело обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии.* Пусть эти плоскости — x^1, x^2 и x^1, x^3 . Тогда нетрудно доказать, что и третья плоскость x^2, x^3 тоже является плоскостью симметрии и тензор $\underline{\mathbf{C}}$ имеет 9 независимых компонент [203, 307, 334, 335, 366], а матрица (\mathbf{C}) получит представление [334]

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{2323} \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Упругое тело, обладающее двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, называется *ортотропным упругим телом*.

Следует заметить, что тензорным базисом для ортотропной среды является [335, 336]

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j}, \quad < \alpha = 1, 2, 3 >$$

и компоненты тензора $\underline{\mathbf{C}}$ представляются через него в виде [335, 336]

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & \Lambda_1 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \Lambda_2 (\gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \\ & + \Lambda_3 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \frac{1}{3} \Lambda_4 (\gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(3)}) + \\ & + \Lambda_5 (\gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \frac{1}{3} \Lambda_6 (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(1)} + \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(1)}) + \\ & + \frac{1}{3} \Lambda_7 (\gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(2)}) + \Lambda_8 (\gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(2)}) + \\ & + \Lambda_9 (\gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(3)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(2)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

4. *Трансверсально-изотропное упругое тело.* Такое тело не меняет своих свойств при преобразовании координат вида

$$x^{1'} = x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha, \quad x^{2'} = -x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha, \quad x^{3'} = x^3,$$

где α — произвольный угол. В этом случае тензор $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ имеет 5 независимых компонент [203, 307, 334, 335, 366], а матрица (\mathbf{C}) — представление [334]

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{1313} \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

При этом в матрице (3.2.9) следует положить

$$C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}). \quad (3.2.10)$$

Заметим, что тензорный базис трансверсально-изотропной среды составляют [335, 336]

$$\delta_{3i}, \quad \gamma_{ij} = \delta_{1i}\delta_{1j} + \delta_{2i}\delta_{2j} \quad (= \delta_{ij} - \delta_{3i}\delta_{3j})$$

и компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ имеют представления [335, 336]

$$C_{ijkl} = \Lambda_1 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \Lambda_2 (\gamma_{ik} \gamma_{jl} + \gamma_{il} \gamma_{jk}) + \Lambda_3 (\gamma_{ij} \delta_{3k} \delta_{3l} + \gamma_{kl} \delta_{3i} \delta_{3j}) + \Lambda_4 \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3k} \delta_{3l} + \Lambda_5 (\gamma_{ik} \delta_{3j} \delta_{3l} + \gamma_{jk} \delta_{3i} \delta_{3l} + \gamma_{il} \delta_{3j} \delta_{3k} + \gamma_{jl} \delta_{3i} \delta_{3k}). \quad (3.2.11)$$

5. *Изотропное упругое тело. Закон Гука.* В этом случае тело не меняет своих свойств относительно полной ортогональной группы преобразований (всех вращений и отражений) и нетрудно доказать, что тензор $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ имеет только две независимые константы (постоянные Ламе)

$$\lambda = C_{1122}, \quad \mu = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}), \quad (3.2.12)$$

а матрица (\mathbf{C}) имеет вид [334]

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix}. \quad (3.2.13)$$

В этом случае тензоры $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ представляются соотношениями (1.1.42) и (1.1.48) при условии, что в них надо положить $\alpha = 0$ и $\alpha' = 0$. Тогда прямой и обратный законы Гука получают соответственно вид

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \nabla \mathbf{u} = (\lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}}) \otimes^2 \nabla \mathbf{u}, \\ \underline{\underline{\mathbf{e}}} &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}} = (\lambda' \underline{\underline{\mathbf{E}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}}) \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Совершенно аналогично $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ можно рассмотреть тензор упругих податливостей $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ и представить его в виде матрицы (\mathbf{J}) . Очевидно, и для этой матрицы справедливы приведенные

выше все представления (3.2.4)–(3.2.9), (3.2.13) и соотношение (3.2.10) при условии, что в них нужно заменить букву C на J , причем вместо (3.2.12) будем иметь

$$\lambda' = J_{1122} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu}{E}, \quad \mu' = \frac{1}{2}(J_{1111} - J_{1122}) = \frac{1}{4\mu} = \frac{1 + \nu}{2E}. \quad (3.2.15)$$

В этой связи, не останавливаясь на выписывании представлений матрицы (\mathbf{J}) при различных случаях анизотропии, так как, как уже выше об этом было сказано, их легко получить заменой буквы C в представлениях матрицы (\mathbf{C}) на букву J , ниже приведем представления (\mathbf{J}) только для ортотропного, трансверсально-изотропного и изотропного упругого тела в так называемых технических постоянных.

6. *Представление (\mathbf{J}) в технических постоянных и закон Гука для ортотропного упругого тела.* Это представление имеет вид

$$(\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{pmatrix}, \quad (3.2.16)$$

где E_1, E_2, E_3 — модули Юнга в трех главных направлениях ортотропии, т.е. в направлениях, ортогональных к плоскостям симметрии материала; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$ — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сокращение (расширение) в плоскостях, ортогональных к направлению растяжения (первый индекс показывает направление сокращения или расширения, второй индекс — направление действия силы); G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига, характеризующие искажение углов между плоскостями симметрии (между главными направлениями).

Ввиду симметрии матрицы (3.2.16) имеем следующие зависимости:

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}. \quad (3.2.17)$$

Теперь нетрудно заметить, что обратный закон Гука в силу (3.2.16) можно представить в форме

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E_1} P_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} P_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} P_{33}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} P_{11} + \frac{1}{E_2} P_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} P_{33}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} P_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} P_{22} + \frac{1}{E_3} P_{33}, \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2G_{\alpha\beta}} P_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Нетрудно заметить, что в силу (3.2.17) закон Гука (3.2.18) можно еще представить в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E_1}(P_{11} - \nu_{21}P_{22} - \nu_{31}P_{33}), \\ e_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{12}P_{11} + P_{22} - \nu_{32}P_{33}), \\ e_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{13}P_{11} - \nu_{23}P_{22} + P_{33}), \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2G_{\alpha\beta}}P_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Разрешая (3.2.18) относительно компонент тензора напряжений, получим

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{E_1}{\Delta_0}[(1 - \nu_{23}\nu_{32})e_{11} + (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})e_{22} + (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})e_{33}], \\ P_{22} &= \frac{E_2}{\Delta_0}[(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})e_{11} + (1 - \nu_{31}\nu_{13})e_{22} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})e_{33}], \\ P_{33} &= \frac{E_3}{\Delta_0}[(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})e_{11} + (\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})e_{22} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})e_{33}], \\ P_{\alpha\beta} &= 2G_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >, \\ \Delta_0 &= (1 - \nu_{23}\nu_{32}) - \nu_{12}(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) - \nu_{13}(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Аналогично (3.2.20), разрешая (3.2.19) относительно компонент тензора напряжений, будем иметь

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{\Delta_0}[E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})e_{11} + E_2(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})e_{22} + E_3(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})e_{33}], \\ P_{22} &= \frac{1}{\Delta_0}[E_1(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})e_{11} + E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})e_{22} + E_3(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})e_{33}], \\ P_{33} &= \frac{1}{\Delta_0}[E_1(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})e_{11} + E_2(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})e_{22} + E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})e_{33}], \\ P_{\alpha\beta} &= 2G_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >, \\ \Delta_0 &= (1 - \nu_{23}\nu_{32}) - \nu_{12}(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) - \nu_{13}(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Заметим, что первые три соотношения (3.2.21) можно еще получить из первых трех соотношений (3.2.20) с учетом (3.2.17) и обратно.

В произвольной криволинейной системе координат, как легко усмотреть, например, (3.2.18) и (3.2.20) соответственно представляются в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1}{E_1}g_{1k}g_{1l} - \frac{\nu_{12}}{E_2}g_{2k}g_{2l} - \frac{\nu_{13}}{E_3}g_{3k}g_{3l} \right) P^{kl}, \\ e_{22} &= \left(-\frac{\nu_{21}}{E_1}g_{1k}g_{1l} + \frac{1}{E_2}g_{2k}g_{2l} - \frac{\nu_{23}}{E_3}g_{3k}g_{3l} \right) P^{kl}, \\ e_{33} &= \left(-\frac{\nu_{31}}{E_1}g_{1k}g_{1l} - \frac{\nu_{32}}{E_2}g_{2k}g_{2l} + \frac{1}{E_3}g_{3k}g_{3l} \right) P^{kl}, \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2G_{\alpha\beta}}g_{\alpha k}g_{\beta l}P^{kl}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >; \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} P^{11} &= \frac{E_1}{\Delta_0}[(1 - \nu_{23}\nu_{32})g^{1k}g^{1l} + (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})g^{2k}g^{2l} + (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})g^{3k}g^{3l}]e_{kl}, \\ P^{22} &= \frac{E_2}{\Delta_0}[(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})g^{1k}g^{1l} + (1 - \nu_{31}\nu_{13})g^{2k}g^{2l} + (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})g^{3k}g^{3l}]e_{kl}, \\ P^{33} &= \frac{E_3}{\Delta_0}[(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})g^{1k}g^{1l} + (\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})g^{2k}g^{2l} + (1 - \nu_{12}\nu_{21})g^{3k}g^{3l}]e_{kl}, \\ P^{\alpha\beta} &= 2G_{\alpha\beta}g^{\alpha k}g^{\beta l}e_{kl}, \quad \alpha \neq \beta, \quad < \alpha, \beta = 1, 2, 3 >. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

7. *Представление (J) в технических постоянных и закон Гука для трансверсально изотропного упругого тела.* В этом случае, как это следует из сказанного выше, через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все направления являются эквивалентными в отношении упругих свойств. Тогда, если за ось x^3 примем ось, перпендикулярную к этой плоскости и введем обозначения

$$\begin{aligned} \nu_{12} \equiv \nu, \quad \nu_{13} = \nu_{23} \equiv \nu', \quad \nu_{31} = \nu_{32} \equiv \nu'', \quad E_1 = E_2 \equiv E, \quad E_3 \equiv E', \\ G_{12} \equiv G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad G_{13} = G_{23} \equiv G', \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

из (3.2.16) получим

$$(\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu''}{E} & -\frac{\nu''}{E} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G'} \end{pmatrix}, \quad (3.2.25)$$

где, очевидно, ввиду симметрии имеем зависимости

$$\frac{\nu''}{E} = \frac{\nu'}{E'}. \quad (3.2.26)$$

В представлении (J) (3.2.25) E — модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии; $G = E/[2(1 + \nu)]$ — модуль сдвига для плоскости изотропии; E' — модуль Юнга для направления, перпендикулярного плоскости изотропии; G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных плоскости изотропии; ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном ей; ν'' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии при растяжении в плоскости изотропии. В рассматриваемом случае упругой симметрии направление, перпендикулярное плоскости изотропии, и все направления в этой плоскости являются главными.

Не представляет большого труда выписывать в рассматриваемом случае закон Гука. В самом деле, в силу (3.2.25) или, учитывая обозначения (3.2.24) в (3.2.18), легко найдем обратный закон Гука

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}P_{11} - \frac{\nu}{E}P_{22} - \frac{\nu'}{E'}P_{33}, & e_{12} &= \frac{1}{2G}P_{12}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}P_{11} + \frac{1}{E}P_{22} - \frac{\nu'}{E'}P_{33}, & e_{13} &= \frac{1}{2G'}P_{13}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu''}{E}P_{11} - \frac{\nu''}{E}P_{22} + \frac{1}{E'}P_{33}, & e_{23} &= \frac{1}{2G'}P_{23}, \quad 2G = \frac{E}{1 + \nu}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

В силу (3.2.26), очевидно, (3.2.27) можно записать в форме

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}(P_{11} - \nu P_{22} - \nu'' P_{33}), & e_{12} &= \frac{1}{2G}P_{12}, \\ e_{22} &= \frac{1}{E}(-\nu P_{11} + P_{22} - \nu'' P_{33}), & e_{13} &= \frac{1}{2G'}P_{13} \\ e_{33} &= \frac{\nu''}{E\nu'}(-\nu'(P_{11} + P_{22}) + P_{33}), & e_{23} &= \frac{1}{2G'}P_{23}, \quad 2G = \frac{E}{1 + \nu}. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Разрешая (3.2.27) относительно компонент тензора напряжений (или учитывая (3.2.24), из (3.2.20)), будем иметь

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \frac{E}{\Delta'_0} [(1 - \nu'\nu'')e_{11} + (\nu + \nu'\nu'')e_{22} + \nu'(1 + \nu)e_{33}], & P_{12} &= \frac{E}{1 + \nu}e_{11}, \\
 P_{22} &= \frac{E}{\Delta'_0} [(\nu + \nu'\nu'')e_{11} + (1 - \nu'\nu'')e_{22} + \nu'(1 + \nu)e_{33}], & P_{13} &= 2G'e_{13}, \\
 P_{33} &= \frac{E'}{\Delta'_0} [\nu''(1 + \nu)(e_{11} + e_{22}) + (1 - \nu^2)e_{33}], & P_{23} &= 2G'e_{23}, \\
 \Delta'_0 &= (1 + \nu)(1 - \nu - \nu'\nu'').
 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Совершенно аналогично (3.2.29), разрешая (3.2.28) относительно компонент тензора напряжений (или учитывая (3.2.24), из (3.2.21)), получим

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \frac{1}{\Delta'_0} [E(1 - \nu'\nu'')e_{11} + E(\nu + \nu'\nu'')e_{22} + E'\nu''(1 + \nu)e_{33}], & P_{12} &= \frac{E}{1 + \nu}e_{11}, \\
 P_{22} &= \frac{1}{\Delta'_0} [E(\nu + \nu'\nu'')e_{11} + E(1 - \nu'\nu'')e_{22} + E'\nu''(1 + \nu)e_{33}], & P_{13} &= 2G'e_{13}, \\
 P_{33} &= \frac{1}{\Delta'_0} [E\nu'(1 + \nu)(e_{11} + e_{22}) + E'(1 - \nu^2)e_{33}], & P_{23} &= 2G'e_{23}, \\
 \Delta'_0 &= (1 + \nu)(1 - \nu - \nu'\nu'').
 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

8. *Представление (J) в технических постоянных и закон Гука для изотропного упругого тела.* В этом случае представление (J) легко получим, если в (3.2.25) положим $E' = E$, $\nu' = \nu'' = \nu$, $G' = G \equiv E/[2(1 + \nu)]$. Будем иметь

$$(\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G} \end{pmatrix}. \tag{3.2.31}$$

Нетрудно заметить, что прямой и обратный законы Гука в рассматриваемом случае в силу (3.2.31) представится в виде (3.2.14). Поэтому здесь их выписывать не будем.

Кроме рассмотренных прямолинейно анизотропных тел ниже рассмотрим также цилиндрически анизотропные тела.

9. *Цилиндрически анизотропное тело.* С цилиндрически анизотропным телом неподвижно связана прямая — ось анизотропии (она может проходить как внутри, так и вне тела). Цилиндрической называют анизотропию тела, обладающего следующими упругими свойствами: все направления, пересекающие ось анизотропии под прямым углом, эквивалентны между собой; все направления, параллельные оси анизотропии, и все направления, ортогональные к первым двум, соответственно эквивалентны между собой [16, 17]. При общем случае анизотропии и в этом случае, как и при прямолинейно анизотропных тел, число независимых упругих постоянных равно 21. В случае цилиндрической анизотропии тоже возможны частные случаи анизотропии с различными видами упругой симметрии. Например, если в каждой точке тела имеются три плоскости упругой симметрии, из которых одна нормальна оси анизотропии, другая проходит через ось, а

третья ортогональна первым двум, то в этом случае тело называется ортотропным телом с цилиндрической анизотропией.

Определяющие соотношения ортотропного тела с цилиндрической анизотропией, если цилиндрическая система координат r, ϑ, z так выбрана, что ось z совпадает с осью анизотропии, в технических постоянных аналогично (3.2.18) представляются в виде

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E_r} P_{rr} - \frac{\nu_{r\vartheta}}{E_\vartheta} P_{\vartheta\vartheta} - \frac{\nu_{rz}}{E_z} P_{zz}, & e_{r\vartheta} &= \frac{1}{2G_{r\vartheta}} P_{r\vartheta}, \\ e_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{\nu_{\vartheta r}}{E_r} P_{rr} + \frac{1}{E_\vartheta} P_{\vartheta\vartheta} - \frac{\nu_{\vartheta z}}{E_z} P_{zz}, & e_{rz} &= \frac{1}{2G_{rz}} P_{rz}, \\ e_{zz} &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r} P_{rr} - \frac{\nu_{z\vartheta}}{E_\vartheta} P_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{E_z} P_{zz}, & e_{\vartheta z} &= \frac{1}{2G_{\vartheta z}} P_{\vartheta z}, \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

где E_r, E_ϑ, E_z — модули Юнга для главных направлений упругости r, ϑ, z соответственно; $G_{r\vartheta}, G_{rz}, G_{\vartheta z}$ — модули сдвига, характеризующие изменения углов между главными направлениями r и ϑ, r и z, ϑ и z ; $\nu_{r\vartheta}, \nu_{rz}, \nu_{\vartheta r}, \nu_{\vartheta z}, \nu_{zr}, \nu_{z\vartheta}$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление сокращения–расширения, а второй индекс — направление действия силы).

Ввиду симметрии здесь тоже существуют аналогичные (3.2.17) зависимости, а именно

$$\frac{\nu_{r\vartheta}}{E_\vartheta} = \frac{\nu_{\vartheta r}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{rz}}{E_z} = \frac{\nu_{zr}}{E_r}, \quad \frac{\nu_{\vartheta z}}{E_z} = \frac{\nu_{z\vartheta}}{E_r}. \quad (3.2.33)$$

В рассматриваемом случае число независимых упругих постоянных равно девяти.

Аналогичным же образом можно записать приведенные выше определяющие соотношения и для других случаев упругой симметрии в цилиндрической системе координат. В частности, для случая трансверсально-изотропного тела с цилиндрической анизотропией имеют место аналогичные (3.2.24)–(3.2.26) соотношения и учитывая их, на основании (3.2.32) и (3.2.33) легко получим нужные соотношения. В связи с этим и с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

3.2.2 Представления закона Гука по классической теории упругости при НПОТТ

Зная представления тензоров, аналогичные, например, (1.1.27), а также формулы, связывающие компоненты (1.2.5) и ковариантные производные от компонент тензоров (1.2.6) при различных семействах параметризаций, легко записать закон Гук в различных формах при НПОТТ.

1. *Обобщенный закон Гука для анизотропного линейного упругого тела при НПОТТ.* Для нас представляет интерес найти выражения для тензора напряжений и контравариантных составляющих тензора напряжений с помощью производных вектора перемещения, а также другие, свойственные новой параметризации области, представления закона Гука. Как известно, в тензорном виде при изотермических процессах этот закон представляется первым соотношением (3.2.1), а в случае неизотермических процессов в силу гипотезы Дюгамеля-Неймана, выражения для линейного тензора деформаций и свойств симметрии компонент тензора модулей упругости будем иметь

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{e}}^{(T)} = \underline{\mathbf{C}} \otimes (\underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta) = \underline{\mathbf{C}} \otimes \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}}\vartheta. \quad (3.2.34)$$

Здесь $\underline{\mathbf{a}}$ — симметричный тензор теплового расширения среды, $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{a}}$, $\vartheta = T - T_0$ — перепад температуры, а $\underline{\mathbf{e}}^{(T)} = \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta$.

Нетрудно заметить, что при НПОТТ первое слагаемое в правой части (3.2.34) в силу (2.9.3) можно привести к виду

$$\underline{\mathbf{C}} \otimes \nabla \mathbf{u} = \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot g_{\bar{M}}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u}. \quad (3.2.35)$$

Учитывая (3.2.35), из (3.2.34) придем к следующему представлению закона Гука:

$$\underline{\mathbf{P}} = g_{\underline{M}}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta. \quad (3.2.36)$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\underline{\mathbf{P}} = g_{\underline{M}}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\bar{n}} N_P u_n + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\bar{n}} \partial_3 u_n - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \quad \underline{\mathbf{C}}^{\bar{m}\bar{n}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}^{\bar{n}}. \quad (3.2.37)$$

Для контравариантных составляющих тензора напряжений, например, из (3.2.36) находим

$$\mathbf{P}^{\bar{s}\cdot} = g_{\underline{M}}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{s}\cdot\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{s}\cdot\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \mathbf{b}^{\bar{s}\cdot} \vartheta, \quad (3.2.38)$$

где, конечно,

$$\mathbf{P}^{\bar{s}\cdot} = \mathbf{r}^{\bar{s}} \cdot \underline{\mathbf{P}}, \quad \underline{\mathbf{C}}^{\bar{s}\cdot\bar{m}\cdot} = \mathbf{r}^{\bar{s}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{b}^{\bar{s}\cdot} = \mathbf{r}^{\bar{s}} \cdot \underline{\mathbf{b}}.$$

Если тело имеет постоянную толщину ($h = \text{const}$), то, как это следует из (3.1.21), $g_{\underline{M}}^3 = 0$ и поэтому соотношения (3.2.36)–(3.2.38) получают относительно простой вид. В частности, в рассматриваемом случае для того, чтобы получить определяющие соотношения достаточно в (3.2.36)–(3.2.38) дифференциальный оператор N_P заменить на оператор ∇_P . Например, из (3.2.36) будем иметь

$$\underline{\mathbf{P}} = g_{\underline{M}}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \nabla_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \quad h = \text{const}. \quad (3.2.39)$$

Для тел класса TS определяющие соотношения получим, если в соотношениях (3.2.36)–(3.2.39) компоненты переноса ЕТВР $g_{\underline{M}}^P$ заменим на символ дельта Кронекера $\delta_{\underline{M}}^P$ ($g_{\underline{M}}^P \approx \delta_{\underline{M}}^P$). Очевидно, в этом случае, например, из (3.2.36) и (3.2.39) получаем соответственно

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \nabla_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \quad h = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Следует заметить, что из приведенных выше определяющих соотношений, которые, конечно, справедливы для любой неоднородной линейно упругой произвольно анизотропной среды, нетрудно получить соответствующие соотношения для частных случаев анизотропии. В самом деле, для этого достаточно в этих соотношениях учитывать представления тензора модулей упругости для рассматриваемых случаев анизотропии [335, 336]. Например, в случае ортотропной и трансверсально изотропной сред следует учитывать представления (3.2.8) и (3.2.11) соответственно. При необходимости несложно выписать эти соотношения, поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

Учитывая (1.5.37), закон Гука (3.2.36) аналогично (3.1.32) можно записать в форме

$$\underline{\mathbf{P}} = \sum_{s=0}^{\infty} A_{\underline{M}}^{\bar{P}}(x^3)^s \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta. \quad (3.2.41)$$

Видно, что соотношение (3.2.41) содержат бесконечно много слагаемых. Поэтому в приложении им пользоваться нельзя. Естественно, следует рассматривать приближенный закон с конечным числом слагаемых. С этой целью аналогично определению 3.1.1 введем определение.

Определение 3.2.1. Соотношение, которое получается из (3.2.36), если в разложении $g_{\underline{M}}^P$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются законом Гука приближения порядка r классического упругого ДТТТ.

В силу этого определения закон Гука приближения порядка r классического упругого ДТТТ представляется в виде

$$\underline{\mathbf{P}}_{(r)} = g_{(r)M}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}}\vartheta, \quad g_{(r)M}^P = \sum_{s=0}^r A_{+M}^{\bar{P}}(x^3)^s. \quad (3.2.42)$$

Следовательно, закон Гука нулевого и первого приближений получим из (3.2.42) при $r = 0$ и $r = 1$ соответственно. Например, закон Гука нулевого приближения имеет форму

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)} = \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{b}}\vartheta. \quad (3.2.43)$$

Заметим, что закон Гука для тел класса TS совпадает с законом Гука нулевого приближения. Легко усмотреть, что закон Гука приближения порядка r (3.2.42) можно записать также следующим образом:

$$\underline{\mathbf{P}}_{(r)} = \underline{\mathbf{P}}_{(r-1)} + A_{(r)M}^P (x^3)^r \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{u}, \quad r \geq 1. \quad (3.2.44)$$

3.2.3 Представления закона Гука микрополярной теории упругости при НПОТТ

В линейной микрополярной теории упругости закон Гука при неизотермических процессах в силу обобщенного принципа Дюгамеля–Неймана [336, 343] можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2}(\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta) + \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2}(\underline{\boldsymbol{\kappa}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2}(\underline{\boldsymbol{\kappa}} - \underline{\mathbf{d}}\vartheta) + \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2}(\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta), \quad (3.2.45)$$

где $\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ — тензор деформаций в микрополярной теории [196], $\underline{\boldsymbol{\kappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — тензор кручения-изгиба, $\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{B}}$ — материальные тензоры четвертого ранга, ϑ — перепад температуры, $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{d}}$ — тензоры теплового расширения.

Учитывая выражение для $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$, (3.2.45) можно записать в форме

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} \nabla \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}}\vartheta, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \nabla \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}}\vartheta, \quad (3.2.46)$$

где для тензоров термомеханических свойств введены обозначения

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{d}}, \quad \underline{\boldsymbol{\beta}} = \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{d}} + \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}}$$

Заметим, что частный случай закона (3.2.46) рассмотрены в [196, 307], а более общие соотношения приведены в [339, 343].

Теперь нетрудно найти искомые представления закона Гука (3.2.46) при НПОТТ. В самом деле, учитывая (2.9.3), из (3.2.46) будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g_{-M}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g_{-M}^P N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}}\vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g_{-M}^P N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot g_{-M}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}}\vartheta. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{m}\cdot} &= \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{m}} \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^{ij\bar{m}l} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l, \quad \underline{\mathbf{A}}^{\bar{m}\cdot} = \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{m}} \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^{ij\bar{m}l} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l, \\ \underline{\mathbf{D}}^{\bar{m}\cdot} &= \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{m}} \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{D}^{ij\bar{m}l} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l, \quad \underline{\mathbf{B}}^{\bar{m}\cdot} = \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{m}} \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{B}^{ij\bar{m}l} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l. \end{aligned}$$

Далее аналогично классическому случаю, учитывая (1.5.37), из (3.2.47) получится закон Гука с бесконечным числом слагаемых, которым в приложениях пользоваться не придется. В приложениях найдут применения приближенные законы Гука с конечным числом слагаемых. Поэтому аналогично определениям 3.1.1 и 3.2.1 введем определение.

Определение 3.2.2. Соотношения, которые получаются из (3.2.47) при условии, что в разложении $g_{(r)M}^P$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются законом Гука приближения порядка r микрополярного упругого тонкого тела.

Согласно этому определению из (3.2.47) закон Гука приближения порядка r микрополярного упругого тонкого тела представится в форме

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(r)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}_{(r)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}}_{(r)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}}_{(r)M}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)} &= \underline{\mathbf{D}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{D}}_{(r)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{B}}_{(r)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}}_{(r)M}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.\end{aligned}\quad (3.2.48)$$

Очевидно, закон Гука нулевого и первого приближений получим из (3.2.48) при $r = 0$ и $r = 1$ соответственно. Например, закон Гука нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(0)M}^{\bar{M}} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}_{(0)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}_{(0)M}^{\bar{M}} \cdot N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}}_{(0)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}}_{(0)M}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{D}}_{(0)M}^{\bar{M}} \cdot N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{D}}_{(0)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}}_{(0)M}^{\bar{M}} \cdot N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{B}}_{(0)M}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}}_{(0)M}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta,\end{aligned}\quad (3.2.49)$$

Заметим, что закон Гука для тел класса TS совпадает с законом Гука нулевого приближения. Очевидно, закон Гука приближения порядка r (3.2.48) аналогично (3.2.44) можно записать в форме

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(r)} &= \underline{\mathbf{P}}_{(r-1)} + \underline{\mathbf{C}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot A_{(r)M}^{\bar{P}} (x^3)^r N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot A_{(r)M}^{\bar{P}} (x^3)^r N_P \boldsymbol{\varphi}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r-1)} + \underline{\mathbf{D}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot A_{(r)M}^{\bar{P}} (x^3)^r N_P \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}}_{(r)M}^{\bar{M}} \cdot A_{(r)M}^{\bar{P}} (x^3)^r N_P \mathbf{u}, \quad r \geq 1.\end{aligned}\quad (3.2.50)$$

Следует заметить, что в том случае, когда тело обладает центром симметрии [196, 307], соответствующие представления закона Гука получим, если в приведенных выше представлениях положим $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ и $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$.

Заметим также, что из приведенных выше определяющих соотношений (3.2.45)–(3.2.50) аналогично классической теории нетрудно получить соответствующие соотношения для частных случаев анизотропии. Для этого достаточно знать представления тензора четвертого ранга для рассматриваемых случаев анизотропии (эти вопросы довольно подробно изложены в работах [276, 281, 289, 290, 301]). Например, в случае изотропной среды в микрополярной теории упругости тензор четвертого ранга определяется тремя материальными функциями [196, 307] и тензоры $\underline{\mathbf{C}}$ и $\underline{\mathbf{D}}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{C}} &= \lambda \underline{\mathbf{C}}_I + \mu (\underline{\mathbf{C}}_{II} + \underline{\mathbf{C}}_{III}) + \alpha (\underline{\mathbf{C}}_{II} - \underline{\mathbf{C}}_{III}), \\ \underline{\mathbf{D}} &= \gamma \underline{\mathbf{C}}_I + \delta (\underline{\mathbf{C}}_{II} + \underline{\mathbf{C}}_{III}) + \beta (\underline{\mathbf{C}}_{II} - \underline{\mathbf{C}}_{III}),\end{aligned}\quad (3.2.51)$$

где $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \delta, \beta$ — материальные функции, а $\underline{\mathbf{C}}_I, \underline{\mathbf{C}}_{II}, \underline{\mathbf{C}}_{III}$ — изотропные тензоры четвертого ранга [209]. В дальнейшем эти тензоры обозначим через $\underline{\mathbf{C}}_{(1)}, \underline{\mathbf{C}}_{(2)}, \underline{\mathbf{C}}_{(3)}$ соответственно.

Вводя в рассмотрение тензорные столбцы тензоров деформаций и изгиба-кручения и тензоров напряжений и моментных напряжений, а также тензорно-блочную матрицу тензоров модулей упругости

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{X}} &= \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\gamma}} \\ \underline{\boldsymbol{\varkappa}} \end{pmatrix} \left(\underline{\mathbb{X}}^T = (\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}) \right), \quad \underline{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} \left(\underline{\mathbb{Y}}^T = (\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) \right), \\ \underline{\mathbb{M}} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{C}} & \underline{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \left(\underline{\mathbb{M}}^T = \underline{\mathbb{M}} \right),\end{aligned}$$

Определяющие соотношения при изотермических процессах можно записать в виде

$$\underline{\mathbb{Y}} = \underline{\mathbb{M}} \otimes \underline{\mathbb{X}} \left(\left(\begin{array}{c} \underline{\mathbb{P}} \\ \underline{\mu} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \underline{\mathbb{A}} & \underline{\mathbb{B}} \\ \underline{\mathbb{C}} & \underline{\mathbb{D}} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{c} \underline{\gamma} \\ \underline{\varkappa} \end{array} \right) \right).$$

Следует заметить, что в [163, 301] изучены задачи на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга. Построены полная система собственных тензоров для симметричного тензора любого четного ранга и собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров любого четного ранга. Как частные случаи рассмотрены тензор и тензорно-блочную матрицу четвертого ранга.

В явном виде построены полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 153 независимых параметров, полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочно-диагональной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 72 независимых параметров и полная ортонормированная система собственных тензоров для положительно-определенного симметричного тензора модулей упругости микрополяридной теории упругости с помощью 36 независимых параметров (Н.И. Остросаблин в классической теории упругости в явном виде построил собственные тензоры для тензора модулей упругости с помощью 15 независимых параметров). Дана классификация микрополяридных и классических анизотропных материалов. Закон Гука и удельную энергию деформации представлены в канонических видах. Рассмотрены и другие важные вопросы, затронутые, но не исследованные до конца, в работах Стокса, Кельвина, Рыхлевского и др. и открывающие путь в новое научное направление в механике.

3.2.3.1 Представления уравнения в перемещениях (Ламе) однородного изотропного материала при НПОТТ

Как известно [196, 231, 307, 336], уравнения Ламе представляются в виде

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

или с помощью набла-оператора в форме

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.2.52)$$

Запишем первые два слагаемые в левой части в удобной форме. Имеем

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\underline{\mathbb{C}}_{II} + \underline{\mathbb{C}}_{III}) \otimes \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \underline{\mathbb{E}} \otimes \nabla \nabla \mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\underline{\mathbb{C}}_{II} + \underline{\mathbb{C}}_{III}) \otimes \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \underline{\mathbb{E}} \otimes \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \\ &= \left[\frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\underline{\mathbb{C}}_{II} + \underline{\mathbb{C}}_{III}) + \mu \underline{\mathbb{C}}_I \right] \otimes \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

т.е.

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \underline{\mathbb{L}} \cdot \mathbf{u} = \underline{\mathbb{M}} \otimes \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.2.53)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{L}} &= \underline{\mathbb{M}} \otimes \nabla \nabla = \underline{\mathbb{M}}^{pq} \nabla_p \nabla_q = \underline{\mathbb{M}}^{\bar{m}\bar{n}} g_m^p g_n^q \nabla_p \nabla_q, \\ \underline{\mathbb{M}} &= \frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\underline{\mathbb{C}}_{II} + \underline{\mathbb{C}}_{III}) + \mu \underline{\mathbb{C}}_I, \quad \underline{\mathbb{M}}^{pq} = \underline{\mathbb{M}} \otimes \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q, \quad \underline{\mathbb{M}}^{\bar{m}\bar{n}} = \underline{\mathbb{M}} \otimes \bar{\mathbf{r}}^{\bar{m}} \bar{\mathbf{r}}^{\bar{n}} \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

В силу (3.2.53) уравнения (3.2.52) можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

или с учетом (3.2.54) в удобной для рассматриваемого случая форме

$$\underline{\mathbf{M}}^{\bar{m}\bar{n}} g_{\bar{m}}^p g_{\bar{n}}^q \nabla_p \nabla_q \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.2.55)$$

Запишем последнее соотношение в более развернутом виде

$$[\underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} g_{\bar{M}}^P (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2] \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.2.56)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} &= \underline{\mathbf{M}}^{\bar{N}\bar{M}} = \mathbf{r}^{\bar{i}} \mathbf{r}^{\bar{j}} [(\lambda + \mu)(g_{\bar{i}}^{\bar{M}} g_{\bar{j}}^{\bar{N}} + g_{\bar{i}}^{\bar{N}} g_{\bar{j}}^{\bar{M}}) + \mu g_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}\bar{N}}] = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{I}} \mathbf{r}^{\bar{J}} (\lambda + \mu)(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} g_{\bar{J}}^{\bar{N}} + g_{\bar{I}}^{\bar{N}} g_{\bar{J}}^{\bar{M}}) + \mu g^{\bar{M}\bar{N}} \underline{\mathbf{E}} = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{I}} \mathbf{r}^{\bar{J}} [(\lambda + \mu)(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} g_{\bar{J}}^{\bar{N}} + g_{\bar{I}}^{\bar{N}} g_{\bar{J}}^{\bar{M}}) + \mu g_{\bar{I}\bar{J}}^{\bar{M}\bar{N}}] + \mu g_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{M}\bar{N}} \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}}, \quad (3.2.57) \\ \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} &= \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{M}} = \mathbf{r}^{\bar{i}} \mathbf{r}^{\bar{j}} (\lambda + \mu)(g_{\bar{i}}^{\bar{M}} g_{\bar{j}}^{\bar{3}} + g_{\bar{i}}^{\bar{3}} g_{\bar{j}}^{\bar{M}}) = (\lambda + \mu)(\mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}^{\bar{3}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}), \\ \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} &= 2(\lambda + \mu) \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}} + \mu g^{\bar{3}\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} = \mu g_{\bar{I}\bar{J}}^{\bar{3}\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{I}} \mathbf{r}^{\bar{J}} + (2\lambda + 3\mu) \mathbf{r}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{3}}. \end{aligned}$$

3.2.4 Представление уравнения в перемещениях однородного изотропного материала для неизотермических процессов при НПОТТ

Это уравнение [196, 307, 336] отличается от уравнения (3.2.52) лишь тем, что в ее левой части следует учесть температурный член. Он имеет вид

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} - \alpha_t (3\lambda + 2\mu) \nabla \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.2.58)$$

где α — коэффициент теплового расширения, а $\vartheta = T - T_0$ — перепад температуры. Нетрудно заметить, что в силу (2.9.3) и (3.2.56) для (3.2.58) получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} &[\underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} g_{\bar{M}}^P (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2] \cdot \mathbf{u} - \\ &-\alpha_t (3\lambda + 2\mu) (\mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3) \nabla \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.2.59) \end{aligned}$$

3.2.5 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости для неизотермических процессов при НПОТТ

3.2.5.1 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости однородного изотропного материала при неизотермических процессах

В рассматриваемом случае, как известно [196, 307], уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости представляются в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mu + \alpha) \Delta \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} - b \operatorname{grad} \vartheta + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ (\gamma + \delta - \beta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + (\delta + \beta) \Delta \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

или с помощью набла-оператора в форме

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu - \alpha) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\varphi} - b \nabla \vartheta + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ (\gamma + \delta - \beta) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + (\delta + \beta) \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

Отсюда в силу первого соотношения (2.9.38) аналогично (3.2.59) для (3.2.60) будем иметь следующее представление:

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} g_{\bar{M}}^P (N_P \nabla_{\bar{3}} + \nabla_{\bar{3}} N_P) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2] \cdot \mathbf{u} + \\ + 2\alpha [C^{\bar{L}\bar{M}} (g_{\bar{M}}^P N_P \varphi_{\bar{3}} - \nabla_{\bar{3}} \varphi_{\bar{M}}) \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P N_P \varphi_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}] - \\ - b (\mathbf{r}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}) \vartheta + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{L}}^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q N_P N_Q + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{M}\bar{3}} g_{\bar{M}}^P (N_P \nabla_{\bar{3}} + \nabla_{\bar{3}} N_P) + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_{\bar{3}}^2] \cdot \boldsymbol{\varphi} + \\ + 2\alpha [C^{\bar{L}\bar{M}} (g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{3}} - \nabla_{\bar{3}} u_{\bar{M}}) \mathbf{r}_{\bar{L}} + C^{\bar{M}\bar{N}} g_{\bar{M}}^P N_P u_{\bar{N}} \mathbf{r}_{\bar{3}}] - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Здесь имеем следующие обозначения: $b = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$ и

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{M}}} &= \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \alpha)(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) + (\mu + \alpha)\underline{\underline{\mathbf{C}}}_I, & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\bar{m}\bar{n}} &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}^{\bar{n}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}} &= \frac{1}{2}(\gamma + \delta - \beta)(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{III}) + (\delta + \beta)\underline{\underline{\mathbf{C}}}_I, & \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{\bar{m}\bar{n}} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}^2 \otimes \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}^{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

3.2.5.2 Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости анизотропного материала при неизотермических процессах

С целью сокращения письма ограничимся рассмотрением упругого анизотропного материала с центром симметрии. В этом случае, как известно [196, 307], ОС представляются в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.2.63)$$

где для тензора термомеханических свойств введено обозначение $\underline{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}}$.

Учитывая (3.2.63), а также доказуемые легко следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{b}\vartheta) &= \nabla\vartheta \cdot \mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\vartheta = \mathbf{b}^T \cdot \nabla\vartheta + (\nabla \cdot \mathbf{b})\vartheta, \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{r}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \nabla \nabla \mathbf{u} + (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}) \otimes \nabla \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) &= \mathbf{r}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \partial_i \boldsymbol{\varphi} + (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}) \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi},\end{aligned}$$

из (3.1.25) получим искомые уравнения в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^p \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \partial_p (\nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}) \otimes (\nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \\ - \mathbf{b}^T \cdot \nabla \vartheta - (\nabla \cdot \mathbf{b})\vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.2.64) \\ \mathbf{r}^p \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \partial_p \nabla \boldsymbol{\varphi} + (\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes (\nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{b}\vartheta) + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}.\end{aligned}$$

При получении (3.2.64) было учтено, что $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}$.

Нетрудно заметить, что уравнения (3.2.64) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{pqs} \nabla_p \nabla_q u_s + \nabla_p \mathbf{C}^{pqs} (\nabla_q u_s - C_{qst} \vartheta^t) - \mathbf{C}^{p\cdot st} C_{qst} \nabla_p \vartheta^q - \\ - \mathbf{b}^{p\cdot} \partial_p \vartheta - (\nabla_p \mathbf{b}^{p\cdot}) \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.2.65) \\ \mathbf{D}^{p\cdot sq} \nabla_p \nabla_q \varphi_s + \nabla_p \mathbf{D}^{p\cdot sq} \nabla_q \varphi_s + \mathbf{C}_{\cdot kl} C^{klpq} (\nabla_p u_q - C_{pqs} \vartheta^s - a_{pq} \vartheta) + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi},\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{C}^{p\cdot sq} = \mathbf{r}^p \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \mathbf{r}^s \mathbf{r}^q, \quad \mathbf{b}^{p\cdot} = \mathbf{r}^p \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{D}^{p\cdot sq} = \mathbf{r}^p \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \mathbf{r}^s \mathbf{r}^q, \quad \mathbf{C}_{\cdot kl} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l.$$

При новой параметризации области тонкого тела уравнения (3.2.65) получают вид

$$\begin{aligned}g_{\bar{m}}^p g_{\bar{n}}^q (\mathbf{C}^{\bar{m}\cdot \bar{n}\bar{s}} \nabla_p \nabla_q u_{\bar{s}} + \nabla_p \mathbf{C}^{\bar{m}\cdot \bar{n}\bar{s}} \nabla_q u_{\bar{s}}) - g_{\bar{m}}^p (\nabla_p \mathbf{C}^{\bar{m}\cdot \bar{q}\bar{s}} C_{\bar{q}\bar{s}\bar{t}} \vartheta^{\bar{t}} + \mathbf{C}^{\bar{m}\cdot \bar{s}\bar{t}} C_{\bar{q}\bar{s}\bar{t}} \nabla_p \vartheta^{\bar{q}}) - \\ - g_{\bar{m}}^p [\mathbf{b}^{\bar{m}\cdot} \partial_p \vartheta + (\nabla_p \mathbf{b}^{\bar{m}\cdot}) \vartheta] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ g_{\bar{m}}^p g_{\bar{n}}^q (\mathbf{D}^{\bar{m}\cdot \bar{n}\bar{s}} \nabla_p \nabla_q \varphi_{\bar{s}} + \nabla_p \mathbf{D}^{\bar{m}\cdot \bar{n}\bar{s}} \nabla_q \varphi_{\bar{s}}) + g_{\bar{m}}^p \mathbf{C}_{\cdot \bar{k}\bar{l}} C^{\bar{k}\bar{l}\bar{m}\bar{q}} \nabla_p u_{\bar{q}} - \\ - \mathbf{C}_{\cdot \bar{k}\bar{l}} C^{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (C_{\bar{p}\bar{q}\bar{s}} \vartheta^{\bar{s}} + a_{\bar{p}\bar{q}} \vartheta) + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая формулы второй строки (1.3.20) и (2.9.2), после простых выкладок получим

$$\begin{aligned}g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q (\mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{N}\bar{s}} N_P N_Q u_{\bar{s}} + N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{N}\bar{s}} N_Q u_{\bar{s}}) + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P u_{\bar{s}} + \mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3 u_{\bar{s}}) + \\ + g_{\bar{M}}^P (\nabla_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{M}\bar{s}} N_P u_{\bar{s}} + N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{3}\bar{s}} \nabla_3 u_{\bar{s}}) + \mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 u_{\bar{s}} + \partial_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{3}\bar{s}} \partial_3 u_{\bar{s}} - \\ - C_{\bar{q}\bar{s}\bar{t}} [g_{\bar{M}}^P (N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{s}\bar{t}} \vartheta^{\bar{q}} + \mathbf{C}^{\bar{M}\cdot \bar{s}\bar{t}} N_P \vartheta^{\bar{q}}) + (\partial_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{s}\bar{t}} \vartheta^{\bar{q}} + \mathbf{C}^{\bar{3}\cdot \bar{s}\bar{t}} \partial_3 \vartheta^{\bar{q}})] - \\ - g_{\bar{M}}^P [\mathbf{b}^{\bar{M}\cdot} N_P \vartheta + (N_P \mathbf{b}^{\bar{M}\cdot}) \vartheta] - [\mathbf{b}^{\bar{3}\cdot} \partial_3 \vartheta + (\partial_3 \mathbf{b}^{\bar{3}\cdot}) \vartheta] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.2.66)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{\bar{M}}^P g_{\bar{N}}^Q (\mathbf{D}^{\bar{M}\cdot \bar{N}\bar{s}} N_P N_Q \varphi_{\bar{s}} + N_P \mathbf{D}^{\bar{M}\cdot \bar{N}\bar{s}} N_Q \varphi_{\bar{s}}) + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{D}^{\bar{3}\cdot \bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P \varphi_{\bar{s}} + \mathbf{D}^{\bar{M}\cdot \bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3 \varphi_{\bar{s}}) + \\ + g_{\bar{M}}^P (\nabla_3 \mathbf{D}^{\bar{3}\cdot \bar{M}\bar{s}} N_P \varphi_{\bar{s}} + N_P \mathbf{D}^{\bar{M}\cdot \bar{3}\bar{s}} \nabla_3 \varphi_{\bar{s}}) + \mathbf{D}^{\bar{3}\cdot \bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 \varphi_{\bar{s}} + \partial_3 \mathbf{D}^{\bar{3}\cdot \bar{3}\bar{s}} \partial_3 \varphi_{\bar{s}} + \\ + \mathbf{C}_{\cdot \bar{k}\bar{l}} [g_{\bar{M}}^P C^{\bar{k}\bar{l}\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + C^{\bar{k}\bar{l}\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - C^{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (C_{\bar{p}\bar{q}\bar{s}} \vartheta^{\bar{s}} + a_{\bar{p}\bar{q}} \vartheta)] + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}.\end{aligned}$$

Легко усмотреть, что для однородного материала из (3.2.66) находим

$$\begin{aligned}
 & g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q u_{\bar{s}} + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P u_{\bar{s}} + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3 u_{\bar{s}}) + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 u_{\bar{s}} - \\
 & - C_{\bar{q}\bar{s}\bar{t}} (g_{\bar{M}}^P \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{s}\bar{t}} N_P \varphi^{\bar{q}} + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{s}\bar{t}} \partial_3 \varphi^{\bar{q}}) - g_{\bar{M}}^P \mathbf{b}^{\bar{M}} N_P \vartheta - \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3 \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\
 & g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q \mathbf{D}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q \varphi_{\bar{s}} + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{D}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P \varphi_{\bar{s}} + \mathbf{D}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3 \varphi_{\bar{s}}) + \mathbf{D}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 \varphi_{\bar{s}} + \\
 & + \mathbf{C}_{\bar{k}\bar{l}} [g_{\bar{M}}^P C^{\bar{k}\bar{l}\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + C^{\bar{k}\bar{l}\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - C^{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (C_{\bar{p}\bar{q}\bar{s}} \varphi^{\bar{s}} + a_{\bar{p}\bar{q}} \vartheta)] + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \varphi.
 \end{aligned} \tag{3.2.67}$$

В рамках классической теории упругости неоднородного материала из первого уравнения (3.2.66) будем иметь следующее представление уравнений движения:

$$\begin{aligned}
 & \{g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q [\mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q + (N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}}) N_Q] + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3) + \\
 & + g_{\bar{M}}^P [(\nabla_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}}) N_P + (N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}}) \nabla_3] + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 + \partial_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3\} u_{\bar{s}} - \\
 & - \{g_{\bar{M}}^P [\mathbf{b}^{\bar{M}} N_P + (N_P \mathbf{b}^{\bar{M}})] + [\mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3 + (\partial_3 \mathbf{b}^{\bar{3}})]\} \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u},
 \end{aligned} \tag{3.2.68}$$

а в рамках классической теории упругости однородного материала из первого уравнения (3.2.67) получим

$$\begin{aligned}
 & [g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3) + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3] u_{\bar{s}} - \\
 & - (\mathbf{b}^{\bar{M}} g_{\bar{M}}^P N_P - \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3) \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

Вводя дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}} &= g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q [\mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q + (N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}}) N_Q] + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3) + \\
 & + g_{\bar{M}}^P [(\nabla_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}}) N_P + (N_P \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}}) \nabla_3] + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3 + \partial_3 \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3, \\
 \mathbf{T} &= -\{g_{\bar{M}}^P [\mathbf{b}^{\bar{M}} N_P + (N_P \mathbf{b}^{\bar{M}})] + [\mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3 + (\partial_3 \mathbf{b}^{\bar{3}})]\},
 \end{aligned} \tag{3.2.69}$$

уравнения движения (3.2.68) можно представить в краткой форме

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T} \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}. \tag{3.2.70}$$

Следовательно, для однородного материала дифференциальные операторы (3.2.69) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}} &= g_{M\bar{N}}^P g_{\bar{N}}^Q \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} N_P N_Q + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3) + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3, \\
 \mathbf{T} &= -(g_{\bar{M}}^P \mathbf{b}^{\bar{M}} N_P + \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3).
 \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

Нетрудно заметить, что в силу определения приближенного соотношения порядка r , (1.5.37), (1.5.68) и (3.2.69) в случае однородного классического анизотропного упругого материала дифференциальные операторы приближения порядка r представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}}_{(r)} &= \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{N}\bar{s}} \left[\sum_{s=0}^{2r} B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s \right] N_P N_Q + g_{\bar{M}}^P (\mathbf{C}^{\bar{3}\bar{M}\bar{s}} \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M}\bar{3}\bar{s}} N_P \nabla_3) + \mathbf{C}^{\bar{3}\bar{3}\bar{s}} \partial_3 \partial_3, \\
 \mathbf{T}_{(r)} &= -(g_{\bar{M}}^P \mathbf{b}^{\bar{M}} N_P + \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3), \quad g_{\bar{M}}^P = \sum_{s=0}^r A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s.
 \end{aligned} \tag{3.2.72}$$

Легко усмотреть, что

$$\underline{\mathbf{L}}_{(r+1)} = \underline{\mathbf{L}}_{(r)} + \delta \underline{\mathbf{L}}_{(r)}, \quad \mathbf{T}_{(r+1)} = \mathbf{T}_{(r)} + \delta \mathbf{T}_{(r)}, \quad (3.2.73)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \underline{\mathbf{L}}_{(r)} &= \mathbf{C}^{\bar{M} \cdot \bar{N}} \cdot \left[\sum_{s=2r+1}^{2r+2} B_{(s) \bar{M} \bar{N}}^{\bar{P} \bar{Q}} (x^3)^s \right] N_P N_Q + A_{(r+1) \bar{M}}^P (x^3)^{r+1} (\mathbf{C}^{\bar{3} \cdot \bar{M}} \cdot \nabla_3 N_P + \mathbf{C}^{\bar{M} \cdot \bar{3}} \cdot N_P \nabla_3), \\ \delta \mathbf{T}_{(r)} &= - A_{(r+1) \bar{M}}^P (x^3)^{r+1} \mathbf{b}^{\bar{M}} N_P. \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

Следует заметить, что и для любого анизотропного упругого материала аналогично (3.2.72) нетрудно вводить в рассмотрение дифференциальные операторы приближения порядка r . Однако с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

3.2.6 Момент k -го порядка произведения двух функций относительно системы полиномов Чебышева второго рода

Момент k -го порядка произведения нескольких функций (тензорных полей) относительно системы полиномов Чебышева второго рода определяется аналогично (2.7.2). Ниже рассмотрены моменты k -го порядка произведения двух функций и произведения на произвольную степень x^3 произведения двух функций.

В силу определения 2.7.1 (см. (2.7.2)) момент k -го порядка произведения двух функций $f(x', x^3)$ и $g(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{\hat{U}_k^*(x^3)\}_{k=0}^\infty$ можно вычислить с помощью интеграла

$$M^{(k)}(fg) = \int_0^1 f(x', x^3) g(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h_k^*(x^3) dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.2.75)$$

Предположим, что $f(x', x^3), g(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$. Тогда аналогично (2.7.1) их можно разлагать в ряды Фурье-Чебышева

$$f(x', x^3) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(x') \hat{U}_m^*(x^3), \quad g(x', x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(x') \hat{U}_n^*(x^3). \quad (3.2.76)$$

Пользуясь правилом произведения рядов в форме Коши, в силу (3.2.76) будем иметь

$$\begin{aligned} f(x', x^3) g(x', x^3) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(x') \hat{U}_m^*(x^3) \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} g^{(s)}(x') \hat{U}_s^*(x^3) \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f^{(m)}(x') g^{(n-m)}(x') \hat{U}_m^*(x^3) \hat{U}_{n-m}^*(x^3). \end{aligned} \quad (3.2.77)$$

Учитывая (2.6.7) при $s = 0$ и (3.2.77), из (3.2.75) после простых выкладок получим

$$M^{(k)}(fg) = \int_0^1 f(x', x^3) g(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h_k^*(x^3) dx^3 = \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k f^{(n+p)}(x') g^{(n+k-p)}(x'). \quad (3.2.78)$$

Аналогично (3.2.78) с помощью (2.6.7) после простых преобразований находим

$$\begin{aligned} M^{(k)}[2^{2s}(x^3)^s fg] &= \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2s} \sum_{p=0}^{k-s+q} C_{2s}^q f^{(n+p)} g^{(n+k-s-p+q)}, \quad k-s \geq 0, \quad s \geq 0, \\ M^{(p)}(fg) &= \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \left(f^{(n+q)} g^{(n+k-q)} + f^{(n+k-q)} g^{(n+q)} \right) = \hat{U}_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \left(f^{(n)} g^{(n+k-2q)} + f^{(n+k-2q)} g^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

Видно, что из первого равенства (3.2.79) при $s = 0$ получается соотношение для момента k -го порядка произведения двух функций (3.2.78).

3.2.7 Законы термодинамики и теплопроводности Фурье. Уравнение притока тепла, граничные и начальные условия и их представления при НПОТТ

Приведены законы термодинамики в интегральной и дифференциальной формах. Кроме того, выписаны закон теплопроводности Фурье, уравнение притока тепла в различной форме как для произвольного материала, так и для изотропного.

3.2.7.1 Законы термодинамики. Законы теплопроводности Фурье и уравнение притока тепла

При рассмотрении неизотермических процессов требуется привлечение основных законов термодинамики.

Первый из этих законов постулирует существование функции состояния U , называемой внутренней энергией, и записывается в интегральном виде [336] следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(U + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dV = \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q) dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{v} - q^{(n)}) d\Sigma, \quad (3.2.80)$$

где q — массовый приток тепла, $q^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$ — проекция вектора внешнего потока \mathbf{q} на нормаль к поверхности Σ .

Второй закон термодинамики постулирует существование некоторой функции состояния H , называемой энтропией, и в интегральной форме имеет следующее представление [336]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho H dV = \int_V \rho \frac{q}{T} dV - \int_{\Sigma} \frac{q^{(n)}}{T} \Sigma + \int_V \frac{1}{T} (W^* - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T}) dV. \quad (3.2.81)$$

Здесь T — температура, а W^* — так называемая функция рассеивания, причем $W^* \gg 0$. Если функция рассеивания равна нулю, то среда называется обратимой, если она строго больше нуля, то среда необратимая. Последнее слагаемое в правой части (3.2.81) называется производством энтропии H^* , причем

$$H^* = \int_V \frac{1}{T} (W^* - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T}) dV \geq 0$$

Заметим, что внутренняя энергия и энтропия, как и любая функция состояния, зависят от внешнего термодинамического параметра состояния, которым является температура T , и некоторых внутренних параметров состояния, которые характеризуют рассматриваемую среду.

Пользуясь теоремой живых сил в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} dV = \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \underline{\mathbf{P}} \otimes \nabla \mathbf{v}) dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{v} d\Sigma,$$

первый закон термодинамики (3.2.80) можно представить в дифференциальной форме

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q + \underline{\mathbf{P}} \otimes \nabla \mathbf{v} = \rho \frac{dU}{dt}. \quad (3.2.82)$$

Здесь $\underline{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений, а $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}$. Не представляет большого труда записать в дифференциальной форме и второй закон термодинамики. В самом деле, в силу соотношения

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}$$

производство энтропии представляется в виде

$$H^* = \int_V \frac{1}{T} (W^* - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T}) dV = \int_V \frac{1}{T} (W^* - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV + \int_{\Sigma} \frac{q^{(n)}}{T} d\Sigma,$$

с учетом которого из (3.2.81) получим искомую дифференциальную форму второго закона термодинамики

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q + W^* = \rho T \frac{dH}{dt}. \quad (3.2.83)$$

Введем функцию состояния Ψ , называемую свободной энергией, по формуле

$$\Psi = U - TH.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\rho \left(\frac{dU}{dt} - T \frac{dH}{dt} \right) = \rho \left(\frac{d\Psi}{dt} + H \frac{dT}{dt} \right).$$

Отсюда в силу (3.2.82) и (3.2.83) закон сохранения [336] получим в форме

$$\rho \left(\frac{d\Psi}{dt} + H \frac{dT}{dt} \right) + W^* = \underline{\mathbf{P}} \otimes \nabla \mathbf{v}.$$

Далее заметим, что физическое соотношение между вектором потока тепла \mathbf{q} и градиентом температуры [336] представляется в виде

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \text{grad } T = -\underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T, \quad (3.2.84)$$

где положительно определенный симметричный тензор $\underline{\mathbf{\Lambda}}$ — тензор теплопроводности.

Линейное определяющее соотношение (3.2.84) носит название закона теплопроводности Фурье. С помощью него второй закон термодинамики (3.2.83) можно записать в форме

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T) + \rho q + W^* = \rho T \frac{dH}{dt}. \quad (3.2.85)$$

Второй закон термодинамики в виде (3.2.85) называется уравнением притока тепла.

По закону Дюлонга-Пти у твердых веществ [336] для температуры выше некоторой, называемой температурой Дебая, теплоемкость (при постоянном давлении) $c_p = \text{const}$. В этом случае, считая теплоемкость вещества заданной, энтропия H полностью определяется законом связи [336] между тензорами напряжений и деформаций и представляется в форме

$$\rho H = \rho c_p \ln \frac{T}{T_0} + \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \}, \quad \vartheta = T - T_0.$$

Тогда в силу этого последнего соотношения уравнение притока тепла (3.2.85) примет вид

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T) + \rho q - T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.86)$$

где $\underline{\mathbf{a}}$ — тензор теплового расширения среды, $\underline{\mathbf{e}}$ — линейный тензор деформаций. Уравнение притока тепла (3.2.86) — нелинейное дифференциальное уравнение. Нелинейность проявляется в третьем члене в левой части (3.2.86).

Далее рассмотрим линейно упругий материал. В этом случае

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathcal{F}} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \}.$$

Поэтому

$$\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \} = \underline{\mathbf{b}} \otimes \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{C}}. \quad (3.2.87)$$

На основании (3.2.87) уравнение притока тепла (3.2.86) для упругого материала можно записать в виде

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla T) + \rho q - T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.88)$$

Следует заметить, что, если рассматривается микрополярная теория, то в уравнении притока тепла линейный тензор деформаций $\underline{\mathbf{e}}$ нужно заменить на тензор деформаций микрополярной теории $\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$. После такой замены, например, из (3.2.88) получим

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla T) + \rho q - T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \{ \underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt},$$

или

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla T) + \rho q - T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \{ \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.89)$$

Видно, что уравнение притока тепла (3.2.89) в силу (3.2.84) можно представить в виде

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q - T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \{ \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{a}} \vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.90)$$

или в более общей форме [343]

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{a}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{d}}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.91)$$

Заметим, что в микрополярной теории тензоры теплового расширения $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{d}}$ — несимметричные тензоры.

Если материал однородный и материальные функции не зависят от времени, то из (3.2.89) будем иметь

$$\Lambda^{pq} \nabla_p \nabla_q T + \rho q - T \left(b^{pq} \nabla_p v_q - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} \frac{dT}{dt} \right) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}.$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$\Lambda^{pq} \nabla_p \nabla_q T + \rho q - T \left(b^{pq} \nabla_p v_q - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \right) + W^* = \left(\rho c_p - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} T \right) \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.92)$$

Уравнение (3.2.92) можно еще записать в виде

$$\Lambda^{pq} \nabla_p \nabla_q T + \rho q - T \left(b^{pq} \nabla_p v_q - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \right) + W^* = \rho c_v \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.93)$$

где c_v — теплоемкость при постоянном объеме и

$$\rho c_v = \rho c_p - \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} T \quad (3.2.94)$$

Если рассматривается классический изотропный упругий однородный материал, то

$$\underline{\mathbf{A}} = \Lambda \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} = 3aK \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{b}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{a}} = 9a^2 K. \quad (3.2.95)$$

Учитывая соответствующие соотношения (3.2.95), уравнение притока тепла (3.2.93) для изотропного однородного упругого материала примет форму

$$\Lambda \Delta T + \rho q - 3aKT \nabla \cdot \mathbf{v} + W^* = \rho c_v \frac{dT}{dt}, \quad 3K = 3\Lambda + 2\mu. \quad (3.2.96)$$

В силу последнего соотношения (3.2.95) из (3.2.94) получим

$$\rho c_v = \rho c_p - 9a^2KT. \quad (3.2.97)$$

Нетрудно заметить, что с помощью (3.2.97) из (3.2.96) будем иметь

$$\Lambda \Delta T + \rho q - 3aT \frac{dp}{dt} + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad p = K(\theta - 3a\vartheta). \quad (3.2.98)$$

Если среда обратимая, то в приведенных выше уравнениях притока тепла следует положить $W^* = 0$. Если, кроме того, величина $p = (1/3)I_1(\underline{\mathbf{P}})$ не меняется со временем, то из (3.2.98) получим замкнутое относительно температуры линейное уравнение теплопроводности.

Из (3.2.97) следует, что обе теплоемкости c_p и c_v не могут быть одновременно постоянными (не зависящими от температуры). Поэтому очень часто принимается допущение [336], что в третьем слагаемом левой части уравнения (3.2.86) температуру T можно заменить на температуру T_0 . Тогда уравнение (3.2.86) представляется в виде

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T) + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\check{\mathcal{F}}} \{ \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta \}] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.99)$$

Следовательно, в этом случае из (3.2.97) получаем

$$\rho c_v = \rho c_p - 9a^2KT_0.$$

Аналогично (3.2.99) можно представить и уравнения (3.2.88)–(3.2.93), (3.2.96) и (3.2.98).

3.2.7.2 Граничные и начальные условия теплового содержания

Рассмотрены граничные условия первого, второго и третьего родов и начальные условия [336].

1. Граничное условие первого рода (условие типа Дирихле). В этом случае на некоторой части Σ_q поверхности Σ ($\Sigma_q \subseteq \Sigma$) тела задается температура:

$$T(x^1, x^2, x^3, t)|_{\Sigma_q} = T^0(x^1, x^2, x^3, t). \quad (3.2.100)$$

2. Граничное условие второго рода (условие типа Неймана). В этом случае на некоторой части Σ_q поверхности Σ ($\Sigma_q \subseteq \Sigma$) тела задается поток тепла:

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T|_{\Sigma_q} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Sigma_q} = -q^0(x^1, x^2, x^3, t). \quad (3.2.101)$$

3. Граничное условие третьего рода (условие, соответствующее теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона). В этом случае граничное условие представляется в виде

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{\Lambda}} \cdot \nabla T|_{\Sigma_q} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Sigma_q} = \beta [T(x^1, x^2, x^3, t)|_{\Sigma_q} - T_c(x^1, x^2, x^3, t)]. \quad (3.2.102)$$

Здесь T_c — заданная температура окружающей среды, а β — коэффициент теплоотдачи. Следует заметить, что могут встретиться и более сложные (нелинейные) граничные условия, например, для случая теплоотдачи с излучением. Однако мы будем рассматривать только линейные граничные условия.

4. Начальное условие. При рассмотрении нестационарной задачи нужно задать и начальное условие:

$$T(x^1, x^2, x^3, t)|_{t=0} = T(x^1, x^2, x^3, 0) = T^0(x^1, x^2, x^3). \quad (3.2.103)$$

Заметим, что для тел конечных размеров начальное условие оказывает влияние лишь на первой стадии нестационарного процесса. Начиная с некоторого момента наступает режим, при котором распределение температуры практически не зависит от начального условия. В этом случае говорят, что решается стационарная задача [336].

Заметим также, что вид функции рассеивания W^* конкретизируется при выборе модели термомеханики деформируемого твердого тела (ТМДТТ).

3.2.7.3 Представление уравнения притока тепла при НПОТТ

Рассмотрим, например, уравнение притока тепла (3.2.89) и представим его при НПОТТ. Учитывая (3.2.84) и пользуясь первым соотношением (2.9.34), будем иметь

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda} \cdot \nabla T) = -(g_{\underline{M}}^P N_P q^{\bar{M}} + \partial_3 q^{\bar{3}}). \quad (3.2.104)$$

Отсюда, учитывая

$$-q^{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \nabla T = \Lambda^{\bar{m}q} \partial_q T = \Lambda^{\bar{m}n} g_n^q \partial_q T = g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{m}\bar{N}} N_Q T + \Lambda^{\bar{m}\bar{3}} \partial_3 T,$$

получим

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Lambda} \cdot \nabla T) = g_{\underline{M}}^P N_P (g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{M}\bar{N}} N_Q T) + g_{\underline{M}}^P N_P (\Lambda^{\bar{M}\bar{3}} \partial_3 T) + \partial_3 (g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{3}\bar{N}} N_Q T) + \partial_3 (\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} \partial_3 T). \quad (3.2.105)$$

Далее, осуществляя простые преобразования, найдем

$$\mathfrak{b} \otimes \nabla \mathbf{u} = b^{pq} \nabla_p u_q = g_{\underline{N}}^Q b^{\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}}. \quad (3.2.106)$$

В силу (3.2.105) и (3.2.106) из (3.2.89) приходим к искомому представлению

$$g_{\underline{M}}^P N_P (g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{M}\bar{N}} N_Q T) + g_{\underline{M}}^P N_P (\Lambda^{\bar{M}\bar{3}} \partial_3 T) + \partial_3 (g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{3}\bar{N}} N_Q T) + \partial_3 (\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} \partial_3 T) + \rho q - T \frac{d}{dt} (g_{\underline{M}}^P b^{\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.107)$$

Легко показать, что (3.2.107) можно записать в форме

$$g_{\underline{M}}^P g_{\underline{N}}^Q N_P (\Lambda^{\bar{M}\bar{N}} N_Q T) + g_{\underline{M}}^P N_P (\Lambda^{\bar{M}\bar{3}} \partial_3 T) + g_{\underline{N}}^Q \nabla_3 (\Lambda^{\bar{3}\bar{N}} N_Q T) + \partial_3 (\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} \partial_3 T) + \rho q - T \frac{d}{dt} (g_{\underline{M}}^P b^{\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.108)$$

Нетрудно найти представления уравнения притока тепла для однородного относительно x^3 материала. В самом деле, учитывая, что $\partial_3 \underline{\mathfrak{A}} = 0$, из (3.2.107) получим

$$g_{\underline{M}}^P N_P (g_{\underline{N}}^Q \Lambda^{\bar{M}\bar{N}} N_Q T) + g_{\underline{M}}^P [\nabla_P (\Lambda^{\bar{M}\bar{3}} \partial_3 T) - \Lambda^{\bar{M}\bar{3}} g_P^{\bar{3}} \partial_3^2 T] + \Lambda^{\bar{3}\bar{N}} \partial_3 (g_{\underline{N}}^Q N_Q T) + \Lambda^{\bar{3}\bar{3}} \partial_3^2 T + \rho q - T \frac{d}{dt} (g_{\underline{M}}^P b^{\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.109)$$

Аналогично (3.2.109) для однородного материала из (3.2.107) находим

$$g_{\underline{M}}^P \Lambda^{\bar{M}\bar{N}} N_P (g_{\underline{N}}^Q N_Q T) + g_{\underline{M}}^P \Lambda^{\bar{M}\bar{3}} N_P \partial_3 T + \Lambda^{\bar{3}\bar{N}} \partial_3 (g_{\underline{N}}^Q N_Q T) + \Lambda^{\bar{3}\bar{3}} \partial_3^2 T + \rho q - T \frac{d}{dt} (g_{\underline{M}}^P b^{\bar{M}\bar{q}} N_P u_{\bar{q}} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{\bar{q}} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathfrak{b} \otimes \underline{\mathfrak{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.110)$$

В силу (3.2.104) из (3.2.86), (3.2.90) и (3.2.91) получим соответственно следующие представления уравнения притока тепла:

$$-g_{\underline{M}}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\mathfrak{a} \otimes \underline{\mathfrak{P}}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.111)$$

$$-g_{-M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} \mathbf{b}^{\otimes 2} [(\nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{a}^{\vartheta})] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.2.112)$$

$$-g_{-M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}} + \mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.113)$$

Нетрудно заметить, что уравнение притока тепла приближения порядка r , например, исходя из (3.2.113), представится в виде

$$-g_{-(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(r)} + \mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.2.114)$$

Аналогично (3.2.114) можно получить из приведенных выше представлений соответствующие уравнения притока тепла приближения порядка r . С целью сокращения письма их выписывать не будем.

Следует отметить, что для классической теории упругости соответствующие варианты представления притока тепла получим, если в (3.2.107)–(3.2.113) характеристики микрополярной теории считать равными нулю ($\boldsymbol{\varphi} = 0$, $\boldsymbol{\mu} = 0$). При этом в классическом случае следует учесть, что $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{L}}^T$ и $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}^T$. Следовательно, имея (3.2.107)–(3.2.113) и соответствующие представления этих уравнений для классической теории, не представляет труда из них получить аналогичные представления уравнения притока тепла для частных случаев анизотропии. Поэтому на этом останавливаться не будем. Следовательно, в рассматриваемом случае аналогично (3.2.69) можно ввести дифференциальный оператор и представить уравнение притока тепла подобно (3.2.70) и (3.2.71) в операторном виде, а также можно рассматривать аналогичные (3.2.72) – (3.2.74) соотношения. При необходимости это сделать нетрудно, поэтому с целью сокращения письма и на этом останавливаться не будем.

3.2.7.4 Представления закона теплопроводности Фурье при НПOTT

В силу определения градиента и (2.9.2) из (3.2.84) получим

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{L}} \cdot \nabla T = -\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{r}^p \partial_p T = -\underline{\mathbf{L}} \cdot g_{-m}^p \mathbf{r}^{\bar{m}} \partial_p T = -\underline{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{r}^{\bar{M}} g_{-M}^P N_P T + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 T).$$

т.е.

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{L}} \cdot \nabla T = -\underline{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{r}^{\bar{M}} g_{-M}^P N_P T + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 T) = -\underline{\mathbf{L}}^{\bar{M}} g_{-M}^P N_P T - \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}} \partial_3 T, \quad -\underline{\mathbf{L}}^{\bar{m}} = \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}}, \quad (3.2.115)$$

или отсюда, учитывая выражение для g_{-M}^P (1.5.37), будем иметь

$$\mathbf{q} = -\underline{\mathbf{L}}^{\bar{M}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} N_P T - \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}} \partial_3 T. \quad (3.2.116)$$

Следовательно, закон теплопроводности Фурье приближения порядка r представится в виде

$$\mathbf{q}_{(r)} = -\underline{\mathbf{L}}_{(r)M}^{\bar{M}} g_{-M}^P N_P T - \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}} \partial_3 T. \quad (3.2.117)$$

Соотношения (3.2.115) – (3.2.117) – искомые формы представления закона теплопроводности Фурье. Следует заметить, что с помощью (3.2.115) – (3.2.117) граничные условия (3.2.101) и (3.2.102) можно представить при НПOTT. С целью сокращения письма их приводить не будем.

3.3 Системы уравнений МДТТТ в моментах

Получены системы уравнений МДТТТ в моментах относительно систем полиномов Чебышева второго рода и Лежандра при НПOTT.

3.3.1 Системы уравнений микрополярной МДТТТ в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно системы полиномов Чебышева второго рода

Эти системы уравнений можно получить, исходя из (3.1.27) – (3.1.29). Однако, в рассматриваемом случае получим их из (3.1.33) и (3.1.29). Представлениями (3.1.27) целесообразно пользоваться при использовании системы полиномов Лежандра аналогично тому, как это делается в случае классической теории в [68].

Считая материал однородным относительно x^3 и применяя к уравнениям (3.1.33) оператор моментов k -го порядка, в силу (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4) и (2.7.14) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^r A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^m N_P \mathbf{P}^{\bar{M}}] + \overset{(k)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}'} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{F}} = \rho \frac{\partial^2 \overset{(k)}{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \\ \sum_{m=0}^r A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^m N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}] + \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{3}'} + \underset{\cong}{\mathbf{C}}^2 \otimes \underset{\cong}{\mathbf{P}} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{m}} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial^2 \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

Для нахождения выражений для первых слагаемых в левых частях (3.3.1) можно воспользоваться (2.9.10). В самом деле, заменяя в (2.9.10) s и ∞ на m и r соответственно, а \mathbb{F} на $\mathbf{P}^{\bar{M}}$, получим выражения для первого слагаемого в левой части первого соотношения (3.3.1). Далее, заменяя в (2.9.10) s и ∞ соответственно на m и r , а \mathbb{F} на $\boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}$, найдем выражение для первого слагаемого в левой части второго соотношения (3.3.1). Учитывая полученные выражения для этих слагаемых, из (3.3.1) найдем искомые уравнения в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^r \left(\sum_{p=0}^{2m} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2(m+1)} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2(m+1)} C_{2m+2}^p \mathbf{P}^{\bar{M}'} \right) + \\ & + \overset{(k)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}'} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{F}} = \rho \partial_t^2 \overset{(k)}{\mathbf{u}}, \\ & \sum_{m=0}^r \left(\sum_{p=0}^{2m} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2(m+1)} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} 2^{-2(m+1)} C_{2m+2}^p \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}'} \right) + \\ & + \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{3}'} + \underset{\cong}{\mathbf{C}}^2 \otimes \underset{\cong}{\mathbf{P}} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{m}} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \forall r \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где в силу (2.7.15)

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{\mathbf{P}}^{\bar{m}'} &= 4(n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \overset{(n+2p+1)}{\mathbf{P}}^{\bar{m}} = 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(p)}{\mathbf{P}}^{\bar{m}}, \\ \overset{(n)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{m}'} &= 4(n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \overset{(n+2p+1)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{m}} = 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(p)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{m}}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Заметим, что, исходя из (3.1.28), найдем уравнения, которые получатся из (3.3.2), если r заменить на ∞ . Уравнения (3.3.2) назовем уравнениями движения в моментах приближения порядка r микрополярной МДТТТ. Нетрудно заметить, что с помощью первого соотношения (2.9.6) уравнения (3.3.1) можно записать в форме

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^r \left\{ A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \nabla_P \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^m \mathbf{P}^{\bar{M}}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^{m+1} \mathbf{P}^{\bar{M}}] \right\} + \overset{(k)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}'} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{F}} = \rho \partial_t^2 \overset{(k)}{\mathbf{u}}, \\ & \sum_{m=0}^r \left\{ A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \nabla_P \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^m \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}] - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} A_{(m)_+^{\bar{M}}}^{\bar{P}} \overset{(k)}{\mathbf{M}}[(x^3)^{m+1} \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}] \right\} + \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{3}'} + \underset{\cong}{\mathbf{C}}^2 \otimes \underset{\cong}{\mathbf{P}} + \rho \overset{(k)}{\mathbf{m}} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Видно, что в силу (2.9.7) из (3.3.4) получим (3.3.2). Заметим, что представления (3.3.4) удобны для того, чтобы уравнения движения в моментах приближения порядка r микрополярной МДТТТ записать в другой форме. С целью получения этой формы записи

представим (2.7.15) в удобном виде. Назначая $N \geq k$, из (2.7.15) получим

$$\mathbb{F}^{(k)} = 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{F}^{(p)} + 2(k+1) [\mathbb{F}'^{(+)}(x') - (-1)^k \mathbb{F}'^{(-)}(x')], \quad N \geq k \geq 0, \quad (3.3.5)$$

где введены обозначения

$$\mathbb{F}'^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{F}^{(p)}, \quad \mathbb{F}'^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{F}^{(p)}. \quad (3.3.6)$$

Теперь (2.9.8) представим в аналогичной (3.3.5) форме. В силу (3.3.5) находим

$$\mathbb{F}^{(k-s-1+p)} = 2(k-s+p) \left\{ \sum_{q=k-s-1+p}^N [1 + (-1)^{k-s+p+q}] \mathbb{F}^{(q)} + [\mathbb{F}'^{(+)} + (-1)^{k-s+p} \mathbb{F}'^{(-)}] \right\}, \quad s, k \geq 0. \quad (3.3.7)$$

Учитывая (3.3.7), из (2.9.8) после простых выкладок получим искомое соотношение

$$\mathbb{M}'^{(k)} [(x^3)^{s+1} \mathbb{F}] = \sum_{p=0}^{2s+2} \sum_{q=l-1}^N l 2^{-(2s+1)} C_{2s+2}^p [1 - (-1)^{l+q}] \mathbb{F}^{(q)} + a_{(s,k)} \mathbb{F}'^{(+)}, \quad (3.3.8)$$

$$l = k - s + p, \quad s \geq 0, \quad k \geq 0.$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$a_{(s,k)} = 2^{-(2s+1)} \sum_{p=0}^{2s+2} (k-s+p) C_{2s+2}^p, \quad s \geq 0, \quad k \geq 0. \quad (3.3.9)$$

На основании (3.3.5), (3.3.6) и (3.3.8) легко получить искомую форму записи уравнений (3.3.4). В самом деле, учитывая, что в силу (3.3.3), (3.3.5) и (3.3.6) имеем

$$\mathbf{P}^{(k)-m'} = 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{(p)-m} + 2(k+1) [\mathbf{P}^{(+)m'} - (-1)^k \mathbf{P}^{(-)m'}], \quad (3.3.10)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)-m'} = 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{(p)-m} + 2(k+1) [\boldsymbol{\mu}^{(+)m'} - (-1)^k \boldsymbol{\mu}^{(-)m'}], \quad N \geq k \geq 0,$$

$$\mathbf{P}^{(+)m'}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbf{P}^{(p)-m}(x'), \quad \mathbf{P}^{(-)m'}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbf{P}^{(p)-m}(x'), \quad (3.3.11)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(+)m'}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}^{(p)-m}(x'), \quad \boldsymbol{\mu}^{(-)m'}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \boldsymbol{\mu}^{(p)-m}(x')$$

и осуществляя простые выкладки, найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^r \sum_{p=0}^{2m} A_{(m)M}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P^{(l)\bar{M}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} - \\ & - g_{+}^{\bar{3}} \sum_{Pm=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \mathbf{P}^{\bar{M}} - \\ & - [g_{+}^{\bar{3}} \left(\sum_{m=0}^r a_{(m,k)} A_{(m)M}^{\bar{P}} \right) \mathbf{r}^{\bar{M}} - 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}}] \cdot \mathbf{P}' - [(-1)^k 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}}] \cdot \mathbf{P}' + \\ & + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(k)}, \quad (3.3.12) \\ & \sum_{m=0}^r \sum_{p=0}^{2m} A_{(m)M}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P^{(l)\bar{M}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} - \\ & - g_{+}^{\bar{3}} \sum_{Pm=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} - \\ & - [g_{+}^{\bar{3}} \left(\sum_{m=0}^r a_{(m,k)} A_{(m)M}^{\bar{P}} \right) \mathbf{r}^{\bar{M}} - 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}}] \cdot \boldsymbol{\mu}' - [(-1)^k 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}}] \cdot \boldsymbol{\mu}' + \\ & + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad l = k - m + p, \quad \forall k, r \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

3.3.1.1 Система уравнений нулевого приближения ($r = 0$) в моментах микрополярной МДТТТ

Эту систему уравнений можно получить исходя из (3.3.1) или (3.3.2), а также из (3.3.4) или (3.3.12). Получим ее исходя, например, из (3.3.4). При $r = 0$ из (3.3.4) получим

$$\begin{aligned} \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{P}^{\bar{I}}) + \mathbf{P}^{\bar{3}'} + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{M}'(x^3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}}) + \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}'} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\boldsymbol{\varphi}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

В силу соответствующих соотношений (2.9.7) при $s = 0$, (3.3.10) и (3.3.11) нетрудно доказать, что имеет место соотношение

$$\mathbf{M}'(x^3 \mathbf{P}^{\bar{I}}) = \frac{1}{4} \left(\mathbf{P}^{\bar{I}'} + 2\mathbf{P}^{\bar{I}'} + \mathbf{P}^{\bar{I}'} \right) = k \mathbf{P}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{I}} - \mathbf{P}^{\bar{I}} + \mathbf{P}^{\bar{I}'} \right), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3.14)$$

На основании (3.3.14) и аналогичного соотношения, которое получается из (3.3.14) заменой буквы \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, система уравнений (3.3.13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} - \frac{1}{4} g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{P}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{I}} - \mathbf{P}^{\bar{I}} + \mathbf{P}^{\bar{I}'} \right) \right] + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} + \\ + 2(k+1) \left[\mathbf{P}^{\bar{3}'} - (-1)^k \mathbf{P}^{\bar{3}'} \right] + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} - \frac{1}{4} g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} - \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}'} \right) \right] + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \\ + 2(k+1) \left[\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}'} - (-1)^k \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}'} \right] + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\boldsymbol{\varphi}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Соотношения (3.3.15) представляют систему уравнений нулевого приближения в моментах микрополярной МДТТТ для однородного относительно x^3 материала.

3.3.1.2 Система уравнений первого приближения ($r = 1$) в моментах микрополярной МДТТТ

Эту систему аналогично системе уравнений нулевого приближения в моментах получим из (3.3.4). При $r = 1$ из (3.3.4) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} + A_{(1)M}^{\bar{P}} \nabla_P \mathbf{M}(x^3 \mathbf{P}^{\bar{M}}) - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{P}^{\bar{I}}) - g_{+P(1)M}^{\bar{3}} A_{+M}^{\bar{P}} \mathbf{M}'[(x^3)^2 \mathbf{P}^{\bar{M}}] + \mathbf{P}^{\bar{3}'} + \\ + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + A_{(1)M}^{\bar{P}} \nabla_P \mathbf{M}(x^3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}) - g_{+I}^{\bar{3}} \mathbf{M}'(x^3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}}) - g_{+P(1)M}^{\bar{3}} A_{+M}^{\bar{P}} \mathbf{M}'[(x^3)^2 \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}] + \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}'} + \\ + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\boldsymbol{\varphi}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

В силу первых двух соотношений (2.9.7) при $s = 1$ получим

$$\nabla_P \mathbf{M}(x^3 \mathbf{P}^{\bar{M}}) = \frac{1}{4} \left(\nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + 2\nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{I}} \right), \quad k \geq 0. \quad (3.3.17)$$

С помощью (2.9.8) при $s = 1$, (3.3.10) и (3.3.11) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'[(x^3)^2 \mathbf{P}^{\bar{M}}] &= \frac{1}{4} \left[(k-1) \mathbf{P}^{\bar{M}} - 4(k+2) \mathbf{P}^{\bar{M}} - (k+3) \mathbf{P}^{\bar{M}} + 8(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{P}^{\bar{M}} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[(k-1) \mathbf{P}^{\bar{M}} - 4(k+2) \mathbf{P}^{\bar{M}} - (k+3) \mathbf{P}^{\bar{M}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{M}} + \mathbf{P}^{\bar{M}'} \right) \right], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

На основании (3.3.14), (3.3.17), (3.3.18) и аналогичных соотношений, получаемых из них заменой буквы \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, а также с учетом второго соотношения (1.5.63) и (3.3.10) из (3.3.16) получим искомую форму записи системы уравнений первого приближения в моментах микрополярной МДТТТ

$$\begin{aligned} & \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \nabla_J (\mathbf{P}^{\bar{I}} + 2\mathbf{P}^{\bar{I}} + \mathbf{P}^{\bar{I}}) - \\ & - g_{+I}^{\bar{3}} \left\{ g_{-J}^{\bar{I}} [k \mathbf{P}^{\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{J}} - \mathbf{P}^{\bar{J}} + \mathbf{P}^{\bar{J}'} \right)] + \frac{1}{4} (g_{-J}^{\bar{I}} - g_{+J}^{\bar{I}}) [(k-1) \mathbf{P}^{\bar{J}} - \right. \\ & \left. - 4(k+2) \mathbf{P}^{\bar{J}} - (k+3) \mathbf{P}^{\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{J}} + \mathbf{P}^{\bar{J}'} \right)] \right\} + \\ & + 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbf{P}^{\bar{3}} + (\mathbf{P}^{\bar{3}'} - (-1)^k \mathbf{P}^{\bar{J}'}) \right] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ & \nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \nabla_J (\boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + 2\boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}}) - \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned} & - g_{+I}^{\bar{3}} \left\{ g_{-J}^{\bar{I}} [k \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}'} \right)] + \frac{1}{4} (g_{-J}^{\bar{I}} - g_{+J}^{\bar{I}}) [(k-1) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - \right. \\ & \left. - 4(k+2) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - (k+3) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}'} \right)] \right\} + \\ & + 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + (\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}'} - (-1)^k \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}'}) \right] + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}^T + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\boldsymbol{\varphi}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что в приведенных выше уравнениях в силу (3.1.13) имеем

$$\nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} = \nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} - (g_{-P}^{\bar{M}} - g_{+P}^{\bar{M}}) \mathbf{P}^{\bar{3}}, \quad \nabla_P^0 \mathbf{P}^{\bar{M}} = \partial_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \mathbf{P}^{\bar{N}} \Gamma_{NP}^{\bar{M}}$$

и аналогичные соотношения, получающиеся из этих соотношений, если в них букву \mathbf{P} заменить на $\boldsymbol{\mu}$. Заметим также, что при необходимости не представляет большого труда получить системы уравнений второго, третьего и т.д. приближений. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

Отметим, что выше одновременно получены соответствующие системы уравнений и классической МДТТТ. В рассматриваемых выше случаях ими являются первые соотношения (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.12), (3.3.13), (3.3.15), (3.3.16) и (3.3.19) соответственно. Если ρ и $\underline{\mathbf{J}}$ зависят от x^3 , то во всех рассматриваемых выше случаях при нахождении моментов k -го порядка объемных сил и инерционных сил нужно пользоваться первым соотношением (3.2.79). При необходимости их выписать нетрудно, поэтому и на этом останавливаться не будем. Отметим также, что все приведенные выше уравнения выведены с учетом переменной толщины тонкого тела. Из них соответствующие уравнения для тел постоянной толщины получаются, если в них положить $g_{+I}^{\bar{3}} = 0$. Следовательно, в этом случае уравнения будут иметь сравнительно простой вид.

3.3.2 Системы уравнений в моментах относительно системы полиномов Лежандра микрополярной МДТТТ

Нетрудно доказать, что аналогичные (3.3.5), (3.3.14), (3.3.17) и (3.3.18) (см. (2.1.23), (2.1.26), (2.2.8)) соотношения для полиномов Лежандра представляются в виде

$$\begin{aligned}
 {}^{(k)}M(\partial_3 F) &= {}^{(k)}M'(F) = (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] F^{(p)} = \\
 &= (2k+1)[F^{(+)} - (-1)^k F^{(-)}] - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] F^{(p)}, \\
 {}^{(k)}M(x^3 \partial_3 F) &= {}^{(k)}M'(x^3 F) = k F^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} F^{(p)} = \\
 &= k F^{(k)} - (2k+1) \sum_{p=0}^k F^{(p)} + (2k+1) F^{(+)}, \\
 {}^{(k)}M[(x^3)^2 \partial_3 F] &= \frac{(k-1)k}{2(2k-1)} F^{(k-1)} + k F^{(k)} - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} F^{(k+1)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} F^{(p)} = \\
 &= \frac{(k-1)k}{2(2k-1)} F^{(k-1)} + k F^{(k)} - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} F^{(k+1)} - (2k+1) \sum_{p=0}^k F^{(p)} + (2k+1) F^{(+)}.
 \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

В силу (2.1.23), (2.1.26) и (2.2.2) легко доказать также, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 {}^{(k)}M(x^3 F) &= \frac{k}{2(2k-1)} F^{(k-1)} + \frac{1}{2} F^{(k)} + \frac{k+1}{2(2k+3)} F^{(k+1)}, \\
 {}^{(k)}M[(x^3)^2 F] &= \frac{(k-1)k}{4(2k-3)(2k-1)} F^{(k-2)} + \frac{k}{2(2k-1)} F^{(k-1)} + \\
 &+ \frac{3k^2 + 3k - 2}{2(2k-1)(2k+3)} F^{(k)} + \frac{k+1}{2(2k+3)} F^{(k+1)} + \frac{(k+1)(k+2)}{4(2k+3)(2k+5)} F^{(k+2)}.
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Следует заметить, что те части соотношений (3.3.20), которые содержат $F^{(-)}$ и $F^{(+)}$, меняются в тех случаях, когда на лицевых поверхностях заданы значения величины F .

Применяя оператор моментов k -го порядка относительно систем полиномов Лежандра к уравнениям (3.1.27) и учитывая первое соотношение (3.3.20) с учетом значений величины на лицевых поверхностях, после простых выкладок получим вариант бесконечной системы уравнений движения теории тонких тел в моментах в виде

$$\begin{aligned}
 (1/\sqrt{g^{(-)}}) \partial_P (\sqrt{g^{(-)}} \mathbf{P}^{(k)P}) + (2k+1) [\mathbf{P}^{(+)3} - (-1)^k \mathbf{P}^{(-)3}] - 2(2k+1) \mathbf{P}^{(k)3} + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\
 (1/\sqrt{g^{(-)}}) \partial_P (\sqrt{g^{(-)}} \boldsymbol{\mu}^{(k)P}) + (2k+1) [\boldsymbol{\mu}^{(+)3} - (-1)^k \boldsymbol{\mu}^{(-)3}] - 2(2k+1) \boldsymbol{\mu}^{(k)3} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{P} &+ \\
 + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0, &
 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}^p &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\mathbf{P}}^p P_k(x^3) dx^3, & \underline{\boldsymbol{\mu}}^p &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^p P_k(x^3) dx^3, \\ \underline{\mathbf{P}} &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\mathbf{P}} P_k(x^3) dx^3, & \underline{\mathbf{F}} &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\mathbf{F}} P_k(x^3) dx^3, \\ \underline{\mathbf{m}} &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\mathbf{m}} P_k(x^3) dx^3, & \underline{\mathbf{u}} &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\mathbf{u}} P_k(x^3) dx^3, \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} &= (2k+1) \int_0^1 \underline{\boldsymbol{\omega}} P_k(x^3) dx^3, & k &\in \mathbb{N}_0, \\ \underline{\mathbf{P}}^p &= \vartheta \underline{\mathbf{P}}^p, & \underline{\boldsymbol{\mu}}^p &= \vartheta \underline{\boldsymbol{\mu}}^p, & \underline{\mathbf{P}} &= \vartheta \underline{\mathbf{P}}, & \underline{\mathbf{F}} &= \vartheta \underline{\mathbf{F}}, & \underline{\mathbf{m}} &= \vartheta \underline{\mathbf{m}}, & \underline{\mathbf{u}} &= \vartheta \underline{\mathbf{u}}, & \underline{\boldsymbol{\omega}} &= \vartheta \underline{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}^3 &= \underline{\mathbf{P}}^3 + \underline{\mathbf{P}}^3 + \underline{\mathbf{P}}^3 + \dots, & \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 &= \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 + \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 + \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 + \dots, \\ \underline{\mathbf{P}}^3 &= \underline{\mathbf{P}}^3|_{x^3=1}, & \underline{\mathbf{P}}^3 &= \underline{\mathbf{P}}^3|_{x^3=0}, & \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 &= \underline{\boldsymbol{\mu}}^3|_{x^3=1}, & \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 &= \underline{\boldsymbol{\mu}}^3|_{x^3=0}. \end{aligned}$$

Систему уравнений (3.3.22) можно еще записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla_P \underline{\mathbf{P}}^p + (2k+1) [\underline{\mathbf{P}}^3 - (-1)^k \underline{\mathbf{P}}^3] - 2(2k+1) \underline{\mathbf{P}}^3 + \rho \underline{\mathbf{F}} &= \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}^{(k)}, \\ \nabla_P \underline{\boldsymbol{\mu}}^p + (2k+1) [\underline{\boldsymbol{\mu}}^3 - (-1)^k \underline{\boldsymbol{\mu}}^3] - 2(2k+1) \underline{\boldsymbol{\mu}}^3 + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + & \\ + \rho \underline{\mathbf{m}} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

где ∇_P – пространственный оператор ковариантного дифференцирования в базисе, связанном с внутренней базовой поверхностью [251].

Следует заметить, если исходить из уравнений классической теории упругости, то получается только первое соотношение (3.3.23). В случае тел класса TS (тонких и полых) имеем $\vartheta \approx 1$. Тогда система уравнений (3.3.23) представляется в более простой форме. Заметим также, что выражения в квадратных скобках в правых частях уравнений (3.3.23) определяются с помощью граничных условий [68] на лицевых поверхностях (см. ниже раздел "О граничных и начальных условиях"). В этой связи (3.3.23) можно называть системой уравнений в моментах с учетом граничных условий на лицевых поверхностях. Преимущество этой системы заключается в том, что каждое уравнение системы содержит конечное число слагаемых. Ниже, исходя из представления (3.1.33), получим системы уравнений движения нулевого ($r = 0$) и первого ($r = 1$) приближений в моментах относительно систем полиномов Лежандра без учета и с учетом граничных условий на лицевых поверхностях. При этом, так как при применении системы полиномов Чебышева были даны подробные выводы систем уравнений движения в моментах, то в рассматриваемом случае на подробных выводах этих систем уравнений останавливаться не будем.

3.3.2.1 Системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях

Эти системы уравнений движения получаются из (3.1.33) при $r = 0$ и $r = 1$ с применением (3.3.20) без учета значений величины на лицевых поверхностях. Они представляются соответственно в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^I - g_+^3 [k \mathbf{P}^I + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^I] + (2k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^3 \right\} + \\ & + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^I + \frac{1}{2} (g_M^- - g_M^+) \left(\frac{k}{2k-1} \nabla_P \mathbf{P}^M + \nabla_P \mathbf{P}^M + \frac{k+1}{2k+3} \nabla_P \mathbf{P}^{M+} \right) + \right. \\ & + (2k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^3 - g_+^3 \left[g_M^- [k \mathbf{P}^M + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^M] + \right. \\ & + (g_M^- - g_M^+) \left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)} \mathbf{P}^M + k \mathbf{P}^M - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \mathbf{P}^{M+} + \right. \\ & \left. \left. \left. + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^M \right] \right] \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

$$\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Заметим, что запись вида $\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \}$ означает, что выражения в этих фигурных скобках получается из выражения в фигурных скобках предыдущего соотношения, если букву \mathbf{P} заменить на букву $\boldsymbol{\mu}$. Аналогичная запись применяется и в дальнейшем.

3.3.2.2 Системы уравнений движения первого приближения в моментах относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях

Искомые системы уравнений движения получаются аналогично (3.3.24) и (3.3.25) из (3.1.33) при $r = 0$ и $r = 1$ с использованием (3.3.20) с учетом значений величины на лицевых поверхностях. Они имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^I - g_+^3 [k \mathbf{P}^I - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^I] + (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^3 \right\} + \\ & + (2k+1) [\sqrt{g^{33+}} \mathbf{P} + (-1)^k \sqrt{g^{33-}} \mathbf{P}] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^I + \frac{1}{2} (g_M^- - g_M^+) \left(\frac{k}{2k-1} \nabla_P \mathbf{P}^M + \nabla_P \mathbf{P}^M + \frac{k+1}{2k+3} \nabla_P \mathbf{P}^{M+} \right) - \right. \\ & - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^3 - g_+^3 \left[g_M^- [k \mathbf{P}^M - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^M] + \right. \\ & + (g_M^- - g_M^+) \left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)} \mathbf{P}^M + k \mathbf{P}^M - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \mathbf{P}^{M+} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^M \right] \left. \right\} + \\ & + (2k+1) [\sqrt{g^{33+}} \mathbf{P} + (-1)^k \sqrt{g^{33-}} \mathbf{P}] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3.27)$$

При получении (3.3.26) были учтены граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} &= -(1/\sqrt{g^{33-}}) \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}, & \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} &\approx (1/\sqrt{g^{33+}}) (\mathbf{P}^3 - g_+^3 \mathbf{P}^I) = \mathbf{P}, \\ \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} &= -(1/\sqrt{g^{33-}}) \boldsymbol{\mu}^3 = \boldsymbol{\mu}, & \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} &\approx (1/\sqrt{g^{33+}}) (\boldsymbol{\mu}^3 - g_+^3 \boldsymbol{\mu}^I) = \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

а при выводе (3.3.27) были использованы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}} &= -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\overset{(-)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}} = \overset{(-)}{\mathbf{P}}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}} &\approx (1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})[\overset{(+)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+(2g^{\bar{P}}_M - g^{\bar{P}}_+)\overset{(+)}{\mathbf{P}}^{\bar{M}}] = \overset{(+)}{\mathbf{P}}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{3}} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &\approx (1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})[\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+(2g^{\bar{P}}_M - g^{\bar{P}}_+)\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{M}}] = \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}. \end{aligned}$$

3.3.3 Системы уравнений движения в перемещениях и вращениях в моментах

Прежде чем получить эти уравнения, найдем моменты k -го порядка некоторых входящих в эти уравнения выражений. Пусть \mathbb{F} достаточно число раз дифференцируемое тензорное поле. Тогда на основании первого соотношения (2.9.6) при $s = 0$ и (3.3.14) имеем

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}}(N_I \mathbb{F}) &= \nabla_I \overset{(k)}{\mathbb{F}} - g^{\bar{3}}_I \overset{-(k)}{\mathbf{M}}'(x^3 \mathbb{F}) = \nabla_I \overset{(k)}{\mathbb{F}} - \frac{1}{4} g^{\bar{3}}_I (\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}' + 2\overset{(k)}{\mathbb{F}}' + \overset{(k+1)}{\mathbb{F}}') = \\ &= \nabla_I \overset{(k)}{\mathbb{F}} - g^{\bar{3}}_I [k \overset{(k)}{\mathbb{F}} + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N \overset{(p)}{\mathbb{F}} - \overset{(k)}{\mathbb{F}} + \overset{(+)}{\mathbb{F}}')], \quad \overset{(+)}{\mathbb{F}}' \equiv \sum_{p=N+1}^{\infty} \overset{(p)}{\mathbb{F}}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Далее в силу (2.9.22) и второго соотношения (2.9.28) при $s = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}(N_I N_J \mathbb{F}) &= \nabla_I \nabla_J \overset{(k)}{\mathbb{F}} - (g^{\bar{3}}_I \nabla_I + g^{\bar{3}}_J \nabla_J) \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}'(x^3 \mathbb{F}) + g^{\bar{3}}_I g^{\bar{3}}_J \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}''[(x^3)^2 \mathbb{F}], \\ \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}(N_I \nabla_3 \mathbb{F}) &= \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}'(N_I \mathbb{F}) = \nabla_I \overset{(k)}{\mathbb{F}}' - g^{\bar{3}}_I \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}''(x^3 \mathbb{F}). \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

С помощью (2.7.24) и (2.7.25) (см. еще (2.7.26)) и (3.3.14) будем иметь

$$\underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}''(x^3 \mathbb{F}) = (\overset{(k)}{\mathbf{M}}'(x^3 \mathbb{F}))' = \frac{1}{4} (\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}' + 2\overset{(k)}{\mathbb{F}}' + \overset{(k+1)}{\mathbb{F}}')' = \frac{1}{4} (\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}'' + 2\overset{(k)}{\mathbb{F}}'' + \overset{(k+1)}{\mathbb{F}}''). \quad (3.3.30)$$

Посредством (2.7.24) и (2.7.25) из (3.3.18) получаем

$$\underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}''[(x^3)^2 \mathbb{F}] = \frac{1}{4} [(k-1) \overset{(k-1)}{\mathbb{F}}' - 4(k+2) \overset{(k)}{\mathbb{F}}' - (k+3) \overset{(k+1)}{\mathbb{F}}' + 8(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \overset{(p)}{\mathbb{F}}']. \quad (3.3.31)$$

Заметим, что в силу (2.7.21) имеем

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbb{F}}''(x') &= 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (p-k)(p+k+2) [1 + (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{F}} = \\ &= 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) [1 + (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{F}} + \overset{(+)}{\mathbb{F}}'' + (-1)^k \overset{(-)}{\mathbb{F}}'' \right], \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

где введены обозначения

$$\overset{(+)}{\mathbb{F}}'' = \sum_{p=N+1}^{\infty} (p-k)(p+k+2) \overset{(p)}{\mathbb{F}}, \quad \overset{(-)}{\mathbb{F}}'' = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p (p-k)(p+k+2) \overset{(p)}{\mathbb{F}}.$$

Учитывая (3.3.32), из (3.3.30) найдем

$$\begin{aligned} \underline{\overset{(k)}{\mathbf{M}}}''(x^3 \mathbb{F}) &= 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (p-k)(p+k+2) \overset{(p)}{\mathbb{F}} - 3(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (1 - (-1)^{k+p}) \overset{(p)}{\mathbb{F}} = \\ &= 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (p-k)(p+k+2) \overset{(p)}{\mathbb{F}} - \frac{3}{2} \overset{(p)}{\mathbb{F}}' = 2(k+1) \sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \overset{(p)}{\mathbb{F}} - \\ &- 3(k+1) \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \overset{(p)}{\mathbb{F}} + 2(k+1) \overset{(+)}{\mathbb{F}}'' - 3(k+1) (\overset{(+)}{\mathbb{F}}' - (-1)^k \overset{(-)}{\mathbb{F}}'), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Здесь в силу первых двух соотношений (3.3.11) (см. еще (3.3.6)) имеем

$$\mathbb{F}'^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{F}^{(p)}(x'), \quad \mathbb{F}'^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{F}^{(p)}(x').$$

Теперь преобразуем (3.3.31). Учитывая (2.7.15), из (3.3.31) получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}''[(x^3)^2\mathbb{F}] &= \frac{1}{4} \left[(k-1)4k \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p)} - 4(k+2)4(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+1)} - \right. \\ &- (k+3)4(k+2) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+2)} + 8(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} 4(p+1) \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(p+2q+1)} = \\ &= (k-1)k \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p)} - 4(k+1)(k+2) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+1)} - (k+2)(k+3) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(k+2p+2)} + \\ &+ 8(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (p+1) \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(p+2q+1)}. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Нетрудно доказать, что имеет место соотношение

$$8 \sum_{p=k}^{\infty} (p+1) \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{F}^{(p+2q+1)} = 2 \sum_{p=k}^{\infty} (p-k)(k+p+2) \mathbb{F}^{(p)} + (2k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{F}^{(p)}. \quad (3.3.35)$$

Учитывая (3.3.35), из (3.3.34) будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}''[(x^3)^2\mathbb{F}] &= (k+2)(k+3) \mathbb{F}^{(k)} + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [(p-k)(k+p+2) - 3] \mathbb{F}^{(p)} = \\ &= (k+2)(k+3) \mathbb{F}^{(k)} + 2(k+1) \left\{ \sum_{p=k}^N [(p-k)(k+p+2) - 3] \mathbb{F}^{(p)} + (\mathbb{F}'' - 3\mathbb{F}')^{(+)} \right\}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

С помощью (3.3.14) и (3.3.36) первое соотношение (3.3.29) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}[N_I N_J \mathbb{F}] &= \nabla_I \nabla_J \mathbb{F}^{(k)} - (g_{\pm}^3 \nabla_J + g_{\pm}^3 \nabla_I) [k \mathbb{F}^{(k)} + (k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} - \mathbb{F}^{(k)} + \mathbb{F}'^{(+)} \right)] + \\ &+ g_{\pm}^3 g_{\pm}^3 [(k+2)(k+3) \mathbb{F}^{(k)} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N ((p-k)(p+k+2) - 3) \mathbb{F}^{(p)} + 2(k+1) + \\ &+ (\mathbb{F}'' - 3\mathbb{F}')^{(+)}] \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Далее на основании первого соотношения (3.3.10) и (3.3.33) из второго соотношения (3.3.29) получаем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}[N_I \nabla_3 \mathbb{F}] &= 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \nabla_I \mathbb{F}^{(p)} + (\nabla_I \mathbb{F}' - (-1)^k \nabla_I \mathbb{F}'^{(-)}) \right] - \\ &- (k+1) g_{\pm}^3 \left[2 \left(\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}'' \right) - 3 \left(\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbb{F}^{(p)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\mathbb{F}' - (-1)^k \mathbb{F}'^{(-)}) \right) \right], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

В силу первого соотношения (2.9.6) при $s = 1$, (3.3.17) и (3.3.18) находим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \mathbb{F}) &= \nabla_P \underline{\mathbf{M}}(x^3 \mathbb{F}) - g_{\pm}^3 \underline{\mathbf{M}}'[(x^3)^2 \mathbb{F}] = \frac{1}{4} (\nabla_P \mathbb{F}^{(k-1)} + 2 \nabla_P \mathbb{F}^{(k)} + \nabla_P \mathbb{F}^{(k+1)}) - \\ &- \frac{1}{4} g_{\pm}^3 [(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} - 4(k+2) \mathbb{F}^{(k)} - (k+3) \mathbb{F}^{(k+1)} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}' \right)], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

На основании (2.9.22) при $s = 1$ и $s = 2$ и второго соотношения (2.9.28) при $s = 1$ (см. и (2.9.30)) будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P N_Q \mathbb{F}) &= \nabla_P \nabla_Q \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) - (g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_P) \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 \mathbb{F}] + g_{\pm}^{\bar{3}} g_{\pm}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}], \\ \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P \nabla_3 \mathbb{F}) &= \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P \mathbb{F}) = \nabla_P \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) - g_{\pm}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 \mathbb{F}], \\ \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 N_P N_Q \mathbb{F}] &= \nabla_P \nabla_Q \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 \mathbb{F}] - (g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_P) \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}] + g_{\pm}^{\bar{3}} g_{\pm}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^4 \mathbb{F}]. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Представим эти соотношения аналогично (3.3.37) и (3.3.38). Для того, чтобы найти выражение для первого соотношения (3.3.40) нужно найти выражение только для $\underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}]$, так как для $\underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 \mathbb{F})$ и $\underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 \mathbb{F}]$ выше уже были найдены соответствующие выражения. Сперва найдем выражение для $\underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}]$, а потом, используя (2.7.25), для $\underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}]$. С помощью (2.9.8) при $s = 2$ получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}] &= 2^{-6} \left(\binom{k-3}{\mathbb{F}}' + 6 \binom{k-2}{\mathbb{F}}' + 15 \binom{k-1}{\mathbb{F}}' + 20 \mathbb{F}' + 15 \binom{k+1}{\mathbb{F}}' + 6 \binom{k+2}{\mathbb{F}}' + \binom{k+3}{\mathbb{F}}' \right), \quad k \geq 0, \\ \binom{-3}{\mathbb{F}} &= -\binom{1}{\mathbb{F}}, \quad \binom{-2}{\mathbb{F}} = -\binom{0}{\mathbb{F}}, \quad \binom{-1}{\mathbb{F}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.7.15) после простых выкладок имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}] &= \frac{1}{16} \left[(k-2) \binom{k-2}{\mathbb{F}} + 6(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}} - 2(8k+17) \mathbb{F} - 6(k+3) \binom{k+1}{\mathbb{F}} - \right. \\ &\left. -(k+4) \binom{k+2}{\mathbb{F}} + 32(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{\mathbb{F}} \right], \quad k \geq 0, \quad \binom{-2}{\mathbb{F}} = -\binom{0}{\mathbb{F}}, \quad \binom{-1}{\mathbb{F}} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Теперь с помощью (2.7.24) и (2.7.25) из (3.3.41) имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}] &= \frac{1}{16} \left[(k-2) \binom{k-2}{\mathbb{F}}' + 6(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}}' - 2(8k+17) \mathbb{F}' - 6(k+3) \binom{k+1}{\mathbb{F}}' - \right. \\ &\left. -(k+4) \binom{k+2}{\mathbb{F}}' + 32(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \binom{p}{\mathbb{F}}' \right], \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

а отсюда в свою очередь на основании (2.7.15) и (3.3.35) после простых выкладок находим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^3 \mathbb{F}] &= \frac{1}{4} \left[(k-2)(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}} + 6(k+2)(k+3) \binom{k}{\mathbb{F}} + (k+3)(k+4) \binom{k+1}{\mathbb{F}} + \right. \\ &\left. + 4(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (2(p-k)(k+p+2) - 9) \binom{p}{\mathbb{F}} \right] = \frac{1}{4} \left\{ (k-2)(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}} + \right. \\ &\left. + 6(k+2)(k+3) \binom{k}{\mathbb{F}} + (k+3)(k+4) \binom{k+1}{\mathbb{F}} + \right. \\ &\left. + 4(k+1) \sum_{p=k}^N [2(p-k)(k+p+2) - 9] \binom{p}{\mathbb{F}} + 4(k+1)(2 \binom{+}{\mathbb{F}}'' - 9 \binom{+}{\mathbb{F}}') \right\}, \quad k \geq 0, \quad \binom{-1}{\mathbb{F}} = 0. \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Учитывая (3.3.17), (3.3.18) и (3.3.42), из первого соотношения (3.3.40) получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P N_Q \mathbb{F}) &= \frac{1}{4} \left\{ \nabla_P \nabla_Q \left(\binom{k-1}{\mathbb{F}} + 2 \binom{k}{\mathbb{F}} + \binom{k+1}{\mathbb{F}} \right) - \right. \\ &\left. - (g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{\pm}^{\bar{3}} \nabla_P) \left[(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}} - 4(k+2) \binom{k}{\mathbb{F}} - (k+3) \binom{k+1}{\mathbb{F}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \binom{p}{\mathbb{F}} + \binom{+}{\mathbb{F}}' \right) \right] + \right. \\ &\left. + g_{\pm}^{\bar{3}} g_{\pm}^{\bar{3}} \left[(k-2)(k-1) \binom{k-1}{\mathbb{F}} + 6(k+2)(k+3) \binom{k}{\mathbb{F}} + (k+3)(k+4) \binom{k+1}{\mathbb{F}} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 4(k+1) \sum_{p=k}^N (2(p-k)(k+p+2) - 9) \binom{p}{\mathbb{F}} + 4(k+1)(2 \binom{+}{\mathbb{F}}'' - 9 \binom{+}{\mathbb{F}}') \right] \right\}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

С помощью (3.3.14) и (3.3.36) второе соотношение (3.3.40) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P \nabla_3 \mathbb{F}) &= k \nabla_P \mathbb{F}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \nabla_P \mathbb{F}^{(p)} - \nabla_P \mathbb{F}^{(k)} + \nabla_P \mathbb{F}'^{(+)} \right) - \\ &- g_{+P}^{\bar{3}} \left[(k+2)(k+3) \mathbb{F}^{(k)} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N ((p-k)(k+p+2) - 3) \mathbb{F}^{(p)} + \right. \\ &\left. + 2(k+1) (\mathbb{F}''^{(+)} - 3 \mathbb{F}'^{(+)}) \right], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Нетрудно получить выражения и для $\underline{\mathbf{M}}''^{(k)}[(x^3)^4 \mathbb{F}]$. В самом деле, осуществляя несложные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}''^{(k)}[(x^3)^4 \mathbb{F}] &= \frac{1}{16} \left\{ (k-3)(k-2) \mathbb{F}^{(k-2)} + 8(k-2)(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} + \right. \\ &+ 6(k+3)(5k+11) \mathbb{F}^{(k)} + 8(k+3)(k+4) \mathbb{F}^{(k+1)} + (k+4)(k+5) \mathbb{F}^{(k+2)} \\ &+ 32(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [(p-k)(p+k+2) - 6] \mathbb{F}^{(p)} \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{16} \left\{ (k-3)(k-2) \mathbb{F}^{(k-2)} + 8(k-2)(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} + \right. \\ &+ 6(k+3)(5k+11) \mathbb{F}^{(k)} + 8(k+3)(k+4) \mathbb{F}^{(k+1)} + (k+4)(k+5) \mathbb{F}^{(k+2)} \\ &+ 32(k+1) \left[\sum_{p=k}^N [(p-k)(p+k+2) - 6] \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}''^{(+)} - 6 \mathbb{F}'^{(+)} \right] \left. \right\}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Учитывая (2.6.1) при $s = 2$, (3.3.41) и (3.3.45), последнее соотношение (3.3.40) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 N_P N_Q \mathbb{F}] &= \frac{1}{16} \left\{ \nabla_P \nabla_Q \left(\mathbb{F}^{(k-2)} + 4 \mathbb{F}^{(k-1)} + 6 \mathbb{F}^{(k)} + 4 \mathbb{F}^{(k+1)} + \mathbb{F}^{(k+2)} \right) - \right. \\ &- \left(g_{+P}^{\bar{3}} \nabla_Q + g_{+Q}^{\bar{3}} \nabla_P \right) \left[(k-2) \mathbb{F}^{(k-2)} + 6(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} - 2(8k+17) \mathbb{F}^{(k)} - 6(k+3) \mathbb{F}^{(k+1)} - \right. \\ &- (k+4) \mathbb{F}^{(k+2)} + 32(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}'^{(+)} \right) \left. \right] + g_{+P}^{\bar{3}} g_{+Q}^{\bar{3}} \left[(k-3)(k-2) \mathbb{F}^{(k-2)} + \right. \\ &+ 8(k-2)(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} + 6(k+5)(5k+11) \mathbb{F}^{(k)} + 8(k+3)(k+4) \mathbb{F}^{(k+1)} + \\ &+ (k+4)(k+5) \mathbb{F}^{(k+2)} + 32(k+1) \left[\sum_{p=k}^N [(p-k)(p+k+2) - 6] \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}''^{(+)} - 6 \mathbb{F}'^{(+)} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Следует заметить, что, используя (2.6.1) при $s = 1$ и $s = 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2^4 \underline{\mathbf{M}}^{(k)}[(x^3)^2 N_P N_Q \mathbb{F}] &= \underline{\mathbf{M}}^{(k-2)}(N_P N_Q \mathbb{F}) + 4 \underline{\mathbf{M}}^{(k-1)}(N_P N_Q \mathbb{F}) + 6 \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(N_P N_Q \mathbb{F}) + 4 \underline{\mathbf{M}}^{(k+1)}(N_P N_Q \mathbb{F}) + \\ &+ \underline{\mathbf{M}}^{(k+2)}(N_P N_Q \mathbb{F}) = 2^2 \left[\underline{\mathbf{M}}^{(k-1)}(x^3 N_P N_Q \mathbb{F}) + 2 \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(x^3 N_P N_Q \mathbb{F}) + \underline{\mathbf{M}}^{(k+1)}(x^3 N_P N_Q \mathbb{F}) \right], \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, конечно, учитывая (3.3.37) или первое соотношение (3.3.40), получим (3.3.46).

3.3.3.1 Системы уравнений в перемещениях (уравнений Ламе) нулевого и первого приближений в моментах

В силу (1.5.37) и (1.5.68) из (3.2.56) получаем следующие уравнения в перемещениях нулевого и первого приближений соответственно при новой параметризации области тонкого тела:

$$\left[\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} N_I N_J + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} (N_I \nabla_3 + \nabla_3 N_I) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right] \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.47)$$

$$\left\{ \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} + x^3 B_{(1)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \right] N_P N_Q + \right. \\ \left. + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x^3 A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}}) (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right\} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}. \quad (3.3.48)$$

Применяя к уравнениям (3.3.47) и (3.3.48) оператор моментов k -го порядка и учитывая (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4) и (2.7.20), найдем

$$\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \mathbf{u}) + 2 \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}, \quad (3.3.49)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} \cdot \left\{ \underline{\mathbf{M}}(N_M N_N \mathbf{u}) + B_{(1)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P N_Q \mathbf{u}) + B_{(2)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \underline{\mathbf{M}}[(x^3)^2 N_P N_Q \mathbf{u}] \right\} + \\ + 2 \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} \cdot \left[\underline{\mathbf{M}}(N_M \nabla_3 \mathbf{u}) + A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \nabla_3 \mathbf{u}) \right] + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}. \quad (3.3.50)$$

Теперь нетрудно получить искомые уравнения в моментах. На самом деле, в силу (3.3.32), (3.3.37) и (3.3.38) из (3.3.49) получим следующую систему уравнений в перемещениях нулевого приближения в моментах:

$$\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \left\{ \nabla_I \nabla_J \underline{\mathbf{u}}^{(k)} - (g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \nabla_J + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \nabla_I) [k \underline{\mathbf{u}}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - \underline{\mathbf{u}}^{(+)} + \underline{\mathbf{u}}^{(+)} \right)] + \right. \\ \left. + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} g_{\bar{J}}^{\bar{3}} [(k+2)(k+3) \underline{\mathbf{u}}^{(k)} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N ((p-k)(p+k+2) - 3) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + \right. \\ \left. + 2(k+1) (\underline{\mathbf{u}}''^{(+)} - 3 \underline{\mathbf{u}}''^{(-)}) \right\} + \\ + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left\{ 2 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \nabla_I \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2 \nabla_I (\underline{\mathbf{u}}''^{(+)} - (-1)^k \underline{\mathbf{u}}''^{(-)}) - \right. \\ \left. - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[2 \sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - 3 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2 \underline{\mathbf{u}}''^{(+)} - 3 (\underline{\mathbf{u}}''^{(+)} - (-1)^k \underline{\mathbf{u}}''^{(-)}) \right] \right\} + \\ + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) (1 + (-1)^{k+p}) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + (\underline{\mathbf{u}}''^{(+)} + (-1)^k \underline{\mathbf{u}}''^{(-)}) \right] + \\ + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3.51)$$

Аналогично (3.3.51) на основании² (3.3.32), (3.3.37), (3.3.38), (3.3.43), (3.3.44) и (3.3.46) из (3.3.50), осуществляя простые выкладки, найдем систему уравнений в перемещениях первого приближения в моментах. В связи с громоздкостью ее выписывать не будем.

3.3.3.2 Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах

Ограничимся рассмотрением однородного изотропного материала. В этом случае уравнения в перемещениях нулевого и первого приближений для неизотермических процессов при новой параметризации области тонкого тела аналогично (3.3.47) и (3.3.48) по (3.2.59) представляются соответственно в виде:

$$\left[\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} N_I N_J + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} (N_I \nabla_3 + \nabla_3 N_I) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right] \cdot \mathbf{u} - \\ - a_t (3\lambda + 2\mu) (\mathbf{r}^I N_I + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3) \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.52)$$

²В рассматриваемом случае, ссылаясь на соотношения (3.3.32), (3.3.37), (3.3.38), (3.3.43), (3.3.44) и (3.3.46), считаем, что в них, имеющиеся величины предварительно заменены на \mathbf{u} . И в дальнейшем, не оговариваясь каждый раз, будут применены аналогичные ссылки.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} + x^3 B_{(1)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \right] N_P N_Q + \right. \\
 & \quad \left. + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} \left(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x^3 A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \right) (N_P \nabla_3 + \nabla_3 N_P) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right\} \cdot \mathbf{u} - \\
 & \quad - a_t (3\lambda + 2\mu) \left[\mathbf{r}^{\bar{M}} \left(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x^3 A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \right) N_P + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \right] \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}.
 \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

Применяя к уравнениям (3.3.52) и (3.3.53) оператор моментов k -го порядка, в силу (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4), (2.7.14) и (2.7.20) получим

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \mathbf{u}) + 2 \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' - \\
 & \quad - a_t (3\lambda + 2\mu) \left[\mathbf{r}^{\bar{I}} \underline{\mathbf{M}}(N_I \vartheta) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' \right] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}},
 \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{N}} \cdot \left\{ \underline{\mathbf{M}}(N_M N_N \mathbf{u}) + B_{(1)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P N_Q \mathbf{u}) + B_{(2)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} \underline{\mathbf{M}}[(x^3)^2 N_P N_Q \mathbf{u}] \right\} + \\
 & \quad + 2 \underline{\mathbf{M}}^{\bar{M}\bar{3}} \cdot \left[\underline{\mathbf{M}}(N_M \nabla_3 \mathbf{u}) + A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \nabla_3 \mathbf{u}) \right] + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' - \\
 & \quad - a_t (3\lambda + 2\mu) \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\underline{\mathbf{M}}(N_M \vartheta) + A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \vartheta) \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}.
 \end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Из (3.3.54) и (3.3.55) видно, что с целью получения искомым систем уравнений в моментах достаточно найти подходящие выражения для

$$-a_t (3\lambda + 2\mu) \left[\mathbf{r}^{\bar{I}} \underline{\mathbf{M}}(N_I \vartheta) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' \right], \quad -a_t (3\lambda + 2\mu) \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\underline{\mathbf{M}}(N_M \vartheta) + A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \vartheta) \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' \right\}$$

и прибавить к левым частям (3.3.51) и не выписанной системы уравнений в перемещениях в моментах первого приближения соответственно.

В силу (3.3.5) и (3.3.28) имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}^{\bar{I}} \underline{\mathbf{M}}(N_I \vartheta) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' = \mathbf{r}^{\bar{I}} \left[\partial_I^{(k)} \vartheta - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left(k \vartheta + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \vartheta^{(p)} - \vartheta^{(k)} + \vartheta'^{(+)} \right) \right) \right] + \\
 & \quad + 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \vartheta^{(p)} + \left(\vartheta' - (-1)^k \vartheta'^{(-)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

Аналогично (3.3.56) с помощью (3.3.5), (3.3.28) и (3.3.39) находим

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}^{\bar{M}} \left[\underline{\mathbf{M}}(N_M \vartheta) + A_{(1)\bar{M}}^{\bar{P}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_P \vartheta) \right] + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' = \mathbf{r}^{\bar{I}} \left\{ \partial_I^{(k)} \vartheta + \frac{1}{4} A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \partial_J \left(\vartheta^{(k-1)} + 2\vartheta^{(k)} + \vartheta^{(k+1)} \right) - \right. \\
 & \quad - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[g_{\bar{I}}^{\bar{J}} \left(k \vartheta + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \vartheta^{(p)} - \vartheta^{(k)} + \vartheta'^{(+)} \right) \right) + \frac{1}{4} A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \left((k-1) \vartheta^{(k-1)} - 4(k+2) \vartheta^{(k)} - (k+3) \vartheta^{(k+1)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left. + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \vartheta^{(p)} + \vartheta'^{(+)} \right) \right] \right\} + 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \vartheta^{(p)} + \left(\vartheta' - (-1)^k \vartheta'^{(-)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

Умножая (3.3.56) на $-a_t(3\lambda + 2\mu)$ и прибавляя правую часть полученного соотношения к левой части (3.3.51), получим искомую систему уравнений в перемещениях нулевого приближения в моментах при неизотермических процессах

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \left\{ \nabla_I \nabla_J \underline{\mathbf{u}} - \left(g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \nabla_J + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \nabla_I \right) \left[k \underline{\mathbf{u}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - \underline{\mathbf{u}}^{(k)} + \underline{\mathbf{u}}'^{(+)} \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \left[(k+2)(k+3) \underline{\mathbf{u}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left((p-k)(p+k+2) - 3 \right) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2(k+1) \left(\underline{\mathbf{u}}'' - 3 \underline{\mathbf{u}}'^{(+)} \right) \right] \right\} + \\
 & \quad + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left\{ 2 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \nabla_I \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2 \nabla_I \left(\underline{\mathbf{u}}' - (-1)^k \underline{\mathbf{u}}'^{(-)} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[2 \sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \binom{p}{\bar{I}} \bar{\mathbf{u}} - 3 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \binom{p}{\bar{I}} \bar{\mathbf{u}} + 2 \bar{\mathbf{u}}'' - 3 \left(\bar{\mathbf{u}}' - (-1)^k \bar{\mathbf{u}}' \right) \right] + \quad (3.3.58) \\
 & + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) (1 + (-1)^{k+p}) \binom{p}{\bar{I}} \bar{\mathbf{u}} + \left(\bar{\mathbf{u}}'' + (-1)^k \bar{\mathbf{u}}'' \right) \right] - \\
 & - a_t (3\lambda + 2\mu) \left\{ \mathbf{r}^{\bar{I}} \left[\partial_{\bar{I}} \vartheta - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left(k \vartheta + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \vartheta - \vartheta + \vartheta' \right) \right) \right] + \right. \\
 & \left. + 2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \vartheta + \left(\vartheta' - (-1)^k \vartheta' \right) \right] \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_{\bar{t}}^2 \bar{\mathbf{u}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned}$$

Аналогично (3.3.58), умножая (3.3.57) на $-a_t(3\lambda + 2\mu)$ и прибавляя правую часть полученного соотношения к левой части не выписанной системы уравнений в перемещениях первого приближения в моментах, найдем систему уравнений в перемещениях первого приближения в моментах при неизотермических процессах. Их выписывать не будем, так как при необходимости это сделать нетрудно.

3.3.3.3 Системы уравнений в перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах

Рассмотрим однородный изотропный физически линейный упругий материал, обладающий центром симметрии. В этом случае уравнения в перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений для неизотермических процессов при НПӨТТ можно получить из (3.2.61). Действительно, на основании (1.5.37) и (1.5.68) из (3.2.61) находим систему уравнений в перемещениях и вращениях нулевого приближения в виде

$$\begin{aligned}
 & \left[\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} N_I N_J + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} (N_I \nabla_3 + \nabla_3 N_I) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right] \cdot \mathbf{u} + \\
 & + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left[(\nabla_3 \varphi_{\bar{I}} - N_I \varphi_{\bar{3}}) \mathbf{r}_{\bar{L}} + N_I \varphi_{\bar{J}} \mathbf{r}_{\bar{3}} \right] - b (\mathbf{r}^{\bar{I}} N_I + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3) \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_{\bar{t}}^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.59) \\
 & \left[\underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{J}} N_I N_J + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{3}} (N_I \nabla_3 + \nabla_3 N_I) + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right] \cdot \boldsymbol{\varphi} + \\
 & + \alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left[(\nabla_3 u_{\bar{I}} - N_I u_{\bar{3}}) \mathbf{r}_{\bar{J}} + N_I u_{\bar{J}} \mathbf{r}_{\bar{3}} \right] - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_{\bar{t}}^2 \boldsymbol{\varphi}
 \end{aligned}$$

и систему уравнений в перемещениях и вращениях первого приближения в форме

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \left[g_{\bar{I}}^{\bar{K}} g_{\bar{J}}^{\bar{L}} + x^3 B_{(1)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \right] N_K N_L + \right. \\
 & \left. + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \left(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \right) (N_J \nabla_3 + \nabla_3 N_J) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right\} \cdot \mathbf{u} + \\
 & + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left\{ \left[\nabla_3 \varphi_{\bar{I}} - \left(g_{\bar{I}}^{\bar{K}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \right) N_K \varphi_{\bar{3}} \right] \mathbf{r}_{\bar{J}} + \left(g_{\bar{I}}^{\bar{K}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \right) N_K \varphi_{\bar{J}} \mathbf{r}_{\bar{3}} \right\} - \\
 & - b \left[\mathbf{r}^{\bar{I}} \left(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \right) N_J + \mathbf{r}^{\bar{3}} \nabla_3 \right] \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_{\bar{t}}^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.60) \\
 & \left\{ \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \left[g_{\bar{I}}^{\bar{K}} g_{\bar{J}}^{\bar{L}} + x^3 B_{(1)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \right] N_K N_L + \right. \\
 & \left. + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{3}} \left(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \right) (N_J \nabla_3 + \nabla_3 N_J) + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \nabla_3^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \\
 & + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left\{ \left[\nabla_3 u_{\bar{I}} - \left(g_{\bar{I}}^{\bar{K}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \right) N_K u_{\bar{3}} \right] \mathbf{r}_{\bar{J}} + \left(g_{\bar{I}}^{\bar{K}} + x^3 A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \right) N_K u_{\bar{J}} \mathbf{r}_{\bar{3}} \right\} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_{\bar{t}}^2 \boldsymbol{\varphi},
 \end{aligned}$$

где $b \equiv a_t(3\lambda + 2\mu) = 3a_t K$. Теперь, исходя из (3.3.59) и (3.3.60) получим искомые системы уравнений в моментах. Применяя к уравнениям (3.3.59) и (3.3.60) оператор моментов k -го

порядка и используя (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4), (2.7.14) и (2.7.20) получим соответственно

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \mathbf{u}) + 2\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} [(\varphi'_I - \underline{\mathbf{M}}(N_I \varphi_3)) \mathbf{r}_J + \\ + \underline{\mathbf{M}}(N_I \varphi_J) \mathbf{r}_3] - b(\mathbf{r}^{\bar{I}} \underline{\mathbf{M}}(N_I \vartheta) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta') + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}, \\ \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \varphi) + 2\underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \varphi) + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\varphi}'' + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} [(u'_I - \underline{\mathbf{M}}(N_I u_3)) \mathbf{r}_J + \\ + \underline{\mathbf{M}}(N_I u_J) \mathbf{r}_3] - 4\alpha \underline{\varphi} + \rho \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\varphi}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \left\{ \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \mathbf{u}) + B_{(1)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K N_L \mathbf{u}) + B_{(2)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \underline{\mathbf{M}}[(x^3)^2 N_K N_L \mathbf{u}] \right\} + \\ 2\underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left[\underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \mathbf{u}) + A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_J \nabla_3 \mathbf{u}) \right] + \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}'' + \\ + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left\{ \left[\varphi'_I - \underline{\mathbf{M}}(N_I \varphi_3) - A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K \varphi_3) \right] \mathbf{r}_J + \left[\underline{\mathbf{M}}(N_I \varphi_J) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K \varphi_J) \right] \mathbf{r}_3 \right\} - b \left[\mathbf{r}^{\bar{I}} (\underline{\mathbf{M}}(N_I \vartheta) + A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_J \vartheta)) + \mathbf{r}^{\bar{3}} \vartheta' \right] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \underline{\mathbf{u}}, \\ \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \left\{ \underline{\mathbf{M}}(N_I N_J \varphi) + B_{(1)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K N_L \varphi) + B_{(2)\bar{I}\bar{J}}^{\bar{K}\bar{L}} \underline{\mathbf{M}}[(x^3)^2 N_K N_L \varphi] \right\} + \\ + 2\underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left[\underline{\mathbf{M}}(N_I \nabla_3 \varphi) + A_{(1)\bar{I}}^{\bar{J}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_J \nabla_3 \varphi) \right] + \underline{\mathbf{L}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \underline{\varphi}'' + \\ + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left\{ \left[u'_I - \underline{\mathbf{M}}(N_I u_3) - A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K u_3) \right] \mathbf{r}_J + \right. \\ \left. + \left[\underline{\mathbf{M}}(N_I u_J) + A_{(1)\bar{I}}^{\bar{K}} \underline{\mathbf{M}}(x^3 N_K u_J) \right] \mathbf{r}_3 \right\} - 4\alpha \underline{\varphi} + \rho \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underline{\varphi}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

Видно, что моменты всех выражений, входящих в (3.3.61) и (3.3.62) уже были выше найдены и представлены соотношениями (3.3.5), (3.3.28), (3.3.32), (3.3.37), (3.3.38), (3.3.39), (3.3.43), (3.3.44) и (3.3.46). Поэтому, используя эти соотношения, не представляет никакого труда найти искомые системы уравнений. В самом деле, осуществляя простые выкладки, систему уравнений в перемещениях и вращениях нулевого приближения в моментах при неизотермических процессах можно записать в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \left\{ \nabla_I \nabla_J \underline{\mathbf{u}} - (g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \nabla_J + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \nabla_I) \left[k \underline{\mathbf{u}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{u}}' \right) \right] + \right. \\ \left. + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \left[(k+2)(k+3) \underline{\mathbf{u}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N ((p-k)(p+k+2)-3) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2(k+1) (\underline{\mathbf{u}}'' - 3 \underline{\mathbf{u}}') \right] \right\} + \\ + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left\{ 2 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \nabla_I \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2 \nabla_I (\underline{\mathbf{u}}' - (-1)^k \underline{\mathbf{u}}') - \right. \\ \left. - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[2 \sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} - 3 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + 2 \underline{\mathbf{u}}'' - 3 (\underline{\mathbf{u}}' - (-1)^k \underline{\mathbf{u}}') \right] \right\} + \\ + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) (1 + (-1)^{k+p}) \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + (\underline{\mathbf{u}}'' + (-1)^k \underline{\mathbf{u}}'') \right] + \\ + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \left\{ \left\{ 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \varphi_{\bar{I}}^{(p)} + (\varphi_{\bar{I}}^{(+)} - (-1)^k \varphi_{\bar{I}}^{(-)}) \right] - \nabla_I \varphi_{\bar{3}}^{(k)} + \right. \right. \\ \left. \left. + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[k \varphi_{\bar{3}}^{(k)} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \varphi_{\bar{3}}^{(p)} - \varphi_{\bar{3}}^{(k)} + \varphi_{\bar{3}}^{(+)} \right) \right] \right\} \mathbf{r}_J + \left\{ \nabla_I \varphi_{\bar{J}}^{(k)} - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[k \varphi_{\bar{J}}^{(k)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \varphi_{\bar{J}}^{(p)} - \varphi_{\bar{J}}^{(k)} + \varphi_{\bar{J}}^{(+)} \right) \right] \right\} \mathbf{r}_3 \right\} - b \left\{ \mathbf{r}^{\bar{I}} \left[\partial_I \vartheta - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} (k \vartheta + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \vartheta^{(p)} - \vartheta + \vartheta' \right)) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2(k+1)\mathbf{r}^{\bar{3}} \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \vartheta^{(p)} + (\vartheta' - (-1)^k \vartheta'^{-}) \right] \} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\
 & \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \{ \nabla_I \nabla_J \varphi^{(k)} - (g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \nabla_J + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \nabla_I) [k \varphi^{(k)} + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N \varphi^{(p)} - \varphi^{(k)} + \varphi'^{-})] + \\
 & + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} g_{\bar{J}}^{\bar{3}} [(k+2)(k+3) \varphi^{(k)} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N ((p-k)(p+k+2) - 3) \varphi^{(p)} + 2(k+1) (\varphi'' - 3 \varphi'^{-})] \} + \\
 & + 2(k+1) \underline{\mathbf{L}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot \left\{ 2 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \nabla_I \varphi^{(p)} + 2 \nabla_I (\varphi'^{-} - (-1)^k \varphi'^{-}) - \right. \\
 & \left. - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[2 \sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) \varphi^{(p)} - 3 \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{p+k}) \varphi^{(p)} + 2 \varphi'' - 3 (\varphi'^{-} - (-1)^k \varphi'^{-}) \right] \right\} + \\
 & + 2(k+1) \underline{\mathbf{M}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \left[\sum_{p=k}^N (p-k)(p+k+2) (1 + (-1)^{k+p}) \varphi^{(p)} + (\varphi'' + (-1)^k \varphi'') \right] + \\
 & + 2\alpha C^{\bar{I}\bar{J}} \{ \{ 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) u_{\bar{I}}^{(p)} + (u_{\bar{I}}'^{-} - (-1)^k u_{\bar{I}}'^{-}) \right] - \nabla_I u_{\bar{3}}^{(k)} + \right. \\
 & + g_{\bar{I}}^{\bar{3}} [k u_{\bar{3}}^{(k)} + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N u_{\bar{3}}^{(p)} - u_{\bar{3}}^{(k)} + u_{\bar{3}}'^{-})] \} \mathbf{r}_{\bar{J}} + \{ \nabla_I u_{\bar{J}}^{(k)} - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} [k u_{\bar{J}}^{(k)} + \\
 & \left. + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N u_{\bar{J}}^{(p)} - u_{\bar{J}}^{(k)} + u_{\bar{J}}'^{-}) \right] \} \mathbf{r}_{\bar{3}} \} - 4\alpha \varphi^{(k)} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \varphi^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

Аналогично (3.3.63) при необходимости можно выписать систему уравнений в перемещениях и вращениях первого приближения в моментах при неизотермических процессах. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

3.3.3.4 Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах для однородного упругого анизотропного материала при неизотермических процессах

Нетрудно заметить, что уравнения движения нулевого и первого приближений на основании (3.2.70) представляются соответственно в виде

$$\underline{\mathbf{L}}_{(0)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(0)} \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \underline{\mathbf{L}}_{(1)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(1)} \vartheta + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \tag{3.3.64}$$

где в силу (3.2.71) – (3.2.74) имеем

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{L}}_{(1)} &= \underline{\mathbf{L}}_{(0)} + \delta \underline{\mathbf{L}}_{(0)}, \quad \mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{T}_{(0)} + \delta \mathbf{T}_{(0)}, \\
 \underline{\mathbf{L}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot N_I N_J + (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\bar{I}} \cdot \nabla_3 N_I + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\bar{3}} \cdot N_I \nabla_3) + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \partial_3 \partial_3, \\
 \delta \underline{\mathbf{L}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\bar{N}} \cdot \left[\sum_{s=1}^2 B_{\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}}(x^3)^s \right] N_P N_Q + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) x^3 (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\bar{M}} \cdot \nabla_3 N_P + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\bar{3}} \cdot N_P \nabla_3), \\
 \mathbf{T}_{(0)} &= -(\mathbf{b}^{\bar{I}} N_I + \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3), \quad \delta \mathbf{T}_{(0)} = -(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) x^3 \mathbf{b}^{\bar{M}} N_P, \\
 B_{\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} &= (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} + g_{\bar{M}}^{\bar{P}} (g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} - g_{\bar{N}}^{\bar{Q}}), \quad B_{\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} = A_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} + A_{\bar{M}(1)\bar{N}}^{\bar{P}} + g_{\bar{M}(2)\bar{N}}^{\bar{P}} A_{\bar{N}}^{\bar{Q}}, \\
 A_{\bar{M}}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \quad A_{\bar{M}(2)\bar{N}}^{\bar{P}} = (g_{\bar{N}}^{\bar{P}} - g_{\bar{N}}^{\bar{P}}) (g_{\bar{M}}^{\bar{N}} - g_{\bar{M}}^{\bar{N}}).
 \end{aligned} \tag{3.3.65}$$

Далее ограничимся рассмотрением тонкого тела постоянной толщины. Тогда, учитывая, что в этом случае $g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = 0$, соотношения второй, третьей и четвертой строк (3.3.65)

будут иметь форму

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\cdot\bar{J}\cdot} \nabla_I \nabla_J + (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{I}\cdot} \nabla_3 \nabla_I + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\cdot\bar{3}\cdot} \nabla_I \nabla_3) + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} \partial_3 \partial_3, \\ \delta \underline{\mathbf{L}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{N}\cdot} \left[\sum_{s=1}^2 B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s \right] \nabla_P \nabla_Q + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) x^3 (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \nabla_3 \nabla_P + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{3}\cdot} \nabla_P \nabla_3), \\ \mathbf{T}_{(0)} &= -(\mathbf{b}^{\bar{I}} \nabla_I + \mathbf{b}^{\bar{3}} \partial_3), \quad \delta \mathbf{T}_{(0)} = -(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) x^3 \mathbf{b}^{\bar{M}} \nabla_P. \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

Теперь нетрудно получить искомые системы уравнений в моментах. В самом деле, применяя к первому уравнению (3.3.64) оператор моментов k -го порядка какой-либо системы полиномов (Лежандра, Чебышева) и учитывая формулы моментов k -го порядка первых (2.2.7), (2.7.14) и вторых производных (2.2.22), (2.7.20) вектора (компонент вектора) относительно этих систем полиномов (см. также (2.7.23), (2.8.28), (2.8.29)), получим систему уравнений нулевого приближения в моментах

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\cdot\bar{J}\cdot} \cdot \nabla_I \nabla_J \mathbf{u}^{(k)} + (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{I}\cdot} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{I}\cdot\bar{3}\cdot}) \cdot \nabla_I \mathbf{u}'^{(k)} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} \cdot \mathbf{u}''^{(k)} - \\ - (\mathbf{b}^{\bar{I}} \nabla_I \vartheta^{(k)} + \mathbf{b}^{\bar{3}} \vartheta'^{(k)}) + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.67)$$

Чтобы получить, систему уравнений первого приближения в моментах, очевидно, нужно найти выражения для $\mathbf{M}(\delta \underline{\mathbf{L}}_{(0)} \cdot \mathbf{u})$ и $\mathbf{M}(\delta \mathbf{T}_{(0)} \vartheta)$. На основании второго и четвертого соотношений (3.3.66) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\delta \underline{\mathbf{L}}_{(0)} \cdot \mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{N}\cdot} \cdot \left[B_{(1)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}(x^3 \mathbf{u}) + B_{(2)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}((x^3)^2 \mathbf{u}) \right] + \\ &+ (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{3}\cdot}) \cdot \nabla_P \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{u}), \\ \mathbf{M}(\delta \mathbf{T}_{(0)} \vartheta) &= -(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \mathbf{b}^{\bar{M}} \nabla_P \mathbf{M}(x^3 \vartheta). \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

Применяя ко второму уравнению (3.3.64) оператор моментов k -го порядка какой-либо системы полиномов (Лежандра, Чебышева) и учитывая (3.3.68), получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{N}\cdot} \cdot \left\{ g_{\bar{M}}^{\bar{P}} g_{\bar{N}}^{\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{u}^{(k)} + \left[B_{(1)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}(x^3 \mathbf{u}) + B_{(2)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}((x^3)^2 \mathbf{u}) \right] \right\} + \\ + (\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot\bar{3}\cdot}) \cdot \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P \mathbf{u}'^{(k)} + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \nabla_P \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{u}) \right] + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} \cdot \mathbf{u}''^{(k)} + \\ - \mathbf{b}^{\bar{M}} \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P \vartheta^{(k)} + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \nabla_P \mathbf{M}(x^3 \vartheta) \right] - \mathbf{b}^{\bar{3}} \vartheta'^{(k)} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

Далее, учитывая (2.2.23), (2.2.28), первые два соотношения (3.3.20) и (3.3.21), из (3.3.69) получим различные представления уравнений движения первого приближения в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра, а на основании (2.7.15), (2.7.21), (2.7.38) при $s = 1$ и $s = 2$ и (2.7.40) при $s = 1$ из (3.3.69) найдем искомые уравнения движения первого приближения в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Чебышева второго рода. При необходимости, легко также выводить уравнения движения в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Чебышева первого рода. С целью сокращения письма на выписывании упомянутых в этом абзаце уравнений в моментах останавливаться не будем.

3.3.4 Системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах

В силу (1.5.37) и (1.5.68) из (3.2.107) или из (3.2.108) для неоднородного произвольно анизотропного материала получим следующие уравнения притока тепла нулевого и первого приближений микрополярной МДТТ:

$$N_I(\Lambda^{\bar{I}\bar{J}}N_J T) + N_I(\Lambda^{\bar{I}\bar{3}}\partial_3 T) + \nabla_3(\Lambda^{\bar{3}\bar{I}}N_I T) + \partial_3(\Lambda^{\bar{3}\bar{3}}\partial_3 T) + \rho q - T \frac{d}{dt}(b^{\bar{I}\bar{q}}N_I u_{-q} + b^{\bar{3}\bar{q}}\partial_3 u_{-q} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.3.70)$$

$$\left[g_{\bar{K}}^{\bar{I}} g_{\bar{L}}^{\bar{J}} + x^3 B_{(1)\bar{K}\bar{L}}^{\bar{I}\bar{J}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{K}\bar{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \right] N_I(\Lambda^{\bar{K}\bar{L}}N_I T) + (g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) N_I(\Lambda^{\bar{K}\bar{3}}\partial_3 T) + (g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) \nabla_3(\Lambda^{\bar{3}\bar{K}}N_I T) + \partial_3(\Lambda^{\bar{3}\bar{3}}\partial_3 T) + \rho q - T \frac{d}{dt} \left[(g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) b^{\bar{K}\bar{q}} N_I u_{-q} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{-q} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta \right] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.3.71)$$

Не представляет труда получить уравнения притока тепла нулевого и первого приближений и для однородного произвольно анизотропного материала. В самом деле, из (3.3.70) находим искомое уравнение притока тепла в виде

$$\Lambda^{\bar{I}\bar{J}}N_I N_J T + \Lambda^{\bar{I}\bar{3}}N_I \partial_3 T + \Lambda^{\bar{3}\bar{I}}\nabla_3 N_I T + \Lambda^{\bar{3}\bar{3}}\partial_3^2 T + \rho q - T \frac{d}{dt}(b^{\bar{I}\bar{q}}N_I u_{-q} + b^{\bar{3}\bar{q}}\partial_3 u_{-q} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.3.72)$$

а из (3.3.71) искомое уравнение притока тепла первого приближения в форме

$$\left[g_{\bar{K}}^{\bar{I}} g_{\bar{L}}^{\bar{J}} + x^3 B_{(1)\bar{K}\bar{L}}^{\bar{I}\bar{J}} + (x^3)^2 B_{(2)\bar{K}\bar{L}}^{\bar{I}\bar{J}} \right] \Lambda^{\bar{K}\bar{L}}N_I N_J T + (g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) \Lambda^{\bar{K}\bar{3}}N_I \partial_3 T + (g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) \Lambda^{\bar{3}\bar{K}}\nabla_3 N_I T + \Lambda^{\bar{3}\bar{3}}\partial_3^2 T + \rho q - T \frac{d}{dt} \left[(g_{\bar{K}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{K}}^{\bar{I}}) b^{\bar{K}\bar{q}} N_I u_{-q} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{-q} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta \right] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.3.73)$$

Заметим, что уравнения (3.3.72) и (3.3.73) можно получить и из (3.2.110). Нетрудно заметить, что из (3.2.111) и (3.2.112) аналогично (3.1.33) можно получить уравнение притока тепла приближения порядка r в следующей форме соответственно:

$$-g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{a}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.3.74)$$

$$-g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} \left[b^{\bar{M}\bar{q}} g_{(r)M}^P N_P u_{-q} + b^{\bar{3}\bar{q}} \partial_3 u_{-q} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\mathbf{b}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \vartheta \right] + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.3.75)$$

В более общей форме уравнение притока тепла приближения порядка r для микрополярной МДТТТ можно получить из (3.2.91). Оно будет иметь вид

$$g_{(r)M}^P N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{a}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}}_{(r)} + \underline{\mathbf{d}}^2 \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.3.76)$$

Теперь не представляет труда из (3.3.74)–(3.3.76) получить уравнения притока тепла нулевого и первого приближений. В самом деле, например, из (3.3.76) находим уравнение притока тепла нулевого приближения в виде

$$-N_I q^{\bar{I}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{a}}^2 \otimes \underline{\mathbf{P}}_{(0)} + \underline{\mathbf{d}}^2 \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.3.77)$$

а уравнение притока тепла первого приближения в форме

$$-(g_{\bar{J}}^{\bar{I}} + x^3 A_{(1)\bar{J}}^{\bar{I}}) N_I q^{\bar{J}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(1)} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad (3.3.78)$$

где $\underline{\mathbf{P}}_{(0)}$ и $\underline{\mathbf{P}}_{(1)}$ — тензоры напряжений нулевого и первого приближений, которые определяются с помощью физического закона, представленного при новой параметризации области тонкого тела.

Уравнения притока тепла нулевого и первого приближений, которые можно получить из (3.3.75) с целью сокращения письма выписывать не будем. При необходимости их нетрудно выписать.

Следует отметить, что, имея представления уравнения притока тепла (3.3.70)–(3.3.78), с помощью подходящих приведенных выше рекуррентных соотношений не представляет труда при необходимости получить соответствующие им системы уравнений притока тепла в моментах. Следовательно, эти уравнения можно вывести также, например на основании полученных выше соответствующих уравнений движения в моментах тензора напряжений, осуществляя подходящие переобозначения букв, входящих в них. В этой связи, считая их известными, на получении всех этих уравнений останавливаться не будем. Ограничимся получением систем уравнений нулевого и первого приближений в моментах, исходя из (3.3.77) и (3.3.78) соответственно. При этом воспользуемся принятым допущением [336], что в четвертых слагаемых в левых частях (3.3.77) и (3.3.78) температуру T можно заменить на $T_0 = \text{const}$. Кроме того, материал будем считать однородным относительно x^3 . При этих предположениях, применяя к уравнениям (3.3.77) и (3.3.78) оператор моментов k -го порядка и учитывая (2.7.2), (2.7.3), (2.7.4) и (2.7.20), получим соответственно

$$-\mathbf{M}(N_I q^{\bar{I}}) - q^{\bar{3}'} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(0)} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.3.79)$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{M}(N_I q^{\bar{I}}) - A_{(1)\bar{J}}^{\bar{I}} \mathbf{M}(x^3 N_I q^{\bar{J}}) - q^{\bar{3}'} + \rho q - \\ & - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(1)} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.80)$$

В силу (3.3.5) и (3.3.28) из (3.3.79) находим систему уравнений притока тепла нулевого приближения в моментах в виде

$$\begin{aligned} & -\nabla_I q^{\bar{I}} + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} [k q^{\bar{I}} + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N q^{\bar{I}} - q^{\bar{I}} + q^{\bar{I}'})] - \\ & - 2(k+1) \sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) q^{\bar{3}} - 2(k+1) (q^{\bar{3}'} - (-1)^k q^{\bar{3}'}) + \rho q - \\ & - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(0)} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.81)$$

Аналогично (3.3.81) с помощью (3.3.5), (3.3.28) и (3.3.39) из (3.3.80) будем иметь систему уравнений притока тепла первого приближения в моментах в форме

$$\begin{aligned} & -\nabla_I q^{\bar{I}} - \frac{1}{4} A_{(1)\bar{J}}^{\bar{I}} N_J (q^{(k-1)\bar{I}} + 2q^{(k)\bar{I}} + q^{(k+1)\bar{I}}) + g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \{g_{\bar{J}}^{\bar{I}} [k q^{\bar{J}} + \\ & + 2(k+1) (\sum_{p=k}^N q^{\bar{J}} - q^{\bar{J}} + q^{\bar{J}'})] + \frac{1}{4} A_{(1)\bar{J}}^{\bar{I}} [(k-1) q^{(k-1)\bar{J}} - 4(k+2) q^{(k)\bar{J}} - \\ & - (k+3) q^{(k+1)\bar{J}} + 8(k+1) (\sum_{p=k}^N q^{\bar{J}} + q^{\bar{J}'})] \} - 2(k+1) [\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) q^{\bar{3}} + \\ & + (q^{\bar{3}'} - (-1)^k q^{\bar{3}'})] + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(1)} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.3.82)$$

Далее следует отметить, что при необходимости, пользуясь соотношениями (3.2.78) и (3.2.79), нетрудно получить системы уравнений движения и притока тепла в моментах и для неоднородного относительно x^3 материала. В этой связи с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

3.3.5 Системы уравнений движения и притока тепла в моментах приближений $(0, N)$ и $(1, N)$

Выведенные выше системы уравнений движения и притока тепла МДТТТ в моментах произвольного (нулевого и первого и т.д.) приближения являются бесконечными системами уравнений. При этом каждое уравнение этих систем содержит бесконечное множество слагаемых. Поэтому следует их редуцировать к конечным системам, каждое уравнение которых будет содержать конечное число слагаемых. Редукция осуществляется следующим образом: наряду с r (порядком приближения) фиксируется некоторое неотрицательное целое число N и вместо данной бесконечной системы рассматривается система, состоящая только из первых $N + 1$ уравнений. Каждое ее уравнение содержит моменты искомых величин, максимальное значение порядка которых не превышает число N . Другими словами, в каждом уравнении рассматриваемой системы моментами искомых величин, порядок которых больше числа N , пренебрегаем. В этой связи введем определение.

Определение 3.3.1. Совокупность уравнений, которая состоит из первых $N + 1$ уравнений соответствующей бесконечной системы уравнений (движения, равновесия, притока тепла и др.) в моментах приближения порядка r и каждое уравнение которой не содержит моментов искомых величин, порядок которых больше N , назовем системой уравнений (движения, равновесия, притока тепла и др.) в моментах приближения (r, N) .

3.3.6 Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Чебышева приближений $(0, N)$ и $(1, N)$

В силу определения 3.3.1 система уравнений движения микрополярной МДТТТ в моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) из (3.3.12) представляется в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^r \sum_{p=0}^{2m} A_{(m)_+}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P^{(i)\bar{M}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} - \\
 & - g_{+}^{\bar{3}} \sum_{Pm=0}^r A_{(m)_+}^{\bar{P}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \mathbf{P}^{(q)\bar{M}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^{2(k)} \mathbf{u}, \\
 & \sum_{m=0}^r \sum_{p=0}^{2m} A_{(m)_+}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P^{(i)\bar{M}} + 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \underline{\mu}^{\bar{3}} - \\
 & - g_{+}^{\bar{3}} \sum_{Pm=0}^r A_{(m)_+}^{\bar{P}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \underline{\mu}^{(q)\bar{M}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \underline{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^{2(k)} \underline{\varphi}, \\
 & l = k - m + p, \quad \forall k, r \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{3.3.83}$$

Отсюда при $r = 0$ и $r = 1$ или из (3.3.15) и (3.3.19) системы уравнений движения микрополярной МДТТТ в моментах тензоров напряжений и моментных напряжений

приближений $(0, N)$ и $(1, N)$ можно записать соответственно в форме

$$\begin{aligned} \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} - g_{+P}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{P}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{I}} - \mathbf{P}^{\bar{I}} \right) \right] + \\ + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.3.84)$$

$$\begin{aligned} \nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} - g_{+P}^{\bar{3}} \left[k \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} - \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} \right) \right] + \\ + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{C}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad k = \overline{0, N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \nabla_J \left(\mathbf{P}^{\bar{I}} + 2\mathbf{P}^{\bar{I}} + \mathbf{P}^{\bar{I}} \right) - \\ - g_{+I}^{\bar{3}} \left\{ g_{-I}^{\bar{J}} \left[k \mathbf{P}^{\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{J}} - \mathbf{P}^{\bar{J}} \right) \right] + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \left[(k-1) \mathbf{P}^{\bar{J}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(k+2) \mathbf{P}^{\bar{J}} - (k+3) \mathbf{P}^{\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}^{\bar{J}} \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbf{P}^{\bar{3}} \right] + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u},$$

$$\nabla_I \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \nabla_J \left(\boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + 2\boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} + \boldsymbol{\mu}^{\bar{I}} \right) - \quad (3.3.85)$$

$$- g_{+I}^{\bar{3}} \left\{ g_{-I}^{\bar{J}} \left[k \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} \right) \right] + \frac{1}{4} (g_{-I}^{\bar{J}} - g_{+I}^{\bar{J}}) \left[(k-1) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4(k+2) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} - (k+3) \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} \right) \right] \right\} +$$

$$+ 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} \right] + \mathbf{C}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Совершенно аналогично (3.3.83) в силу определения 3.3.1 на основании (3.3.76) система уравнений притока тепла микрополярной МДТТТ в моментах приближения (r, N) будет иметь вид

$$\begin{aligned} - \sum_{m=0}^r \sum_{p=0}^{2m} A_{(m)M}^{\bar{P}} 2^{-2m} C_{2m}^p \nabla_P \bar{q}^{\bar{M}} - 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \bar{q}^{\bar{3}} + \\ + g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{s=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l \left[1 + (-1)^{l+s} \right] \bar{q}^{\bar{M}} + \rho \bar{q} - \end{aligned} \quad (3.3.86)$$

$$- T_0 \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} \right) + \bar{W}^* = \rho c_p \partial_t T, \quad l = k - m + p, \quad k = \overline{0, N}.$$

Отсюда при $r = 0$ и $r = 1$ или из (3.3.81) и (3.3.82) аналогично (3.3.84) и (3.3.85) системы уравнений притока тепла микрополярной МДТТТ в моментах приближений $(0, N)$ и $(1, N)$ можно представить соответственно в форме

$$\begin{aligned} - \nabla_I \bar{q}^{\bar{I}} + g_{+I}^{\bar{3}} \left[k \bar{q}^{\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \bar{q}^{\bar{I}} - \bar{q}^{\bar{I}} \right) \right] - 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \bar{q}^{\bar{3}} + \end{aligned} \quad (3.3.87)$$

$$+ \rho \bar{q} - T_0 \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \mathbf{d}^{\otimes 2} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} \right) + \bar{W}^* = \rho c_p \partial_t T, \quad k = \overline{0, N}.$$

$$- \nabla_I \bar{q}^{\bar{I}} - \frac{1}{4} A_{(1)I}^{\bar{J}} N_J \left(\bar{q}^{\bar{I}} + 2\bar{q}^{\bar{I}} + \bar{q}^{\bar{I}} \right) + g_{+I}^{\bar{3}} \left\{ g_{-I}^{\bar{J}} \left[k \bar{q}^{\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \bar{q}^{\bar{J}} - \bar{q}^{\bar{J}} \right) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} A_{(1)_{+}^{\bar{I}}}^{\bar{I}} \left[(k-1) \bar{q}^{(k-1)\bar{J}} - 4(k+2) \bar{q}^{(k)\bar{J}} - (k+3) \bar{q}^{(k+1)\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \bar{q}^{(p)\bar{J}} \right) \right] \} - \quad (3.3.88) \\
 & - 2(k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \bar{q}^{(p)\bar{3}} + \rho \bar{q}^{(k)} - T_0 \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{(k)} + \underline{\mathbf{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}^{(k)}) + W^* = \rho c_p \frac{dT}{dt}, \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

3.3.7 Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Лежандра приближений $(0, N)$ и $(1, N)$

3.3.7.1 Системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0, N)$ и $(1, N)$

Искомые системы уравнений имеют аналогичный (3.3.84) и (3.3.85) вид и на основании (3.3.24) и (3.3.25) представляются в форме

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} [k \mathbf{P}^{\bar{I}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \mathbf{P}^{\bar{I}}] + (2k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} \right\} + \quad (3.3.89) \\
 & + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k = \overline{0, N},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} + \frac{1}{2} (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) \left(\frac{k}{2k-1} \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \frac{k+1}{2k+3} \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} \right) + \right. \\
 & + (2k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} [k \mathbf{P}^{\bar{M}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \mathbf{P}^{\bar{M}}] + \right. \\
 & + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{+}}) \left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)} \mathbf{P}^{\bar{M}} + k \mathbf{P}^{\bar{M}} - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \mathbf{P}^{\bar{M}} + \right. \\
 & \left. \left. + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \mathbf{P}^{\bar{M}} \right] \right] \left. \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.90) \\
 & \left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

3.3.7.2 Системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0, N)$ и $(1, N)$

Эти системы уравнений аналогично (3.3.89) и (3.3.90) в силу (3.3.26) и (3.3.27) имеют форму

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} [k \mathbf{P}^{\bar{I}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{I}}] - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} + \right. \\
 & \left. + (2k+1) [\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{+}\bar{+}\bar{+}}} \mathbf{P} + (-1)^k \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{-}\bar{-}\bar{-}}} \mathbf{P}] \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.3.91) \\
 & \left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k = \overline{0, N},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_I \mathbf{P}^{\bar{I}} + \frac{1}{2} (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \left(\frac{k}{2k-1} \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \frac{k+1}{2k+3} \nabla_P \mathbf{P}^{\bar{M}} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \left[g_{\bar{M}}^{\bar{P}} [k \mathbf{P}^{\bar{M}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{M}}] + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)} \mathbf{P}^{\bar{M}} + k \mathbf{P}^{\bar{M}} - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \mathbf{P}^{\bar{M}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{M}} \right] \right] + \right. \\
 & \quad \left. + (2k+1) \left[\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{++(+)} \mathbf{P}} + (-1)^k \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{--(-)} \mathbf{P}} \right] \right\} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\
 & \left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \mathbf{C}^{\otimes 2} \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\omega}, \quad k = \bar{0}, \bar{N}.
 \end{aligned} \tag{3.3.92}$$

Заметим, что системы уравнений притока тепла без учета и с учетом граничных условий теплового содержания на лицевых поверхностях приближений $(0, N)$ и $(1, N)$ получаются совершенно аналогично системам уравнений (3.3.89), (3.3.90), (3.3.89) и (3.3.90). Поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

3.4 Определяющие соотношения в моментах.

Получены представления определяющих соотношений в моментах относительно систем полиномов Чебышева второго рода.

3.4.1 Определяющие соотношения микрополярной теории упругости в моментах относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода.

Получим эти соотношения сперва для однородного относительно x^3 материала, исходя из ОС (3.2.48). Заметим, что из рассмотренных выше ОС видно, что для представления в моментах этих соотношений достаточно найти момент k -го порядка основного выражения $g_{(r)M}^P N_P \mathbb{F}$ в подходящей форме, т.е. надо найти выражение для $\mathbb{M}_{(r)M}^{(k)}(g_{(r)M}^P N_P \mathbb{F})$, которое легко можно получить из (2.9.10), заменяя в нем предварительно предел знака суммы ∞ на r и $g_{(r)M}^P$ на $g_{(r)M}^P$ и используя (2.9.7) и (3.3.8). Осуществляя простые выкладки, найдем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}_{(r)M}^{(k)}(g_{(r)M}^P N_P \mathbb{F}) &= \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left\{ \sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \mathbb{F} - \right. \\
 & \quad \left. - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \mathbb{F}^{(q)}(x') \right\} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} A_{(r)M}^{(k)P} \mathbb{F}'^{(+)}, \\
 A_{(r)M}^{(k)P} &= \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} a_{(m,k)}, \quad l \equiv k - m + p, \quad k \geq 0, \quad r \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Отсюда при $r = 0$ и $r = 1$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}_{(0)I}^{(k)}(g_{(0)I}^J N_J \mathbb{F}) &= \mathbb{M}(N_I \mathbb{F}) = \nabla_I \mathbb{F} - g_{\bar{I}}^{\bar{3}} \left[k \mathbb{F} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} - \mathbb{F} + \mathbb{F}' \right) \right], \quad k \geq 0, \\
 \mathbb{M}_{(1)I}^{(k)}(g_{(1)I}^J N_J \mathbb{F}) &= \mathbb{M} \left[(g_{(1)I}^{\bar{J}} + x^3 A_{(1)I}^{\bar{J}}) N_P \mathbb{F} \right] = \nabla_I \mathbb{F} + \frac{1}{4} A_{(1)I}^{\bar{J}} \nabla_J \left(\mathbb{F}^{(k-1)} + 2 \mathbb{F} + \mathbb{F}^{(k+1)} \right) - \\
 & \quad - g_{\bar{J}}^{\bar{3}} \left\{ g_{\bar{I}}^{\bar{J}} \left[k \mathbb{F} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} - \mathbb{F} + \mathbb{F}' \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} A_{(1)I}^{\bar{J}} \left[(k-1) \mathbb{F}^{(k-1)} - 4(k+2) \mathbb{F} - (k+3) \mathbb{F}^{(k+1)} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbb{F}^{(p)} + \mathbb{F}' \right) \right] \right\}, \quad k \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Применяя оператор моментов k -го порядка к (3.2.49) и учитывая первое соотношение (3.4.2), получим ОС нулевого приближения в моментах в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}^{(k)}(0) &= \underline{\mathbf{P}}^{(k)}(0,N) + \underline{\mathbf{C}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{C}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} + \underline{\mathbf{A}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)\prime}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(0) &= \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(0,N) + \underline{\mathbf{B}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{B}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} + \underline{\mathbf{D}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{D}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)\prime}, \quad k \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}\quad (3.4.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}^{(k)}(0,N) &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\mathbf{u}}(x') - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\mathbf{u}}(x') + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x') - \underline{\mathbf{u}}^{(k)}(x') \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x') + \\ &\quad + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x') - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}(x') \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x') - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}}^{\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(k)}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(0,N) &= \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x') - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}(x') \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)}(x') + \\ &\quad + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \nabla_M^{(k)} \underline{\mathbf{u}}(x') - g_{+M}^{\bar{3}} \left[k \underline{\mathbf{u}}(x') + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x') - \underline{\mathbf{u}}^{(k)}(x') \right) \right] \right\} + \\ &\quad + 2(k+1) \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x') - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}}^{\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x') - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0;\end{aligned}\quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{C}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{C}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) (-1)^{k+1} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{A}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) (-1)^{k+1} \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{D}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{D}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) (-1)^{k+1} \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{B}}_{(0,k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} (\underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{B}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} &= 2(k+1) (-1)^{k+1} \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{r}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}\quad (3.4.5)$$

Аналогично (3.4.3), исходя из (3.2.48) при $r = 1$ и используя второе соотношение (3.4.2), можно получить ОС первого приближения в моментах. В силу (3.4.1) из (3.2.48) можно вывести ОС физического содержания в моментах приближения r . В самом деле, осуществляя простые выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}^{(k)}(r) &= \underline{\mathbf{P}}^{(k)}(r,N) + \underline{\mathbf{C}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{C}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} + \underline{\mathbf{A}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)\prime}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(r) &= \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(r,N) + \underline{\mathbf{B}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{B}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} + \underline{\mathbf{D}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)\prime} + \underline{\mathbf{D}}_{(k)}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)\prime}, \quad k, r \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}\quad (3.4.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}^{(k)}(r,N) &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \underline{\mathbf{u}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{-2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l \left[1 + (-1)^{l+q} \right] \underline{\mathbf{u}} \right] \right\} + 2(k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \varphi - \right. \right. \\
 & - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \varphi^{(q)} \left. \right\} + 2(k+1) \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \varphi^{(p)} - \\
 & - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi^{(k)}(x') - \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(k)}, \\
 \underline{\mu}^{(k)}(r, N) = & \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \varphi - \right. \right. \\
 & - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \varphi^{(q)} \left. \right\} + 2(k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \varphi^{(p)} + \\
 & + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \mathbf{u} - \right. \right. \\
 & - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \mathbf{u}^{(q)} \left. \right\} + 2(k+1) \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p)} - \\
 & - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi^{(k)}(x') - \underline{\beta} \vartheta^{(k)}, \quad l \equiv k - m + p, \quad k \geq 0, \quad r \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{C}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} &= \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} [2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+P}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}}] \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} = \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} [2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+P}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}}] \underline{\mathbf{E}}, \\
 \underline{\mathbf{D}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} &= \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} [2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+P}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}}] \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{B}}_{(r,k)}^{\bar{3}\cdot} = \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} [2(k+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+P}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}}] \underline{\mathbf{E}}, \quad k, r \geq 0.
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.4.6) назовем ОС физического содержания в моментах приближения r микрополярной теории однородных тонких тел. При упрощенной схеме редукции бесконечной системы уравнений к конечной в качестве ОС могут быть рассмотрены (3.4.7), которые назовем ОС физического содержания в моментах приближения (r, N) микрополярной теории однородных тонких тел.

Следовательно, с помощью (3.4.1) и (3.4.2) можно получить и уравнения движения в тензорах напряжений и моментных напряжений и притока тепла, а также ОС теплового содержания (см. ниже) соответствующих приближений в моментах.

ОС можно представить и в другом виде. Действительно, учитывая, что $g_{-M}^P = \vartheta^{-1} A_{-M}^P$, из (3.2.47) получим

$$\begin{aligned}
 \vartheta \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot A_{-M}^P N_P \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \vartheta \partial_3 \mathbf{u} + \\
 & + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot A_{-M}^P N_P \varphi + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \vartheta \partial_3 \varphi - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \vartheta \varphi - \underline{\mathbf{b}} \vartheta \vartheta, \\
 \vartheta \underline{\mu} &= \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot A_{-M}^P N_P \varphi + \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \vartheta \partial_3 \varphi + \\
 & + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot A_{-M}^P N_P \varphi + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \vartheta \partial_3 \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \vartheta \varphi - \underline{\beta} \vartheta \vartheta.
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

С помощью (2.7.3) из (3.4.8) для однородного относительно x^3 материала находим

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \underline{\mathbf{P}}) &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(A_{-M}^P N_P \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \partial_3 \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(A_{-M}^P N_P \varphi) + \\
 & + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \partial_3 \varphi) - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \varphi) - \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \vartheta), \\
 \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \underline{\mu}) &= \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(A_{-M}^P N_P \varphi) + \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \partial_3 \varphi) + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(A_{-M}^P N_P \mathbf{u}) + \\
 & + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \partial_3 \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \varphi) - \underline{\beta} \underline{\mathbf{M}}^{(k)}(\vartheta \vartheta).
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

В силу (3.3.28), (3.3.39) и равенства $A_M^P = g_M^{\bar{P}} + x^3 a_M^{\bar{P}}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(A_M^P N_P \mathbf{u}) &= \mathbf{M}(N_M \mathbf{u}) + a_M^{\bar{P}} \mathbf{M}(x^3 N_P \mathbf{u}) = \\ &= \nabla_M^{(k)} \mathbf{u} - g_+^{\bar{3}} [k \mathbf{u} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \binom{(p)}{\mathbf{u}} - \binom{(k)}{\mathbf{u}} + \binom{(+)}{\mathbf{u}'} \right)] + \frac{1}{4} a_M^{\bar{P}} \left\{ \nabla_P^{(k-1)} \mathbf{u} + 2 \binom{(k)}{\mathbf{u}} + \binom{(k+1)}{\mathbf{u}} \right\} - \\ &- g_+^{\bar{3}} \left[(k-1) \binom{(k-1)}{\mathbf{u}} - 4(k+2) \binom{(k)}{\mathbf{u}} - (k+3) \binom{(k+1)}{\mathbf{u}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \binom{(p)}{\mathbf{u}} + \binom{(+)}{\mathbf{u}'} \right) \right], \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Далее с помощью (1.5.26), (2.7.3) и (2.7.4) и (2.7.38) при $s = 0, 1, 2$ находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\vartheta \varphi) &= \varphi^{(-)} - 2b \mathbf{M}(x^3 \varphi) + a \mathbf{M}[(x^3)^2 \varphi] = \\ &= \varphi^{(k)} - \frac{b}{2} \left(\varphi^{(k-1)} + 2 \varphi^{(k)} + \varphi^{(k+1)} \right) + \frac{a}{16} \left(\varphi^{(k-2)} + 4 \varphi^{(k-1)} + 6 \varphi^{(k)} + 4 \varphi^{(k+1)} + \varphi^{(k+2)} \right), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

На основании (1.5.26), (2.7.3) и (2.7.4), (2.7.40) при $m = 1, s = 0, 1, 2$ (см. также (3.3.14) и (3.3.18)) и (3.3.5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\vartheta \partial_3 \mathbf{u}) &= \mathbf{M}'(\vartheta \mathbf{u}) = \mathbf{u}'^{(k)} - 2b \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{u}) + a \mathbf{M}'[(x^3)^2 \mathbf{u}] = \\ &= 2(k+1) \left\{ \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \binom{(p)}{\mathbf{u}} + [\mathbf{u}'^{(+)} - (-1)^k \mathbf{u}'^{(-)}] \right\} - \\ &- 2b \left[k \binom{(k)}{\mathbf{u}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \binom{(p)}{\mathbf{u}} - \binom{(k)}{\mathbf{u}} + \binom{(+)}{\mathbf{u}'} \right) \right] + \\ &+ \frac{a}{4} \left[(k-1) \binom{(k-1)}{\mathbf{u}} - 4(k+2) \binom{(k)}{\mathbf{u}} - (k+3) \binom{(k+1)}{\mathbf{u}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \binom{(p)}{\mathbf{u}} + \binom{(+)}{\mathbf{u}'} \right) \right], \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Выражение для $\mathbf{M}(\vartheta \vartheta)$ получается из (3.4.11) заменой φ на ϑ , а для $\mathbf{M}(A_M^P N_P \varphi)$ и $\mathbf{M}(\vartheta \partial_3 \varphi)$ можно найти на основании (3.4.10) и (3.4.12), если в них производить замену \mathbf{u} на φ . Учитывая (3.4.10)–(3.4.12) и получаемые из них упомянутые выше для ϑ и φ соотношения, из (3.4.9) найдем искомые ОС в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\mathbf{P}}) &= \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot \left\{ \frac{1}{4} a_M^{\bar{P}} \nabla_P^{(k-1)} \mathbf{u} + \left(g_M^{\bar{P}} + \frac{1}{2} a_M^{\bar{P}} \right) \nabla_P^{(k)} \mathbf{u} + \frac{1}{4} a_M^{\bar{P}} \nabla_P^{(k+1)} \mathbf{u} - \right. \\ &- g_+^{\bar{3}} \left[\frac{1}{4} (k-1) a_M^{\bar{P}} \binom{(k-1)}{\mathbf{u}} + k \left(g_M^{\bar{P}} + a_M^{\bar{P}} \right) \binom{(k)}{\mathbf{u}} + (2(k+1) g_M^{\bar{P}} + \frac{1}{4} (7k+5) a_M^{\bar{P}}) \binom{(k+1)}{\mathbf{u}} + \right. \\ &+ \left. \left. 2(k+1) \left(g_M^{\bar{P}} + a_M^{\bar{P}} \right) \sum_{p=k+2}^N \binom{(p)}{\mathbf{u}} \right] \right\} + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot \left[\frac{a}{4} (k-1) \binom{(k-1)}{\mathbf{u}} + k(a-2b) \binom{(k)}{\mathbf{u}} + (2(k+1)(2-2b) + \right. \\ &+ \left. \frac{a}{4} (7k+5) \binom{(k+1)}{\mathbf{u}} + 2(k+1) \sum_{p=k+2}^N (a-2b+1 - (-1)^{k+p}) \binom{(p)}{\mathbf{u}} \right] + \\ &+ \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}} \cdot \left\{ \frac{1}{4} a_M^{\bar{P}} \nabla_P^{(k-1)} \varphi + \left(g_M^{\bar{P}} + \frac{1}{2} a_M^{\bar{P}} \right) \nabla_P^{(k)} \varphi + \frac{1}{4} a_M^{\bar{P}} \nabla_P^{(k+1)} \varphi - \right. \\ &- g_+^{\bar{3}} \left[\frac{1}{4} (k-1) a_M^{\bar{P}} \binom{(k-1)}{\varphi} + k \left(g_M^{\bar{P}} + a_M^{\bar{P}} \right) \binom{(k)}{\varphi} + (2(k+1) g_M^{\bar{P}} + \frac{1}{4} (7k+5) a_M^{\bar{P}}) \binom{(k+1)}{\varphi} + \right. \\ &+ \left. \left. 2(k+1) \left(g_M^{\bar{P}} + a_M^{\bar{P}} \right) \sum_{p=k+2}^N \binom{(p)}{\varphi} \right] \right\} + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}} \cdot \left[\frac{a}{4} (k-1) \binom{(k-1)}{\varphi} + k(a-2b) \binom{(k)}{\varphi} + (2(k+1)(2-2b) + \right. \\ &+ \left. \frac{a}{4} (7k+5) \binom{(k+1)}{\varphi} + 2(k+1) \sum_{p=k+2}^N (a-2b+1 - (-1)^{k+p}) \binom{(p)}{\varphi} \right] - \\ &- \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \cdot \left[\frac{1}{16} a \binom{(k-2)}{\vartheta} + \frac{1}{4} (a-2b) \binom{(k-1)}{\vartheta} + \frac{1}{8} (8-8b+3a) \binom{(k)}{\vartheta} + \frac{1}{4} (a-2b) \binom{(k+1)}{\vartheta} + \frac{1}{16} a \binom{(k+2)}{\vartheta} \right] - \\ &- \underline{\mathbf{b}} \left[\frac{1}{16} a \binom{(k-2)}{\vartheta} + \frac{1}{4} (a-2b) \binom{(k-1)}{\vartheta} + \frac{1}{8} (8-8b+3a) \binom{(k)}{\vartheta} + \frac{1}{4} (a-2b) \binom{(k+1)}{\vartheta} + \frac{1}{16} a \binom{(k+2)}{\vartheta} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \otimes \left\{ \left[2(k+1)(a-2b+1)\mathbf{r}^{\bar{3}} - 2(k+1)g_{\bar{P}}^{\bar{3}}(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})\mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \mathbf{u}' + 2(k+1)(-1)^{k+1}\mathbf{r}^{\bar{3}(-)'} \right\} + \\
 & + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \otimes \left\{ \left[2(k+1)(a-2b+1)\mathbf{r}^{\bar{3}} - 2(k+1)g_{\bar{P}}^{\bar{3}}(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})\mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \varphi' + 2(k+1)(-1)^{k+1}\mathbf{r}^{\bar{3}(-)'} \right\}, \\
 \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(k)}(\vartheta \underline{\underline{\mu}}) & = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\bar{M}} \cdot \left\{ \frac{1}{4} a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P^{(k-1)} \varphi + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + \frac{1}{2} a_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \nabla_P^{(k)} \varphi + \frac{1}{4} a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P^{(k+1)} \varphi - \right. \\
 & - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \left[\frac{1}{4} (k-1) a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \varphi^{(k-1)} + k (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})^{(k)} \varphi + (2(k+1)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + \frac{1}{4}(7k+5)a_{\bar{M}}^{\bar{P}})^{(k+1)} \varphi + \right. \\
 & \left. \left. + 2(k+1)(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \sum_{p=k+2}^N \binom{p}{\varphi} \right] \right\} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\bar{3}} \cdot \left[\frac{a}{4} (k-1)^{(k-1)} \varphi + k(a-2b)\varphi + \right. \\
 & \left. + (2(k+1)(2-2b) + \frac{a}{4}(7k+5))^{(k+1)} \varphi + 2(k+1) \sum_{p=k+2}^N (a-2b+1 - (-1)^{k+p}) \binom{p}{\varphi} \right] + \\
 & + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{M}} \cdot \left\{ \frac{1}{4} a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P^{(k-1)} \mathbf{u} + (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + \frac{1}{2} a_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \nabla_P^{(k)} \mathbf{u} + \frac{1}{4} a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \nabla_P^{(k+1)} \mathbf{u} - \right. \\
 & - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} \left[\frac{1}{4} (k-1) a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{u}^{(k-1)} + k (g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})^{(k)} \mathbf{u} + (2(k+1)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + \frac{1}{4}(7k+5)a_{\bar{M}}^{\bar{P}})^{(k+1)} \mathbf{u} + \right. \\
 & \left. \left. + 2(k+1)(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}}) \sum_{p=k+2}^N \binom{p}{\mathbf{u}} \right] \right\} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}} \cdot \left[\frac{a}{4} (k-1)^{(k-1)} \mathbf{u} + k(a-2b)\mathbf{u} + \right. \\
 & \left. + (2(k+1)(2-2b) + \frac{a}{4}(7k+5))^{(k+1)} \mathbf{u} + 2(k+1) \sum_{p=k+2}^N (a-2b+1 - (-1)^{k+p}) \binom{p}{\mathbf{u}} \right] - \\
 & - \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \left[\frac{1}{16} a^{(k-2)} \varphi + \frac{1}{4} (a-2b)^{(k-1)} \varphi + \frac{1}{8} (8-8b+3a)^{(k)} \varphi + \frac{1}{4} (a-2b)^{(k+1)} \varphi + \frac{1}{16} a^{(k+2)} \varphi \right] - \\
 & - \underline{\underline{\beta}} \left[\frac{1}{16} a^{(k-2)} \vartheta + \frac{1}{4} (a-2b)^{(k-1)} \vartheta + \frac{1}{8} (8-8b+3a)^{(k)} \vartheta + \frac{1}{4} (a-2b)^{(k+1)} \vartheta + \frac{1}{16} a^{(k+2)} \vartheta \right] + \\
 & + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \otimes \left\{ \left[2(k+1)(a-2b+1)\mathbf{r}^{\bar{3}} - 2(k+1)g_{\bar{P}}^{\bar{3}}(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})\mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \varphi' + 2(k+1)(-1)^{k+1}\mathbf{r}^{\bar{3}(-)'} \right\} + \\
 & + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \otimes \left\{ \left[2(k+1)(a-2b+1)\mathbf{r}^{\bar{3}} - 2(k+1)g_{\bar{P}}^{\bar{3}}(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + a_{\bar{M}}^{\bar{P}})\mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \mathbf{u}' + 2(k+1)(-1)^{k+1}\mathbf{r}^{\bar{3}(-)'} \right\}, \quad k \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Следует заметить, что при $h = \text{const}$ соответствующие ОС можно получить из приведенных выше ОС, если в них учитывать $g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = 0$. При $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ и $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$ из них также получим ОС для материала с центром симметрии. Кроме того, если в приведенных выше соотношениях для моментов тензора напряжений учесть $\varphi^{(k)} = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$, то найдем соответствующие ОС классической теории. Выписать эти соотношения не представляет труда, поэтому на этом останавливаться не будем.

Заметим также, что вывести аналогичные (3.4.3) и (3.4.13) ОС в моментах относительно системы полиномов Лежандра не представляет труда, однако получить их в общем виде подобно (3.4.6) затруднительно.

3.4.2 ОС микрополярной теории в моментах для неоднородных тел

Считаем, что материальные тензоры $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ участвующие в определяющих соотношениях (3.2.47)–(3.2.49), в достаточной степени гладки. В частности, они принадлежат классу $C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$. Тогда относительно координаты $x^3 \in [0, 1]$ для каждой фиксированной точки $x' \in S$ аналогично (2.7.1) можно их разлагать в ряд по системе смещенных ортонормированных полиномов Чебышева второго рода [201, 392].

Применяя оператор моментов k -го порядка, например, к (3.2.48) и учитывая его линейность, получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(r)}^{(k)} &= \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \\ &\quad - \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{b}\vartheta), \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}^{(k)} &= \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u}) - \\ &\quad - \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \underline{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\beta}\vartheta). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

В силу (3.2.78) находим

$$\underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(n+k-s)}(g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}).$$

Следовательно, вместо последнего равенства следует рассматривать приближенное соотношение

$$\underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}) \approx \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot \underline{\mathbf{M}}^{(n+k-s)}(g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}), \quad (3.4.15)$$

где выбор числа M зависит от N . В частности, M выбирается так, что моменты величин, входящие в соотношения, не превосходили N .

С помощью (3.4.1) из (3.4.15) получаем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot g_{(r)M}^P N_P \mathbf{u}) &\approx \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P \mathbf{u} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \underline{\mathbf{u}}^{(q)} \right] - g_{+P}^{\bar{3}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \underline{\mathbf{u}}^{(+)} \right\}, \\ l &= n + k - s - m + p. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

На основании (3.2.78), второго соотношения (2.9.6) и (3.3.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{u}) &\approx \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot 2(n+k-s+1) \sum_{p=n+k-s}^N [1 - (-1)^{n+k-s+p}] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} + \\ &\quad + \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M 2(n+k-s+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}} \cdot [\underline{\mathbf{u}}^{(+)} + (-1)^{n+k-s+p} \underline{\mathbf{u}}^{(-)}]. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Далее, очевидно, имеем

$$\underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(n+k-s)}, \quad \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{b}\vartheta) = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \mathbf{b} \vartheta^{(n+k-s)}. \quad (3.4.18)$$

Учитывая (3.4.15)–(3.4.18), из (3.4.14) найдем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(r,M)}^{(k)} &= \underline{\mathbf{P}}_{(r,M,N)}^{(k)} + \underline{\mathbf{C}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)} + \underline{\mathbf{C}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)} + \underline{\mathbf{A}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)} + \underline{\mathbf{A}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,M)}^{(k)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,M,N)}^{(k)} + \underline{\mathbf{D}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(+)} + \underline{\mathbf{D}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(-)} + \underline{\mathbf{B}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)} + \underline{\mathbf{B}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(r,M,N)}^{(k)} &= \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \cdot \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P \mathbf{u} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \underline{\mathbf{u}}^{(q)} \right] + 2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=u}^N [1 - (-1)^{u+p}] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right\} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^k \underline{\mathbf{A}}^{\otimes 2} \cdot \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P \boldsymbol{\varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l [1 + (-1)^{l+q}] \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(q)} \right] + 2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=u}^N [1 - (-1)^{u+p}] \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \binom{k+s}{2} \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(n+k-s)} + \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(k+s)(n+k-s)}, \\
 \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,M,N)}^{(k)} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \right. \right. \\
 & - g_{\bar{P}}^3 \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l \left[1 + (-1)^{l+q} \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(q)} \right] + 2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=u}^N \left[1 - (-1)^{u+p} \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(p)} \right] \left. \right\} + \\
 & + \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^k \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_P^{(l)} \underline{\mathbf{u}} - \right. \right. \\
 & - g_{\bar{P}}^3 \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l \left[1 + (-1)^{l+q} \underline{\mathbf{u}}^{(q)} \right] + 2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=u}^N \left[1 - (-1)^{u+p} \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right] \left. \right\} - \\
 & - \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \binom{k+s}{2} \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(n+k-s)} + \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(k+s)(n+k-s)};
 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{C}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left[2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^3 A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{C}}_{(k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M 2(u+1) (-1)^u \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\
 \underline{\mathbf{A}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left[2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^3 A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M 2(u+1) (-1)^u \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\
 \underline{\mathbf{D}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left[2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^3 A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{D}}_{(k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M 2(u+1) (-1)^u \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\
 \underline{\mathbf{B}}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \left[2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^3 A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \right] \underline{\mathbf{E}}, & \underline{\mathbf{B}}_{(k)}^{(M)\bar{3}} & = \sum_{s=0}^k \sum_{n=0}^M 2(u+1) (-1)^u \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}}, \\
 & l = u - m + p = n + k - s - m + p, \quad u = n + k - s, \quad k \geq 0.
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.4.19) представляют искомые ОС. Назовем их ОС физического содержания в моментах приближения (r, M) микрополярной теории неоднородных упругих тонких тел. При упрощенной схеме редукции бесконечной системы уравнений к конечной в качестве ОС могут быть рассмотрены (3.4.20), которые назовем ОС физического содержания в моментах приближения (r, M, N) микрополярной теории неоднородных упругих тонких тел.

Заметить, что, исходя из (3.2.49), найдем ОС в моментах приближения $(0, M)$ микрополярной теории неоднородных упругих тонких тел, которые также можно получить из (3.4.19) при $r = 0$.

3.4.3 Представления закона теплопроводности Фурье в моментах

Для получения этих представлений нет надобности проводить их подробный вывод. Их можно выписать с помощью выведенных выше ОС в моментах. В самом деле, например, из первых соотношений (3.4.3), (3.4.4), (3.4.6), (3.4.7), (3.4.13), (3.4.19) и (3.4.20), соответствующие искомые представления закона теплопроводности Фурье можно получить, если в них положить $\underline{\mathbf{a}} = 0$, $\underline{\mathbf{A}} = 0$, $\underline{\boldsymbol{\varphi}} = 0$ и $\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^{(+)}$ и $\underline{\mathbf{u}}^{(-)}$ заменить на $\underline{\mathbf{q}}, -\underline{\mathbf{A}}, T, T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ соответственно. При этом число знаков однократного умножения уменьшается на одно (там, где есть знак двукратного умножения, заменяется одним знаком, а там, где — один знак, он опускается).

Осуществляя указанную выше замену, например, из первого соотношения (3.4.3), найдем искомую систему законов теплопроводности Фурье в моментах для однородного материала в виде

$$\underline{\mathbf{q}}_{(0)}^{(k)} = \underline{\mathbf{q}}_{(0,N)}^{(k)} + \underline{\mathbf{A}}_{(0,k)}^{\bar{3}} T^{(+)} + \underline{\mathbf{A}}_{(k)}^{\bar{3}} T^{(-)}, \quad 0 \leq k \leq N, \tag{3.4.21}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{(0,N)}^{(k)} &\equiv -\mathbf{\Lambda}^{\bar{M}} \left\{ \partial_m^{(k)} T(x') - g_{+m}^{\bar{3}} \left[k T(x') + 2(k+1) \sum_{p=k+1}^N T^{(p)}(x') \right] \right\} - \\ &- 2(k+1) \mathbf{\Lambda}^{\bar{3}} \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] T^{(p)}(x'), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

$$T'^{(+)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} T^{(p)}(x'), \quad T'^{(-)}(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p T^{(p)}(x'), \quad (3.4.23)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{(0,k)}^{\bar{3}} = -2(k+1) \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+M}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}), \quad \mathbf{\Lambda}_{(k)}^{\bar{3}} = -2(k+1) (-1)^{k+1} \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r}^{\bar{3}}.$$

Соотношения (3.4.21) назовем ОС теплового содержания в моментах нулевого приближения микрополярной теории однородных тонких тел.

Заметим, что при упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной в качестве ОС теплового содержания можно рассматривать систему первых $N+1$ соотношений (3.4.22), которые назовем ОС теплового содержания в моментах приближения $(0, N)$ микрополярной теории однородных тонких тел.

Совершенно аналогично изложенному выше можно найти системы законов теплопроводности Фурье и других приближений как для однородного, так и для неоднородного материала. В самом деле, например, из (3.4.19) получим ОС теплового содержания в моментах приближения (r, M) микрополярной теории неоднородных тонких тел в виде

$$\mathbf{q}_{(r,M)}^{(k)} = \mathbf{q}_{(r,M,N)}^{(k)} + \mathbf{\Lambda}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \mathbf{u}'^{(+)} + \mathbf{\Lambda}_{(k)}^{(M)\bar{3}} \cdot \mathbf{u}'^{(-)}, \quad k \geq 0, \quad (3.4.24)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{(r,M,N)}^{(k)} &= \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^k \mathbf{\Lambda}^{(k+s)} \cdot \left\{ \mathbf{r}^{\bar{M}} \sum_{m=0}^r A_{(m)M}^{\bar{P}} \left[\sum_{p=0}^{2m} 2^{-2m} C_{2m}^p \partial_p^{(l)} T - \right. \right. \\ &\left. \left. - g_{+P}^{\bar{3}} \sum_{p=0}^{2m+2} \sum_{q=l-1}^N 2^{-(2m+1)} C_{2m+2}^p l \left[1 + (-1)^{l+q} \right] T^{(q)} \right] + 2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} \sum_{p=u}^N \left[1 - (-1)^{u+p} \right] T^{(p)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{(r,k)}^{(M)\bar{3}} = \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^k \mathbf{\Lambda}^{(k+s)} \cdot \left[2(u+1) \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+P}^{\bar{3}} A_{(r)M}^{(k)\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} \right], \quad \mathbf{\Lambda}_{(k)}^{(M)\bar{3}} = \sum_{n=0}^M \sum_{s=0}^k 2(u+1) (-1)^u \mathbf{\Lambda}^{(k+s)} \cdot \mathbf{r}^{\bar{3}},$$

$$l = u - m + p = n + k - s - m + p, \quad u = n + k - s, \quad k = \overline{0, N}.$$

При упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной в качестве ОС теплового содержания можно рассматривать систему первых $N+1$ соотношений (3.4.25), которые назовем ОС теплового содержания в моментах приближения $(0, M, N)$ микрополярной теории неоднородных тонких тел. Видно, что, имея ОС физического содержания, не доставляет труда при необходимости выписать соответствующие ОС теплового содержания.

Следует заметить, что в ОС физического содержания (3.4.3), (3.4.6), (3.4.13) и (3.4.19) входят моменты $\mathbf{u}^{(m)}$, $\partial_I \mathbf{u}^{(m)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m)}$, $\partial_I \boldsymbol{\varphi}^{(m)}$, $\vartheta^{(m)}$, $m = \overline{0, N}$ и векторные функции $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(+)}$ и $\boldsymbol{\varphi}'^{(-)}$. При этом функции $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(+)}$ и $\boldsymbol{\varphi}'^{(-)}$ определяются с помощью $\mathbf{u}^{(m)}$, $\partial_I \mathbf{u}^{(m)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m)}$, $\vartheta^{(m)}$, $m = \overline{0, N}$ и соответствующих граничных условий на лицевых поверхностях. Аналогично в ОС теплового содержания (3.4.21), (3.4.24), входят моменты $T^{(m)}$, $\partial_I T^{(m)}$, $m = \overline{0, N}$ и функции $T'^{(+)}$ и T'^{-} . Функции T'^{+} и T'^{-} выражаются посредством $T^{(m)}$, $\partial_I T^{(m)}$, $m = \overline{0, N}$ и соответствующих граничных условий на лицевых поверхностях. Ниже будут получены системы для определения функций $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(+)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(-)}$ и функций T'^{+} , T'^{-} в зависимости от типа граничных условий на лицевых поверхностях. При этом способ определения функций $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$,

$\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$ при граничных условиях физического содержания на лицевых поверхностях и способ определения функций $\overset{(+)}{T}'$, $\overset{(-)}{T}'$ при граничных условиях второго рода (типа Неймана) и третьего рода (теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона) одинаковы. Определяя эти функции и учитывая их в соответствующих определяющих соотношениях, получим соотношения, которые, следуя Векуа И.Н. [68], назовем ОС нормированных моментов k -го порядка тензоров напряжений и моментных напряжений и вектора потока тепла. Соотношения нормированных моментов при $k = \overline{0, N}$ тензора напряжений содержат моменты $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\varphi}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$, тензора моментных напряжений – только моменты $\overset{(m)}{\varphi}$, $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$, а вектора потока тепла – только моменты $\overset{(m)}{T}$, $\partial_I \overset{(m)}{T}$, $m = \overline{0, N}$. При этом эти соотношения представляют линейные формы от входящих в них величин и, конечно, они согласованы с граничными условиями на лицевых поверхностях.

Подставляя полученные соотношения нормированных моментов тензоров напряжений и моментных напряжений в соответствующие уравнения движения в моментах (см. (3.3.12), (3.3.15) и (3.3.19)) а соотношения нормированных моментов вектора потока тепла в уравнения притока тепла в моментах (см. (3.3.81) и (3.3.82)) получим систему $7N + 7$ уравнений относительно $7N + 7$ неизвестных $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\varphi}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$. Порядок этой системы уравнений равняется $14N + 14$. При связанной задаче система уравнений притока тепла содержит все неизвестные функции $\overset{(m)}{\vartheta} = \overset{(m)}{T} - \overset{(m)}{T}_0$, $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$ и $\overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$. Поэтому система уравнений движения и система уравнений притока тепла в моментах решаются совместно. При несвязанной задаче система уравнений притока тепла содержит только неизвестные функции $\overset{(m)}{T}$, $m = \overline{0, N}$. В этом случае число уравнений в системе уравнений притока тепла совпадает с числом неизвестных функций и система уравнений притока тепла решается независимо от системы уравнений движений. После чего с учетом полученных решений системы уравнений притока тепла решается система уравнений движения из $6N + 6$ уравнений с тем же числом неизвестных. Порядок системы уравнений – $12N + 12$.

Заметим также, что ниже при упрощенной схеме [68] приведения бесконечных систем уравнений в моментах к конечным для любого приближенного решения соответствующей системы уравнений во многих теоретически возможных случаях найдено корректирующее слагаемое, обеспечивающее выполнение граничных условий любого содержания на лицевых поверхностях.

3.5 О граничных и начальных условиях

Получены граничные условия кинематического и физического содержания в моментах. Для любых приближенных решений построены корректирующие слагаемые, обеспечивающие выполнение граничных условий любого содержания на лицевых поверхностях.

3.5.1 Граничные условия на лицевых поверхностях. Определение нормирующих функций кинематического и теплового содержания

Сперва рассмотрим³ граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях и представим их при новой параметризации области тонкого тела.

³С целью возможности набора заголовка сделаны переобозначения $\mathbf{u}^{(+)' } = \overset{(+)}{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}^{(-)' } = \overset{(-)}{\mathbf{u}}$, $\varphi^{(+)' } = \overset{(+)}{\varphi}$, $\varphi^{(-)' } = \overset{(-)}{\varphi}$, $T^{(+)' } = \overset{(+)}{T}$. При необходимости аналогичные переобозначения применяются и в дальнейшем.

Пусть $\overset{(+)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{P}}$ — заданные векторы напряжений на лицевых поверхностях $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно. Обозначим через $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ орты внешних нормалей к $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно. Тогда в силу последних двух формул (1.3.19) для $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$ и $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ при новой параметризации будем иметь выражения

$$\overset{(-)}{\mathbf{n}} = -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\mathbf{r}^{\bar{3}}, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}} = (1/\sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}})\mathbf{r}^{\dagger\dagger\dagger} = (1/\sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}})(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{P}\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}}). \quad (3.5.1)$$

Здесь в силу (1.1.19), первого соотношения (1.3.18), вторых соотношений первой и третьей строк (1.3.20) имеем

$$\overset{(\mp)}{\vartheta} = \sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}g^{\bar{3}\bar{3}}} = \overset{(\pm)}{\vartheta}^{-1} = \det(g^{\bar{J}}_{\bar{I}}), \quad A^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{M}} = A^{\bar{K}}_{\bar{M}} \Big|_{x^3=1} = \epsilon^{KL}\epsilon_{MNP}g^{\bar{N}}_{\bar{L}},$$

$$g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{M}} = g^{\bar{K}}_{\bar{M}} \Big|_{x^3=1} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1}A^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{M}}, \quad g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{M}} = -\overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1}g^{\bar{3}}_{\bar{K}}A^{\bar{K}}_{\bar{M}}, \quad g^{\dagger\dagger\dagger} = g^{\bar{3}}_{\bar{m}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{n}}g^{\bar{m}\bar{n}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g^{\bar{3}}_{\bar{M}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{N}}g^{\bar{M}\bar{N}}.$$

С помощью (3.5.1) граничные условия на лицевых поверхностях тонкого тела можно представить в виде

$$\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} = -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} = -(1/\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}})\overset{(-)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}} = \overset{(-)}{\mathbf{P}},$$

$$\overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} = (1/\sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}})\mathbf{r}^{\dagger\dagger\dagger} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} = (1/\sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}})(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{P}\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} = \overset{(+)}{\mathbf{P}}.$$

Отсюда, следовательно, получаем

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} = \overset{(-)}{\mathbf{P}}^{\bar{3}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(-)}{\mathbf{P}}, \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{P}\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} = \overset{(+)}{\mathbf{P}}^{\dagger\dagger\dagger} = \sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}} \overset{(+)}{\mathbf{P}}, \quad (3.5.2)$$

где

$$\overset{(-)}{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \Big|_{x^3=0}, \quad \overset{(+)}{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \Big|_{x^3=1}. \quad (3.5.3)$$

Соотношения (3.5.2) — граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях классической теории упругости при новой параметризации области тонкого тела.

Рассмотрим теперь аналогичные граничные условия микрополярной теории упругости. В этой связи обозначим через $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}$ и $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}$ заданные векторы моментных напряжений на лицевых поверхностях $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно. Тогда аналогично (3.5.2) будем иметь

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}, \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{P}\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}} \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}. \quad (3.5.4)$$

Здесь аналогично (3.5.3)

$$\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \Big|_{x^3=0}, \quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \Big|_{x^3=1}. \quad (3.5.5)$$

Соотношения (3.5.2) и (3.5.4) — граничные условия физического содержания микрополярной теории упругости на лицевых поверхностях при новой параметризации области тонкого тела.

При неизотермических процессах на лицевых поверхностях $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно могут быть заданы нормальные составляющие $\overset{(+)}{q}$ и $\overset{(-)}{q}$ вектора потока тепла \mathbf{q} . Тогда граничные условия (граничные условия второго рода или условия типа Неймана) на лицевых поверхностях представляются в форме [336]

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{q}} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(-)}{q}, \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}g^{\dagger\dagger\dagger}_{\bar{P}\bar{M}}\mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{q}} = \sqrt{g^{\dagger\dagger\dagger}} \overset{(+)}{q}, \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad (3.5.6)$$

где

$$\mathbf{q}^{(-)} = \mathbf{q} \Big|_{x^3=0}, \quad \mathbf{q}^{(+)} = \mathbf{q} \Big|_{x^3=1}. \quad (3.5.7)$$

Если заданы граничные условия, соответствующие теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона (граничные условия третьего рода) [336]. В этом случае граничные условия на \bar{S} и \bar{S} будут иметь вид соответственно

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \beta^{(-)} (T_c^{(-)} - T^{(-)}), \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ g^{\bar{P}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}^{(+)} = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \beta^{(+)} (T_c^{(+)} - T^{(+)}), \quad (3.5.8)$$

где T_c — заданная температура окружающей среды, β — коэффициент теплоотдачи,

$$\beta^{(-)} = \beta \Big|_{x^3=0}, \quad \beta^{(+)} = \beta \Big|_{x^3=1}, \quad T^{(-)} = T \Big|_{x^3=0}, \quad T^{(+)} = T \Big|_{x^3=1}, \quad T_c^{(-)} = T_c \Big|_{x^3=0}, \quad T_c^{(+)} = T_c \Big|_{x^3=1}. \quad (3.5.9)$$

Итак, при неизотермических процессах граничные условия физического содержания микрополярной теории упругости на лицевых поверхностях задаются соотношениями (3.5.2) и (3.5.4), а теплового содержания или соотношениями (3.5.6), или соотношениями (3.5.8).

Получим теперь уравнения [273] для определения нормирующих векторов-функций кинематического содержания $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(+)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(-)}$, а также нормирующих функций теплового содержания T'^{+} , T'^{-} . Из (3.4.3), (3.4.6), (3.4.13), (3.4.19) и (3.4.21), (3.4.24) видно, что формы представлений ОС физического и теплового содержаний во всех рассмотренных выше случаях одинаковы. Различие состоит только в обозначениях. При этом способы определения функций $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$ и $\boldsymbol{\varphi}'^{(+)}$, $\boldsymbol{\varphi}'^{(-)}$, а также T'^{+} , T'^{-} одинаковы и аналогичны способу нахождения подобных функций, рассмотренному в [68]. Поэтому ниже получим системы уравнений для определения этих функций при ОС физического и теплового содержаний нулевого приближения в моментах для однородного материала. В остальных случаях как для однородного, так и для неоднородного материала искомые функции определяются аналогично.

3.5.1.1 Определение нормирующих векторов-функций кинематического содержания для ОС физического содержания нулевого приближения

Пусть тензоры напряжений и моментных напряжений представляются соответственно приближенными формулами

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3). \quad (3.5.10)$$

Заметим, что индексы у тензоров в (3.5.10) выбраны в соответствии с рассматриваемым случаем.

Граничные условия (3.5.2) и (3.5.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)} &= -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{P}_{(0)}^{(-)}, & (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ g^{\bar{P}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)} &= \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \mathbf{P}_{(0)}^{(+)}, \\ \mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(-)} &= -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \boldsymbol{\mu}_{(0)}^{(-)}, & (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ g^{\bar{P}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(+)} &= \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \boldsymbol{\mu}_{(0)}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Учитывая значения на концах сегмента $[0, 1]$ ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода (2.5.20), из (3.5.10) получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)} &= \underline{\mathbf{P}}_{(0)} \Big|_{x^3=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)}, & \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)} &= \underline{\mathbf{P}}_{(0)} \Big|_{x^3=1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(-)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)} \Big|_{x^3=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)}, & \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(+)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)} \Big|_{x^3=1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.4.3) при $\underline{\mathbf{A}} = 0$ и $\underline{\mathbf{B}} = 0$ (материал обладает центром симметрии) имеем

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}^{(-)}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{P}}^{(k)}_{(0,N)} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \\
 &+ \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime}, \\
 \underline{\mathbf{P}}^{(+)}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{P}}^{(k)}_{(0,N)} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime}, \\
 \underline{\mathbf{\mu}}^{(-)}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{\mu}}^{(k)}_{(0,N)} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{\varphi}}^{(+)\prime} + \\
 &+ \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{\varphi}}^{(-)\prime}, \\
 \underline{\mathbf{\mu}}^{(+)}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{\mu}}^{(k)}_{(0,N)} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{\varphi}}^{(+)\prime} + \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} \right] \cdot \underline{\mathbf{\varphi}}^{(-)\prime}.
 \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Нетрудно заметить, что в силу (3.4.5) имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} &= 2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} &= 2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^{2k+1} (k+1)^2 = -2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} &= 2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} &= 2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^{k+1} (k+1)^2 = -2 \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} &= 2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} &= 2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^{2k+1} (k+1)^2 = -2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(0,k)} &= 2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (k+1)^2, \\
 \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot}_{(k)} &= 2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^{k+1} (k+1)^2 = -2 \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{E}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1)^2.
 \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Вводя обозначения

$$a_{(N)} = 2 \sum_{k=0}^N (k+1)^2 = \frac{1}{3} (N+1)(N+2)(2N+3), \quad b_{(N)} = 2 \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1)^2 \tag{3.5.14}$$

и учитывая (3.5.13), из (3.5.12) найдем

$$\begin{aligned}
 b_{(N)} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} - a_{(N)} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underline{\mathbf{P}}^{(-)}(0) - \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{P}}^{(k)}_{(0,N)}, \\
 a_{(N)} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{u}}^{(+)\prime} - b_{(N)} \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{u}}^{(-)\prime} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underline{\mathbf{P}}^{(+)}(0) - \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{P}}^{(k)}_{(0,N)}, \\
 b_{(N)} \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{\varphi}}^{(+)\prime} - a_{(N)} \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{\varphi}}^{(-)\prime} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underline{\mathbf{\mu}}^{(-)}(0) - \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \underline{\mathbf{\mu}}^{(k)}_{(0,N)}, \\
 a_{(N)} \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_+ \mathbf{r}^{\bar{M}}) \underline{\mathbf{\varphi}}^{(+)\prime} - b_{(N)} \underline{\mathbf{D}}^{\otimes 2} \mathbf{r}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{\varphi}}^{(-)\prime} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underline{\mathbf{\mu}}^{(+)}(0) - \sum_{k=0}^N (k+1) \underline{\mathbf{\mu}}^{(k)}_{(0,N)}.
 \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Умножая первое и третье соотношения (3.5.15) слева на $\mathbf{r}^{\bar{3}}$ скалярно, а второе и четвертое на $\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{K}}$ и учитывая (3.5.11), придем к искомым уравнениям:

$$\begin{aligned} \overset{(+)}{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' &= \mathbf{A}_{(0,N)}, & \overset{(+)}{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' &= \mathbf{A}_{(0,N)}, \\ \overset{(+)}{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}' + \overset{(-)}{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}' &= \mathbf{B}_{(0,N)}, & \overset{(+)}{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}' + \overset{(-)}{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}' &= \mathbf{B}_{(0,N)}, \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(+)}{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)} &= b_{(N)} \left(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right), & \overset{(-)}{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)} &= -a_{(N)} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}, \\ \overset{(+)}{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)} &= a_{(N)} \left[\left(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right) - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \left(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{M}\cdot} \right) \right], \\ \overset{(-)}{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)} &= -b_{(N)} \left(\underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{C}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} \right), & \underline{\mathbf{C}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot} &= \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \underline{\mathbf{C}}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{n}} \underline{\mathbf{E}}, \\ \overset{(+)}{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)} &= b_{(N)} \left(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right), & \overset{(-)}{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)} &= -a_{(N)} \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}, \\ \overset{(+)}{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)} &= a_{(N)} \left[\left(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right) - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \left(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{D}}^{\bar{K}\cdot\bar{M}\cdot} \right) \right], \\ \overset{(-)}{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)} &= -b_{(N)} \left(\underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \underline{\mathbf{D}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} \right), & \underline{\mathbf{D}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot} &= \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{n}} \underline{\mathbf{E}}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{A}}_{(0,N)} &= - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(-)}{\mathbf{P}} + \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \overset{(k)-}{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\bar{3}\cdot} \right], \\ \overset{(+)}{\mathbf{A}}_{(0,N)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(+)}{\mathbf{P}} - \sum_{k=0}^N (k+1) \left(\overset{(k)-}{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \overset{(k)-}{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\bar{K}\cdot} \right), \\ \overset{(-)}{\mathbf{B}}_{(0,N)} &= - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} + \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \overset{(k)-}{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{\bar{3}\cdot} \right], \\ \overset{(+)}{\mathbf{B}}_{(0,N)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} - \sum_{k=0}^N (k+1) \left(\overset{(k)-}{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\bar{3}} \overset{(k)-}{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{\bar{K}\cdot} \right), \\ \overset{(k)-}{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\bar{m}\cdot} &= \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \overset{(k)-}{\underline{\mathbf{P}}}_{(0,N)}, & \overset{(k)-}{\boldsymbol{\mu}}_{(0,N)}^{\bar{m}\cdot} &= \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \overset{(k)-}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(0,N)}, & (g_{\bar{K}}^{\bar{3}} &\approx g_{\bar{K}}^{\bar{3}}). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Первые два соотношения (3.5.16) представляют собой алгебраическую систему из шести уравнений относительно шести неизвестных $\overset{(+)}{\mathbf{u}}'$ и $\overset{(-)}{\mathbf{u}}'$ (двух векторов). Разрешая эту систему, получим векторы $\overset{(+)}{\mathbf{u}}'$ и $\overset{(-)}{\mathbf{u}}'$, выраженные при помощи моментов $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$. Если учтем полученные выражения для $\overset{(+)}{\mathbf{u}}'$ и $\overset{(-)}{\mathbf{u}}'$ в первом соотношении (3.4.3) при $\underline{\mathbf{A}} = 0$ и $\underline{\mathbf{B}} = 0$, найдем определяющие соотношения в моментах, связывающие между собой $\overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}$ и $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$. При этом они представляют линейные формы относительно $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$. Подставляя выражение для $\overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}$ в первое соотношение (3.5.10), получим приближенное выражение тензора напряжений, удовлетворяющее граничным условиям на лицевых поверхностях для любых векторных полей $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varphi}}$, $m = \overline{0, N}$, и скалярных полей $\overset{(m)}{\vartheta}$, $m = \overline{0, N}$, являющихся моментами искомых векторных полей \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varphi}$ и скалярного поля ϑ . Следуя Векуа И.Н., выражение для $\overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}$, согласованное с краевыми условиями на лицевых поверхностях, назовем нормированным моментом k -го порядка поля тензора напряжений нулевого приближения (аналогично определяется нормированный момент k -го порядка поля тензора напряжений любого

приближения). Аналогично третье и четвертое соотношения (3.4.8) представляют систему из шести уравнений относительно шести неизвестных $\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$ (двух векторов). Решив эту систему, найдем выражения для векторов $\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$ через моменты $\overset{(m)}{\varphi}$, $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$. Учитывая полученные выражения для $\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$, из второго соотношения (3.4.3) при $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ и $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$ получим определяющие соотношения в моментах, связывающие между собой $\overset{(k)}{\underline{\underline{\mu}}}_{(0)}$ и $\overset{(m)}{\varphi}$, $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$, и представляющие линейные формы относительно $\overset{(m)}{\varphi}$, $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$. Подставляя выражение для $\overset{(m)}{\underline{\underline{\mu}}}_{(0)}$ во второе соотношение (3.5.10), найдем приближенное выражение тензора моментных напряжений, обеспечивающее выполнение граничных условий на лицевых поверхностях для любых векторных полей $\overset{(m)}{\varphi}$, $m = \overline{0, N}$, являющиеся моментами искомого векторного поля φ . Следуя Векуа И.Н., выражение для $\overset{(m)}{\underline{\underline{\mu}}}_{(0)}$, согласованное с краевыми условиями на лицевых поверхностях, назовем нормированным моментом k -го порядка поля тензора моментных напряжений нулевого приближения (аналогично определяется нормированный момент k -го порядка поля тензора моментных напряжений любого приближения).

Если бы использовали ОС (3.4.3) при $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$ и $\underline{\underline{\mathbf{B}}} \neq 0$, то получили следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{C}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' + \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\varphi}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\varphi}' &= \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{(0,N)}}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{C}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' + \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\varphi}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\varphi}' &= \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{(0,N)}}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' + \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\varphi}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}'_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\varphi}' &= \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{(0,N)}}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}' + \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(+)}{\varphi}' + \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}''_{(0,N)}} \cdot \overset{(-)}{\varphi}' &= \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{(0,N)}}, \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

где помимо (3.5.17) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{(0,N)}} &= b_{(N)} \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right), \quad \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}'_{(0,N)}} = -a_{(N)} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}''_{(0,N)}} &= a_{(N)} \left[\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right) - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\dagger} \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{K}\cdot\bar{M}\cdot} \right) \right], \\ \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{A}}}''_{(0,N)}} &= -b_{(N)} \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\dagger} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} \right), \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot} = \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{n}} \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}'_{(0,N)}} &= b_{(N)} \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right), \quad \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}'_{(0,N)}} = -a_{(N)} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}, \\ \overset{(+)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}''_{(0,N)}} &= a_{(N)} \left[\left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot} \right) - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\dagger} \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{M}}^{\bar{3}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{K}\cdot\bar{M}\cdot} \right) \right], \\ \overset{(-)}{\underline{\underline{\mathbf{B}}}''_{(0,N)}} &= -b_{(N)} \left(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{K}}^{\dagger} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{K}\cdot\bar{3}\cdot} \right), \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{m}\cdot\bar{n}\cdot} = \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{r}^{\bar{n}} \underline{\underline{\mathbf{E}}}. \end{aligned}$$

Соотношения (3.5.18) представляют собой алгебраическую систему из двенадцати уравнений относительно двенадцати неизвестных $\overset{(+)}{\mathbf{u}}'$, $\overset{(-)}{\mathbf{u}}'$, $\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$ (четырёх векторов). Разрешая эту систему, получим векторы $\overset{(+)}{\mathbf{u}}'$, $\overset{(-)}{\mathbf{u}}'$, $\overset{(+)}{\varphi}'$ и $\overset{(-)}{\varphi}'$, выраженные при помощи моментов $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\varphi}$ и $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, ϑ ; $m = \overline{0, N}$. Если учесть полученные выражения для искомым векторов в (3.4.3), найдем ОС (систему законов Гука) в моментах нулевого приближения. При этом $\overset{(k)}{\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}$ и $\overset{(k)}{\underline{\underline{\mu}}}_{(0)}$ представляют линейные формы относительно $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\partial_I \overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\varphi}$ и $\partial_I \overset{(m)}{\varphi}$, ϑ , $m = \overline{0, N}$. Подставляя $\overset{(k)}{\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}$ и $\overset{(k)}{\underline{\underline{\mu}}}_{(0)}$ в (3.5.10), получим приближенные выражения для тензоров напряжений и моментных напряжений, удовлетворяющие граничным условиям на лицевых поверхностях для любых векторных полей $\overset{(m)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(m)}{\varphi}$ и скалярных полей ϑ ; $m = \overline{0, N}$, являющихся моментами искомым векторных полей \mathbf{u} , φ и скалярного поля ϑ .

Следуя И.Н.Векуа, выражения для $\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)}$, согласованные с краевыми условиями на лицевых поверхностях, назовем нормированными моментами k -го порядка полей тензоров напряжений и моментных напряжений нулевого приближения (аналогично определяются нормированные моменты k -го порядка полей тензоров напряжений и моментных напряжений любого приближения).

3.5.1.2 Определение нормирующих функций для ОС теплового содержания нулевого приближения

Пусть вектор притока тепла задается приближенной формулой

$$\mathbf{q}_{(0)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \mathbf{q}_{(0)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3). \quad (3.5.19)$$

Сперва рассмотрим граничные условия второго рода (типа Неймана) (3.5.6). Представим их аналогично (3.5.11) в форме

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}_{(0)}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \bar{q}, \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} g_{-}^{\dagger} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}_{(0)}^{(+)} = \sqrt{g^{\dagger\dagger}} \bar{q}. \quad (3.5.20)$$

На основании значений ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода (2.5.20) на концах сегмента $[0, 1]$ из (3.4.10) находим

$$\mathbf{q}_{(0)}^{(-)} = \mathbf{q}_{(0)} \Big|_{x^3=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \mathbf{q}_{(0)}^{(k)}, \quad \mathbf{q}_{(0)}^{(+)} = \mathbf{q}_{(0)} \Big|_{x^3=1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \mathbf{q}_{(0)}^{(k)}. \quad (3.5.21)$$

Учитывая (3.4.21), (3.4.22), последние два соотношения (3.4.23) и (3.5.14), из (3.5.21) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{(0)}^{(-)} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \mathbf{q}_{(0,N)}^{(k)} - b_{(N)} \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) T' + a_{(N)} \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{3}} T', \\ \mathbf{q}_{(0)}^{(+)} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^N (k+1) \mathbf{q}_{(0,N)}^{(k)} - a_{(N)} \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) T' + b_{(N)} \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{3}} T'. \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Умножая первое соотношение (3.5.22) на $\mathbf{r}^{\bar{3}}$ скалярно, а второе на $\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} g_{-}^{\dagger} \mathbf{r}^{\bar{K}}$, в силу (3.5.20) будем иметь

$$\Lambda'_{(0,N)}^{(+)} T' + \Lambda'_{(0,N)}^{(-)} T' = \bar{Q}_{(0,N)}^{(-)}, \quad \Lambda''_{(0,N)}^{(+)} T' + \Lambda''_{(0,N)}^{(-)} T' = \bar{Q}_{(0,N)}^{(+)}, \quad (3.5.23)$$

где аналогично (3.5.17) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda'_{(0,N)}^{(+)} &= -b_{(N)} \left(\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} \Lambda^{\bar{3}\bar{M}} \right), \quad \Lambda'_{(0,N)}^{(-)} = a_{(N)} \Lambda^{\bar{3}\bar{3}}, \\ \Lambda''_{(0,N)}^{(+)} &= -a_{(N)} \left[\left(\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} \Lambda^{\bar{3}\bar{M}} \right) - g_{+}^{\bar{3}} g_{-}^{\dagger} \left(\Lambda^{\bar{K}\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} \Lambda^{\bar{K}\bar{M}} \right) \right], \\ \Lambda''_{(0,N)}^{(-)} &= b_{(N)} \left(\Lambda^{\bar{3}\bar{3}} - g_{+}^{\bar{3}} g_{-}^{\dagger} \Lambda^{\bar{K}\bar{3}} \right), \quad \Lambda^{\bar{m}\bar{n}} = \mathbf{r}^{\bar{m}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{n}}, \\ \bar{Q}_{(0,N)}^{(-)} &= - \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \bar{q} + \sum_{k=0}^N (-1)^k (k+1) \bar{q}_{(0,N)}^{(k)} \right], \\ \bar{Q}_{(0,N)}^{(+)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{g^{\dagger\dagger}} \bar{q} - \sum_{k=0}^N (k+1) \left(\bar{q}_{(0,N)}^{(k)} - g_{+}^{\bar{3}} g_{-}^{\dagger} \bar{q}_{(0,N)}^{(k)} \right), \quad \mathbf{q}_{(0,N)}^{\bar{m}} = \mathbf{q}_{(0,N)} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}}. \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Соотношения (3.5.23) представляют собой систему из двух уравнений относительно двух неизвестных $T'^{(+)}$ и $T'^{(-)}$. Решая эту систему, получим функции $T'^{(+)}$ и $T'^{(-)}$, выраженные

через моменты T , $\partial_I T$, $m = \overline{0, N}$. Подставляя полученные выражения для T' и T' в (3.4.21), найдем соотношения в моментах, связывающие между собой $\mathbf{q}_{(0)}$ и T , $\partial_I T$, $m = \overline{0, N}$. Они являются линейными формами относительно T , $\partial_I T$, $m = \overline{0, N}$. Учитывая выражение для $\mathbf{q}_{(0)}$ в (3.5.19), получим приближенное выражение для вектора потока тепла, удовлетворяющее граничным условиям второго рода на лицевых поверхностях для любых скалярных полей T , $m = \overline{0, N}$, являющихся моментами искомого скалярного поля $T(x', x^3)$. Следуя Векуа И.Н., выражение для $\mathbf{q}_{(0)}$, согласованное с краевыми условиями на лицевых поверхностях, назовем нормированным моментом k -го порядка поля вектора потока тепла нулевого приближения (аналогично определяется нормированный момент k -го порядка поля вектора потока тепла любого приближения).

Теперь рассмотрим граничные условия третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона). В этом случае нет необходимости останавливаться на подробном выводе системы уравнений относительно функций T' и T' .

В самом деле, представляя граничные условия (3.5.8) аналогично (3.5.20) в виде

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}_{(0)}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \beta^{(-)} (T - T_c), \quad (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{M}}^{\dagger} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}_{(0)}^{(+)} = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \beta^{(+)} (T - T_c),$$

нетрудно заметить, что и в рассматриваемом случае для определения T' и T' будем иметь уравнения (3.5.23), правые части которых получаются из шестой и седьмой соотношений (3.5.24), если в них $q^{(-)}$ и $q^{(+)}$ заменить на $\beta^{(-)} (T - T_c)$ и $\beta^{(+)} (T - T_c)$ соответственно. С целью сокращения письма их выписывать не будем.

3.5.2 Граничные условия в моментах в теории тонких тел

Для корректной постановки задач в теории тонких тел к любой системе уравнений, согласованной или несогласованной (при упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной) с граничными условиями на лицевых поверхностях, следует присоединить граничные условия на контуре $\partial S^{(-)}$ основной базовой поверхности $S^{(-)}$.

На боковой грани Σ могут быть заданы условия кинематического содержания (векторы перемещения и вращения) или физического содержания (векторы напряжения и моментного напряжения), или на одной ее части Σ_1 могут быть заданы условия кинематического содержания, а на другой части Σ_2 — физического содержания; $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. При неизотермических процессах на некоторой части боковой грани еще задаются граничные условия теплового содержания первого рода (типа Дирихле) или второго рода (типа Неймана), или же третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона). При этом на одной части боковой грани можно задать один тип из этих условий, на другой — другой, а на третьей — третий.

Ниже рассмотрены граничные условия кинематического, физического и теплового содержания на боковой грани тонкого тела и в силу них получены соответствующие граничные условия в моментах на граничном контуре основной базовой поверхности.

В дальнейшем предполагаем, что боковая грань Σ состоит из линейчатых поверхностей и фиксировано некоторое неотрицательное целое число N . Задание числа N означает, что из каждой бесконечной системы уравнений рассматривается только совокупность первых $N + 1$ уравнений. Тогда, очевидно, неизвестными будут моменты \mathbf{P} , $\underline{\mu}$, \mathbf{u} , $\underline{\varphi}$, T , $m = \overline{0, N}$, и, например, для микрополярной теории тонких тел при неизотермических процессах задача будет корректно поставлена, если на граничном контуре $\partial S^{(-)}$ базовой

поверхности $\overset{(-)}{S}$ заданы $2N + 2$ векторных граничных условий кинематического содержания, а на его части $\overset{(-)}{\partial S}_q \subseteq \overset{(-)}{\partial S}$ $N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае первой краевой задачи), или на $\overset{(-)}{\partial S}$ заданы $2N + 2$ векторных граничных условий физического содержания, а на $\overset{(-)}{\partial S}_q \subseteq \overset{(-)}{\partial S}$ $N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае второй краевой задачи), или на одной его части $\overset{(-)}{\partial S}_1$ могут быть заданы $2N + 2$ векторных граничных условий кинематического содержания, на остальной части $\overset{(-)}{\partial S}_2$ ($\overset{(-)}{\partial S}_1 \cup \overset{(-)}{\partial S}_2 = \overset{(-)}{\partial S}$, $\overset{(-)}{\partial S}_1 \cap \overset{(-)}{\partial S}_2 = \emptyset$) — $2N + 2$ векторных граничных условий физического содержания, а на $\overset{(-)}{\partial S}_q \subseteq \overset{(-)}{\partial S}$ $N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае смешанной краевой задачи). Заметим, что в случае динамических задач к граничным условиям следует присоединять начальные условия в моментах, о которых речь пойдет ниже.

3.5.2.1 Кинематические граничные условия в моментах

Пусть на боковой грани Σ заданы векторы перемещения \mathbf{u} и вращения $\boldsymbol{\varphi}$, т.е.

$$\mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{f}(x', x^3, t), \quad \boldsymbol{\varphi}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{g}(x', x^3, t).$$

Тогда кинематические граничные условия в моментах относительно системы ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода представляются в виде

$$\overset{(k)}{\mathbf{u}}(x', t) = \overset{(k)}{\mathbf{f}}(x', t), \quad \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}(x', t) = \overset{(k)}{\mathbf{g}}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \overset{(-)}{\partial S}. \quad (3.5.25)$$

Здесь $\overset{(k)}{\mathbf{f}}(x', t)$ и $\overset{(k)}{\mathbf{g}}(x', t)$, $k = \overline{0, N}$ — известные векторные поля на $\overset{(-)}{\partial S}$ как моменты известных векторных полей $\mathbf{f}(x', x^3, t)$ и $\mathbf{g}(x', x^3, t)$ соответственно.

3.5.2.2 Граничные условия физического содержания в моментах

Прежде чем получить эти условия, выведем некоторые геометрические соотношения на боковой грани при новой параметризации области тонкого тела. В этой связи, полагая, что $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$, введем следующие обозначения: $\overset{(-)}{\partial S}$, $\overset{(-)}{\partial S}$ и $\overset{(+)}{\partial S}$ — граничные контуры поверхностей $\overset{(-)}{S}$, $\overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{S}$ соответственно; $\overset{(\sim)}{\mathbf{m}}$, $\overset{(\sim)}{\mathbf{s}}$ и $\overset{(\sim)}{\mathbf{l}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, — единичный вектор нормали к боковой грани, единичный вектор касательной к контуру $\overset{(\sim)}{\partial S}$ и единичный вектор тангенциальной нормали к контуру $\overset{(\sim)}{\partial S}$ в точке M , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$; $d\Sigma$ — элементарная площадка одной вершиной в точке M с координатами (x^1, x^2, x^3) и со сторонами $d\mathbf{r} = ds\mathbf{s} = \mathbf{r}_I dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $d\Sigma^{(+)}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке M с координатами $(x^1, x^2, 1)$ и со сторонами $d\mathbf{r}^{(+)} = \mathbf{r}_I^{(+)} dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $d\Sigma^{(-)}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке M с координатами $(x^1, x^2, 0)$ и со сторонами $d\mathbf{r}^{(-)} = \mathbf{r}_I^{(-)} dx^I$ и $\mathbf{h}dx^3 = \mathbf{r}_3 dx^3$; $\overset{(-)}{\mathbf{n}} = |\mathbf{h}|^{-1} \mathbf{h}$ — единичный вектор нормали к поверхности $\overset{(-)}{S}$ в точке M (см. рис. 3.1). Заметим, что в точке M единичный вектор нормали к боковой грани и единичный вектор тангенциальной нормали к контуру $\overset{(-)}{\partial S}$ совпадают, а в точках M и $\overset{(+)}{M}$ в общем случае они не совпадают.

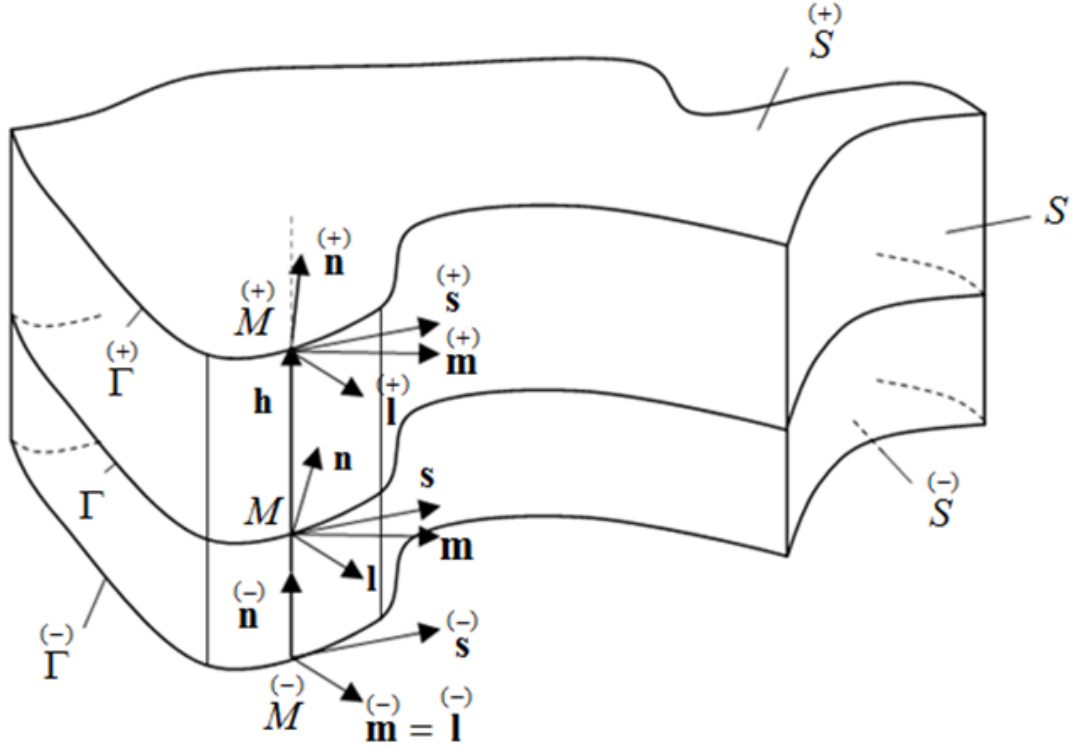


Рис. 3.1: Боковая грань при новой параметризации

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}
 d\Sigma &= d\Sigma \mathbf{m} = d\mathbf{s} \mathbf{s} \times \mathbf{h} dx^3 = \sqrt{g} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3 = \sqrt{g^{(-)}} g_I^{\bar{K}} \epsilon_{IK} \mathbf{r}^{\bar{I}} dx^J dx^3, \\
 d\Sigma^{(+)} &= d\Sigma^{(+)(+)} = d\mathbf{s}^{(+)} \mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h} dx^3 = \sqrt{g^{(+)}} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^{\dagger I} dx^J dx^3 = \sqrt{g^{(-)}} g_{\dagger J}^{\bar{K}} \epsilon_{IK} \mathbf{r}^{\bar{I}} dx^J dx^3, \\
 d\Sigma^{(-)} &= d\Sigma^{(-)(-)} = d\mathbf{s}^{(-)} \mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h} dx^3 = \sqrt{g^{(-)}} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^{\bar{I}} dx^J dx^3,
 \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

где последние два соотношения (3.5.26) получаются аналогично. Их, конечно, можно еще получить из первого соотношения (3.5.26) при $x^3 = 1$ и $x^3 = 0$ соответственно.

Далее, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
 ds|\mathbf{s} \times \mathbf{h}| &= |d\mathbf{r} \times \mathbf{h}| = \sqrt{g} \sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J} = \sqrt{g^{(-)}} \sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J} = \\
 &= \sqrt{g^{(+)}} \sqrt{g^{\dagger M\dagger N} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\dagger K} g_J^{\dagger L} dx^I dx^J}, \\
 d\mathbf{s}^{(+)}|\mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}| &= |d\mathbf{r} \times \mathbf{h}| = \sqrt{g^{(+)}} \sqrt{g^{\dagger K\dagger L} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J} = \sqrt{g^{(-)}} \sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_{\dagger I}^{\bar{K}} g_{\dagger J}^{\bar{L}} dx^I dx^J}, \\
 d\mathbf{s}^{(-)}|\mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}| &= \sqrt{g^{(-)}} \sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J} = \sqrt{g^{(+)}} \sqrt{g^{\dagger M\dagger N} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_{\dagger I}^{\dagger K} g_{\dagger J}^{\dagger L} dx^I dx^J}.
 \end{aligned} \tag{3.5.27}$$

Теперь в силу первых и третьих соотношений (3.5.26) и (3.5.27) получаем

$$\begin{aligned}
 d\Sigma &= \frac{(-)}{\vartheta} \frac{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} d\Sigma^{(-)} = \frac{\sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} A_M^K A_N^L \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} d\Sigma^{(-)} = \\
 &= \frac{\sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} d\Sigma^{(-)}.
 \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Выпишем выражения длин элементов дуг на поверхностях S , $S^{(+)}$, $S^{(-)}$. Имеем

$$ds = \sqrt{g_{IJ}dx^I dx^J} = \sqrt{(g_{KL}^- g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} + g_{33}^- g_I^{\bar{3}} g_J^{\bar{3}})} dx^I dx^J, \quad (3.5.29)$$

$$d^{\dagger} s = \sqrt{g_{\dagger\dagger} dx^I dx^J} = \sqrt{(g_{KL}^- g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} + g_{33}^- g_I^{\bar{3}} g_J^{\bar{3}})} dx^I dx^J, \quad d^{\dagger} s = \sqrt{g_{IJ}^-} dx^I dx^J.$$

Далее заметим, что

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (1 - x^3) \frac{d^{\dagger} s}{ds} \mathbf{s}^{(-)} + x^3 \frac{d^{\dagger} s}{ds} \mathbf{s}^{(+)}. \quad (3.5.30)$$

В силу (3.5.29) соотношению (3.5.30) можно придать нужный вид. Однако с целью сокращения письма этого делать не будем.

Теперь заметим, что единичные векторы нормалей к боковой грани в точках M , $M^{(-)}$ и $M^{(+)}$ представляются соотношениями

$$\mathbf{m}^{(-)} = \frac{\mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}|} = \frac{d^{\dagger} s \mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}}{d^{\dagger} s |\mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{s} \times \mathbf{h}|} = \frac{ds \mathbf{s} \times \mathbf{h}}{ds |\mathbf{s} \times \mathbf{h}|}, \quad \mathbf{m}^{(+)} = \frac{\mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}|} = \frac{d^{\dagger} s \mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}}{d^{\dagger} s |\mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}|}. \quad (3.5.31)$$

На основании (3.5.30) и первого и третьего соотношений (3.5.31) из второго соотношения (3.5.31) находим

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{s} \times \mathbf{h}|} = (1 - x^3) \frac{d^{\dagger} s |\mathbf{s}^{(-)} \times \mathbf{h}|}{ds |\mathbf{s} \times \mathbf{h}|} \mathbf{m}^{(-)} + x^3 \frac{d^{\dagger} s |\mathbf{s}^{(+)} \times \mathbf{h}|}{ds |\mathbf{s} \times \mathbf{h}|} \mathbf{m}^{(+)}.$$

Отсюда с помощью (3.5.27) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (1 - x^3) \vartheta^{-1} \frac{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} \mathbf{m}^{(-)} + x^3 \vartheta^{-1} \frac{\sqrt{g^{\dagger\dagger} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} \mathbf{m}^{(+)} = \\ &= (1 - x^3) \frac{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J}} \mathbf{m}^{(-)} + x^3 \frac{\sqrt{g^{\dagger\dagger} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\dagger\dagger} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\dagger K} g_J^{\dagger L} dx^I dx^J}} \mathbf{m}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Умножая первое, второе и третье соотношения (3.5.26) на \mathbf{r}_K , \mathbf{r}_K^{\dagger} и \mathbf{r}_K^{-} соответственно и в полученных соотношениях меняя индекс K на I , будем иметь

$$d\Sigma m_I = \vartheta \frac{d^{\dagger} s}{ds} d\Sigma m_I^{(+)} = \vartheta \frac{d^{\dagger} s}{ds} d\Sigma m_I^{(-)}. \quad (3.5.33)$$

Получим теперь некоторые соотношения в линиях кривизны. В этом случае для обозначения индексов используем строчные буквы греческого алфавита, которые принимают значения 1, 2. При этом по повторяющимся индексам суммирование не производится. Чтобы получить искомые соотношения, можно использовать соответствующие соотношения из (1.3.32), (1.3.34)–(1.3.36) и (1.3.38). Получить их не представляет большого труда. Поэтому на подробном выводе останавливаться не будем.

Вдоль линии кривизны (1) имеем $dx^1 \neq 0$, $dx^2 = 0$. Поэтому, например, из первого соотношения (3.5.27) получаем

$$ds_{(1)} |\mathbf{s}_{(1)} \times \mathbf{h}| = \sqrt{g g^{22}} dx^1 = \sqrt{g^{(-)} g^{\bar{2}\bar{2}}} g_1^{\bar{1}} dx^1 = \sqrt{g^{(+)} g^{\dagger\dagger}} g_1^{\dagger} dx^1.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} ds_{(\alpha)} |\mathbf{s}_{(\alpha)} \times \mathbf{h}| &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} g_{\alpha}^{\bar{\alpha}} dx^{\alpha}, \quad d^{\dagger} s_{(\alpha)} |\mathbf{s}_{(\alpha)} \times \mathbf{h}| = \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} g_{\alpha}^{\bar{\alpha}} dx^{\alpha}, \\ d^{\dagger} s_{(\alpha)} |\mathbf{s}_{(\alpha)} \times \mathbf{h}| &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} dx^{\alpha}. \end{aligned}$$

Учитывая последние соотношения из (3.5.26) находим

$$\begin{aligned} d\Sigma_{(\alpha)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} g_{\alpha}^{\bar{\alpha}} dx^{\alpha} dx^3, & d\Sigma_{(\alpha)}^{(+)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} g_{\alpha}^{\bar{\alpha}} dx^{\alpha} dx^3, \\ d\Sigma_{(\alpha)}^{(-)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- g_{33}^-} dx^{\alpha} dx^3. \end{aligned}$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$\frac{d\Sigma_{(\alpha)}}{g_{\alpha}^{\bar{\alpha}}} = \frac{d\Sigma_{(\alpha)}^{(+)}}{g_{\alpha}^{\bar{\alpha}}} = d\Sigma_{(\alpha)}^{(-)}. \quad (3.5.34)$$

Аналогично из (3.5.29) имеем

$$\begin{aligned} ds_{(\alpha)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^-} dx^{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- (g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^2 + g_{33}^- (g_{\alpha}^{\bar{3}})^2} dx^{(\alpha)}, \\ d\bar{s}_{(\alpha)}^{(+)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^+} dx^{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- (g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^2 + g_{33}^- (g_{\alpha}^{\bar{3}})^2} dx^{(\alpha)}, & d\bar{s}_{(\alpha)}^{(-)} &= \sqrt{g_{\alpha\alpha}^-} dx^{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

Вводя обозначения $a_{\alpha} = 1 - g_{\alpha}^{\bar{\alpha}}$, $b_{\alpha} = (\partial_{\alpha} h) / \sqrt{g_{\alpha\alpha}^-}$, первое соотношение (3.5.35) можно представить в виде

$$ds_{(\alpha)} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}^- \left[(a_{\alpha}^2 + b_{\alpha}^2) (x^3)^2 - 2a_{\alpha} x^3 + 1 \right]} dx^{\alpha}. \quad (3.5.36)$$

Нетрудно заметить, что в силу (3.5.36) и последних двух соотношений (3.5.35) получим

$$ds_{(\alpha)} = \sqrt{(a_{\alpha}^2 + b_{\alpha}^2) (x^3)^2 - 2a_{\alpha} x^3 + 1} d\bar{s}_{\alpha}^{(-)} = \frac{\sqrt{(a_{\alpha}^2 + b_{\alpha}^2) (x^3)^2 - 2a_{\alpha} x^3 + 1}}{(g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^2 + b_{\alpha}^2} d\bar{s}_{\alpha}^{(+)}. \quad (3.5.37)$$

Теперь вернемся к (3.5.32) и представим его в линиях кривизны. Нетрудно заметить, что вдоль первой линии кривизны имеем

$$\begin{aligned} g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J &= g^{\bar{2}\bar{2}} (dx^1)^2, & g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J &= g^{\bar{2}\bar{2}} (g_1^{\bar{1}} dx^1)^2, \\ g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J &= g^{\bar{2}\bar{2}} (dx^1)^2, & g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J &= g^{\bar{2}\bar{2}} (g_1^{\bar{1}} dx^1)^2. \end{aligned}$$

Учитывая последние соотношения, из (3.5.32) вдоль первой линии кривизны найдем

$$\mathbf{m}_{(1)} = (1 - x^3) (g_1^{\bar{1}})^{-1(-)} \mathbf{m}_{(1)} + x^3 (g_1^{\bar{1}})^{-1(+)} \mathbf{m}_{(1)}. \quad (3.5.38)$$

Легко усмотреть, что аналогичное соотношение вдоль второй линии кривизны получим из (3.5.38), заменяя индекс 1 на 2. Тогда для линий кривизны будем иметь соотношение

$$\mathbf{m}_{(\alpha)} = (1 - x^3) (g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^{-1(-)} \mathbf{m}_{(\alpha)} + x^3 (g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^{-1(+)} \mathbf{m}_{(\alpha)}. \quad (3.5.39)$$

Учитывая, что

$$(g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^{-1} = g_{\alpha}^{\alpha}, \quad (g_{\alpha}^{\bar{\alpha}})^{-1} = g_{\alpha}^{\alpha} = g_{\alpha}^{\alpha} g_{\alpha}^{\bar{\alpha}},$$

соотношение (3.5.39) можно еще представить в виде

$$\mathbf{m}_{(\alpha)} = g_{\alpha}^{\alpha} \left[(1 - x^3) \mathbf{m}_{(\alpha)}^{(-)} + x^3 g_{\alpha}^{\bar{\alpha}} \mathbf{m}_{(\alpha)}^{(+)} \right], \quad \langle \alpha = 1, 2 \rangle. \quad (3.5.40)$$

Теперь получим граничные условия физического содержания на боковой грани тонкого тела в моментах. Пусть на боковой грани Σ заданы векторы напряжения $\mathbf{P}(x', x^3, t)$ и моментного напряжения $\boldsymbol{\mu}(x', x^3, t)$. Тогда граничные условия в силу формул Коши на боковой грани представляются в виде

$$\mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{P}}(x', x^3, t) = \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad \mathbf{m} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}(x', x^3, t) = \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t) \quad \text{на } \Sigma.$$

Отсюда, следовательно, получаем

$$m_I \mathbf{P}^I = \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad m_I \boldsymbol{\mu}^I = \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t) \quad \text{на } \Sigma. \quad (3.5.41)$$

Умножая каждое соотношение из (3.5.41) на $d\Sigma$ и учитывая (3.5.33), найдем

$$\overset{(-)}{m}_I \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{P}^I = \mathbf{P} \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}}, \quad \overset{(-)}{m}_I \overset{(-)}{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^I = \boldsymbol{\mu} \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}} \quad \text{на } \Sigma. \quad (3.5.42)$$

Вводя обозначения

$$\underline{\mathbf{P}}^I = \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{P}^I, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}^I = \overset{(-)}{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^I, \quad b(x', x^3) = \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}}, \quad (3.5.43)$$

соотношения (3.5.42) представятся в виде

$$\overset{(-)}{m}_I \underline{\mathbf{P}}^I = \mathbf{P} b(x', x^3), \quad \overset{(-)}{m}_I \underline{\boldsymbol{\mu}}^I = \boldsymbol{\mu} b(x', x^3), \quad \text{на } \Sigma. \quad (3.5.44)$$

Найдя моменты k -го порядка от обеих частей соотношений (3.5.44) относительно системы полиномов Чебышева второго рода, получим искомые граничные условия в следующей форме:

$$\overset{(-)}{m}_I \overset{(k)}{\bar{\mathbf{P}}}^I = \mathbf{P}^{(k)}(x', t), \quad \overset{(-)}{m}_I \overset{(k)}{\bar{\boldsymbol{\mu}}}^I = \boldsymbol{\mu}^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S, \quad (3.5.45)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\bar{\mathbf{P}}}^I &= \int_0^1 \underline{\mathbf{P}}^I \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, & \overset{(k)}{\bar{\boldsymbol{\mu}}}^I &= \int_0^1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^I \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \\ \mathbf{P}^{(k)} &= \int_0^1 \mathbf{P} b \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, & \boldsymbol{\mu}^{(k)} &= \int_0^1 \boldsymbol{\mu} b \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Заметим, что граничные условия (3.5.45) применяются при представлении уравнений движения, например, в виде (3.3.23).

Теперь получим граничные условия физического содержания в моментах в другой форме. Умножая каждое соотношение (3.5.41) на $d\Sigma$ и учитывая (3.5.33), будем иметь

$$\overset{(-)}{m}_I g_J^I \mathbf{P}^{\bar{J}} = \mathbf{P} \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}} \overset{(-)}{\vartheta}^{-1}, \quad \overset{(-)}{m}_I g_J^I \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = \boldsymbol{\mu} \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}} \overset{(-)}{\vartheta}^{-1}, \quad x' \in \partial S. \quad (3.5.46)$$

Вводя обозначение

$$a(x', x^3) = \frac{d\Sigma}{d\Sigma \overset{(-)}{\vartheta}} \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = \frac{\sqrt{g^{\bar{M}\bar{N}} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} \overset{(-)}{\vartheta}^{-1}, \quad (3.5.47)$$

равенства (3.5.46) можно записать в форме

$$\overset{(-)}{m}_I g_J^I \mathbf{P}^{\bar{J}} = a(x', x^3) \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad \overset{(-)}{m}_I g_J^I \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = a(x', x^3) \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad x' \in \partial S. \quad (3.5.48)$$

Представляя $a(x', x^3)$ в виде ряда относительно x^3

$$a(x', x^3) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(x')(x^3)^s, \quad A_s(x') = \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s a}{\partial (x^3)^s} \right)_{x^3=0} \quad (3.5.49)$$

и учитывая первое соотношение (1.5.37), из (3.5.48) получим следующие граничные условия приближения порядка r :

$$\bar{m}_{I(r)J}^{(-)} g^I \mathbf{P}^{\bar{J}} = a_{(r)}(x', x^3) \mathbf{P}, \quad \bar{m}_{I(r)J}^{(-)} g^I \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = a_{(r)}(x', x^3) \boldsymbol{\mu}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \partial S^{(-)}, \quad (3.5.50)$$

$$a_{(r)}(x', x^3) = \sum_{s=0}^r A_s(x')(x^3)^s, \quad r \in \mathbb{N}_0.$$

Учитывая первые соотношения (1.5.37) и (3.5.49) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x^3 в правых и левых частях, из (3.5.48) получим

$$\bar{m}_{I(s)J}^{(-)} A_{+}^{\bar{I}} \mathbf{P}^{\bar{J}} = A_{(s)}(x', x^3) \mathbf{P}, \quad \bar{m}_{I(s)J}^{(-)} A_{+}^{\bar{I}} \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = A_{(s)}(x', x^3) \boldsymbol{\mu}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \partial S^{(-)}. \quad (3.5.51)$$

Соотношения (3.5.48) и (3.5.51) эквивалентны, а соотношения (3.5.50) эквивалентны первым $r + 1$ равенствам (3.5.51). Применяя оператор моментов k -го порядка к (3.5.50), в силу (2.7.3) найдем

$$\bar{m}_{I(r)J}^{(-)} \bar{\mathbf{M}}(g^I \mathbf{P}^{\bar{J}}) = \bar{\mathbf{M}}(a_{(r)} \mathbf{P}), \quad \bar{m}_{I(r)J}^{(-)} \bar{\mathbf{M}}(g^I \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}}) = \bar{\mathbf{M}}(a_{(r)} \boldsymbol{\mu}), \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S^{(-)}. \quad (3.5.52)$$

Учитывая (3.5.51), из (3.5.52) придем к соотношениям

$$\bar{m}_{I(s)J}^{(-)} A_{+}^{\bar{I}} \mathbf{P}^{\bar{J}} = A_{(s)} \mathbf{P}, \quad \bar{m}_{I(s)J}^{(-)} A_{+}^{\bar{I}} \boldsymbol{\mu}^{\bar{J}} = A_{(s)} \boldsymbol{\mu}, \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S^{(-)}, \quad (3.5.53)$$

которые можно еще получить, применяя оператор моментов k -го порядка к соотношениям (3.5.51).

Заметим, что на основании (3.5.51) из (3.5.52) можно исключить моменты искомых и известных величин, порядок которых превосходит N . Тогда получим соотношения, которые назовем статическими граничными условиями (граничными условиями физического содержания) в моментах приближения (r, N) . Они эквивалентны (3.5.53), поэтому в качестве статических граничных условий в моментах приближения (r, N) целесообразно рассматривать соотношения (3.5.53).

3.5.3 Граничные условия теплового содержания в моментах

Рассмотрены граничные условия первого (типа Дирихле), второго (типа Неймана) и третьего (теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона) родов [336] и из них получены соответствующие граничные условия в моментах.

3.5.3.1 Граничные условия первого рода в моментах

В этом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани Σ задается температура:

$$T(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = T_0(x', x^3, t).$$

Отсюда аналогично (3.5.25) искомые граничные условия первого рода в моментах будут иметь вид

$$\bar{T}^{(k)}(x', t) = \bar{T}_0^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на } \partial S_q^{(-)} \subseteq \partial S^{(-)}, \quad (3.5.54)$$

где, конечно, $\bar{T}_0^{(k)}(x', t)$, $k = \overline{0, N}$, — известные моменты на $\partial S_q^{(-)}$ известного скалярного поля $T_0(x', x^3, t)$.

3.5.3.2 Граничные условия второго рода в моментах

Нетрудно получить эти условия. В самом деле в рассматриваемом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани Σ выполняется условие

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = q_0(x', x^3, t).$$

Отсюда, не останавливаясь на выводе, аналогично (3.5.45) получим искомые условия в форме

$$\underline{m}_{-I}^{(-)} \underline{q}^{(k)\bar{I}}(x', t) = q_0^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на } \partial S_q^{(-)} \subseteq \partial S^{(-)}, \quad (3.5.55)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \underline{q}^{(k)\bar{I}}(x', t) &= \int_0^1 \underline{q}^I \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \\ q_0^{(k)}(x', t) &= \int_0^1 q_0 b(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) h^*(x^3) dx^3, \quad k = \overline{0, N}, \quad \underline{q}^I = \vartheta^I q^I. \end{aligned}$$

В другой форме подобно (3.5.53) граничные условия теплового содержания второго рода представляются в виде

$$\underline{m}_{-I(s)\bar{J}}^{(-)} \underline{q}^{(k)\bar{I}\bar{J}}(x', t) = A_{(s)}^{(k)} q_0^{(k)}(x', t), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S_q^{(-)} \subseteq \partial S^{(-)} \quad (3.5.56)$$

Соотношения (3.5.56) назовем граничными условиями теплового содержания второго рода в моментах приближения (r, N) .

3.5.3.3 Граничные условия третьего рода в моментах

В рассматриваемом случае граничные условия представляются в виде

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = \beta(T_c - T \Big|_{\Sigma_q}). \quad (3.5.57)$$

Тогда для искомых условий аналогично (3.5.55) имеем выражения

$$\underline{m}_{-I}^{(-)} \underline{q}^{(k)\bar{I}}(x', t) = \beta(T_c^{(k)} - T^{(k)}), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на } \partial S_q^{(-)} \subseteq \partial S^{(-)}, \quad (3.5.58)$$

где

$$\begin{aligned} T_c^{(k)}(x', t) &= \int_0^1 T_c b(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) dx^3, \\ T^{(k)}(x', t) &= \int_0^1 T(xl, x^3) b(x', x^3) \hat{U}_k^*(x^3) dx^3, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Аналогично (3.5.53) и (3.5.56) и в этом случае граничные условия можно записать в форме

$$\underline{m}_{-I(s)\bar{J}}^{(-)} \underline{q}^{(k)\bar{I}\bar{J}}(x', t) = A_{(s)} \beta(T_c - T), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S_q^{(-)} \subseteq \partial S^{(-)} \quad (3.5.59)$$

Соотношения (3.5.59) назовем граничными условиями теплового содержания третьего рода в моментах приближения (r, N) .

Заметим, что при получении (3.5.58) и (3.5.59) предполагалось, что коэффициент теплоотдачи β не зависит от x^3 . Если β зависит от x^3 , то для нахождения момента k -го порядка правой части (3.5.57) надо использовать (3.2.78).

Заметим также, что можно было рассматривать граничные условия более общего вида [336], чем приведенные выше и из них получить соответствующие граничные условия теории тонких тел в моментах. Например, в случае микрополярной теории деформируемого твердого тела можно исходить из следующих граничных условий

$$[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{m}} \otimes \underline{\mathbf{P}}^T + \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{u}}] \Big|_{\Sigma_1} = \mathbf{N}, \quad [\underline{\mathbf{c}}\underline{\mathbf{m}} \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}^T + \underline{\mathbf{d}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}] \Big|_{\Sigma_2} = \mathbf{M},$$

где $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$, $\underline{\mathbf{d}}$ — некоторые положительно определенные тензоры второго ранга, \mathbf{N} — вектор контактных усилий, \mathbf{M} — вектор контактных моментных усилий, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$.

Аналогично при неизотермических процессах для уравнения теплопроводности можно рассматривать граничное условие

$$[\underline{\mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{f}}^{(q)} \cdot \underline{\mathbf{q}} + g^{(q)}T] \Big|_{\Sigma_q} = T_0^{(q)}$$

и из него получить соответствующие граничные условия в моментах.

Здесь $\underline{\mathbf{f}}^{(q)}$ — некоторый тензор второго ранга, $g^{(q)}$ — некоторая скалярная функция, $\Sigma_q \subseteq \Sigma$. $\underline{\mathbf{f}}^{(q)}$, $g^{(q)}$, вообще говоря, зависит от координат и времени.

3.5.4 Начальные условия в моментах

При рассмотрении нестационарных задач в некоторый момент времени $t = t_0$ должны быть заданы начальные условия. Пусть для нестационарной (динамической) задачи микрополярной МДТТ начальные условия представлены в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \underline{\mathbf{u}}_0(x', x^3), & \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \underline{\mathbf{v}}(x', x^3), \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}}(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \underline{\boldsymbol{\varphi}}_0(x', x^3), & \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \underline{\boldsymbol{\omega}}(x', x^3), \end{aligned} \quad (3.5.60)$$

а для нестационарной задачи теплопроводности начальное условие представлено в форме

$$T(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} = T^0(x', x^3). \quad (3.5.61)$$

Исходя из (3.5.60), для искоемых начальных условий в моментах будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \underline{\mathbf{u}}_0^{(k)}(x'), & \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \underline{\mathbf{v}}^{(k)}(x'), \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \underline{\boldsymbol{\varphi}}_0^{(k)}(x'), & \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \underline{\boldsymbol{\omega}}^{(k)}(x'), \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на } S^{(-)}. \end{aligned} \quad (3.5.62)$$

Аналогично (3.5.62) из (3.5.61) для нестационарной задачи теплопроводности получим следующие начальные условия в моментах:

$$T^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} = T_0^{(k)}(x') \quad k = \overline{0, N}, \quad \text{на } S^{(-)}. \quad (3.5.63)$$

Из изложенного выше видно, что трехмерные законы Гука и теплопроводности Фурье в теории тонких тел заменяются соответствующими бесконечными системами законов в моментах. При этом каждый закон содержит бесконечное число слагаемых. Поэтому аналогично системам уравнений движения и притока тепла в моментах следует их редуцировать к конечным системам законов в моментах, каждый закон которых будет содержать конечное число слагаемых. Редукция производится следующим образом: фиксируем некоторые (в частности, те же самые числа, что при редукции систем уравнений)

неотрицательные целые числа r и N , а затем из бесконечной системы законов в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения порядка r выбираем совокупность первых $N + 1$ законов. При упрощенной схеме редукции из бесконечной системы законов в моментах приближения порядка r выбираем совокупность первых $N + 1$ законов, в каждом законе которой пренебрегаем моментами искомым величин, порядок которых больше N . В этой связи целесообразно вводить определения.

Определение 3.5.1. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N + 1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений порядка r , назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений (вектора потока тепла) приближения (r, N) .

Определение 3.5.2. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N + 1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах порядка r и каждый закон которой не содержит моментов искомым величин, порядок которых больше N , назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах приближения (r, N) .

В силу этих определений, например, система законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений (вектора потока тепла) приближения $(0, N)$ получается из (3.4.3) ((3.4.21)) при выборе первых $N + 1$ соотношений и учете выражений для $\mathbf{u}'^{(+)}$, $\mathbf{u}'^{(-)}$, φ'^{+} и φ'^{-} (T'^{+} и T'^{-}), полученных при решении системы уравнений (3.5.16)((3.5.18)).

Аналогично, например, система законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах приближения $(0, N)$ получается из (3.4.4) ((3.4.22)) при выборе первых $N + 1$ соотношений. Следовательно, выбор первых $N + 1$ соотношений означает, что $k = \overline{0, N}$.

3.6 Классификация и постановка задач в теории тонких тел

Классификация и постановка задач как в микрополярной, так и в классической теории тонких тел осуществляются так же, как в механике деформируемого твердого тела (МДТТ) [336].

В отличие от МДТТ в рассматриваемом случае как для однородного, так и для неоднородного тела рассматриваются приближенные ОС, системы уравнений движения и уравнений теплопроводности в моментах. При этом и граничные условия ставятся на части граничного контура базовой поверхности в моментах.

Для граничных условий и соответствующих краевых задач в микрополярной теории принимается такая классификация.

Определение 3.6.1. Если на граничном контуре $\partial S^{(-)}$ заданы только моменты векторов перемещения и вращения (кинематические граничные условия) (3.5.25), то такие условия называются граничными условиями первого рода, а задача МДТТТ, использующая эти условия — первой краевой задачей.

Определение 3.6.2. Если на граничном контуре $\partial S^{(-)}$ заданы только граничные условия физического содержания в моментах (3.5.53), то такие граничные условия называются граничными условиями второго рода, а соответствующая задача МДТТТ — второй краевой задачей.

Определение 3.6.3. Если на одной части граничного контура $\partial S_1^{(-)}$ заданы кинематические граничные условия (3.5.25), а на остальной его части $\partial S_2^{(-)}$ — граничные условия физического содержания (3.5.53), $\partial S_1^{(-)} \cup \partial S_2^{(-)} = \partial S$, $\partial S_1^{(-)} \cap \partial S_2^{(-)} = \emptyset$, то такие граничные условия называются смешанными граничными условиями, а задача МДТТТ, использующая их — смешанной краевой задачей.

Следует заметить, что в случае динамических задач в некоторый момент времени $t = t_0$ должны быть заданы и начальные условия в моментах (3.5.62). Если тонкое тело не ограничено, то должны быть заданы условия на бесконечности в моментах.

Заметим также, что исключая из приведенных выше определений характеристики микрополярной теории, получим соответствующие определения для классической МДТТТ.

3.6.1 Постановки задач микрополярной ТУТТ в моментах

Рассматриваются постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) и обсуждаются вопросы получения из них некоторых других частных случаев постановок задач.

Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.3.83);

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) микрополярной ТМДТТТ (3.3.86);

3) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) микрополярной ТУТТ или систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ при упрощенной схеме редукции;

4) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, N) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенной схеме редукции;

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.5.25) для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59);

5b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59);

5c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.5.25) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) на другой (остальной) части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59);

б) системы начальных условий кинематического (3.5.62) и теплового (3.5.63) содержаний в моментах приближения N .

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) не входят механические характеристики (моменты тензоров напряжений $\underline{\mathbb{P}}^{(k)}$ и моментных напряже-

ний $\underline{\mu}^{(k)}$, то отдельно рассматривается нестационарная температурная задача в моментах приближения (r, N) , которая включает в себя:

1) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) без механических характеристик;

2) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, N) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенной схеме редукции;

3) какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59);

4) систему начальных условий теплового содержания в моментах приближения N (3.5.63).

В этом случае динамическая задача в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ разделяется на две задачи: нестационарную температурную задачу в моментах приближения (r, N) , решением которой определяется температурное поле, в дальнейшем считающееся известным и динамическую задачу в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ при неизотермических процессах с известным температурным полем, которая включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ;

2) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем или систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем при упрощенной схеме редукции;

3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

3a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.5.25) для первой краевой задачи;

3b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) для второй краевой задачи;

3c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N микрополярной теории (3.5.25) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) на другой (остальной) части граничного контура для смешанной краевой задачи;

4) систему кинематических начальных условий в моментах приближения N (3.5.62).

Задачи при неизотермических процессах, которые разделяются на температурную задачу и задачу ТМДТТ с известным температурным полем, называются несвязанными задачами ТМДТТ [336].

Таким образом, выше даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) . Из этих постановок задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r и N , постановки задач в моментах желаемых приближений. Кроме того, можно получить постановки задач при изотермических процессах. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, N) классических теорий ТУТТ и УТТ. Следует заметить, что постановки задач микрополярной теории для произвольного анизотропного материала при классической параметризации области тонкого тела с применением полиномов Лежандра рассмотрены в [264].

3.7 Построение корректирующего слагаемого, обеспечивающего выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при упрощенном методе редукции

При упрощенном методе постановка задач, например, постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной ТМДТТТ (3.3.83),

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) микрополярной ТМДТТТ (3.3.86),

3) систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ при упрощенном методе редукции,

4) систему законов теплопроводности Фурье (ОС теплового содержания) в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции,

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5а) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.5.25) для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59),

5б) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59),

5с) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N (3.5.25) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ (3.5.53) на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах (3.5.54), (3.5.56) или (3.5.59),

6) системы начальных условий кинематического (3.5.62) и теплового (3.5.63) содержания в моментах приближения N .

Решение этой краевой задачи, которое позволяет построить приближенные выражения для искомым полей температуры, векторов перемещения, вращения и потока тепла, а также тензоров напряжений и моментных напряжений в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \boldsymbol{\varphi}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \\ T_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N T^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \mathbf{q}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{q}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3) \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

не согласованы с краевыми условиями на лицевых поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$. Следовательно, они могут оказаться весьма грубыми вблизи лицевых поверхностей. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли к приближенному решению рассматриваемой краевой задачи добавить корректирующее слагаемое, удовлетворяющее следующим условиям:

1) сумма найденного приближенного решения рассматриваемой краевой задачи и соответствующего корректирующего слагаемого согласована с краевыми условиями на лицевых поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$,

2) моменты корректирующего (добавочного) слагаемого обращаются в нуль, если их порядок не превосходит N ,

3) нормы корректирующего слагаемого и при необходимости определяемого посредством него корректирующего слагаемого для поля другой искомой величины можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела.

Ниже рассмотрим способы построения корректирующих слагаемых при различных заданных условиях на лицевых поверхностях. При этом все необходимые соотношения выведем для классической теории, на основании которых в свою очередь выпишем подобные формулы для микрополярной теории. Кроме того, с целью сокращения письма, вначале рассмотрим изотермические процессы, а затем укажем способы нахождения корректирующих слагаемых и при неизотермических процессах.

3.7.1 Способы определения корректирующих слагаемых при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях

В этом случае для задач приближения (r, N) вместо (3.7.1) будем иметь следующие приближенные решения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \boldsymbol{\varphi}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \\ \mathbf{P}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), & \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}(x', x^3) &= \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям на боковой грани, но не удовлетворяют условиям на лицевых поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$.

1. *Нахождение корректирующих слагаемых в том случае, когда на лицевых поверхностях заданы векторы перемещений и вращений.* Пусть на лицевых поверхностях заданы векторы перемещений и вращений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x', x^3) \Big|_{x^3=0} &= \mathbf{u}^{(-)}(x'), & \mathbf{u}(x', x^3) \Big|_{x^3=1} &= \mathbf{u}^{(+)}(x'), \\ \boldsymbol{\varphi}(x', x^3) \Big|_{x^3=0} &= \boldsymbol{\varphi}^{(-)}(x'), & \boldsymbol{\varphi}(x', x^3) \Big|_{x^3=1} &= \boldsymbol{\varphi}^{(+)}(x'). \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Так как приближенные решения $\mathbf{u}_{(N)}(x', x^3)$ и $\boldsymbol{\varphi}_{(N)}(x', x^3)$ из (3.7.2) не удовлетворяют условиям (3.7.3) на лицевых поверхностях, поэтому следует найти поправочные слагаемые $\mathbf{u}_0(x', x^3)$ и $\boldsymbol{\varphi}_0(x', x^3)$, удовлетворяющие условиям:

1) поля перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{u}_0$ и вращения $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_{(N)} + \boldsymbol{\varphi}_0$ согласованы с краевыми условиями (3.7.3),

2) моменты $\mathbf{u}_0^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}_0^{(k)}$ векторных полей \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ обращаются в нуль, если $k \leq N$,

3) абсолютные значения векторных полей \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что выполняются условия

$$|\mathbf{u}_0(x', x^3)| < \varepsilon, \quad |\boldsymbol{\varphi}_0(x', x^3)| < 0, \quad 0 < \delta < x^3 < 1 - \delta, \quad x' \in S^{(-)} \quad (3.7.4)$$

Докажем, что векторные поля \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$, удовлетворяющие указанным условиям, существуют. Сперва построим векторное поле \mathbf{u}_0 . Ищем его в виде

$$\mathbf{u}_0(x', x^3) = \mathbf{A}_m(x') \hat{U}_m^*(x^3) + \mathbf{A}_{m+1}(x') \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N, \quad (3.7.5)$$

где m — произвольное фиксированное достаточно большое целое число больше N .

Учитывая значения ортонормированных смещенных многочленов Чебышева второго рода на концах сегмента (2.5.20), из (3.7.5) находим

$$(m+1)\mathbf{A}_m - (m+2)\mathbf{A}_{m+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(-1)^m \mathbf{u}_0^{(-)}, \quad (m+1)\mathbf{A}_m + (m+2)\mathbf{A}_{m+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbf{u}_0^{(+)}, \quad (3.7.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^{(-)} = \mathbf{u}_0 \Big|_{x^3=0} &= \mathbf{u}^{(-)} - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}, & \mathbf{u}_0^{(+)} = \mathbf{u}_0 \Big|_{x^3=1} &= \mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}, \\ \mathbf{u}_{(N)}^{(-)} = \mathbf{u}_{(N)} \Big|_{x^3=0}, & & \mathbf{u}_{(N)}^{(+)} = \mathbf{u}_{(N)} \Big|_{x^3=1}. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Разрешая (3.7.6) относительно \mathbf{A}_m и \mathbf{A}_{m+1} и учитывая (3.7.7), получим

$$\mathbf{A}_s(x') = \frac{\sqrt{\pi}}{4(s+1)} \left\{ [\mathbf{u}^{(+)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^s [\mathbf{u}^{(-)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}(x')] \right\}, \quad s = m, m+1. \quad (3.7.8)$$

Подставляя выражения для \mathbf{A}_m и \mathbf{A}_{m+1} из (3.7.8) в (3.7.5), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x', x^3) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+1)} \left\{ [\mathbf{u}^{(+)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^m [\mathbf{u}^{(-)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} \hat{U}_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+2)} \left\{ [\mathbf{u}^{(+)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^{m+1} [\mathbf{u}^{(-)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Рассматривая вместо ортонормальных смещенных полиномов Чебышева второго рода стандартизованные смещенные полиномы Лежандра $\{P_k^*\}_{k=0}^\infty$ и осуществляя аналогичные выкладки, вместо (3.7.9) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x', x^3) &= \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{u}^{(+)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^m [\mathbf{u}^{(-)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} P_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{u}^{(+)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^{m+1} [\mathbf{u}^{(-)}(x') - \mathbf{u}_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} P_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Теперь не представляет большого труда получить аналогичные (3.7.9) и (3.7.10) выражения для φ_0 . В самом деле, произведя совершенно подобные выкладки, найдем

$$\begin{aligned} \varphi_0(x', x^3) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+1)} \left\{ [\varphi^{(+)}(x') - \varphi_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^m [\varphi^{(-)}(x') - \varphi_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} \hat{U}_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+2)} \left\{ [\varphi^{(+)}(x') - \varphi_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^{m+1} [\varphi^{(-)}(x') - \varphi_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N, \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x', x^3) &= \frac{1}{2} \left\{ [\varphi^{(+)}(x') - \varphi_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^m [\varphi^{(-)}(x') - \varphi_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} P_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ [\varphi^{(+)}(x') - \varphi_{(N)}^{(+)}(x')] + (-1)^{m+1} [\varphi^{(-)}(x') - \varphi_{(N)}^{(-)}(x')] \right\} P_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Нетрудно заметить, что для ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода и стандартизованных смещенных полиномов Лежандра на сегменте $[0, 1]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} 2\sqrt{t(1-t)} |\hat{U}_n^*(t)| &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}, & \frac{1}{n+1} |\hat{U}_n^*(t)| &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\ |P_n^*(t)| &\leq 1, & \sqrt{\pi n} \sqrt{t(1-t)} |P_n^*(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

которые получаются из аналогичных соотношений для этих полиномов [392] на сегменте $[-1, 1]$, если в них x заменить на $2t - 1$. Складывая почленно первые два, а потом последние два из неравенств (3.7.13), получим важные соотношения

$$|\hat{U}_n^*(t)| \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)} + \frac{1}{n+1}}, \quad |P_n^*(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi n} \sqrt{t(1-t)} + 1}, \quad t \in [0, 1], \quad (3.7.14)$$

из которых видно, каким образом оценка этих полиномов внутри интервала $(0, 1)$ переходит в оценку на его концах.

Легко проверить, что построенные функции (3.7.9)–(3.7.12) удовлетворяют всем вышеперечисленным условиям, поэтому они — в рассматриваемом случае корректирующие слагаемые, являющиеся в тоже время частными решениями приближенной системы уравнений. Заметим, что при оценке абсолютных величин $|\mathbf{u}_0|$ и $|\boldsymbol{\varphi}_0|$ следует использовать (3.7.14).

2. *Определение корректирующих слагаемых тогда, когда на лицевых поверхностях заданы статические условия (условия физического содержания).* В этом случае нужно определить корректирующие слагаемые $\mathbf{U}_0(x', x^3)$ и $\boldsymbol{\Phi}_0(x', x^3)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) поля тензоров напряжений $\underline{\mathbf{P}}$ и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, соответствующие полям векторов перемещений $\mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{U}_0$ и вращений $\boldsymbol{\varphi}_{(N)} + \boldsymbol{\Phi}_0$, согласованы с краевыми условиями (физического содержания) на лицевых поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$,

2) моменты $\mathbf{U}_0^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}_0^{(k)}$ векторных полей \mathbf{U}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ обращаются в нуль, если $k \leq N$,

3) нормы векторных полей \mathbf{U}_0 ($\|\mathbf{U}_0\| = |\mathbf{U}_0|$) и $\boldsymbol{\Phi}_0$ ($\|\boldsymbol{\Phi}_0\| = |\boldsymbol{\Phi}_0|$) и полей тензора напряжений $\underline{\mathbf{P}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ ($\|\underline{\mathbf{P}}_{(r)}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{P}}_{(r)}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{P}}_{(r)}}$) и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ ($\|\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}\| = \sqrt{\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}^{\otimes 2} \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}}$) приближения порядка r можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}_0(x', x^3)| < \varepsilon, \quad |\boldsymbol{\Phi}_0(x', x^3)| < \varepsilon, \quad \|\underline{\mathbf{P}}_{(r)}(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad \|\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}(x', x^3)\| < \varepsilon, \\ 0 < \delta < x^3 < 1 - \delta, \quad x' \in S^{(-)}, \quad x^3 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Следует заметить, что в рассматриваемом случае тензорные поля \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varphi}$, $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ (решения поставленной задачи) представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x', x^3) &= \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) + \mathbf{U}_0(x', x^3), \quad \boldsymbol{\varphi}(x', x^3) = \boldsymbol{\varphi}_{(N)}(x', x^3) + \boldsymbol{\Phi}_0(x', x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}(x', x^3) &= \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}(x', x^3) + \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}(x', x^3), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}(x', x^3) = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}(x', x^3) + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}(x', x^3), \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

где $\mathbf{u}_{(N)}$, $\boldsymbol{\varphi}_{(N)}$, $\underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}$ даются соотношениями (3.7.2), а тензорные поля $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)} \equiv \underline{\mathbf{P}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)} \equiv \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)}(\mathbf{U}_0, \boldsymbol{\Phi}_0)$ — формулами

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{0(r)} &= g_{(r)M}^P \underline{\mathbf{C}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{U}_0 + \underline{\mathbf{C}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{U}_0 + g_{(r)M}^P \underline{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \boldsymbol{\Phi}_0 + \underline{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\Phi}_0 - \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_0, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)} &= g_{(r)M}^P \underline{\mathbf{D}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \boldsymbol{\Phi}_0 + \underline{\mathbf{D}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\Phi}_0 + g_{(r)M}^P \underline{\mathbf{B}}^{\bar{M}\cdot} \cdot N_P \mathbf{U}_0 + \underline{\mathbf{B}}^{\bar{3}\cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{U}_0 - \underline{\mathbf{B}}^{\otimes 2} \underline{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_0. \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

Таким образом, нужно найти корректирующие слагаемые \mathbf{U}_0 и $\boldsymbol{\Phi}_0$, с помощью которых в свою очередь формулами (3.7.16) определяются корректирующие слагаемые $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}$ так, что тензоры $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, представленные двумя последними формулами (3.7.15), были согласованы с граничными условиями на лицевых поверхностях, т.е. с условиями (3.5.2) и (3.5.4). При этом должно выполняться все вышеуказанные условия.

Покажем, что векторные поля \mathbf{U}_0 и $\boldsymbol{\Phi}_0$, удовлетворяющие вышеуказанным условиям, существуют. В данном случае используем полиномы Лежандра.

Ищем корректирующие слагаемые \mathbf{U}_0 и $\boldsymbol{\Phi}_0$ так же, как это делается для классического варианта теории в [68], а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(x', x^3) &= \mathbf{B}_m(x') [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \mathbf{B}_{m+1}(x') [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)], \\ \boldsymbol{\Phi}_0(x', x^3) &= \mathbf{D}_m(x') [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \mathbf{D}_{m+1}(x') [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)], \quad m > N, \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

где m — достаточно большое произвольно фиксированное целое число больше N .

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^{(m)}(x') &= -\mathbf{U}_0^{(m+2)}(x') = -\mathbf{B}_m(x'), & \mathbf{U}_0^{(m+1)}(x') &= -\mathbf{U}_0^{(m+3)}(x') = -\mathbf{B}_{m+1}(x'), \\ \mathbf{\Phi}_0^{(m)}(x') &= -\mathbf{\Phi}_0^{(m+2)}(x') = -\mathbf{D}_m(x'), & \mathbf{\Phi}_0^{(m+1)}(x') &= -\mathbf{\Phi}_0^{(m+3)}(x') = -\mathbf{D}_{m+1}(x'). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{U}_0^{(k)}(x') = 0$ и $\mathbf{\Phi}_0^{(k)}(x') = 0$, если $k \neq \overline{m, m+3}$, в частности, $\mathbf{U}_0^{(k)}(x') = 0$ и $\mathbf{\Phi}_0^{(k)}(x') = 0$, если $k \leq N$, т.е. функции $\mathbf{U}_0(x', x^3)$ и $\mathbf{\Phi}_0(x', x^3)$ удовлетворяют вышеуказанному условию 2).

Заметим также, что в силу (2.1.8) из (3.7.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^\pm &= \mathbf{U}_0 \Big|_{x^3=0;1} = 0, & (\partial_I \mathbf{U}_0)^\pm &= (\partial_I \mathbf{U}_0) \Big|_{x^3=0;1} = 0, \\ \mathbf{\Phi}_0^\pm &= \mathbf{\Phi}_0 \Big|_{x^3=0;1} = 0, & (\partial_I \mathbf{\Phi}_0)^\pm &= (\partial_I \mathbf{\Phi}_0) \Big|_{x^3=0;1} = 0. \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

Теперь найдем выражения для $(\partial_3 \mathbf{U}_0)^\pm = (\partial_3 \mathbf{U}_0) \Big|_{x^3=0;1}$ и $(\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^\pm = (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0) \Big|_{x^3=0;1}$ с помощью заданных величин. Прежде всего отметим, что посредством рекуррентного соотношения (2.1.15) из (3.7.17) простыми вычислениями получим

$$\begin{aligned} \partial_3 \mathbf{U}_0 &= 2(2m+3)\mathbf{B}_m(x')P_{m+1}^*(x^3) + 2(2m+5)\mathbf{B}_{m+1}(x')P_{m+2}^*(x^3), \\ \partial_3 \mathbf{\Phi}_0 &= 2(2m+3)\mathbf{D}_m(x')P_{m+1}^*(x^3) + 2(2m+5)\mathbf{D}_{m+1}(x')P_{m+2}^*(x^3). \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

Отсюда, учитывая значения полиномов Лежандра на концах сегмента (2.1.8), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n(x') &= \frac{1}{4(2n+3)} [(\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ - (-1)^n (\partial_3 \mathbf{U}_0)^-], \\ \mathbf{D}_n(x') &= \frac{1}{4(2n+3)} [(\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^+ - (-1)^n (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^-], \quad n = m, m+1. \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

С целью определения $(\partial_3 \mathbf{U}_0)^\pm$ и $(\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^\pm$ воспользуемся соотношениями (3.7.16). Из них с учетом (3.7.18) приходим к формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\cong}^{(-)\bar{3}\cdot} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- + \mathbf{A}_{\cong}^{(-)\bar{3}\cdot} \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^- &= \mathbf{P}_{0(r)}^{(-)}, \\ \mathbf{B}_{\cong}^{(-)\bar{3}\cdot} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- + \mathbf{D}_{\cong}^{(-)\bar{3}\cdot} \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^- &= \mathbf{\mu}_{0(r)}^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{\cong}^{(+)\bar{3}\cdot} - g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{3}} g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{Q}} \mathbf{C}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot}) \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + (\mathbf{A}_{\cong}^{(+)\bar{3}\cdot} - g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{3}} g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{Q}} \mathbf{A}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot}) \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^+ &= \mathbf{P}_{0(r)}^{(+)}, \\ (\mathbf{B}_{\cong}^{(+)\bar{3}\cdot} - g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{3}} g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{Q}} \mathbf{B}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot}) \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + (\mathbf{D}_{\cong}^{(+)\bar{3}\cdot} - g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{3}} g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{Q}} \mathbf{D}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot}) \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^+ &= \mathbf{\mu}_{0(r)}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{C}_{\cong(r)}^{(+)+} = g_{\frac{+}{(r)n}}^{\bar{3}} \mathbf{C}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot} = (\mathbf{C}_{\cong}^{(+)\bar{3}\cdot} - g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{3}} g_{\frac{+}{Q(r)N}}^{\bar{Q}} \mathbf{C}_{\cong}^{(+)\bar{N}\cdot}), \quad \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D},$$

соотношения (3.7.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\cong(r)}^{(+)+} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + \mathbf{A}_{\cong(r)}^{(+)+} \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^+ &= \mathbf{P}_{0(r)}^{(+)}, \\ \mathbf{B}_{\cong(r)}^{(+)+} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + \mathbf{D}_{\cong(r)}^{(+)+} \cdot (\partial_3 \mathbf{\Phi}_0)^+ &= \mathbf{\mu}_{0(r)}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

Умножая (3.7.21) слева скалярно на $\mathbf{r}^{\bar{3}}$, а (3.7.23) на $\mathbf{r}^{\bar{3}} = g_{\bar{m}}^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\bar{m}}$, получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{C}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- + \underline{\mathbb{A}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^- &= \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}, \\ \underline{\mathbb{B}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- + \underline{\mathbb{D}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^- &= \underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}, \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{C}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + \underline{\mathbb{A}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^+ &= \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}, \\ \underline{\mathbb{B}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ + \underline{\mathbb{D}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^+ &= \underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}. \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

Далее, используя последние два соотношения (3.7.15), граничные условия на лицевых поверхностях (3.5.2) и (3.5.4) в рассматриваемом случае представляются в форме

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}} &= -\left(\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{(-)\bar{3}}} \underline{\mathbb{P}} + \underline{\mathbb{P}}_{(r,N)}^{(-)\bar{3}}\right), & \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}} &= \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{(+)\bar{3}}} \underline{\mathbb{P}} - \underline{\mathbb{P}}_{(r,N)}^{(+)\bar{3}}, \\ \underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}} &= -\left(\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{(-)\bar{3}}} \underline{\mu} + \underline{\mu}_{(r,N)}^{(-)\bar{3}}\right), & \underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}} &= \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{(+)\bar{3}}} \underline{\mu} - \underline{\mu}_{(r,N)}^{(+)\bar{3}}. \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

Итак, функции в правых частях (3.7.24) и (3.7.25) определены с помощью известных величин и искомых моментов векторов перемещений и вращений формулами (3.7.26). Так как выражения для функции $\underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}$, $\underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}$, $\underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}$ и $\underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}$ найдены, то (3.7.24) и (3.7.25) можно рассматривать как системы алгебраических уравнений для определения искомых величин $(\partial_3 \mathbf{U}_0)^\pm$ и $(\partial_3 \Phi_0)^\pm$. Разрешая эти системы уравнений, получим

$$\begin{aligned} (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- &= \left(\underline{\mathbb{A}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{C}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} - \underline{\mathbb{D}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{B}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbb{A}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}} - \underline{\mathbb{D}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}\right), \\ (\partial_3 \Phi_0)^- &= \left(\underline{\mathbb{C}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{A}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} - \underline{\mathbb{B}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{D}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbb{C}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}} - \underline{\mathbb{B}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}\right), \end{aligned} \quad (3.7.27)$$

$$\begin{aligned} (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ &= \left(\underline{\mathbb{A}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{C}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} - \underline{\mathbb{D}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{B}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbb{A}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}} - \underline{\mathbb{D}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}\right), \\ (\partial_3 \Phi_0)^+ &= \left(\underline{\mathbb{C}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{A}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} - \underline{\mathbb{B}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{D}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbb{C}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}} - \underline{\mathbb{B}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}\right). \end{aligned} \quad (3.7.28)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\underline{\mathbb{C}}'_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}} = \left(\underline{\mathbb{C}}_{\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(-)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1}, \quad \underline{\mathbb{C}}'_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}} = \left(\underline{\mathbb{C}}_{(r)\bar{3}\cdot\bar{3}}^{(+)\bar{3}\cdot\bar{3}}\right)^{-1}, \quad \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D}.$$

Заметим, что в соотношения (3.7.27) и (3.7.28) выражения для $\underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}$, $\underline{\mathbb{P}}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}$, $\underline{\mu}_{0(r)}^{(-)\bar{3}}$ и $\underline{\mu}_{0(r)}^{(+)\bar{3}}$ с целью сокращения письма подставлять не стали. Заметим также, что, имея в виду реальную физическую задачу, можно утверждать, что нормы величин $(\partial_3 \mathbf{U}_0)^\pm$ и $(\partial_3 \Phi_0)^\pm$, вычисленные с помощью (3.7.27) и (3.7.28), должны быть ограниченными.

Учитывая (3.7.27) и (3.7.28), из (3.7.20) получим выражения для $\mathbf{B}_n(x')$ и $\mathbf{D}_n(x')$ при $n = m, m + 1$, с помощью которых в свою очередь на основании (3.7.17) найдем окончательный вид корректирующих слагаемых $\mathbf{U}_0(x', x^3)$ и $\Phi_0(x', x^3)$. Далее посредством этих функций и получаемых на основании их корректирующих слагаемых для тензоров напряжений и моментных напряжений (3.7.16) из (3.7.15) получим решения рассматриваемой задачи. При этом поля тензоров напряжений $\underline{\mathbb{P}}(x', x^3)$ и моментных напряжений $\underline{\mu}(x', x^3)$ будут согласованы с краевыми условиями физического содержания на лицевых поверхностях чем и доказывается выполнение условия 1). Нетрудно проверить, что соблюдается и условие 3). В самом деле, учитывая, что из (3.7.20) имеют место соотношения $|\mathbf{B}_m| = O(m^{-1})$ и $|\mathbf{D}_m| = O(m^{-1})$, в силу второго неравенства (3.7.14) из (3.7.17)

закключаем, что верны следующие оценки: $|\mathbf{U}_0| = O(m^{-\frac{3}{2}})$ и $|\Phi_0| = O(m^{-\frac{3}{2}})$, а также $|\partial_I \mathbf{U}_0| = O(m^{-\frac{3}{2}})$ и $|\partial_I \Phi_0| = O(m^{-\frac{3}{2}})$. Нетрудно видеть, что на основании (3.7.19) имеем $|\partial_3 \mathbf{U}_0| = O(m^{-\frac{1}{2}})$ и $|\partial_3 \Phi_0| = O(m^{-\frac{1}{2}})$. Наконец, учитывая вышеприведенные оценки величин, входящих в правые части (3.7.16), легко показать, что $\|\underline{\mathbf{P}}_{0(r)}\| = O(m^{-\frac{1}{2}})$ и $\|\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}\| = O(m^{-\frac{1}{2}})$. Таким образом, и выполнение условия 3) обеспечено, и тем самым существование корректирующих слагаемых в виде (3.7.17) доказано.

Рассмотрим частные случаи:

а) *Тело обладает центром симметрии.* В этом случае $\underline{\mathbf{A}} = 0$ и $\underline{\mathbf{B}} = 0$, поэтому вместо (3.7.24) и (3.7.25) будем иметь следующие системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- &= \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3, & \underline{\mathbf{D}}_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^- &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3, \\ \underline{\mathbf{C}}_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ &= \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3, & \underline{\mathbf{D}}_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot (\partial_3 \Phi_0)^+ &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3. \end{aligned} \quad (3.7.29)$$

Разрешая системы уравнений (3.7.29) относительно $(\partial_3 \mathbf{U}_0)^\pm$ и $(\partial_3 \Phi_0)^\pm$, получим

$$\begin{aligned} (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- &= \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3, & (\partial_3 \Phi_0)^- &= \underline{\mathbf{D}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3, \\ (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ &= \underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3, & (\partial_3 \Phi_0)^+ &= \underline{\mathbf{D}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3, \end{aligned} \quad (3.7.30)$$

где, конечно, $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3$, $\underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3$ определяются с помощью (3.7.26). Учитывая (3.7.30), из (3.7.20) найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n(x') &= \frac{1}{4(2n+3)} \left[\underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 \right], \\ \mathbf{D}_n(x') &= \frac{1}{4(2n+3)} \left[\underline{\mathbf{D}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{D}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 \right], \quad n = m, m+1. \end{aligned} \quad (3.7.31)$$

Подставляя (3.7.31) в (3.7.17), получим окончательные выражения для корректирующих слагаемых \mathbf{U}_0 и Φ_0 , удовлетворяющих всем вышеприведенным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(x', x^3) &= \frac{1}{4(2m+3)} \left[\underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 \right] [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \\ &+ \frac{1}{4(2m+5)} \left[\underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{0(r)}^3 \right] [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)], \\ \Phi_0(x', x^3) &= \frac{1}{4(2m+3)} \left[\underline{\mathbf{D}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{D}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 \right] [P_{m+2}^*(x^3) - P_m^*(x^3)] + \\ &+ \frac{1}{4(2m+5)} \left[\underline{\mathbf{D}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 - (-1)^n \underline{\mathbf{D}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{0(r)}^3 \right] [P_{m+3}^*(x^3) - P_{m+1}^*(x^3)], \quad m > N, \end{aligned} \quad (3.7.32)$$

Подставляя (3.7.32) в (3.7.15), найдем в рассматриваемом случае выражение для векторов перемещений $\mathbf{u}(x', x^3)$ и вращений $\boldsymbol{\varphi}(x', x^3)$, а также тензоров напряжений $\underline{\mathbf{P}}$ и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}$.

б) *Микрополярное изотропное тело с центром симметрии.* На основании (3.7.32) надо найти выражения для \mathbf{U}_0 и Φ_0 . С этой целью найдем выражения для

$$\underline{\mathbf{C}}_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}}, \quad \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger}, \quad \underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(+)\dagger}, \quad \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}. \quad (3.7.33)$$

Нетрудно подсчитать, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{3\cdot 3\cdot}^{3\cdot 3\cdot} &= a(\underline{\mathbf{E}} + b\mathbf{r}^3\mathbf{r}^3), & \underline{\mathbf{C}}'_{3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} &= (\underline{\mathbf{C}}_{3\cdot 3\cdot}^{3\cdot 3\cdot})^{-1} = \frac{1}{a} \left(\underline{\mathbf{E}} - \frac{b}{1 + g^{33}b} \mathbf{r}^3\mathbf{r}^3 \right); \\ \underline{\mathbf{C}}_{(r)3\cdot 3\cdot}^{3\cdot 3\cdot} &= g_{(r)n}^3 \underline{\mathbf{C}}_{3\cdot 3\cdot}^{3\cdot \bar{n}\cdot} = a_{(r)}(\underline{\mathbf{E}} + b_{(r)}\mathbf{r}^3\mathbf{r}_{(r)}^3), \\ \underline{\mathbf{C}}'_{(r)3\cdot 3\cdot}^{(-)\bar{-}} &= (\underline{\mathbf{C}}_{(r)3\cdot 3\cdot}^{3\cdot 3\cdot})^{-1} = \frac{1}{a_{(r)}} \left(\underline{\mathbf{E}} - \frac{b_{(r)}}{1 + g_{(r)}^{33}b_{(r)}} \mathbf{r}^3\mathbf{r}_{(r)}^3 \right), \end{aligned} \quad (3.7.34)$$

где введены следующие обозначения:

$$a = (\mu + \alpha)g^{33}, \quad b = \frac{\lambda + \mu - \alpha}{(\mu + \alpha)g^{33}}, \quad a_{(r)} = (\mu + \alpha)g_{(r)}^{33}, \quad b_{(r)} = \frac{\lambda + \mu - \alpha}{(\mu + \alpha)g_{(r)}^{33}}, \quad (3.7.35)$$

$$g_{(r)}^{33} = \mathbf{r}^3 \cdot \mathbf{r}_{(r)}^3 = g_{(r)n}^3 g^{3n}, \quad g_{(r)n}^3 = g_n^3 - g_{P(r)n}^3 g_{(r)n}^P, \quad g_{(r)3}^P = 0, \quad \mathbf{r}_{(r)}^3 = g_{(r)n}^3 \mathbf{r}^n.$$

Заметим, что при новой параметризации области тонкого тела, когда $\mathbf{h} \perp \bar{S}$, имеем

$$g^{33} = g_m^3 g_n^3 g^{\bar{m}\bar{n}} = c g^{\bar{3}\bar{3}}, \quad c = 1 + g_{P_3^-}^3 g_Q^3 g_M^P g_N^Q g^{\bar{M}\bar{N}},$$

$$g^{33}|_{x^3=0} = c^{(-)} g^{\bar{3}\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}}, \quad c^{(-)} = c|_{x^3=0} = 1, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2},$$

$$g^{33}|_{x^3=1} = c^{(+)} g^{\bar{3}\bar{3}}, \quad c^{(+)} = c|_{x^3=1} = 1 + g_{P_3^+}^3 g_Q^3 g_M^P g_N^Q g^{\bar{M}\bar{N}}, \quad (3.7.36)$$

$$g_{(r)}^{33} = c_{(r)} g^{\bar{3}\bar{3}}, \quad c_{(r)} = 1 + g_{P_3^-}^3 g_Q^3 g_M^P g_N^Q g^{\bar{M}\bar{N}}, \quad c^{(-)}_{(r)} = c_{(r)}|_{x^3=0} = 1, \quad c^{(+)}_{(r)} = c_{(r)}|_{x^3=1}.$$

Учитывая (3.7.34) – (3.7.36), нетрудно найти выражения для искомым величин (3.7.33). В самом деле, после простых выкладок получим

$$\underline{\mathbb{C}}^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}} = \underline{\mathbb{C}}^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}|_{x^3=0} = (\mu^{(-)} + \alpha^{(-)}) g^{\bar{3}\bar{3}} \left(\underline{\mathbb{E}} + \frac{\lambda^{(-)} + \mu^{(-)} - \alpha^{(-)}}{\mu^{(-)} + \alpha^{(-)}} \mathbf{r}_3^- \mathbf{r}_3^{\bar{3}} \right),$$

$$\underline{\mathbb{C}}'^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}} = \underline{\mathbb{C}}'^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}|_{x^3=0} = \frac{1}{\mu^{(-)} + \alpha^{(-)}} g_{\bar{3}\bar{3}}^{(-)} \left(\underline{\mathbb{E}} - \frac{\lambda^{(-)} + \mu^{(-)} - \alpha^{(-)}}{\lambda^{(-)} + 2\mu^{(-)}} \mathbf{r}_3^- \mathbf{r}_3^{\bar{3}} \right),$$

$$\underline{\mathbb{C}}^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}_{(r)} = \underline{\mathbb{C}}^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}_{(r)}|_{x^3=1} = (\mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) c^{(+)}_{(r)} g^{\bar{3}\bar{3}} \left(\underline{\mathbb{E}} + \frac{\lambda^{(+)} + \mu^{(+)} - \alpha^{(+)}}{(\mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} g_{\bar{3}\bar{3}}^{\dagger} \mathbf{r}_3^{\dagger} \mathbf{r}_3^{\bar{3}} \right), \quad (3.7.37)$$

$$\underline{\mathbb{C}}'^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}_{(r)} = \underline{\mathbb{C}}'^{\bar{3}\bar{3}\bar{3}}_{(r)}|_{x^3=1} = \frac{1}{(\mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} g_{\bar{3}\bar{3}}^{(+)} \left(\underline{\mathbb{E}} - \frac{\lambda^{(+)} + \mu^{(+)} - \alpha^{(+)}}{(\lambda^{(+)} + 2\mu^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} g_{\bar{3}\bar{3}}^{\dagger} \mathbf{r}_3^{\dagger} \mathbf{r}_3^{\bar{3}} \right),$$

$$\lambda^- = \lambda|_{x^3=0}, \quad \mu^- = \mu|_{x^3=0}, \quad \alpha^- = \alpha|_{x^3=0}, \quad \lambda^+ = \lambda|_{x^3=1}, \quad \mu^+ = \mu|_{x^3=1}, \quad \alpha^+ = \alpha|_{x^3=1},$$

$$\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}, \quad \lambda \Rightarrow \gamma, \quad \mu \Rightarrow \delta, \quad \alpha \Rightarrow \beta.$$

Учитывая (3.7.26) и соответствующие соотношения (3.7.37), после простых выкладок из (3.7.30) получим выражения для значений на концах сегмента $[0, 1]$ производных от корректирующих слагаемых по третьей координате в случае неоднородной микрополярной изотропной среды в форме

$$(\partial_3 \mathbf{U}_0)^- = -\frac{g_{33}^{--}}{(\mu^{(-)} + \alpha^{(-)})} \left(\sqrt{g_{33}^{--} P^{\bar{I}}} + P_{(r,N)}^{\bar{3}\bar{I}} \right) \mathbf{r}_I^- - \frac{g_{33}^{--}}{(\lambda^{(-)} + 2\mu^{(-)})} \left(\sqrt{g_{33}^{--} P^{\bar{3}}} + P_{(r,N)}^{\bar{3}\bar{3}} \right) \mathbf{r}_3^-,$$

$$(\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ = \frac{g_{33}^{--}}{(\mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} \left[g_J^{\bar{I}(\dagger)++} P_{0(r)(r)}^{\bar{3}\bar{J}} - \frac{(\lambda^{(+)} + \mu^{(+)} - \alpha^{(+)}) g_{33}^{--}}{(\lambda^{(+)} + 2\mu^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} g_{\bar{3}\bar{I}}^{\dagger} P_{0(r)(r)}^{\bar{3}\bar{J}(\dagger)++} \right] \mathbf{r}_I^+ +$$

$$+ \frac{g_{33}^{--}}{(\mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} \left[\frac{((c^{(+)}_{(r)} - 1) \lambda^{(+)} + (2c^{(+)}_{(r)} - 1) \mu^{(+)} + \alpha^{(+)}) g_{33}^{--}}{(\lambda^{(+)} + 2\mu^{(+)}) c^{(+)}_{(r)}} P_{0(r)(r)}^{\bar{3}\bar{3}\bar{J}(\dagger)++} + g_J^{\bar{3}(\dagger)++} P_{0(r)(r)}^{\bar{3}\bar{J}} \right] \mathbf{r}_3^+,$$

$$\mathbf{U}_{(0)} \Rightarrow \Phi_{(0)}, \quad \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad \lambda \Rightarrow \gamma, \quad \mu \Rightarrow \delta, \quad \alpha \Rightarrow \beta.$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{0(r)(r)}^{(+)+\ddot{n}} &= \mathbf{r}_{(r)}^{\ddot{n}} \cdot \mathbf{P}_{0(r)}^{(+)\ddot{3}} = \mathbf{r}_{(r)}^{\ddot{n}} \cdot (\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(+)+\ddot{n}}} \mathbf{P} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}}) = \sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(+)+\ddot{n}}} P_{(r)}^{(+)+\ddot{n}} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{(+)+\ddot{n}}, \\ P_{(r)}^{(+)\ddot{n}} &= g_{(r)m}^{\ddot{n}} P_{(r)}^{(+)\ddot{m}} = \mathbf{r}_{(r)}^{\ddot{n}} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}\ddot{n}} = g_{(r)m}^{\ddot{n}} P_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}\ddot{m}} = \mathbf{r}_{(r)}^{\ddot{n}} \cdot \mathbf{P}_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}}, \\ \mathbf{P} &\Rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad \lambda \Rightarrow \gamma, \quad \mu \Rightarrow \delta, \quad \alpha \Rightarrow \beta. \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

Если тело имеет постоянную толщину ($g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}} = 0$, $g_{\ddot{I}\ddot{I}}^{\ddot{+}} = 0$, $c_{(r)}^{(+)} = 1$), то из (3.7.38) получим

$$\begin{aligned} (\partial_3 \mathbf{U}_0)^{\ddot{-}} &= -\frac{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}}}{\mu^{(-)} + \alpha^{(-)}} \left(\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}} P^{\ddot{I}\ddot{-}}} + P_{(r,N)}^{(-)\ddot{3}\ddot{I}} \right) \mathbf{r}_{\ddot{I}}^{\ddot{-}} - \frac{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}}}{\lambda + 2\mu^{(-)}} \left(\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}} P^{\ddot{3}\ddot{-}}} + P_{(r,N)}^{(-)\ddot{3}\ddot{3}} \right) \mathbf{r}_{\ddot{3}}^{\ddot{-}}, \\ (\partial_3 \mathbf{U}_0)^{\ddot{+}} &= \frac{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}}}{(\mu^{(+)} + \alpha^{(+)})} \left(\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}} P^{\ddot{I}\ddot{-}}} - P_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}\ddot{I}} \right) \mathbf{r}_{\ddot{I}}^{\ddot{-}} - \frac{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}}}{\lambda + 2\mu^{(+)}} \left(\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{\ddot{-}} P^{\ddot{3}\ddot{-}}} - P_{(r,N)}^{(+)\ddot{3}\ddot{3}} \right) \mathbf{r}_{\ddot{3}}^{\ddot{-}}, \\ \mathbf{U}_{(0)} &\Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{(0)}, \quad \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad \lambda \Rightarrow \gamma, \quad \mu \Rightarrow \delta, \quad \alpha \Rightarrow \beta. \end{aligned} \quad (3.7.40)$$

Учитывая (3.7.38) и (3.7.40), в силу (3.7.30) из (3.7.32) найдем выражения для корректирующих слагаемых $\mathbf{U}_{(0)}$ $\boldsymbol{\Phi}_{(0)}$ в рассматриваемых случаях. С целью сокращения письма выписывать их не будем. Следует заметить, что, например, из первых двух соотношений (3.7.38) и (3.7.40) соответствующие формулы классической теории получаются при $\alpha^{(-)} = 0$ и $\alpha^{(+)} = 0$. Заметим также, что рассматривать различные случаи анизотропии и получить для них из выведенных выше общих соотношений соответствующие данной анизотропии формулы не представляет труда. На получении этих соотношений также с целью сокращения письма останавливаться не будем.

3.7.2 Определение корректирующих слагаемых при постановках задач относительно тензоров напряжений и моментных напряжений

В рассматриваемом случае решение задач приближения (r, N) представляются в виде

$$\mathbf{P}_{(r,N)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3), \quad \boldsymbol{\mu}_{(r,N)}(x', x^3) = \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\mu}_{(r,N)}^{(k)}(x') \hat{U}_k^*(x^3). \quad (3.7.41)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям на боковой грани, но не удовлетворяет условиям на лицевых поверхностях $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$.

1. *Нахождение корректирующих слагаемых в том случае, когда на лицевых поверхностях заданы векторы напряжения и моментного напряжения.* Так как (3.7.41) не удовлетворяют граничным условиям на лицевых поверхностях, то нужно найти добавочные слагаемые

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}_3 \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{r}_3 \boldsymbol{\mu}_0, \quad (3.7.42)$$

которые удовлетворяют условиям:

1) поля тензоров напряжений $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{(r,N)} + \mathbf{P}_0$ и моментных напряжений $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{(r,N)} + \boldsymbol{\mu}_0$ согласованы с краевыми условиями на лицевых поверхностях, которые в данном случае аналогично (3.5.11) представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\ddot{3}} \cdot \mathbf{P}^{(-)} &= -\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(-)}} \mathbf{P}, \quad (\mathbf{r}^{\ddot{3}} - g_{\ddot{P}\ddot{M}}^{\ddot{+}} g_{\ddot{M}\ddot{P}}^{\ddot{+}} \mathbf{r}^{\ddot{M}}) \cdot \mathbf{P}^{(+)} = \sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(+)}} \mathbf{P}, \quad x' \in S^{(-)}, \\ \mathbf{r}^{\ddot{3}} \cdot \boldsymbol{\mu}^{(-)} &= -\sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(-)}} \boldsymbol{\mu}, \quad (\mathbf{r}^{\ddot{3}} - g_{\ddot{P}\ddot{M}}^{\ddot{+}} g_{\ddot{M}\ddot{P}}^{\ddot{+}} \mathbf{r}^{\ddot{M}}) \cdot \boldsymbol{\mu}^{(+)} = \sqrt{g_{\ddot{3}\ddot{3}}^{(+)}} \boldsymbol{\mu}, \quad x' \in S^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.7.43)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{P}} \Big|_{x^3=0} = \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}^{(-)} + \underline{\mathbf{P}}_0^{(-)}, & \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{P}} \Big|_{x^3=1} = \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)}^{(+)} + \underline{\mathbf{P}}_0^{(+)}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\boldsymbol{\mu}} \Big|_{x^3=0} = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}^{(-)} + \underline{\boldsymbol{\mu}}_0^{(-)}, & \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\boldsymbol{\mu}} \Big|_{x^3=1} = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r,N)}^{(+)} + \underline{\boldsymbol{\mu}}_0^{(+)}; \end{aligned} \quad (3.7.44)$$

2) моменты $\underline{\mathbf{P}}_0^{(k)}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_0^{(k)}$ тензорных полей $\underline{\mathbf{P}}_0$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_0$ обращаются в нуль, если $k \leq N$;

3) нормы тензорных полей $\underline{\mathbf{P}}_0$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_0$ можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что выполняются условия

$$\|\underline{\mathbf{P}}_0(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad \|\underline{\boldsymbol{\mu}}_0(x', x^3)\| < \varepsilon, \quad 0 < \delta < x^3 < 1 - \delta, \quad x' \in S^{(-)}.$$

Существование тензорных полей $\underline{\mathbf{P}}_0$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_0$ доказывается аналогично существованию векторных полей \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ (3.7.9)–(3.7.12). Сперва найдем выражение для векторного поля \mathbf{P}_0 , а затем по аналогии выпишем представление для $\boldsymbol{\mu}_0$. Ищем \mathbf{P}_0 в виде

$$\mathbf{P}_0(x', x^3) = \mathbf{B}_m(x') \hat{U}_m^*(x^3) + \mathbf{B}_{m+1}(x') \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \quad (3.7.45)$$

Итак, нужно определить \mathbf{B}_m и \mathbf{B}_{m+1} так, что тензорное поле $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_{(r,N)} + \underline{\mathbf{P}}_0$ ($\underline{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{r}_3 \mathbf{P}_0$) удовлетворяло первым двум равенствам (3.7.43). Учитывая значения ортонормированных смещенных многочленов Чебышева второго рода на концах сегмента (2.5.20), из (3.7.45) получим

$$\begin{aligned} (m+1)\mathbf{B}_m(x') - (m+2)\mathbf{B}_{m+1}(x') &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-1)^m \mathbf{P}_0^{(-)}, \\ (m+1)\mathbf{B}_m(x') + (m+2)\mathbf{B}_{m+1}(x') &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbf{P}_0^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.7.46)$$

Разрешая (3.7.46) относительно \mathbf{B}_m и \mathbf{B}_{m+1} , а затем, учитывая, что на основании первых двух формул (3.7.43) и (3.7.44) имеем соотношения

$$\mathbf{P}_0^{(-)} = -\left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)}\right), \quad \mathbf{P}_0^{(+)} = \sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)},$$

найдем

$$\mathbf{B}_n(x') = \frac{\sqrt{\pi}}{4(n+1)} \left[\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{++(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)} - (-1)^n \left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{--(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)} \right) \right], \quad n = m, m+1. \quad (3.7.47)$$

Подставляя (3.7.47) в (3.7.45), получим окончательное выражение для \mathbf{P}_0

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(x', x^3) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+1)} \left[\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{++(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)} + (-1)^{m+1} \left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{--(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)} \right) \right] \hat{U}_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+2)} \left[\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{++(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)} + (-1)^m \left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{--(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)} \right) \right] \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

Если используем стандартизованные смещенные полиномы Лежандра $\{P_k^*\}_{k=0}^\infty$, то аналогично (3.7.48) (см. также (3.7.10)) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(x', x^3) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{++(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)} + (-1)^{m+1} \left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{--(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)} \right) \right] P_m^*(x^3) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{++(+)} - \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(+)} + (-1)^m \left(\sqrt{g^{33}} \mathbf{P}^{--(-)} + \mathbf{P}_{(r,N)}^{3\cdot(-)} \right) \right] P_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.49)$$

Нетрудно видеть, что выражения для μ_0 аналогично (3.7.48) и (3.7.49) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mu_0(x', x^3) = & \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+1)} \left[\sqrt{g^{33} \mu^{++} - \mu_{(r,N)}^{+3}} + (-1)^{m+1} (\sqrt{g^{33} \mu^{--} + \mu_{(r,N)}^{-3}}) \right] \hat{U}_m^*(x^3) + \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{4(m+2)} \left[\sqrt{g^{33} \mu^{++} - \mu_{(r,N)}^{+3}} + (-1)^m (\sqrt{g^{33} \mu^{--} + \mu_{(r,N)}^{-3}}) \right] \hat{U}_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.50)$$

$$\begin{aligned} \mu_0(x', x^3) = & \frac{1}{2} \left[\sqrt{g^{33} \mu^{++} - \mu_{(r,N)}^{+3}} + (-1)^{m+1} (\sqrt{g^{33} \mu^{--} + \mu_{(r,N)}^{-3}}) \right] P_m^*(x^3) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\sqrt{g^{33} \mu^{++} - \mu_{(r,N)}^{+3}} + (-1)^m (\sqrt{g^{33} \mu^{--} + \mu_{(r,N)}^{-3}}) \right] P_{m+1}^*(x^3), \quad m > N. \end{aligned} \quad (3.7.51)$$

Не представляет труда проверить, что получаемые из (3.7.42) с учетом (3.7.48)–(3.7.51) корректирующие слагаемые удовлетворяют всем вышеуказанным требованиям. Таким образом, найдены их явные выражения, чем и доказано их существование.

2. Если на лицевых поверхностях заданы векторы перемещения и вращения, то сформулировать граничные условия в тензорах напряжений и моментных напряжений в общем виде невозможно. Например, в случае классической теории упругости эти условия будут содержать некоторые криволинейные интегралы от компонент тензора напряжений и их производных, которые получатся, если в формулах Чезаро учесть выражения для компонент тензора деформаций через компоненты тензора напряжений по закону Гука. Аналогичная картина имеет место и в случае микрополярной теории. Следует отметить, что в плоской задаче теории упругости в некоторых частных случаях соответствующие соотношения удастся довести до конца.

3.8 О способе В.В.Понятовского удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела при применении систем ортогональных полиномов

При этом способе компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, которые не участвуют в граничных условиях на лицевых поверхностях, разлагаются в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов, а остальные компоненты определяются через них из уравнений равновесия таким образом, чтобы они удовлетворяли указанным выше граничным условиям.

Следует заметить, что этот способ при построении классической теории (однослойных и многослойных) пластин постоянной толщины в случае отсутствия объемных сил и касательных напряжений на лицевых поверхностях применял В.В.Понятовский в своих замечательных работах [354–358].

Ниже рассмотрен этот способ удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях при построении классической теории призматических тонких тел с одним малым размером постоянной толщины при классической параметризации области тонкого тела с учетом объемных сил и непрерывно распределенных напряжений на лицевых поверхностях. Доказано, что такой способ представления компонент тензора напряжений эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе классических ортогональных полиномов.

Рассмотрим призматическое тело постоянной толщины $2h$. В качестве базовой плоскости возьмем срединную плоскость. Плоскость $x^1 x^2$ декартовой системы координат $x^1 x^2 x^3$ совместим со срединной плоскостью. Ось x^3 направим вертикально вверх. Используем классическую параметризацию. Тогда, очевидно, $-h \leq x^3 \leq h$.

Уравнения равновесия для данного призматического тела можно записать в виде

$$P_{IJ,J} + P_{I3,3} + \rho F_I = 0, \quad P_{3J,J} + P_{33,3} + \rho F_3 = 0. \quad (3.8.1)$$

Согласно предложенному выше способу представления компонент тензора напряжений компоненты P_{IJ} разлагаем в ряды, например, по системе полиномов Лежандра

$$P_{IJ} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{IJ}^{(k)} P_k(\omega), \quad \omega = \frac{x^3}{h}, \quad (3.8.2)$$

а выражения для компонент P_{i3} находим из уравнений равновесия (3.8.1) с помощью моментов компонент P_{IJ} и объемных сил.

Интегрируя первое соотношение (3.8.1) от $-h$ до x^3 , получим

$$P_{I3} = P_{I3}^{(-)} - \partial_J \int_{-h}^{x^3} P_{IJ} dx^3 - \int_{-h}^{x^3} \rho F_I dx^3. \quad (3.8.3)$$

Из (3.8.1) видно, что для нахождения выражения для P_{I3} надо найти выражение для интеграла $\int_{-h}^{x^3} P_{IJ} dx^3$ с учетом (3.8.2).

Учитывая

$$\int_{-1}^1 P_0 d\omega = \omega + 1, \quad \int_{-1}^1 P_k d\omega = \frac{1}{2k+1} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)], \quad k \geq 1, \quad (3.8.4)$$

после простых выкладок получим

$$\int_{-h}^{x^3} P_{IJ} dx^3 = h P_{IJ}^{(0)} [P_1(\omega) + 1] + h \sum_{k=1}^{\infty} P_{IJ}^{(k)} \frac{1}{2k+1} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.5)$$

Нетрудно заметить, что если объемные силы аналогично (3.8.2) представить в виде

$$\rho F_i = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_i^{(k)} P_k(\omega), \quad (3.8.6)$$

то подобно (3.8.5) будем иметь

$$\int_{-h}^{x^3} F_i dx^3 = h \Phi_i^{(0)} [P_1(\omega) + 1] + h \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_i^{(k)} \frac{1}{2k+1} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.7)$$

Учитывая (3.8.5) и (3.8.7) при $i = I$, из (3.8.3) получим

$$P_{I3} = P_{I3}^{(-)} - h (P_{IJ,J}^{(0)} + \Phi_I^{(0)}) [P_1(\omega) + 1] - h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.8)$$

С целью сокращения письма введем обозначения

$$T_I = P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}, \quad T = T_{I,I} = P_{IJ,IJ}^{(k)} + \Phi_{I,I}^{(k)}, \quad Q = P_{3J,J}^{(k)} + \Phi_3^{(k)} \quad (3.8.9)$$

и приведем сумму в (3.8.8) к другому виду. Нетрудно видеть, что для суммы, входящей в (3.8.8) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_I^{(k)}}{2k+1} P_{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_I^{(k)}}{2k+1} P_{k-1} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} P_k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} P_k = -\frac{1}{3} T_I^{(1)} - T_I^{(0)} P_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} - \frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} \right) P_k, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}) [P_{k+1} - P_{k-1}] &= -\frac{1}{3} T_I^{(1)} - T_I^{(0)} P_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} - \frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} \right) P_k(\omega), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \Phi_i^{(k)} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)] &= -\frac{1}{3} \Phi_i^{(1)} - \Phi_i^{(0)} P_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Phi_i^{(k-1)}}{2k-1} - \frac{\Phi_i^{(k+1)}}{2k+3} \right) P_k(\omega), \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

где вторая формула написана по аналогии первой.

Учитывая первое соотношение (3.8.10), из (3.8.8) получим еще одно следующее представление компонент P_{I3} :

$$P_{I3} = P_{I3}^{(-)} - h T_I^{(0)} + \frac{1}{3} T_I^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} - \frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} \right) P_k. \quad (3.8.11)$$

Применим теперь к уравнениям равновесия (3.8.1) оператор моментов k -го порядка какой-либо системы ортогональных полиномов и представим их в моментах. В силу обозначений (3.8.9) будем иметь

$$T_I^{(k)} + \frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(k)} = 0, \quad Q^{(k)} + \frac{1}{h} P'_{33}{}^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (3.8.12)$$

Заметим, что система уравнений (3.8.12) верна для любой системы ортогональных полиномов. При применении системы полиномов Лежандра в силу представления "штрих" оператора система уравнений (3.8.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_I^{(k)} &= -\frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(k)} = -\frac{2k+1}{2h} \left\{ (P_{I3}^{(+)} - (-1)^k P_{I3}^{(-)}) + \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] P_{I3}^{(p)} \right\}, \\ Q^{(k)} &= -\frac{1}{h} P'_{33}{}^{(k)} = -\frac{2k+1}{2h} \left\{ (P_{33}^{(+)} - (-1)^k P_{33}^{(-)}) + \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] P_{33}^{(p)} \right\}, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

Нетрудно доказать, что в силу (3.8.13) имеют место соотношения

$$\frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} - \frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} = \frac{1}{h} P_{I3}^{(k)}, \quad \frac{Q^{(k+1)}}{2k+3} - \frac{Q^{(k-1)}}{2k-1} = \frac{1}{h} P_{33}^{(k)}, \quad k \geq 1. \quad (3.8.14)$$

Выпишем теперь несколько первых уравнений на основании (3.8.13). Нетрудно заметить, что из первого уравнения (3.8.13) находим

$$\begin{aligned} T_I^{(0)} &= -\frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(0)} = -\frac{1}{2h} (P_{I3}^{(+)} - P_{I3}^{(-)}), \\ T_I^{(1)} &= -\frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(1)} = -\frac{3}{2h} (P_{I3}^{(+)} + P_{I3}^{(-)}) + \frac{3}{h} P_{I3}^{(0)}, \\ T_I^{(2)} &= -\frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(2)} = -\frac{5}{2h} (P_{I3}^{(+)} - P_{I3}^{(-)}) + \frac{5}{h} P_{I3}^{(1)}, \\ T_I^{(3)} &= -\frac{1}{h} P'_{I3}{}^{(3)} = -\frac{7}{2h} (P_{I3}^{(+)} + P_{I3}^{(-)}) + \frac{7}{h} (P_{I3}^{(0)} + P_{I3}^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

Видно, что подобные (3.8.15) соотношения из второго уравнения (3.8.13) получим, если T_I и P_{I3} в (3.8.15) заменить на Q и P_{33} соответственно. Будем иметь

$$\begin{aligned} Q &= P_{I3,I}^{(0)} + \Phi_3^{(0)} = -\frac{1}{h} P_{33}'^{(0)} = -\frac{1}{2h} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}), \\ Q &= P_{I3,I}^{(1)} + \Phi_3^{(1)} = -\frac{1}{h} P_{33}'^{(1)} = -\frac{3}{2h} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) + \frac{3}{h} P_{33}^{(0)}, \\ Q &= P_{I3,I}^{(2)} + \Phi_3^{(2)} = -\frac{1}{h} P_{33}'^{(2)} = -\frac{5}{2h} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) + \frac{5}{h} P_{33}^{(1)}, \\ Q &= P_{I3,I}^{(3)} + \Phi_3^{(3)} = -\frac{1}{h} P_{33}'^{(3)} = -\frac{7}{2h} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) + \frac{7}{h} (P_{33}^{(0)} + P_{33}^{(2)}). \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

Далее на основании (3.8.15) дадим различные представления компонент P_{I3} таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия. Например, в силу первого уравнения (3.8.15) из (3.8.8) имеем

$$P_{I3} = P_{I3}^{(-)} + \frac{1}{2} (P_{I3}^{(+)} - P_{I3}^{(-)}) [P_1(\omega) + 1] - h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.17)$$

Выделим теперь из суммы в (3.8.17) одно слагаемое и в полученном соотношении учтем второе уравнение (3.8.15). После простых выкладок получим

$$\begin{aligned} P_{I3} &= [1 - P_2(\omega)] P_{I3}^{(0)} + \frac{1}{2} (P_{I3}^{(+)} - P_{I3}^{(-)}) P_1(\omega) + \frac{1}{2} (P_{I3}^{(+)} + P_{I3}^{(-)}) P_2(\omega) - \\ &\quad - h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (P_{IJ,J}^{(k)} + \Phi_I^{(k)}) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

Легко проверить, что при представлениях P_{I3} в виде (3.8.17) и (3.8.18) удовлетворяются соответствующие граничные условия на лицевых поверхностях.

Заменяя сумму в (3.8.18) на основании первого соотношения (3.8.10), а затем в полученном соотношении учитывая третье и четвертое уравнения из (3.8.15), будем иметь

$$P_{I3} = P_{I3}^{(0)} + P_{I3}^{(1)} P_1(\omega) + P_{I3}^{(2)} P_2(\omega) + h \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} - \frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} \right) P_k(\omega).$$

Отсюда в силу первого равенства (3.8.14) находим

$$P_{I3} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{I3}^{(k)} P_k(\omega). \quad (3.8.19)$$

Очевидно, представляя P_{I3} в виде ряда (3.8.14), в силу первого равенства (3.8.14) и системы уравнений равновесия в моментах (см. (3.8.13), а также (3.8.15)) можно получить различные выражения для P_{I3} , в том числе и выведенные выше, таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия на лицевых поверхностях.

Таким образом, если P_{IJ} представляем в виде ряда (3.8.2), то нахождение P_{I3} из уравнений равновесия с помощью моментов $P_{IJ}^{(k)}$ и $\Phi_I^{(k)}$ эквивалентно представлению P_{I3} в виде ряда (3.8.19). Забегая вперед, скажем, что аналогичная картина имеет место и для P_{33} .

Нетрудно заметить, что в силу первого равенства (3.8.10) соотношение (3.8.18) можно еще представить в виде

$$\begin{aligned} P_{I3} &= [1 - P_2(\omega)] P_{I3}^{(0)} + \frac{1}{2} (P_{I3}^{(+)} - P_{I3}^{(-)}) P_1(\omega) + \frac{1}{2} (P_{I3}^{(+)} + P_{I3}^{(-)}) P_2(\omega) + \\ &\quad + \frac{h}{5} T_I^{(2)} P_1(\omega) + \frac{h}{7} T_I^{(3)} P_2(\omega) + h \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{T_I^{(k+1)}}{2k+3} - \frac{T_I^{(k-1)}}{2k-1} \right) P_k(\omega). \end{aligned} \quad (3.8.20)$$

Учитывая выражения для $\overset{(0)}{P}_{I3}$, получаемое из второго равенства (3.8.15), формулу (3.8.20) можно записать в форме

$$P_{I3} = \frac{1}{2}(\overset{(+)}{P}_{I3} + \overset{(-)}{P}_{I3}) + \frac{1}{2}(\overset{(+)}{P}_{I3} - \overset{(-)}{P}_{I3})P_1(\omega) + \frac{h^{(1)}}{3}T_I + \frac{h^{(2)}}{5}T_I P_1(\omega) + h \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\overset{(k+1)}{T}_I}{2k+3} - \frac{\overset{(k-1)}{T}_I}{2k-1} \right) P_k(\omega). \quad (3.8.21)$$

Интегрируя теперь второе соотношение (3.8.1) от $-h$ до x^3 , аналогично (3.8.3) найдем

$$P_{33} = \overset{(-)}{P}_{33} - \partial_J \int_{-h}^{x^3} P_{I3} dx^3 - \int_{-h}^{x^3} \rho F_3 dx^3. \quad (3.8.22)$$

Далее, учитывая (3.8.4) и (3.8.21), после простых выкладок будем иметь

$$\int_{-h}^{x^3} P_{I3} dx^3 = \frac{h}{2}(\overset{(+)}{P}_{I3} + \overset{(-)}{P}_{I3})[P_1(\omega) + 1] + \frac{h}{6}(\overset{(+)}{P}_{I3} - \overset{(-)}{P}_{I3})[P_2(\omega) - 1] + \frac{h^2}{3}T_I(P_1 + 1) + \frac{h^2}{15}T_I[P_2(\omega) - 1] + h^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\overset{(k+1)}{T}_I}{2k+3} - \frac{\overset{(k-1)}{T}_I}{2k-1} \right) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.23)$$

Приведем сумму в (3.8.23) к другому виду. Осуществляя простые выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\overset{(k+1)}{T}_I}{2k+3} - \frac{\overset{(k-1)}{T}_I}{2k-1} \right) [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)] &= \left(\frac{1}{15}T_I^{(1)} - \frac{1}{35}T_I^{(3)} \right) P_1(\omega) + \\ &+ \left(\frac{1}{3}T_I^{(0)} - \frac{1}{15}T_I^{(2)} \right) P_2 - \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\overset{(k-2)}{T}_I}{(2k-3)(2k-1)} - \frac{2\overset{(k)}{T}_I}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{\overset{(k+2)}{T}_I}{(2k+3)(2k+5)} \right] P_k = \\ &= \frac{1}{15}T_I^{(1)}[P_1(\omega) - P_3(\omega)] + \frac{1}{15}T_I^{(2)}[1 - P_2(\omega)] - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \overset{(k)}{T}_I \left[\frac{P_{k-2}(\omega)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\omega)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\omega)}{(2k+1)(2k+3)} \right]. \end{aligned} \quad (3.8.24)$$

На основании (3.8.24) из (3.8.23) получим

$$\int_{-h}^{x^3} P_{I3} dx^3 = \frac{h}{2}(\overset{(+)}{P}_{I3} + \overset{(-)}{P}_{I3})(P_1 + 1) + \frac{h}{6}(\overset{(+)}{P}_{I3} - \overset{(-)}{P}_{I3})(P_2 - 1) - \frac{h^2}{15}T_I(P_3 - 6P_1 - 5) - h^2 \sum_{k=2}^{\infty} \overset{(k)}{T}_I \left[\frac{P_{k-2}(\omega)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\omega)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\omega)}{(2k+1)(2k+3)} \right]. \quad (3.8.25)$$

Учитывая (3.8.7) при $i = 3$ и (3.8.25), из (3.8.22) будем иметь

$$\begin{aligned} P_{33} &= \overset{(-)}{P}_{33} - \frac{h}{2}(\overset{(+)}{P}_{I3,I} + \overset{(-)}{P}_{I3,I})(P_1 + 1) - \frac{h}{6}(\overset{(+)}{P}_{I3,I} - \overset{(-)}{P}_{I3,I})(P_2 - 1) + \frac{h^2}{15}T_I(P_3 - 6P_1 - 5) + \\ &+ h^2 \sum_{k=2}^{\infty} \overset{(k)}{T}_I \left[\frac{P_{k-2}(\omega)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\omega)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\omega)}{(2k+1)(2k+3)} \right] - \\ &- h\overset{(0)}{\Phi}_3[P_1(\omega) + 1] - h \sum_{k=1}^{\infty} \overset{(k)}{\Phi}_3 \frac{1}{2k+1} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \end{aligned} \quad (3.8.26)$$

Нетрудно заметить, что в силу вторых соотношений (3.8.15) и (3.8.16) находим

$$T = - \left[\frac{3}{2h} (P_{I3,I}^{(+)} + P_{I3,I}^{(-)}) + \frac{3}{h} \Phi_3^{(0)} + \frac{3}{2h^2} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) \right]. \quad (3.8.27)$$

Обозначим сумму слагаемых в (3.8.26), за исключением сумм, через A . Тогда в силу (3.8.27) ее можно представить в виде

$$A = \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) + \frac{1}{10} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) [6P_1(\omega) - P_3(\omega)] + \\ + \frac{h}{6} (P_{I3,I}^{(+)} - P_{I3,I}^{(-)}) [1 - P_2(\omega)] + \left[\frac{h}{10} (P_{I3,I}^{(+)} + P_{I3,I}^{(-)}) + \frac{h}{5} \Phi_3^{(0)} \right] [P_1(\omega) - P_3(\omega)]. \quad (3.8.28)$$

Нетрудно заметить, что на основании формул (3.8.15) и (3.8.16) из (3.8.28) можно исключить касательные напряжения и представить его в различных видах. В самом деле, например, из вторых и третьих соотношений (3.8.15) и (3.8.16) буде иметь

$$P_{I3,I}^{(+)} + P_{I3,I}^{(-)} = -\frac{2h^{(1)}}{3} T - \frac{1}{h} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) - 2\Phi_3^{(0)}, \\ P_{I3,I}^{(+)} - P_{I3,I}^{(-)} = -\frac{2h^{(2)}}{5} T - \frac{3}{h} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) + \frac{6}{h} P_{33}^{(0)} - 2\Phi_3^{(1)}. \quad (3.8.29)$$

Учитывая (3.8.29), соотношение (3.8.28) можно записать в форме

$$A = [1 - P_2(\omega)] P_{33}^{(0)} + \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) P_1(\omega) + \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) P_2(\omega) + \\ + \left(\frac{h^2}{15} T + \frac{h}{3} \Phi_3^{(1)} \right) [P_2(\omega) - 1] + \frac{h^2}{15} T [P_3(\omega) - P_1(\omega)]. \quad (3.8.30)$$

На основании (3.8.28) и (3.8.30) соотношение (3.8.26) можно представить в следующих формах:

$$P_{33} = \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) + \frac{1}{10} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) [6P_1(\omega) - P_3(\omega)] + \\ + \frac{h}{6} (P_{I3,I}^{(+)} - P_{I3,I}^{(-)}) [1 - P_2(\omega)] + \left[\frac{h}{10} (P_{I3,I}^{(+)} + P_{I3,I}^{(-)}) + \frac{h}{5} \Phi_3^{(0)} \right] [P_1(\omega) - P_3(\omega)] + \\ + h^2 \sum_{k=2}^{\infty} T^{(k)} \left[\frac{P_{k-2}(\omega)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\omega)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\omega)}{(2k+1)(2k+3)} \right] - \\ - h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \Phi_3^{(k)} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)] = \\ = [1 - P_2(\omega)] P_{33}^{(0)} + \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} - P_{33}^{(-)}) P_1(\omega) + \frac{1}{2} (P_{33}^{(+)} + P_{33}^{(-)}) P_2(\omega) + \\ + \frac{h^2}{15} T [P_2(\omega) - 1] + \frac{h^2}{15} T [P_3(\omega) - P_1(\omega)] + \\ + h^2 \sum_{k=2}^{\infty} T^{(k)} \left[\frac{P_{k-2}(\omega)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\omega)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\omega)}{(2k+1)(2k+3)} \right] - \\ - h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \Phi_3^{(k)} [P_{k+1}(\omega) - P_{k-1}(\omega)]. \quad (3.8.31)$$

Следует заметить, что в силу (3.8.24) соотношения (3.8.31) можно представить еще в других видах. С целью сокращения письма выписывать их не будем. Важен тот факт, что существуют различные представления компонент P_{i3} , удовлетворяющие граничным условиям на лицевых поверхностях.

Заметим также, что И.Н.Векуа, представляя компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в виде [68]

$$\begin{aligned} P_{IJ} &= P_{IJ}^{(0)} + P_{IJ}^{(1)} P_1(\omega), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} P_1(\omega) + \mathbf{u}^{(2)} P_2(\omega), \\ P_{i3} &= [1 - P_2(\omega)] P_{i3}^{(0)} + \frac{1}{2} (P_{i3}^{(+)} - P_{i3}^{(-)}) P_1(\omega) + \frac{1}{2} (P_{i3}^{(+)} + P_{i3}^{(-)}) P_2(\omega), \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

построил расширенную теорию оболочек и дал общее решение системы уравнений теории пластин, вытекающей из этой расширенной теории оболочек. Видно, что представления компонент P_{i3} с помощью соответствующих формул (3.8.32) являются частным случаем приведенных выше представлений. Кроме того, отметим, что приведенные выше представления компоненты P_{33} эквивалентны разложению этой компоненты в ряд по системе полиномов Лежандра (доказывается аналогично приведенному выше доказательству для компонент P_{I3}), а также представления компонент в форме В.В.Понятовского получаются из приведенных выше представлений при отсутствии объемных сил и касательных напряжений на лицевых поверхностях.

Зная представления компонент тензора напряжений, с помощью закона Гука нетрудно найти выражения для компонент тензора деформаций, посредством которых в свою очередь можно определить вектор перемещений.

Наконец, отметим, что приведенный выше способ легко обобщается на микрополярную теорию. Отметим также, что материал этой главы изложен в [303].

Глава 4

Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных упругих тонких тел с одним малым размером при произвольной базовой поверхности

4.1 Параметризации области тонкого тела. Представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения и определяющих соотношений

Рассмотрены некоторые вопросы о параметризации при произвольной базовой поверхности области трехмерного тонкого тела с одним малым размером. Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики. В частности, рассмотрены различные семейства базисов (реперов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций. Получены выражения для компонент ЕТВР. Даны представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения и ОС микрополярной теории упругости при рассматриваемой параметризации области тонкого тела.

4.1.1 К параметризации области тонкого тела с одним малым размером при произвольной базовой поверхности

Пусть V – область трехмерного евклидова пространства, занятая тонким телом. Рассмотрим некоторую регулярную поверхность $S \in C_m$, $m \geq 3$, обладающую следующим свойством: из любой точки области V на поверхность S можно опустить нормаль, пересекающую только в одной точке. Вообще говоря, поверхность может вовсе не принадлежать области V или лишь частично с ней пересекаться. Для определенности предположим, что $S \subset V$.

Пусть Σ – совокупность боковых поверхностей тонкого тела. Если имеем замкнутое тело, то Σ отсутствует. Будем предполагать, что S и Σ пересекаются в каждой точке под прямым углом. При этом считаем, что Σ – линейчатые поверхности. Следовательно, их образующие являются нормальными к S . В качестве S , конечно, можно рассматривать и серединную поверхность тонкого тела.

Таким образом, при выборе поверхности S , которая называется базовой поверхностью (базой) параметризации области тонкого тела, имеется довольно широкий произвол. По-

этому следует учесть это обстоятельство и при расчете конкретных тонких тел выбирать в качестве базы параметризации поверхности сравнительно простой структуры (например, плоскость, сферу, цилиндр и т.д.). Следует учесть еще одно обстоятельство. Задачи теории тонких тел по своей механической природе относятся к классу задач, допускающих довольно грубые приближения. Поэтому существенно не искажая механической и математической картин напряженно-деформированного состояния тонкого тела, данные задачи можно выражать различными приближениями, позволяющими получить для рассматриваемой задачи сравнительно простую математическую модель с целью упрощения соответствующей математической теории. В частности, значительного упрощения можно добиться подходящим выбором базовой поверхности параметризации. Замена одной базовой поверхности другой, имеющей более простые геометрические характеристики, может привести к более простым уравнениям, при этом существенно не искажая механическую природу задачи.

Очертания тонкого тела определяются его лицевыми поверхностями. В качестве лицевых поверхностей тонкое тело может иметь кусочно гладкие поверхности. При этом без существенного искажения механической задачи можем считать, что гладкие части лицевых поверхностей являются сколь угодно гладкими. В частности, их можно считать аналитическими поверхностями. Лицевые поверхности тонкого тела обозначим $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ [68].

4.1.1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (на рис. 4.1 показано нормальное сечение тонкого тела)

$$\hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + [\bar{h}(x^1, x^2) + x^3 h(x^1, x^2)] \mathbf{n}(x^1, x^2), \quad -1 \leq x^3 \leq 1$$

или коротко

$$\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = \mathbf{r}(x') + z(x', x^3) \mathbf{n}(x'), \quad z(x', x^3) = \bar{h}(x') + x^3 h(x'), \quad -1 \leq x^3 \leq 1, \quad (4.1.1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x')$ является векторным параметрическим уравнением базовой поверхности S (на рис. 4.1 показано сечение этой поверхности с нормальным сечением тела), $x' = (x^1, x^2)$ — произвольная точка на S , т.е. x^1 и x^2 — криволинейные (гауссовы) координаты на базовой поверхности S , $\bar{h}(x') = [\bar{h}^{(+)}(x') - \bar{h}^{(-)}(x')]/2$, $h(x') = [\bar{h}^{(+)}(x') + \bar{h}^{(-)}(x')]/2$, $\mathbf{n}(x')$ — единичный вектор нормали к S в точке x' , $\bar{h}^{(-)}(x')$ — расстояние от точки x' до соответствующей точки поверхности $S^{(-)}$, $\bar{h}^{(+)}(x')$ — расстояние от той же точки x' до соответствующей точки поверхности $S^{(+)}$ (на рис. 4.1 показаны сечения этих поверхностей с нормальным сечением тела), $2h(x') = \bar{h}^{(+)}(x') + \bar{h}^{(-)}(x')$ — толщина тонкого тела в точке x' . Заметим, что точка O , вообще говоря, не принадлежит плоскости рисунка.

Нетрудно видеть, что (4.1.1) при $\forall x'$ и $x^3 = -1$ определяет лицевую поверхность $S^{(-)}$, векторное параметрическое уравнение которой будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{r}}^{(-)}(x') = \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) \Big|_{x^3=-1} = \mathbf{r}(x') - \bar{h}^{(-)}(x') \mathbf{n}(x'), \quad (4.1.2)$$

при $\forall x'$ и $x^3 = 1$ — лицевую поверхность $S^{(+)}$, векторное параметрическое уравнение которой представится в форме

$$\hat{\mathbf{r}}^{(+)}(x') = \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) \Big|_{x^3=1} = \mathbf{r}(x') + \bar{h}^{(+)}(x') \mathbf{n}(x'), \quad (4.1.3)$$

а при $\forall x'$ и $x^3 = const$, где $x^3 \in (-1, 1)$ — эквидистантную от базой S поверхность \hat{S} .

Очевидно, соотношение (4.1.1) при $x' \in S$ и $x^3 \in [-1, 1]$ не что иное, как векторное параметрическое уравнение области тонкого тела.

4.1.1.2 Двумерные семейства реперов (базисов)

Обозначим через M точку x' базовой поверхности S , а через $\overset{(-)}{M}$, $\overset{(+)}{M}$ и \hat{M} — соответствующие точки M точки на лицевых поверхностях $\overset{(-)}{S}$, $\overset{(+)}{S}$ и \hat{S} определяемые с помощью (4.1.1) при $x^3 = -1$, $x^3 = 1$ и $x^3 = const \neq \pm 1$ соответственно. Для производных по x^P от $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$ и $\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, введем соответственно обозначения¹ $\mathbf{r}_{\hat{P}} = \partial_P \hat{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}_{\overset{(\sim)}{P}} = \partial_P \overset{(\sim)}{\mathbf{r}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ соответственно. Нетрудно заметить, что в силу (4.1.1)–(4.1.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{P}} &= [g_P^Q - z(x', x^3)b_P^Q] \mathbf{r}_Q + \partial_P z(x', x^3) \mathbf{n}, & \partial_P z(x', x^3) &= \partial_P \bar{h}(x') + x^3 \partial_P h(x'), \\ \mathbf{r}_{\overset{(-)}{P}} &= (g_P^Q + h b_P^Q) \mathbf{r}_Q - \partial_P h \mathbf{n}, & \mathbf{r}_{\overset{(+)}{P}} &= (g_P^Q - h b_P^Q) \mathbf{r}_Q + \partial_P h \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

При написании формул (4.1.4) были использованы дериационные формулы Вейнгартена $\mathbf{n}_P = \partial_P \mathbf{n} = -b_P^Q \mathbf{r}_Q = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}_P$, где \mathbf{b} — второй тензор поверхности S .

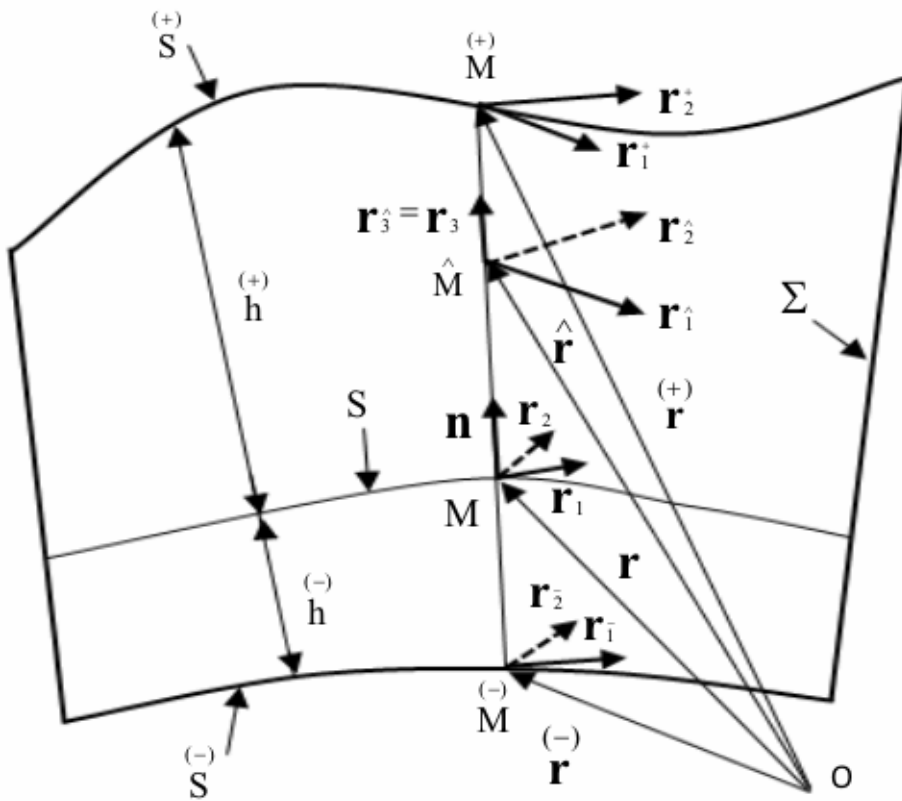


Рис. 4.1: Нормальное сечение тонкого тела

Пары векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, определенные в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, а $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$ — двумерные ковариантные поверхностные реперы. По этим реперам (базисам) можно построить контравариантные реперы $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^{*} \mathbf{r}_2^{*}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$ (базисы $\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$)

¹ В дальнейшем, как и выше, применяются краткие записи типа $\overset{(\sim)}{M} \in \overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$ или $\mathbf{r}_{\hat{P}} = g_P^{\hat{q}} \mathbf{r}_{\hat{q}}$, $\sim, \sim \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, где \emptyset — пустое множество. Первая запись означает: если $\sim = -$, то $\overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}$; если $\sim = \emptyset$, то $M \in S$; если $\sim = \wedge$, то $\hat{M} \in \hat{S}$; если $\sim = +$, то $\overset{(+)}{M} \in \overset{(+)}{S}$. Вторая запись означает, что, если, например, $\sim = \emptyset$, $\sim = -$, то $\mathbf{r}_P = g_P^{\hat{q}} \mathbf{r}_{\hat{q}}$; если $\sim = \wedge$, $\sim = \emptyset$, то $\mathbf{r}_{\hat{P}} = g_P^{\hat{q}} \mathbf{r}_{\hat{q}}$ и т.д. Перебирая все значения, получим все соотношения.

с помощью соответствующих формул аналогично тому, как это делается при новой параметризации в [234, 276]. Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные им геометрические характеристики. В частности, можно определить следующие матрицы:

$$g_{\tilde{I}\tilde{J}} = \mathbf{r}_{\tilde{I}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{J}}, \quad g_{\tilde{I}}^{\tilde{J}} = \mathbf{r}_{\tilde{I}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{J}}, \quad g^{\tilde{I}\tilde{J}} = \mathbf{r}^{\tilde{I}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{J}}, \quad \sim, \smile \in * \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \quad (4.1.5)$$

Определяя в произвольных точках поверхностей $S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, реперы (базисы), получим соответствующие семейства реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Таким образом, всякое семейство гауссовых параметров на базовой поверхности S , порождает соответствующие семейства реперов (базисов) и, следовательно, параметризаций на поверхности $S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$. В связи с вышеизложенным можно ввести следующие определения:

Определение 4.1.1. Множество двумерных ковариантных и контравариантных реперов $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$ и $M\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2$, называется $S^{(*)}$ -семейством ковариантных и контравариантных реперов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, а их объединение — $S^{(*)}$ -семейством реперов, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.2. Множество двумерных ковариантных и контравариантных базисов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ и $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$, называется $S^{(*)}$ -семейством ковариантных и контравариантных базисов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, а их объединение — $S^{(*)}$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.3. Порожденное $S^{(*)}$ -семейством реперов множество параметризаций называется $S^{(*)}$ -семейством параметризаций, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.4. Порожденное $S^{(*)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $S^{(*)}$ -семейством геометрических характеристик, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.5. Компоненты, имеющие векторы, представленные в $S^{(*)}$ -семействе базисов, называются $S^{(*)}$ -семейством компонент, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

4.1.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов)

Дифференцируя (4.1.1) по x^3 , получим

$$\mathbf{r}_{\tilde{3}} = \partial_3 \hat{\mathbf{r}} = h(x') \mathbf{n}(x'), \quad \forall x^3 \in [-1, 1]. \quad (4.1.6)$$

В силу (4.1.6) можно принять, что

$$\mathbf{r}_{\tilde{3}} = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_{\tilde{3}} = \mathbf{r}_3 = h(x') \mathbf{n}(x'), \quad \forall x^3 \in [-1, 1]. \quad (4.1.7)$$

На основании соотношения (4.1.4) и (4.1.7) в точках $M \in S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, можно определить пространственные ковариантные базисы \mathbf{r}_p^* , $* \in \{-, \emptyset, +\}$. Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках $M \in S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, — один и тот же вектор $\mathbf{r}_3 = h(x') \mathbf{n}(x')$.

Ввиду (4.1.7) первое соотношение (4.1.4) и (4.1.6) можно представить одной формулой

$$\mathbf{r}_p = [g_p^q - z(x', x^3) b_p^q + h^{-1} \partial_M z(x', x^3) g_p^M g_3^q] \mathbf{r}_q. \quad (4.1.8)$$

Аналогично (4.1.8) с помощью последних двух формул (4.1.4) и (4.1.7) имеем

$$\mathbf{r}_p^- = \left(g_p^q + \overset{(-)}{h} b_p^q - h^{-1} \partial_M \overset{(-)}{h} g_p^M g_3^q \right) \mathbf{r}_q, \quad \mathbf{r}_p^+ = \left(g_p^q - \overset{(+)}{h} b_p^q + h^{-1} \partial_M \overset{(+)}{h} g_p^M g_3^q \right) \mathbf{r}_q. \quad (4.1.9)$$

В соотношениях (4.1.8) и (4.1.9) $b_p^q = g_p^M g_N^q b_M^N$ являются компонентами расширенного второго тензора поверхности S [67, 68, 276]. Нетрудно заметить, что формулы (4.1.9) получаются и из (4.1.8) при $x^3 = -1$ и $x^3 = 1$ соответственно.

Тройки векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, определенные в точках $M \in S$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, образуют трехмерные (пространственные) ковариантные базисы, а $M \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, — трехмерные пространственные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам) можно построить соответствующие им контравариантные реперы $M \mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$ (базисы $\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$), $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$. В самом деле, на основании определения ковариантного базиса [67, 209, 276, 335] имеем

$$\mathbf{r}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2} C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \tilde{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}, \quad (4.1.10)$$

где $C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = (\mathbf{r}^{\tilde{k}} \times \mathbf{r}^{\tilde{p}}) \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}} = (1/\sqrt{\overset{(\sim)}{g}}) \epsilon^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}}$, $\tilde{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, — контравариантные компоненты дискриминантных тензоров [67] в точках $M \in S$, $*$ $\in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, соответственно, а $\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$, $\sim \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Аналогично (4.1.5) введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g^{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \tilde{\sim}, \tilde{\smile} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \quad (4.1.11)$$

В силу первых двух соотношений (4.1.11) и (4.1.8) имеем

$$\begin{aligned} g_{\hat{p}q} &= g_{pq} - z(x', x^3) b_{pq} + h^{-1} \partial_M z(x', x^3) g_p^M g_{3q}, \\ g_{\hat{p}}^q &= g_p^q - z(x', x^3) b_p^q + h^{-1} \partial_M z(x', x^3) g_p^M g_3^q. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Аналогично (4.1.12) с помощью (4.1.9) и первых двух соотношений (4.1.11) находим

$$\begin{aligned} g_{p\hat{q}}^- &= g_{pq} + \overset{(-)}{h} b_{pq} - h^{-1} \partial_M \overset{(-)}{h} g_p^M g_{3q}, & g_{\hat{p}}^q &= g_p^q + \overset{(-)}{h} b_p^q - h^{-1} \partial_M \overset{(-)}{h} g_p^M g_3^q, \\ g_{p\hat{q}}^+ &= g_{pq} - \overset{(+)}{h} b_{pq} + h^{-1} \partial_M \overset{(+)}{h} g_p^M g_{3q}, & g_{\hat{p}}^q &= g_p^q - \overset{(+)}{h} b_p^q + h^{-1} \partial_M \overset{(+)}{h} g_p^M g_3^q. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Легко усмотреть, что из (4.1.12) и (4.1.13) будем иметь

$$g_{\hat{p}3} = h \partial_P z(x', x^3), \quad g_{\hat{p}}^3 = h^{-1} \partial_P z(x', x^3), \quad \mathbf{r}^3 = h^{-1}(x') \mathbf{n}(x'), \quad (4.1.14)$$

$$g_{P\hat{3}}^- = -h \partial_P \overset{(-)}{h}, \quad g_{\hat{p}}^3 = -h^{-1} \partial_P \overset{(-)}{h}, \quad g_{\hat{p}3}^+ = h \partial_P \overset{(+)}{h}, \quad g_{\hat{p}}^3 = h^{-1} \partial_P \overset{(+)}{h}. \quad (4.1.15)$$

В силу второй формулы (4.1.14) соотношения (4.1.12) можно представить в виде

$$g_{\hat{p}q} = g_{pq} - z(x', x^3) b_{pq} + g_M^3 g_p^M g_{3q}, \quad g_{\hat{p}}^q = g_p^q - z(x', x^3) b_p^q + g_M^3 g_p^M g_3^q. \quad (4.1.16)$$

Аналогично (4.1.16) с помощью второй и четвертой формул (4.1.15) соотношения (4.1.13) можно записать в форме

$$\begin{aligned} g_{p\hat{q}}^- &= g_{pq} + \overset{(-)}{h} b_{pq} + g_M^3 g_p^M g_{3q}, & g_{\hat{p}}^q &= g_p^q + \overset{(-)}{h} b_p^q + g_M^3 g_p^M g_3^q, \\ g_{p\hat{q}}^+ &= g_{pq} - \overset{(+)}{h} b_{pq} + g_M^3 g_p^M g_{3q}, & g_{\hat{p}}^q &= g_p^q - \overset{(+)}{h} b_p^q + g_M^3 g_p^M g_3^q. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Заметим, что на основании (4.1.15) формулы (4.1.14) получают вид

$$g_{\hat{P}\hat{3}} = \frac{1}{2}[g_{P_3^+} + g_{P_3^-} + x^3(g_{P_3^+} - g_{P_3^-})], \quad g_{\hat{P}}^3 = \frac{1}{2}[g_{P^+}^3 + g_{P^-}^3 + x^3(g_{P^+}^3 - g_{P^-}^3)]. \quad (4.1.18)$$

Легко видеть, что в силу (4.1.11) между базисными векторами имеет место связь

$$\mathbf{r}_{\hat{p}} = g_{\hat{p}}^{\check{q}} \mathbf{r}_{\check{q}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}, \quad (4.1.19)$$

сохраняющая силу при жонглировании индексами.

На основании (4.1.19) можно доказать справедливость соотношения

$$g_{\hat{p}}^{\check{q}} = g_{\hat{p}}^{\check{n}} g_{\check{n}}^{\check{q}}, \quad \sim, \check{\sim}, * \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}, \quad (4.1.20)$$

сохраняющего силу при жонглировании индексами.

Не представляет труда найти выражения для $g_{\hat{p}\hat{q}}$. В самом деле, с помощью (4.1.16) из (4.1.20) получим

$$g_{\hat{p}\hat{q}} = g_{\hat{p}}^n g_{n\hat{q}} = g_{pq} - 2z(x', x^3)b_{pq} + z^2(x', x^3)b_p^M b_{Mq} + g_{\hat{S}}^3 g_p^S g_{3q} + g_{\hat{T}}^3 g_q^T g_{3q} + g_{33} g_{\hat{S}}^3 g_{\hat{T}}^3 g_p^S g_q^T. \quad (4.1.21)$$

Найдем выражение для $\sqrt{\hat{g}} = (\mathbf{r}_{\hat{1}} \times \mathbf{r}_{\hat{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{3}}$. В силу (4.1.19) при $\sim = \wedge$ и $\check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}$ имеем

$$\sqrt{\hat{g}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_{\hat{I}} \times \mathbf{r}_{\hat{J}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{3}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} g_{\hat{I}}^{\check{K}} g_{\hat{J}}^{\check{L}} (\mathbf{r}_{\check{K}} \times \mathbf{r}_{\check{L}}) \cdot \mathbf{r}_{\check{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(-)}{g}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\hat{I}}^{\check{K}} g_{\hat{J}}^{\check{L}} = \sqrt{\overset{(-)}{g}} \det(g_{\hat{I}}^{\check{K}}),$$

т.е.

$$\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{\overset{(-)}{g}} \det(g_{\hat{I}}^{\check{K}}), \quad \det(g_{\hat{I}}^{\check{K}}) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\hat{I}}^{\check{K}} g_{\hat{J}}^{\check{L}}, \quad \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (4.1.22)$$

Здесь ϵ^{IJ} , ϵ_{KL} — двумерные символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{\overset{(-)}{g}} = (\mathbf{r}_{\hat{1}} \times \mathbf{r}_{\hat{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{3}}, \quad \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \overset{(-)}{g} = \hat{g}|_{x^3=-1}, \quad g = \hat{g}|_{x^3=-h\bar{h}-1}, \quad \overset{(+)}{g} = \hat{g}|_{x^3=1}. \quad (4.1.23)$$

Из (4.1.22) при $\check{\sim} = \emptyset$ получим

$$\hat{\vartheta} \equiv \sqrt{\hat{g}g^{-1}} = \det(g_{\hat{I}}^K) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\hat{I}}^K g_{\hat{J}}^L. \quad (4.1.24)$$

Заметим, что имеет место более общее соотношение, чем (4.1.22). А именно

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\hat{I}}^{\check{K}} g_{\hat{J}}^{\check{L}} = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \det(g_{\hat{P}}^{\check{Q}}), \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \quad (4.1.25)$$

Из (4.1.25) находим

$$\det(g_{\hat{P}}^{\check{Q}}) = \sqrt{\overset{(\sim)}{g} \overset{(\check{\sim})}{g}^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\hat{I}}^{\check{K}} g_{\hat{J}}^{\check{L}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}.$$

Теперь найдем выражение для $\mathbf{r}^{\hat{k}}$. В силу (4.1.19) после простых выкладок из (4.1.10) будем иметь

$$\mathbf{r}^{\hat{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(\sim)}{g}^{-1} \overset{(\check{\sim})}{g}} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^{\check{m}} g_{\hat{q}}^{\check{n}} \mathbf{r}^{\check{l}} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(\sim)}{g}^{-1} g} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^m g_{\hat{q}}^n \mathbf{r}^l, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \quad (4.1.26)$$

Отсюда при $\check{\sim} = \wedge$ получим

$$\mathbf{r}^{\hat{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{g}^{-1} \overset{(\sim)}{g}} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^{\check{m}} g_{\hat{q}}^{\check{n}} \mathbf{r}^{\check{l}} = \frac{1}{2} \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^m g_{\hat{q}}^n \mathbf{r}^l, \quad \sim \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \quad (4.1.27)$$

Здесь ϵ^{kpq} , ϵ_{lmn} — символы Леви-Чивиты.

Нетрудно заметить, что на основании (4.1.26) имеем

$$\begin{aligned} g_{\hat{l}}^{\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{l}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{(-) -1} g^{(\sim)}} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^{\check{m}} g_{\hat{q}}^{\check{n}}, \\ g^{\check{k}\hat{l}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}^{\hat{l}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{(-) -1} g^{(\sim)}} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_{\hat{p}}^{\check{m}} g_{\hat{q}}^{\check{n}} g^{\hat{s}\hat{l}}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \end{aligned}$$

Отсюда или с помощью (4.1.27) найдем

$$g_{\hat{l}}^{\check{k}} = \frac{1}{2} \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\hat{p}}^m g_{\hat{q}}^n, \quad g^{\check{k}\hat{l}} = \frac{1}{2} \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_{\hat{p}}^m g_{\hat{q}}^n g^{\hat{s}\hat{l}}.$$

Найдем выражение и для $\mathbf{r}^{\hat{P}}$ и $\mathbf{r}^{\hat{3}}$. Очевидно, выражения для этих базисных векторов можно найти на основании (4.1.27), однако найдем их другим путем. В силу (4.1.19) имеем

$$\mathbf{r}^{\hat{I}} = C^{\hat{I}\hat{J}\hat{3}} \mathbf{r}_{\hat{J}} \times \mathbf{r}_{\hat{3}} = \sqrt{\hat{g}^{-1}} \epsilon^{IJ} g_j^k \mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_3 = \sqrt{\hat{g}^{-1}} g_j^K \mathbf{r}_K \times \mathbf{r}_3 = \sqrt{\hat{g}^{-1}} g \epsilon^{IJ} \epsilon_{LK} g_j^K \mathbf{r}^L,$$

т.е.

$$\mathbf{r}^{\hat{P}} = g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M = \hat{\vartheta}^{-1} A_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M, \quad g_M^{\hat{P}} = \hat{\vartheta}^{-1} A_M^{\hat{P}}, \quad A_M^{\hat{P}} = \epsilon^{PK} \epsilon_{ML} g_K^L. \quad (4.1.28)$$

На основании (4.1.19) находим

$$\mathbf{r}^3 = g_{\hat{P}}^3 \mathbf{r}^{\hat{P}} = \mathbf{r}^{\hat{3}} + g_{\hat{P}}^3 \mathbf{r}^{\hat{P}} = \mathbf{r}^{\hat{3}} + g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}^{\hat{3}} = \mathbf{r}^3 - g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M, \quad g_M^{\hat{3}} = -g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}}. \quad (4.1.29)$$

Нетрудно усмотреть, что из (4.1.29) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\bar{3}} &= \mathbf{r}^{\hat{3}}|_{x^3=-1} = \mathbf{r}^3 - g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M, \quad g_M^{\bar{3}} = -g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}}, \\ \mathbf{r}^{\dagger 3} &= \mathbf{r}^{\hat{3}}|_{x^3=1} = \mathbf{r}^3 - g_{\hat{P}}^{\dagger 3} g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M, \quad g_M^{\dagger 3} = -g_{\hat{P}}^{\dagger 3} g_M^{\hat{P}}. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Естественно, построенные выше пространственные ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики. Определяя в каждой точке поверхностей S^* , $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$ пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций. В соответствии с вышесказанным целесообразно ввести следующие определения:

Определение 4.1.6. Множества пространственных ковариантных и контравариантных реперов $M \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$ и $M \mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$ называются $S_{(g)}^*$ -семейством ковариантных и контравариантных реперов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, а их объединение — $S_{(g)}^*$ -семейством реперов, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.7. Множество пространственных ковариантных и контравариантных базисов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$ и $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ называется $S_{(g)}^*$ -семейством ковариантных и контравариантных базисов соответственно, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, а их объединение — $S_{(g)}^*$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.8. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством реперов множество параметризаций называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством параметризаций, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.9. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством геометрических характеристик, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

Определение 4.1.10. Компоненты векторов, представленные в $S_{(g)}^{(*)}$ -семействе базисов называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством компонент, $* \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$.

4.1.1.4 Представление единичного тензора второго ранга

Исходя из обычного представления ЕТВР [67, 209, 335], в силу (4.1.19) и (4.1.20) получим

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\tilde{m}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}, \quad (4.1.31)$$

сохраняющее силу при жонглировании индексами². Аналогичное (4.1.31) представление при новой параметризации дано [276] (см. также выше в первой главе).

Из (4.1.31) видно, что элементы введенных выше матриц (4.1.11) представляют компоненты ЕТВР.

Введем определение.

Определение 4.1.11. Компоненты $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}$, $\sim \neq \smile$, и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются компонентами переноса ЕТВР при рассматриваемой параметризации области тонкого тела.

4.1.1.5 Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3

В дальнейшем при нахождении моментов различных величин и выражений относительно систем ортогональных полиномов представляет интерес выражение компонент переноса $g_M^{\tilde{M}}$, $g_M^{\tilde{3}}$ и компонент $g^{\tilde{P}\tilde{Q}}$, $g^{\tilde{P}\tilde{3}}$, $g^{\tilde{3}\tilde{3}}$ ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3 . Аналогичные представления при новой параметризации приведены во второй главе [276] (см. также выше в первой главе и [302]). При классической параметризации в [67] даны представления базисных векторов и компонент ЕТВР, аналогичных $\mathbf{r}^{\tilde{P}}$ и $g^{\tilde{P}\tilde{Q}}$ (для этих объектов в [67] использованы обозначения \mathbf{R}^α и $g^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$). Так как классическая параметризация отличается от рассматриваемой тем, что в классическом случае в качестве поперечной координаты выбирается z , а в рассматриваемом случае $z = \bar{h} + x^3 h$, то представления для $\mathbf{r}^{\tilde{P}}$ получим, если в представлении аналогичного объекта в [67] z заменить на $\bar{h} + x^3 h$. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\tilde{P}} &= \mathbf{r}^P \cdot [\underline{\mathbf{E}} - z(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}]^{-1} = \mathbf{r}^P \cdot [\underline{\mathbf{E}} + z(x', x^3) \underline{\mathbf{b}} + z^2(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}^2 + \dots] = \\ &= [g_M^P + z(x', x^3) b_M^P + z^2(x', x^3) b_N^P b_M^N + \dots] \mathbf{r}^M. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Заметим, что

$$[\underline{\mathbf{E}} - z(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}]^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} z^s(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}^s, \quad [\underline{\mathbf{E}} - z(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}]^{-2} = \sum_{s=0}^{\infty} (1+s) z^s(x', x^3) \underline{\mathbf{b}}^s. \quad (4.1.33)$$

²Под жонглированием немymi индексами понимается то, что если один из индексов опускается, то соответствующий ему индекс поднимается и наоборот.

Следовательно, соотношения (4.1.33) имеют место, если норма $\|z(x', x^3)\underline{\mathbf{b}}\| \leq 1$.

На основании (4.1.32) имеем

$$g_M^{\hat{P}} = \mathbf{r}^P \cdot [\underline{\mathbf{E}} - z(x', x^3)\underline{\mathbf{b}}]^{-1} \cdot \mathbf{r}_M = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^P z^s(x', x^3), \quad A_{(0)M}^P = g_M^P, \quad (4.1.34)$$

$$A_{(1)M}^P = b_M^P, \quad A_{(2)M}^P = b_N^P b_M^N, \dots, \quad A_{(s)M}^P = b_{N_1}^P b_{N_2}^{N_1} \dots b_{N_{s-1}}^{N_{s-2}} b_M^{N_{s-1}}.$$

Зная (4.1.33) и (4.1.34), нетрудно найти представления и остальных компонент. В самом деле, будем иметь

$$g_M^{\hat{3}} = -g_{\hat{P}}^3 g_M^{\hat{P}} = -\sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^P g_{\hat{P}}^3 z^s(x', x^3) = -h^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^P \partial_P z(x', x^3) z^s(x', x^3),$$

$$g^{\hat{P}\hat{Q}} = g_M^{\hat{P}} g^{M\hat{Q}} = \mathbf{r}^P \cdot [\underline{\mathbf{E}} - z(x', x^3)\underline{\mathbf{b}}]^{-2} \cdot \mathbf{r}^Q = \sum_{s=0}^{\infty} (1+s) g^{QM} A_{(s)M}^P z^s(x', x^3), \quad (4.1.35)$$

$$g^{\hat{P}\hat{3}} = -g_{\hat{Q}}^3 g_M^{\hat{P}} g^{M\hat{Q}} = -\sum_{s=0}^{\infty} (1+s) g^{QM} A_{(s)M}^P g_{\hat{Q}}^3 z^s(x', x^3),$$

$$g^{\hat{3}\hat{3}} = g^{33} + g^{MN} g_M^{\hat{3}} g_N^{\hat{3}} = g^{33} + g_{\hat{P}}^3 g_{\hat{Q}}^3 g^{\hat{P}\hat{Q}} = g^{33} + \sum_{s=0}^{\infty} (1+s) g^{QM} A_{(s)M}^P g_{\hat{P}}^3 g_{\hat{Q}}^3 z^s(x', x^3).$$

Учитывая представление $g_M^{\hat{P}}$ (4.1.34) и пользуясь правилом умножения рядов в форме Коши, найдем

$$g_M^{\hat{P}} g_N^{\hat{Q}} = \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)MN}^{PQ} z^s(x', x^3), \quad B_{(s)MN}^{PQ} = \sum_{r=0}^s A_{(s-r)M}^P A_{(r)N}^Q. \quad (4.1.36)$$

Следует заметить, что, так как компоненты ЕТВР участвуют в представлениях уравнений и определяющих соотношений механики деформируемого тела при рассматриваемом параметризации, то число слагаемых, удерживаемых в правых частях (4.1.34)–(4.1.36), зависит от характера решаемой задачи и желаемой точности приближения. Соотношения (4.1.34)–(4.1.36) играют важную роль при построении различных вариантов математических теорий тонких тел с применением разложения по системам ортогональных полиномов.

Далее отметим, что все изложенные в первой главе (см. также [276, 281, 301]) вопросы, касающиеся параметризации и не вошедшие в число вопросов, изучаемых в данной главе, нетрудно переносить на случай рассматриваемой параметризации. В этой связи с целью сокращения письма на них останавливаться не будем.

4.1.2 Представления некоторых дифференциальных операторов

4.1.2.1 Представления градиента и дивергенции

В рассматриваемом случае с помощью (4.1.28) и (4.1.29) для градиента какого-нибудь тензора $\mathbb{F}(x', x^3)$ имеем представление

$$\hat{\nabla} \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\hat{P}} N_P \mathbb{F} + \mathbf{r}^3 \nabla_3 \mathbb{F} = \mathbf{r}^M g_M^{\hat{P}} N_P \mathbb{F} + \mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbb{F}, \quad (4.1.37)$$

где введен следующий дифференциальный оператор

$$N_P = \partial_P - g_{\hat{P}}^3 \partial_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}^{\hat{P}} (\partial_P - g_{\hat{P}}^3 \partial_3) = \mathbf{r}^M g_M^{\hat{P}} (\partial_P - g_{\hat{P}}^3 \partial_3). \quad (4.1.38)$$

Здесь компоненты $g_{\hat{P}}^3$ ЕТВР (4.1.14) характеризуют изменение толщины.

Нетрудно заметить, что дивергенция тензора второго ранга $\underline{\mathbf{P}}$ в силу (4.1.37) представится в виде

$$\hat{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{P}} = \nabla_p \mathbf{P}^{\hat{p}} = g_M^{\hat{P}} N_P \mathbf{P}^M + \partial_3 \mathbf{P}^3. \quad (4.1.39)$$

Другие представления дивергенции тензора второго ранга имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{P}} &= \frac{1}{\sqrt{g} \hat{\vartheta}} \partial_P (\sqrt{g} \hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{1}{\hat{\vartheta}} \partial_3 (\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}), \\ \hat{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{r}^{\hat{P}} \cdot \partial_P \underline{\mathbf{P}} + \mathbf{r}^{\hat{3}} \cdot \partial_3 \underline{\mathbf{P}} = g_M^{\hat{P}} \partial_P \mathbf{P}^M + (\mathbf{r}^{\hat{3}} - g_P^{\hat{3}} g_M^{\hat{P}} \mathbf{r}^M) \cdot \partial_3 \underline{\mathbf{P}}.\end{aligned}\quad (4.1.40)$$

При написании второго соотношения (4.1.40) были учтены (4.1.28) и (4.1.29).

4.1.2.2 Представления повторного градиента и лапласиана

В силу (4.1.37) представление повторного градиента какого-нибудь тензора $\mathbb{F}(x', x^3)$ при данной параметризации имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} \hat{\nabla} \mathbb{F} &= \mathbf{r}^M \mathbf{r}^N g_M^{\hat{P}} N_P (g_N^{\hat{Q}} N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^M \mathbf{r}^3 g_M^{\hat{P}} N_P \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^N \partial_3 (g_N^{\hat{Q}} N_Q \mathbb{F}) + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^3 \partial_3^2 \mathbb{F} = \\ &= \mathbf{r}^M \mathbf{r}^N g_M^{\hat{P}} g_N^{\hat{Q}} N_P N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^M \mathbf{r}^3 g_M^{\hat{P}} N_P \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^N g_N^{\hat{Q}} \nabla_3 N_Q \mathbb{F} + \mathbf{r}^3 \mathbf{r}^3 \partial_3^2 \mathbb{F}.\end{aligned}\quad (4.1.41)$$

Здесь

$$N_P N_Q = \nabla_P \nabla_Q - (g_P^{\hat{3}} \nabla_3 \nabla_Q + g_Q^{\hat{3}} \nabla_P \nabla_3) + g_P^{\hat{3}} g_Q^{\hat{3}} \nabla_3^2.$$

Нетрудно заметить, что на основании (4.1.41) для лапласиана получим представления

$$\hat{\Delta} \mathbb{F} = \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \mathbb{F} = g^{MN} g_M^{\hat{P}} N_P (g_N^{\hat{Q}} N_Q \mathbb{F}) + g^{33} \partial_3^2 \mathbb{F} = g^{MN} g_M^{\hat{P}} g_N^{\hat{Q}} N_P N_Q \mathbb{F} + g^{33} \partial_3^2 \mathbb{F}.\quad (4.1.42)$$

Далее заметим, что имея представления градиента (4.1.37) и повторного градиента (4.1.41), нетрудно получить представления и других дифференциальных операторов (ротора, повторного ротора, повторной дивергенции, градиента дивергенции). С целью сокращения письма на них останавливаться не будем.

4.1.3 Представления уравнений движения и притока тепла и определяющих соотношений микрополярной теории

Приведены представления уравнений движения и притока тепла, а также определяющих соотношений в моментной МДТТТ.

4.1.3.1 Представления уравнений движения в микрополярной МДТТТ

С помощью (4.1.39) и (4.1.40) уравнения движения микрополярной теории можно записать в следующих формах:

$$g_M^{\hat{P}} N_P \mathbf{P}^M + \partial_3 \mathbf{P}^{\hat{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_M^{\hat{P}} N_P \boldsymbol{\mu}^M + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}^T + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi},\quad (4.1.43)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P (\sqrt{g} \hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \partial_3 (\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \rho \hat{\vartheta} \mathbf{F} &= \rho \hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P (\sqrt{g} \hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \partial_3 (\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}^T + \rho \hat{\vartheta} \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi},\end{aligned}\quad (4.1.44)$$

$$\mathbf{r}^{\hat{P}} \cdot \partial_P \underline{\mathbf{P}} + \mathbf{r}^{\hat{3}} \cdot \partial_3 \underline{\mathbf{P}} + \hat{\rho} \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}^{\hat{P}} \cdot \partial_P \underline{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{r}^{\hat{3}} \cdot \partial_3 \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}^T + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}.\quad (4.1.45)$$

Уравнения (4.1.43)–(4.1.45) являются различными представлениями системы уравнений движения микрополярной механики деформируемого твердого тела (ММДТТ) при рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Поэтому целесообразно называть их различными представлениями системы уравнений движения микрополярной механики деформируемого твердого тонкого тела (ММДТТТ).

Введем следующее определение:

Определение 4.1.12. Соотношения (уравнения, ОС и др.), которые получаются из соответствующих представлений при рассматриваемой параметризации области тонкого тела, если в разложении $g_M^{\hat{P}}$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются соотношениями (уравнениями, ОС и др.) приближения порядка r .

Вводя обозначение

$$g_{(s)}^{\hat{P}} = \sum_{s=0}^r A_M^P z^s(x', x^3), \quad z = \bar{h} + x^3 h, \quad (4.1.46)$$

например, из (4.1.43) и (4.1.45), если заменить $g_M^{\hat{P}}$ на $g_{(r)}^{\hat{P}}$, то получим систему уравнений и ОС приближения порядка r . Следовательно, при $r = 0$, получим соотношения нулевого приближения, а при $r = \infty$ будем считать, что $g_{(\infty)}^{\hat{P}} = g_M^{\hat{P}}$. С целью сокращения письма соотношения приближения порядка r выписывать не будем.

4.1.3.2 Представление уравнения притока тепла в микрополярной МДТТ

В общем случае уравнение притока тепла в микрополярной МДТТ можно записать в виде [343] (см. (3.2.91))

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q - T \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{\mu}) + W^* = \rho c_p \partial_t T \quad (4.1.47)$$

где \mathbf{q} — вектор внешнего потока тепла, q — массовый приток тепла, T — температура, \mathbf{a} , \mathbf{d} — тензоры теплового расширения, $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$ — тензор напряжений, $\mathbf{\mu} \neq \mathbf{\mu}^T$ — тензор моментных напряжений, W^* — функция рассеивания, ρ — плотность среды, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Если рассматривается физически линейная среда, то нелинейность в (4.1.47) выявляется в третьем слагаемом левой части. Аналогичная картина имеет место и в частном варианте этого уравнения, которое получается из (4.1.47) при $\mathbf{d} = 0$ [336]. В последнем случае ввиду того, что обе теплоемкости c_p и c_v (теплоемкость при постоянном объеме) не могут быть одновременно постоянными (не зависящими от температуры), очень часто принимают допущение о том, что в указанном слагаемом температура T заменяется на температуру $T_0 = \text{const}$. Учитывая это допущение, искомые представления уравнения притока тепла аналогично (4.1.43)–(4.1.45) будут иметь вид

$$\begin{aligned} & -g_M^{\hat{P}} N_P q^M - \partial_3 q^3 + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{\mu}) + W^* = \rho c_p \partial_t T, \\ & -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P (\sqrt{g} \hat{\vartheta} q^{\hat{P}}) - \partial_3 (\hat{\vartheta} q^{\hat{3}}) + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{\mu}) + W^* = \rho c_p \partial_t T, \\ & -\mathbf{r}^{\hat{P}} \cdot \partial_P \mathbf{q} - \mathbf{r}^{\hat{3}} \cdot \partial_3 \mathbf{q} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{\mu}) + W^* = \rho c_p \partial_t T, \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

Заметим, что на основании первого соотношения (4.1.48) в силу определения 1.3.1 и обозначения (4.1.46) уравнение притока тепла приближения порядка r представится в форме

$$-g_{(r)}^{\hat{P}} N_P q^M - \partial_3 q^3 + \rho q - T_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{P}_{(r)} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{\mu}_{(r)}) + W^* = \rho c_p \partial_t T. \quad (4.1.49)$$

4.1.3.3 Представления законов Гука и теплопроводности Фурье

В данном случае, учитывая представление градиента (4.1.37), искомое представление закона Гука (3.2.46) с помощью оператора (4.1.38) аналогично (3.2.47) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{C}^{M \cdot} \cdot g_M^{\hat{P}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{C}^{\cdot 3} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \mathbf{A}^{M \cdot} \cdot g_M^{\hat{P}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{A}^{\cdot 3} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{C}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{b} \vartheta, \\ \mathbf{\mu} &= \mathbf{B}^{M \cdot} \cdot g_M^{\hat{P}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{B}^{\cdot 3} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \mathbf{D}^{M \cdot} \cdot g_M^{\hat{P}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{D}^{\cdot 3} \cdot \partial_3 \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^{\otimes 2} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\beta} \vartheta, \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

где введены обозначения

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^m = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^m \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^m = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^m \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^m = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^m \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}^m = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^m \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

Следует заметить, что соотношения (3.2.46) аналогично (4.1.45) представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{P}} \partial_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{P}} \partial_P \varphi + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{3}} \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{P}} \partial_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{P}} \partial_P \varphi + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{3}} \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} \vartheta. \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

Учитывая (4.1.46), нетрудно заметить, что соотношения (4.1.50) содержат бесконечное множество слагаемых. Поэтому в таком виде их использовать не придется. В приложении найдут применения приближенные ОС, т.е. соотношения, которые представлены с помощью конечного числа слагаемых.

Легко усмотреть, что в силу определения 1.3.1 и обозначения (4.1.46) ОС приближения порядка s аналогично (4.1.49) представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(s)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{M \cdot} \cdot g_{(s)M}^{\hat{P}} N_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{M \cdot} \cdot g_{(s)M}^{\hat{P}} N_P \varphi + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(s)} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{M \cdot} \cdot g_{(s)M}^{\hat{P}} N_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{M \cdot} \cdot g_{(s)M}^{\hat{P}} N_P \varphi + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} \vartheta. \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

Очевидно, что ОС нулевого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{M \cdot} \cdot N_M \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{M \cdot} \cdot N_M \varphi + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(0)} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{M \cdot} \cdot N_M \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{M \cdot} \cdot N_M \varphi + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{3 \cdot} \cdot \partial_3 \varphi - \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \varphi - \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}} \vartheta, \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

а ОС приближения порядка s (4.1.52) еще можно записать в форме

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(s)} &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(s-1)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{M \cdot} \cdot A_{(s)M}^P (x^3)^s N_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{M \cdot} \cdot A_{(s)M}^P (x^3)^s N_P \varphi, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(s)} &= \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(s-1)} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{M \cdot} \cdot A_{(s)M}^P (x^3)^s N_P \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{M \cdot} \cdot A_{(s)M}^P (x^3)^s N_P \varphi, \quad s \geq 1. \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

Найдем соответствующее выражение для закона теплопроводности Фурье при новой параметризации области тонкого тела. Так как закон теплопроводности Фурье [307, 336] имеет вид $\mathbf{q} = -\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} \cdot \nabla T$, где положительно определенный тензор второго ранга $\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}$ называется тензором теплопроводности, то в силу определения 1.3.1 и (4.1.46) закон теплопроводности Фурье приближения порядка s представляется в форме

$$\mathbf{q}_{(s)} = -\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^M g_{(s)M}^{\hat{P}} N_P T - \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^3 \partial_3 T, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^m = \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{r}}}^m. \quad (4.1.55)$$

Следовательно, для законов теплопроводностей Фурье нулевого приближения и приближения порядка s (4.1.55) аналогично (4.1.53) и (4.1.54) имеем выражения

$$\mathbf{q}_{(0)} = -\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^M N_M T - \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^3 \partial_3 T, \quad \mathbf{q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(s-1)} - \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}}^M A_{(s)M}^P N_P T, \quad s \geq 1. \quad (4.1.56)$$

Заметим, что закон теплопроводностей Фурье аналогично (4.1.51) можно еще записать в форме

$$\mathbf{q} = -\underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{P}} \partial_P T - \underline{\underline{\boldsymbol{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{r}}}^{\hat{3}} \partial_3 T. \quad (4.1.57)$$

4.2 Рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты некоторых выражений. Различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах. Постановки задач

Даны определения момента k -го порядка некоторой величины относительно произвольной системы ортогональных полиномов и системы полиномов Лежандра и Чебышева. Получены выражения для моментов частных производных и некоторых выражений относительно системы полиномов Лежандра и Чебышева. Даны различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные условия. Получены ОС классической и микрополярной теорий нулевого приближения и приближения порядка r в моментах. Получены выражения граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях.

Сформулированы постановки динамических задач в моментах приближения (r, M) микрополярной механики деформируемого твердого тонкого тела, а также нестационарной температурной задачи в моментах.

4.2.1 Некоторые рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра и Чебышева на сегменте $[-1, 1]$

Выписаны основные рекуррентные формулы и получены некоторые дополнительные рекуррентные соотношения, играющие важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел.

4.2.1.1 Основные рекуррентные соотношения

В рассматриваемом случае основные рекуррентные соотношения для системы полиномов Лежандра имеют вид [68, 70, 201, 392, 400]

$$(2n + 1)xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n + 1)P_{n+1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.2.1)$$

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.2.2)$$

$$P'_n(x) = (2n - 1)P_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4.2.3)$$

Заметим, что в соотношениях (4.2.1)–(4.2.3) n принимает значения $0, 1, 2, \dots$, а $P_{-n}(t) = 0$ при $n = 1, 2, \dots$

Аналогичные (4.2.1)–(4.2.3) рекуррентные соотношения для ортонормированной системы полиномов Чебышева второго рода представляются в форме (см. (2.5.10) – (2.5.12))

$$\begin{aligned} 2x\hat{U}_k(x) &= \hat{U}_{k-1}(x) + \hat{U}_{k+1}(x), \quad k \geq 1, \\ x\hat{U}'_k(x) &= k\hat{U}_k(x) + \hat{U}'_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \\ \hat{U}'_k(x) &= 2k\hat{U}_{k-1}(x) + \hat{U}'_{k-2}(x), \quad k \geq 2, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Выпишем также соотношение

$$2^s x^s \hat{U}_k(x) = \sum_{p=0}^s C_s^p \hat{U}_{k-s+2p}(x), \quad k - s \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.2.5)$$

которое легко доказывается с помощью метода математической индукции. Здесь C_s^p — биномиальные коэффициенты.

4.2.1.2 Дополнительные рекуррентные соотношения

Искомые соотношения нетрудно получить из (4.2.1)–(4.2.3). В самом деле, заменяя в (4.2.3) n последовательно на $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, $n - 4$, ..., получим

$$\begin{aligned} P'_{n-1}(x) &= (2n - 3)P_{n-2}(x) + P'_{n-3}(x), \\ P'_{n-2}(x) &= (2n - 5)P_{n-3}(x) + P'_{n-4}(x), \\ P'_{n-3}(x) &= (2n - 7)P_{n-4}(x) + P'_{n-5}(x), \\ P'_{n-4}(x) &= (2n - 9)P_{n-5}(x) + P'_{n-6}(x), \dots \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Учитывая соответствующие соотношения (4.2.6) в правых частях (4.2.3) и (4.2.2), получим два из искомых соотношений

$$P'_n(x) = (2n - 1)P_{n-1}(x) + (2n - 5)P_{n-3}(x) + (2n - 9)P_{n-5}(x) + \dots \quad (4.2.7)$$

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + (2n - 3)P_{n-2}(x) + (2n - 7)P_{n-4}(x) + \dots, \quad (4.2.8)$$

Заметим, что аналогичные (4.2.7) и (4.2.8) соотношения для полиномов Лежандра на сегменте $[-1, 1]$ приведены в [514] и [68].

Нетрудно видеть, что (4.2.7) можно представить в виде

$$P'_n(x) = \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} [2n - (4p + 1)] P_{n-(2p+1)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=a}^{n-1} (2p + 1) [1 - (-1)^{n+p}] P_p(x), \quad (4.2.9)$$

где $a = n - 1 - 2 \left[\frac{n-1}{2} \right] = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n)$, а $[x]$ — целая часть числа x .

Аналогичное (4.2.9) соотношение для системы полиномов Чебышева имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{U}'_n(x) &= 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (n - 2k) \hat{U}_{n-(2k+1)}(x) = 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k + 1 + a) \hat{U}_{2k+a}(x), \\ a &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Очевидно, из (4.2.1) следует соотношение

$$xP_n(x) = \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x). \quad (4.2.11)$$

Отсюда, заменяя n последовательно на $n - 1$ и $n + 1$, придем к соотношениям

$$xP_{n-1}(x) = \frac{n-1}{2n-1} P_{n-2}(x) + \frac{n}{2n-1} P_n(x), \quad (4.2.12)$$

$$xP_{n+1}(x) = \frac{n+1}{2n+3} P_n(x) + \frac{n+2}{2n+3} P_{n+2}(x). \quad (4.2.13)$$

Теперь нетрудно получить очередное рекуррентное соотношение. В самом деле, умножая обе части (4.2.11) на x и учитывая в правой части полученного соотношения (4.2.11)–(4.2.13), получим искомое соотношение

$$x^2 P_n(x) = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}(x) + \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x) + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}(x).$$

Найдем еще рекуррентное соотношение для $x^2 P'_n(x)$. В этой связи в (4.2.2) меняя n на $n - 1$, получим

$$xP'_{n-1}(x) = (n-1)P_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x). \quad (4.2.14)$$

Умножая обе части (4.2.2) на x , придем к соотношению

$$x^2 P'_n(x) = nxP_n(x) + xP'_{n-1}(x). \quad (4.2.15)$$

Меняя n на $n - 1$, из (4.2.8) получим

$$xP'_{n-1}(x) = (n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + (2n-9)P_{n-5}(x) + \dots, \quad (4.2.16)$$

Далее, учитывая (4.2.11) и (4.2.16) в (4.2.15), найдем искомое соотношение в виде

$$\begin{aligned} x^2 P'_n(x) &= \frac{3n^2 - n - 1}{2n + 1} P_{n-1}(x) + \frac{n(n+1)}{2n+1} P_{n+1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \\ &+ (2n-9)P_{n-5}(x) + (2n-13)P_{n-7}(x) + (2n-17)P_{n-9}(x) + \dots \end{aligned}$$

На основании (4.2.3) и (4.2.7) нетрудно доказать, что имеет место еще соотношение

$$\begin{aligned} P''_n(x) &= (2n-1)(2n-3)P_{n-2}(x) + 2(2n-3)(2n-7)P_{n-4}(x) + \\ &+ 3(2n-5)(2n-11)P_{n-6}(x) + 4(2n-7)(2n-15)P_{n-8}(x) + \\ &+ 5(2n-9)(2n-19)P_{n-10}(x) + \dots \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Запишем (4.2.17) при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$. После простых вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} P''_{2m}(x) &= \sum_{r=0}^{m-1} (m-r)(2m+2r+1)(4r+1)P_{2r}(x) = \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} (r+1)[4m-(2r+1)][4m-(4r+3)]P_{2(m-r-1)}, \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} P''_{2m+1}(x) &= \sum_{r=0}^{m-1} (m-r)(2m+2r+3)(4r+3)P_{2r+1}(x) = \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} (r+1)[4m-(2r-1)][4m-(4r+1)]P_{2(m-r-1)+1}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (4.2.17) и учитывая (4.2.7), с помощью простых выкладок получим

$$\begin{aligned} P'''_n(x) &= (2n-1)(2n-3)(2n-5)P_{n-3} + 3(2n-3)(2n-5)(2n-9)P_{n-5} + \\ &+ 6(2n-5)(2n-7)(2n-13)P_{n-7} + 10(2n-7)(2n-9)(2n-17)P_{n-9} + \\ &+ 15(2n-9)(2n-11)(2n-21)P_{n-11} + 21(2n-11)(2n-13)(2n-25)P_{n-13} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Нетрудно заметить, что (4.2.19) при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} P'''_{2m}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}[4m-(2k-1)][4m-(2k+1)][4m-(4k+1)]P_{2(m-k)-1}, \\ P'''_{2m+1}(x) &= \sum_{k=0}^m a_{k+1}(4m-2k+3)(4m-2k+1)(4m-4k+1)P_{2(m-k)}(x), \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

где значения для коэффициентов a_p , $p = \overline{1, m-1}$, вычисляются по формулам

$$a_p = C_{p+1}^2 = \frac{p(p+1)}{2}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Аналогично (4.2.19) можно найти выражения для производной четвертого порядка $P_n^{IV}(x)$. В самом деле, будем иметь

$$\begin{aligned} P_n^{IV}(x) &= (2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)P_{n-4} + \\ &+ 4(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-11)P_{n-6} + \\ &+ 10(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-15)P_{n-8} + \\ &+ 20(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-19)P_{n-10} + \\ &+ 35(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-23)P_{n-12} + \\ &+ 56(2n-11)(2n-13)(2n-15)(2n-27)P_{n-14} + \dots \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Легко видеть, что при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$ из (4.2.21) будем иметь

$$\begin{aligned}
 P_{2m}^{IV}(x) &= \sum_{k=1}^{m-1} b_k [4m - (2k-1)][4m - (2k+1)][4m - (2k+3)][4m - (4k+3)] P_{2(m-k-1)} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} b_{m-k} [2m + (2k+1)][2m + (2k-1)][2m + (2k-3)](4k+1) P_{2(k-1)}(x), \\
 P_{2m+1}^{IV} &= \sum_{k=1}^{m-1} b_k [4m - (2k-3)][4m - (2k-1)][4m - (2k+1)][4m - (4k+1)] P_{2m-(2k+1)} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} b_{m-k} [2m + (2k+3)][2m + (2k+1)][2m + (2k-1)](4k-1) P_{2k-1}(x),
 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

где значения для коэффициентов b_n , $n = \overline{1, m-1}$, вычисляются по формулам

$$b_n = C_{n+2}^3 = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2), \quad n = \overline{1, m-1}.$$

Выпишем выражения для P_n^V , P_{2m}^V , P_{2m+1}^V и P_n^{VI} , P_{2m}^{VI} , P_{2m+1}^{VI} , которые получаются аналогично приведенным выше формулам. Будем иметь

$$\begin{aligned}
 P_n^V(x) &= (2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)P_{n-5} + \\
 &+ 5(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-13)P_{n-7} + \\
 &+ 15(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-17)P_{n-9} + \\
 &+ 35(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-21)P_{n-11} + \\
 &+ 70(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-15)(2n-25)P_{n-13} + \\
 &+ 126(2n-11)(2n-13)(2n-15)(2n-17)(2n-29)P_{n-15} + \dots,
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2m}^V(x) &= \sum_{k=1}^{m-2} c_k [4m - (2k-1)][4m - (2k+1)][4m - (2k+3)][4m - (2k+5)][4m - (4k+5)] P_{2(m-k)-3} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-2} c_{m-k-1} [2m + (2k+3)][2m + (2k+1)][2m + (2k-1)][2m + (2k-3)](4k-1) P_{2k-1}(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2m+1}^V &= \sum_{k=1}^{m-1} c_k [4m - (2k-3)][4m - (2k-1)][4m - (2k+1)][4m - (2k+3)][4m - (4k+3)] P_{2(m-k-1)} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} c_{m-k} [2m + (2k+3)][2m + (2k+1)][2m + (2k-1)][2m + (2k-3)](4k-3) P_{2(k-1)}(x),
 \end{aligned}$$

где значения для коэффициентов c_n , $n = \overline{1, m-2}$, вычисляются по формулам

$$c_n = C_{n+3}^4 = \frac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3), \quad n = \overline{1, m-2};$$

$$\begin{aligned}
 P_n^{VI}(x) &= (2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)P_{n-6} + \\
 &+ 6(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-15)P_{n-8} + \\
 &+ 21(2n-5)(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-19)P_{n-10} + \\
 &+ 56(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-15)(2n-23)P_{n-12} + \\
 &+ 126(2n-9)(2n-11)(2n-13)(2n-15)(2n-17)(2n-27)P_{n-14} + \dots, \\
 P_{2m}^{VI}(x) &= \sum_{k=1}^{m-2} d_k [4m-(2k-1)][4m-(2k+1)][4m-(2k+3)][4m-(2k+5)] \cdot \\
 &\quad \cdot [4m-(2k+7)][4m-(4k+7)]P_{2(m-k-2)} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-2} d_{m-k-1} [2m+(2k+3)][2m+(2k+1)][2m+(2k-1)][2m+(2k-3)] \cdot \\
 &\quad \cdot [2m+(2k-5)](4k-3)P_{2(k-1)}(x), \\
 P_{2m+1}^{VI}(x) &= \sum_{k=1}^{m-2} d_k [4m-(2k-3)][4m-(2k-1)][4m-(2k+1)][4m-(2k+3)] \cdot \\
 &\quad \cdot [4m-(2k+5)][4m-(4k+5)]P_{2(m-k)-3} = \\
 &= \sum_{k=1}^{m-2} d_{m-k-1} [2m+(2k+5)][2m+(2k+3)][2m+(2k+1)][2m+(2k-1)] \cdot \\
 &\quad \cdot [2m+(2k-3)](4k-1)P_{2k-1}(x), \tag{4.2.24}
 \end{aligned}$$

где значения для коэффициентов d_n , $n = \overline{1, m-2}$, определяются по формулам

$$d_n = C_{n+4}^5 = \frac{1}{5!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), \quad n = \overline{1, m-2}.$$

Не представляет большого труда с помощью (4.2.7) и (4.2.8) или (4.2.1) и (4.2.17) доказать справедливость еще следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 xP_n''(x) &= (n-1)(2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)(3n-4)P_{n-3}(x) + (2n-9)(5n-11)P_{n-5}(x) + \\
 &+ (2n-13)(7n-22)P_{n-7}(x) + (2n-17)(9n-37)P_{n-9}(x) + \dots, \\
 x^2P_n''(x) &= (n-1)nP_n(x) + (2n-3)(2n-3)P_{n-2}(x) + (2n-7)(4n-8)P_{n-4}(x) + \\
 &+ (2n-11)(6n-17)P_{n-6}(x) + (2n-15)(8n-30)P_{n-8}(x) + \dots
 \end{aligned}$$

Следует заметить, что приведенные выше рекуррентные соотношения играют важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел.

Заметим, что подобное (4.2.5) соотношение для системы полиномов Лежандра в принципе можно получить. Однако, на этом останавливаться не будем. Формально аналогично (4.2.5) его можно представить в виде

$$2^s x^s P_k(x) = \sum_{p=0}^s A_{k-s+2p} P_{k-s+2p}(x), \quad k-s \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{4.2.25}$$

где коэффициенты A_{k-s+2p} , $0 \leq p \leq s$, для каждого конкретного значения s следует найти.

При $s = 2, 3, 4$ аналогичные (4.2.25) соотношения, имеющие место на сегменте $[0, 1]$, получены в [266] (см. также выше во второй главе). Отметим также, что дополнительные рекуррентные соотношения для системы полиномов Чебышева второго рода на сегменте $[0, 1]$ выведены в [267, 273, 274, 281] (см. еще выше). При необходимости не представляет труда и в рассматриваемом случае получить аналогичные соотношения, поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Однако, для полиномов Лежандра

выпишем еще одно рекуррентное соотношение, имеющее вид [404]

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{r=0}^m \frac{A_{m-r}A_rA_{n-r}}{A_{n+m-r}} \left(\frac{2n+2m-4r+1}{2n+2m-2r+1} \right) P_{n+m-2r}(x), \quad (4.2.26)$$

$$A_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{m!} = \frac{(2m-1)!!}{m!}, \quad m > 0, \quad n > 0, \quad m \leq n$$

и применяемое при нахождении момента произведения двух функций, где m и n — положительные целые числа. Формулу (4.2.26) можно доказать методом математической индукции.

Следует заметить, что для системы полиномов Чебышева первого рода на сегменте $[-1, 1]$ имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$2xT_k(x) = T_{k-1}(x) + T_{k+1}(x), \quad k \geq 1,$$

$$T'_k(x) = k \left\{ -\frac{1}{2}[1 - (-1)^k]T_0 + \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}]T_p(x) \right\} =$$

$$= k \left\{ \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^p]T_{k-p}(x) - \frac{1}{2}[1 - (-1)^k]T_0 \right\},$$

$$xT'_k(x) = k \left\{ -\frac{1}{2}[1 + (-1)^k]T_0 + \sum_{p=0}^k [1 + (-1)^{k+p}]T_p(x) - T_k(x) \right\} =$$

$$= k \left\{ -T_k(x) + \sum_{p=0}^k [1 + (-1)^p]T_{k-p}(x) - \frac{1}{2}[1 + (-1)^k]T_0 \right\}, \quad (4.2.27)$$

$$2^s x^s T_k(x) = \sum_{p=0}^s C_s^p T_{k-s+2p}(x), \quad k-s \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Следовательно, с помощью (4.2.27) при необходимости для системы полиномов Чебышева первого рода нетрудно получить другие желаемые рекуррентные соотношения. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

4.2.2 Моменты некоторых выражений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго рода

Пусть $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ — какая-нибудь ортогональная система полиномов на сегменте $[-1, 1]$, а $\mathbb{F}(x', x^3)$ — какое-нибудь тензорное поле.

Определение 4.2.1. Моментом k -го порядка величины $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, обозначаемом $\mathbb{M}_{u_k}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}_{u_k}(\mathbb{F}) = \|u_k\|^{-2} \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x', x^3) u_k(x^3) h(x^3) dx^3. \quad (4.2.28)$$

Здесь $\|u_k\|$ — норма полинома $u_k(x^3)$, $h(x^3)$ — весовая функция.

Заметим, что в качестве \mathbb{F} можно выбрать любую величину или любое выражение. Например, вместо \mathbb{F} можно рассматривать $[a(x') + x^3 b(x')]^s \mathbb{F}(x', x^3)$, где $a(x')$ и $b(x')$ — некоторые функции, а s — неотрицательное целое число.

В случае системы стандартизованных полиномов Лежандра $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ норма $\|P_k\| = \sqrt{2/(2k+1)}$, а $h = 1$. Поэтому, вводя обозначение $\mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F})$ для момента k -го порядка относительно системы полиномов Лежандра, вместо (4.2.28) будем иметь

$$\mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x', x^3) P_k(x^3) dx^3. \quad (4.2.29)$$

Обозначая момент k -го порядка относительно ортонормированной системы полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}_k(x^3)\}_{k=0}^\infty$ через $\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F})$, (4.2.28) представится в виде

$$\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) = \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x', x^3) \hat{U}_k(x^3) h(x^3) dx^3, \quad (4.2.30)$$

где весовая функция $h(x^3) = \sqrt{1 - (x^3)^2}$.

Если рассматривается система полиномов Чебышева первого рода $\{T_k\}_{k=0}^\infty$, то, обозначая моменты k -го порядка относительно этой системы полиномов через $\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F})$, будем иметь

$$\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) = \|T_k\|^{-2} \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x', x^3) T_k(x^3) h(x^3) dx^3, \quad (4.2.31)$$

где для весовой функции $h(x^3)$ и норм имеем выражения

$$h(x^3) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^3)^2}}, \quad \|T_0\| = \sqrt{\pi}, \quad \|T_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k \geq 1.$$

В дальнейшем для определенности $\mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F})$ назовем оператором моментов k -го порядка Лежандра, $\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F})$ — оператором моментов k -го порядка Чебышева второго рода, а $\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F})$ — оператором моментов k -го порядка Чебышева первого рода. Здесь L и T — первые буквы фамилии ученых на французском языке. Кроме того, предполагаем, что тензорное поле $\mathbb{F}(x', x^3) \in C_m$, $m \geq 1$. Тогда при фиксированном значении x' его можно разложить в ряд Лежандра-Фурье или Чебышева-Фурье

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) P_k(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F}) T_k(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) \hat{U}_k(x^3). \quad (4.2.32)$$

Часто, когда из контекста ясно о какой системе полиномов идет речь, индексы L и T можно опускать и вместо $\mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F})$ и $\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F})$ писать $\mathbb{M}^{(k)}(\mathbb{F})$ или просто \mathbb{F} .

Учитывая значения систем полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго рода на концах сегмента $[-1, 1]$

$$P_k(-1) = (-1)^k, \quad P_k(1) = 1, \quad T_k(-1) = (-1)^k, \quad T_k(1) = 1, \\ \hat{U}_k(-1) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{\pi}} (k+1), \quad \hat{U}_k(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (k+1),$$

из (4.2.32) имеем

$$\mathbb{F}^{(-)}(x') = \mathbb{F}|_{x^3=-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_L^{(p)}(\mathbb{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}^{(p)}(\mathbb{F}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (p+1) \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}), \\ \mathbb{F}^{(+)}(x') = \mathbb{F}|_{x^3=1} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(p)}(\mathbb{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}^{(p)}(\mathbb{F}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}). \quad (4.2.33)$$

Следует заметить, что имеют место следующие формулы для значений производных от полиномов Лежандра [186] на концах сегмента $[-1, 1]$:

$$\left. \frac{d^k P_n(x^3)}{d^k x^3} \right|_{x^3=-1} = \frac{(-1)^{n-k} (n+k)!}{2^k (n-k)! k!} = \frac{(-1)^{n-k} k!}{2^k} C_n^k C_{n+k}^k, \\ \left. \frac{d^k P_n(x^3)}{d^k x^3} \right|_{x^3=1} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!} = \frac{k!}{2^k} C_n^k C_{n+k}^k, \quad (4.2.34)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Заметим также, что получить аналогичные (4.2.34) формулы для полиномов Чебышева не доставляет труда.

4.2.2.1 Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Лежандра

Моменты частных производных $\partial_i \mathbb{F}$ [68] относительно системы полиномов Лежандра в рассматриваемом случае получают вид

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\partial_i \mathbb{F}) = g_i^J \partial_J \overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) + g_i^3 \overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}). \quad (4.2.35)$$

где

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) = \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) = (2k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \overset{(k+2p+1)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) = \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}). \quad (4.2.36)$$

Заметим, что (4.2.36) можно представить в другой форме. В этой связи преобразуем правую часть. Учитывая (4.2.33), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) &= \sum_{p=0}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) - \sum_{p=0}^{k-1} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) = \\ &= \overset{(+)}{\mathbb{F}} - (-1)^k \overset{(-)}{\mathbb{F}} - \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}). \end{aligned}$$

В силу последнего соотношения (4.2.36) можно представить в форме

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) = \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\mathbb{F}} - (-1)^k \overset{(-)}{\mathbb{F}}] - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}). \quad (4.2.37)$$

Соотношение (4.2.37) удобно использовать в том случае, когда $\overset{(-)}{\mathbb{F}}$ и $\overset{(+)}{\mathbb{F}}$ заданы на лицевых поверхностях.

Приведем еще одно представление (4.2.36), а именно

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) = \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) + \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) - (-1)^k \overset{(-)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F})], \quad (4.2.38)$$

где введены следующие обозначения:

$$\overset{(+)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}), \quad \overset{(-)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}), \quad N \geq k. \quad (4.2.39)$$

Вводя определение оператора «штрих», соотношениями (4.2.36)–(4.2.38) нетрудно доказать, что имеет место утверждение.

Утверждение 7. *Оператор моментов (4.2.29) и оператор «штрих» (4.2.36)–(4.2.38) относительно систем полиномов Лежандра обладают свойством обобщенной линейности, т.е. для любых тензорных полей $\mathbb{F}(x', x^3)$ и $\mathbb{G}(x', x^3)$ и любых функций $\alpha(x')$ и $\beta(x')$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbb{M}}_L[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] &= \alpha(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) + \beta(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{G}), \\ \overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] &= \alpha(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{F}) + \beta(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}'_L(\mathbb{G}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Отсюда следует, что операторы моментов и «штрих» — линейные операторы.

Используя соотношение (4.2.8) и (4.2.29), нетрудно доказать, что имеет место формула

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) &= k \overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) + (2k+1) \sum_{p=1}^{\infty} \overset{(k+2p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) = \\ &= -(k+1) \overset{(k)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 + (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_L(\mathbb{F}). \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

Нетрудно заметить, что (4.2.41) аналогично (4.2.38) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) &= -(k+1) \mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N [1 + (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_L^{(p)}(\mathbb{F}) + \\ &+ \frac{2k+1}{2} [\mathbb{M}_L^{(+)}(\mathbb{F}) + (-1)^k \mathbb{M}_L^{(-)}(\mathbb{F})]. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

Докажем, что имеет место формула

$$\mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) = \mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \mathbb{F}). \quad (4.2.43)$$

В самом деле, в силу соотношения (4.2.1) справедлива формула

$$\mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) = \frac{k}{2k-1} \mathbb{M}_L^{(k-1)}(\mathbb{F}) + \frac{k+1}{2k+3} \mathbb{M}_L^{(k+1)}(\mathbb{F}). \quad (4.2.44)$$

Применяя оператор «штрих» к (4.2.44) и учитывая его линейность и (4.2.36), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) &= \frac{k}{2k-1} \mathbb{M}_L^{(k-1)}(\mathbb{F}) + \frac{k+1}{2k+3} \mathbb{M}_L^{(k+1)}(\mathbb{F}) = \frac{k}{2k-1} [(2k-1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F})] + \\ &+ \frac{k+1}{2k+3} [(2k+3) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p+2)}(\mathbb{F})] = k \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F}) + (k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p+2)}(\mathbb{F}) = \\ &= k \mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) + k \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F}) + (k+1) \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F}) = k \mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) + (2k+1) \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbb{M}_L^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) = k \mathbb{M}_L^{(k)}(\mathbb{F}) + (2k+1) \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(k+2p)}(\mathbb{F}). \quad (4.2.45)$$

Сравнивая последнее соотношение с (4.2.41), убедимся в справедливости (4.2.43).

Далее с помощью метода математической индукции легко доказать справедливость соотношения

$$\mathbb{M}_L^{(k)}[(x^3)^s \partial_3 \mathbb{F}] = \mathbb{M}_L^{(k)}[(x^3)^s \mathbb{F}]. \quad (4.2.46)$$

Следует заметить, что на основании (4.2.46) и обобщенной линейности оператора «штрих» (4.2.40) можно доказать следующую формулу:

$$\mathbb{M}_L^{(k)}\{[a(x') + x^3 b(x')]^s \partial_3 \mathbb{F}\} = \mathbb{M}_L^{(k)}\{[a(x') + x^3 b(x')]^s \mathbb{F}\}. \quad (4.2.47)$$

Заметим также, что для ковариантных производных, например, от компонент вектора справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(k)}(\nabla_p u_{\bar{q}}) &= g_p^S \nabla_S \mathbb{M}_L^{(k)}(u_{\bar{q}}) + g_p^3 \mathbb{M}_L^{(k)}(u_{\bar{q}}), \\ \mathbb{M}_L^{(k)}(\nabla_p u^{\bar{q}}) &= g_p^S \nabla_S \mathbb{M}_L^{(k)}(u^{\bar{q}}) + g_p^3 \mathbb{M}_L^{(k)}(u^{\bar{q}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, \wedge, +\}. \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

4.2.2.2 Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышева второго рода

Моменты частных производных $\partial_i \mathbb{F}$ относительно системы полиномов Чебышева второго рода при рассматриваемой параметризации представляются в виде

$$\mathbb{M}_T^{(k)}(\partial_i \mathbb{F}) = g_i^J \partial_J \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) + g_i^3 \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}), \quad (4.2.49)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) = 2(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{k+2p+1}{p} \mathbb{M}_T(\mathbb{F}) = (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}). \quad (4.2.50)$$

Учитывая (4.2.33) и осуществляя простые выкладки, нетрудно показать, что аналогичное (4.2.37) соотношение представится в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) &= (k+1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\mathbb{F}^{(+)} - (-1)^k \mathbb{F}^{(-)}] - (k+1) \sum_{p=0}^{k-1} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}) - \\ &- (k+1) \sum_{p=0}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] p \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}). \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

Заметим, что при фиксированном значении k правая часть (4.2.37) содержит конечное число слагаемых, а правая часть (4.2.51) — бесконечное число слагаемых. В связи с этим формула (4.2.37) имеет некоторое преимущество по сравнению с (4.2.51). Это обстоятельство следует учесть при применении этих систем полиномов.

Следовательно, аналогичное (4.2.38) соотношение запишется в форме

$$\mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) = (k+1) \sum_{p=k}^N [1 - (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}) + (k+1) [\mathbb{M}_T^{(+)}(\mathbb{F}) - (-1)^k \mathbb{M}_T^{(-)}(\mathbb{F})], \quad (4.2.52)$$

где подобно (4.2.39) введены обозначения

$$\mathbb{M}_T^{(+)}(\mathbb{F}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}), \quad \mathbb{M}_T^{(-)}(\mathbb{F}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}). \quad (4.2.53)$$

Очевидно, и при применении системы полиномов Чебышева второго рода соотношениями (4.2.50) и (4.2.51) можно ввести определение оператора «штрих» и нетрудно доказать утверждение.

Утверждение 8. *Оператор моментов (4.2.30) и оператор «штрих» (4.2.50)–(4.2.52) обладают свойством обобщенной линейности. Следовательно, они — линейные операторы.*

На основании третьего соотношения (4.2.4) и (4.2.30) можно доказать справедливость соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{(k)}(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) &= \mathbb{M}_T^{(k)}(x^3 \mathbb{F}) = k \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) + 2(k+1) \sum_{p=1}^{\infty} \binom{k+2p}{p} \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}) = \\ &= -(k+2) \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) + (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 + (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}). \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Отсюда, учитывая (4.2.53), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{(k)}(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) &= -(k+2) \mathbb{M}_T^{(k)}(\mathbb{F}) + (k+1) \sum_{p=k}^N [1 + (-1)^{k+p}] \mathbb{M}_T^{(p)}(\mathbb{F}) + \\ &+ (k+1) [\mathbb{M}_T^{(+)}(\mathbb{F}) + (-1)^k \mathbb{M}_T^{(-)}(\mathbb{F})]. \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Очевидно, (4.2.54) можно было доказать также, используя первое соотношение (4.2.4) и (4.2.50).

Отметим, что аналогичные (4.2.43) и (4.2.46)–(4.2.48) соотношения имеют место и для системы полиномов Чебышева второго рода. Они получаются из указанных выше

соотношений заменой индекса L на T . Поэтому с целью сокращения письма выписывать их не будем. При необходимости сослаться будем на (4.2.43) и (4.2.46)–(4.2.48).

Следует заметить, что, если распространить определение системы полиномов Чебышева на множество целых отрицательных чисел, то будем иметь

$$U_{-m}(x^3) = -U_{m-2}(x^3), \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (U_{-2}(x^3) = -U_0(x^3) = -1, \quad U_{-1}(x^3) = 0). \quad (4.2.56)$$

Отсюда, в частности, следуют равенства

$$\overset{(-m)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}) = -\overset{(m-2)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}), \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (\overset{(-2)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}) = -\overset{(0)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}), \quad \overset{(-1)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}) = 0). \quad (4.2.57)$$

Учитывая (4.2.56) и (4.2.57), рекуррентные формулы и моменты выражений относительно этой системы полиномов становятся справедливыми при любом целом неотрицательном значении показателя порядка. Например, в силу сказанного справедлива формула

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{2\mathbb{M}}_T[(x^3)^2 \partial_3 \mathbb{F}] &= (k-1) \overset{(k-1)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}) + (3k+1) \overset{(k+1)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}) + \\ &+ 2(k+1) \sum_{p=k+3}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}_T(\mathbb{F}), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношения (4.2.4) справедливы при $k \geq 0$, а (4.2.5) при $k \geq 0$, $s \geq 0$.

4.2.2.3 Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышева первого рода

В силу определения системы полиномов Чебышева первого рода ($T_k(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}_0$) заключаем, что $T_{-k}(x) = T_k(x)$. Тогда, распространяя определение системы полиномов Чебышева на множество целых отрицательных чисел, первое соотношение (4.2.27) оказывается справедливым при $k \geq 0$, а последнее при $k \geq 0$, $s \geq 0$. Теперь, учитывая это обстоятельство, выпишем моменты нескольких важных выражений относительно системы полиномов Чебышева первого рода. Прежде всего заметим, что для моментов частных производных аналогично (4.2.35) и (4.2.49) имеем формулу

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i \mathbb{F}) = g_i^J \partial_J \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + g_i^3 \overset{(k)}{\mathbb{M}}'(\mathbb{F}), \quad (4.2.58)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{\mathbb{M}}'(\mathbb{F}) &= \overset{(0)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} p [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}), \\ \overset{(k)}{\mathbb{M}}'(\mathbb{F}) &= \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) = \sum_{p=k+1}^{\infty} p [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}), \quad k > 0. \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Далее в силу соответствующих рекуррентных соотношений (4.2.27) нетрудно доказать справедливость равенств

$$\begin{aligned} 2\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3 \mathbb{F}) &= \|T_{k-1}\|^2 \overset{(k-1)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + \|T_{k+1}\|^2 \overset{(k+1)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}), \\ 4\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^2 \mathbb{F}] &= \|T_{k-2}\|^2 \overset{(k-2)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + 2\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + \|T_{k+2}\|^2 \overset{(k+2)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}), \quad k \geq 0; \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

$$\begin{aligned} 2\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3 \partial_3 \mathbb{F}) &= \|T_{k-1}\|^2 \overset{(k-1)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) + \|T_{k+1}\|^2 \overset{(k+1)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}), \\ 4\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^2 \partial_3 \mathbb{F}] &= \|T_{k-2}\|^2 \overset{(k-2)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) + 2\|T_k\|^2 \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}) + \|T_{k+2}\|^2 \overset{(k+2)}{\mathbb{M}}(\partial_3 \mathbb{F}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

Осуществляя простые выкладки, из (4.2.60) найдем

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}2\mathbb{M}(x^3\mathbb{F}) &= {}^{(1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad {}^{(1)}2\mathbb{M}(x^3\mathbb{F}) = 2{}^{(0)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(2)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad {}^{(k)}2\mathbb{M}(x^3\mathbb{F}) = {}^{(k-1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(k+1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad k \geq 2; \\
 {}^{(0)}4\mathbb{M}[(x^3)^2\mathbb{F}] &= 2{}^{(0)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(2)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad {}^{(1)}4\mathbb{M}[(x^3)^2\mathbb{F}] = 3{}^{(1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(3)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \\
 {}^{(2)}4\mathbb{M}[(x^3)^2\mathbb{F}] &= 2{}^{(0)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + 2{}^{(2)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(4)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad {}^{(k)}4\mathbb{M}[(x^3)^2\mathbb{F}] = {}^{(k-2)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + 2{}^{(k)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + {}^{(k+2)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad k \geq 3.
 \end{aligned} \tag{4.2.62}$$

Аналогично с помощью формул (4.2.58) и (4.2.59) из (4.2.61) получим

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}2\mathbb{M}(x^3\partial_3\mathbb{F}) &= \sum_{p=2}^{\infty} p[1 + (-1)^p]{}^{(p)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \\
 {}^{(k)}\mathbb{M}(x^3\partial_3\mathbb{F}) &= k{}^{(k)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + \sum_{p=k+2}^{\infty} p[1 + (-1)^{k+p}]{}^{(p)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad k \geq 1; \\
 {}^{(0)}2\mathbb{M}[(x^3)^2\partial_3\mathbb{F}] &= {}^{(1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + \sum_{p=3}^{\infty} p[1 - (-1)^p]{}^{(p)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \\
 {}^{(k)}2\mathbb{M}[(x^3)^2\partial_3\mathbb{F}] &= (k-1) {}^{(k-1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + 3(k+1) {}^{(k+1)}\mathbb{M}(\mathbb{F}) + 2 \sum_{p=k+3}^{\infty} p[1 - (-1)^{k+p}]{}^{(p)}\mathbb{M}(\mathbb{F}), \quad k \geq 1.
 \end{aligned} \tag{4.2.63}$$

4.2.3 Различные представления системы уравнений движения в моментах

Получим эти представления, исходя из (4.1.44) и (4.1.45). Применяя к (4.1.45), например, оператор моментов k -го порядка Лежандра и учитывая его линейность (4.2.47) и (4.2.48), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \nabla_P {}^{(k)}\mathbb{M}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 {}^{(k)}\mathbf{u}, \\
 \nabla_P {}^{(k)}\mathbb{M}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \boldsymbol{\mu} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 {}^{(k)}\boldsymbol{\varphi}, \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{4.2.64}$$

Следует заметить, что при получении (4.2.64) предполагалось однородность материала относительно x^3 . Кроме того, заметим, что система (4.2.64) в представленном виде имеет место как относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева, так и относительно любой системы полиномов. В этой связи при написании (4.2.64) индекс L опущен.

Совершенно аналогично, исходя из (4.1.44), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P [\sqrt{g} {}^{(k)}\mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}})] + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{F}) &= \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P [\sqrt{g} {}^{(k)}\mathbb{M}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}})] + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}(\hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned}$$

Очевидно, эту систему можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \nabla_P {}^{(k)}\mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{F}) &= \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 \nabla_P {}^{(k)}\mathbb{M}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + {}^{(k)}\mathbb{M}'(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}(\hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbb{M}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{4.2.65}$$

Заметим, что в (4.2.64) и (4.2.65) ∇_P — оператор ковариантной производной относительно системы координат, связанной с базовой поверхностью.

С целью получения искомым представлений нужно найти различные выражения для $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{3}})$, $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{3}})$, $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ и $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\vartheta\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$. Очевидно, искомые представления для $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{3}})$, $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ и $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\vartheta\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ можно получить из соответствующих, подлежащих нахождению выражений для $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{3}})$, заменой буквы \mathbf{P} на $\hat{\vartheta}\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}$ соответственно. В этой связи ниже получим искомые представления только для $\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{3}})$.

В силу второго соотношения (4.1.1) и первых формул (4.1.18) и (4.1.29) имеем

$$\mathbf{P}^{\hat{3}} = \mathbf{r}^{\hat{3}} \cdot \underline{\mathbf{P}} = (\mathbf{r}^3 - g_P^3 \mathbf{r}^{\hat{P}}) \cdot \underline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^3 - h^{-1} \partial_P \bar{h} \mathbf{P}^{\hat{P}} - h^{-1} \partial_P h x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}. \quad (4.2.66)$$

На основании (4.2.66) и свойства обобщенной линейности операторов моментов k -го порядка и «штрих» будем иметь

$$\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^3) - h^{-1} \partial_P \bar{h} \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - h^{-1} \partial_P h \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}). \quad (4.2.67)$$

Заметим, что (4.2.67) имеет место как для системы полиномов Лежандра, так и для систем полиномов Чебышева. Учитывая $\bar{h} = (\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h})/2$, $h = (\overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h})/2$, а также вторую и третью формулы (4.1.15), равенство (4.2.67) можно записать в виде

$$\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^3) + \frac{1}{2} g_P^3 [\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{P}})] - \frac{1}{2} g_P^3 [\overset{(k)}{\mathbf{M}'}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \overset{(k)}{\mathbf{M}'}(\mathbf{P}^{\hat{P}})]. \quad (4.2.68)$$

4.2.3.1 Представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра

На основании (4.2.36), (4.2.41) и (4.2.43) нетрудно доказать справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= -(k+1) \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (-1)^{k+p} \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}), \\ \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= -(k+1) \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}). \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

В силу (4.2.33) формулы (4.2.69) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= \\ &= k \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + (2k+1) (-1)^k \mathbf{P}^{\hat{P}(-)} - (2k+1) \sum_{p=0}^k (-1)^{k+p} \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}), \\ \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= k \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + (2k+1) \mathbf{P}^{\hat{P}(+)} - 2(k+1) \sum_{p=0}^k \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}). \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

Учитывая (4.2.36) и (4.2.69), соотношение (4.2.68) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^3) + \frac{k+1}{2} (g_P^3 - g_P^3) \overset{(k)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - \\ &\quad - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_P^3] \overset{(p)}{\mathbf{M}'_L}(\mathbf{P}^{\hat{P}}), \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

$$\mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \boldsymbol{\mu}^3; \quad \mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \hat{\vartheta}\mathbf{P}^3; \quad \mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^3.$$

Здесь запись на последней строке, означает, что вместо этой строки следует выписать соотношения, которые получаются из выписанного заменой $\mathbf{P}^{\hat{P}}$ на $\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}$, \mathbf{P}^3 на $\boldsymbol{\mu}^3$ и т.д.

В данном случае следует выписать три соотношения. Число подлежащих выписке соотношений на единицу больше числа знака препинания "точка с запятой" на последней строке. Такой записью будем пользоваться и в дальнейшем.

Аналогично с помощью (4.2.37) и (4.2.70) из (4.2.68) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_L(\mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -\frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^3) - \frac{k}{2} (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\ &+ \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \left[(\mathbf{P}^{\hat{3}} - g_+^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) - (-1)^k (\mathbf{P}^{\hat{3}} - g_-^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) \right]. \end{aligned}$$

Это равенство, учитывая получаемые из (4.2.66) формулы

$$\mathbf{P}^{\hat{3}+} = \mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^3=1} = \mathbf{P}^3 - g_+^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^{\hat{3}-} = \mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^3=-1} = \mathbf{P}^3 - g_-^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}, \quad (4.2.72)$$

представится в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_L(\mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -\frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^3) - \frac{k}{2} (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\ &+ \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \left[\mathbf{P}^{\hat{3}+} - (-1)^k \mathbf{P}^{\hat{3}-} \right], \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Нетрудно заметить, что аналогичное (4.2.73) соотношение для $\mathbf{M}'_L(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_L(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -\frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_L(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^3) - \frac{k}{2} (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_L(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\ &+ \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_L(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \left[\hat{\vartheta}^+ \mathbf{P}^{\hat{3}+} - (-1)^k \hat{\vartheta}^- \mathbf{P}^{\hat{3}-} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.74)$$

Следует заметить, что в (4.2.73) и (4.2.74), а также в соотношениях, получаемых из (4.2.73) и (4.2.74) заменой буквы \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, величины $\mathbf{P}^{\hat{3}-}$, $\mathbf{P}^{\hat{3}+}$ и $\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}-}$, $\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}+}$ определяются с помощью граничных условий на лицевых поверхностях. В самом деле, пусть $\mathbf{P}^{(-)}$ и $\mathbf{P}^{(+)}$ — заданные векторы напряжения, а $\boldsymbol{\mu}^{(-)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(+)}$ — заданные векторы моментного напряжения на лицевых поверхностях $\hat{S}^{(-)}$ и $\hat{S}^{(+)}$ соответственно. Тогда граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях представятся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\hat{3}-} &= \mathbf{r}^{\hat{3}-} \cdot \underline{\mathbf{P}} = -\sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}-}} \mathbf{P}^{\hat{3}-}, \quad \mathbf{P}^{\hat{3}+} = \mathbf{r}^{\hat{3}+} \cdot \underline{\mathbf{P}} = \sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}+}} \mathbf{P}^{\hat{3}+}, \\ \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}-} &= \mathbf{r}^{\hat{3}-} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = -\sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}-}} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}-}, \quad \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}+} = \mathbf{r}^{\hat{3}+} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}+}} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}+}. \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

Здесь аналогично (4.2.72) имеем

$$\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}+} = \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}|_{x^3=1} = \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} - g_+^3 \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}-} = \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}|_{x^3=-1} = \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} - g_-^3 \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}.$$

Подставляя (4.2.75) в (4.2.73) и (4.2.74), а также в соотношения, которые получают из (4.2.73) и (4.2.74) заменой буквы \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, получим их с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях. Преимущество такого представления этих соотношений в сравнении с (4.2.71) заключается в том, что они содержат конечное число неизвестных (моментов искомых величин). С целью сокращения письма их выписывать не будем.

Учитывая (4.2.71), из (4.2.64) и (4.2.65) найдем следующие из искомым представлений системы уравнений движения в моментах:

$$\begin{aligned}
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{k+1}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\
 & + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{P}^3) + \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \frac{k+1}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \\
 & + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^3) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_L^{(k)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}),
 \end{aligned} \tag{4.2.76}$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{k+1}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\
 & + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^3) + \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \frac{k+1}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \\
 & + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^3) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}).
 \end{aligned} \tag{4.2.77}$$

С помощью (4.2.73) и (4.2.74) и аналогичных соотношений для $\mathbf{M}'_L^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ и $\mathbf{M}'_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ из (4.2.64) и (4.2.65) получим следующие представления системы уравнений движения в моментах:

$$\begin{aligned}
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - \frac{k}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - \\
 & - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{P}^3) + \underline{\mathbf{\Phi}} = \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \frac{k}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \\
 & - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^3) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\underline{\mathbf{P}}) + \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_L^{(k)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad k \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{4.2.78}$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \frac{k}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \\
 & - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^3) + \underline{\mathbf{\Phi}} = \rho \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \nabla_P \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \frac{k}{2} (g_P^3 - g_{\bar{P}}^3)^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [g_P^3 - (-1)^{k+p} g_{\bar{P}}^3]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - \\
 & - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}]^{(p)} \mathbf{M}_L^{(p)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^3) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}) + \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_L^{(k)}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad k \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{4.2.79}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \overset{(k)}{\Phi} &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}} - (-1)^k \overset{(-)}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{F}) = \\
 &= \frac{2k+1}{2} [\sqrt{g_{33}^{++(+)}} \mathbf{P} + (-1)^k \sqrt{g_{33}^{--(-)}} \mathbf{P}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{F}), \\
 \overset{(k)}{\mathbf{M}} &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}} - (-1)^k \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}\overset{-}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{m}) = \\
 &= \frac{2k+1}{2} [\sqrt{g_{33}^{++(+)}} \boldsymbol{\mu} + (-1)^k \sqrt{g_{33}^{--(-)}} \boldsymbol{\mu}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{m}), \\
 \overset{(k)}{\underline{\Phi}} &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)(+)}{\vartheta} \overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}} - (-1)^k \overset{(-)(-)}{\vartheta} \overset{-}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\hat{\vartheta}\mathbf{F}) = \\
 &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\vartheta} \sqrt{g_{33}^{++(+)}} \mathbf{P} + (-1)^k \overset{(-)}{\vartheta} \sqrt{g_{33}^{--(-)}} \mathbf{P}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\hat{\vartheta}\mathbf{F}), \\
 \overset{(k)}{\underline{\mathbf{M}}} &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)(+)}{\vartheta} \overset{+}{\boldsymbol{\mu}}\overset{+}{\mathbf{P}}\overset{+}{\mathbf{P}} - (-1)^k \overset{(-)(-)}{\vartheta} \overset{-}{\boldsymbol{\mu}}\overset{-}{\mathbf{P}}\overset{-}{\mathbf{P}}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\hat{\vartheta}\mathbf{m}) = \\
 &= \frac{2k+1}{2} [\overset{(+)}{\vartheta} \sqrt{g_{33}^{++(+)}} \boldsymbol{\mu} + (-1)^k \overset{(-)}{\vartheta} \sqrt{g_{33}^{--(-)}} \boldsymbol{\mu}] + \rho \overset{(k)}{\mathbf{M}}_L(\hat{\vartheta}\mathbf{m}).
 \end{aligned} \tag{4.2.80}$$

Следует заметить, что (4.2.80) и, следовательно, (4.2.78) и (4.2.79) написаны с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях (4.2.75). Кроме того, представления (4.2.78) и (4.2.79) по сравнению (4.2.76) и (4.2.77) имеют преимущество в том смысле, что каждое уравнение систем уравнений (4.2.78) и (4.2.79) содержит конечное число неизвестных.

Системы уравнений (4.2.76)–(4.2.79) являются искомыми представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра. Назовем их различными представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра ММДТТТ (микрополярной механики деформируемого твердого тонкого тела).

4.2.3.2 Представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода

В этом случае получить представления системы уравнений движения в моментах с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях не представляет труда. Однако, так как ввиду (4.2.51) систему уравнений в моментах, каждое уравнение которой содержало конечное число слагаемых (неизвестных) не удастся получить, то на этом останавливаться не будем. Таким образом, получим только аналогичные (4.2.76) и (4.2.77) представления. В этой связи выведем подобные (4.2.71) соотношения.

Легко усмотреть, что в силу (4.2.43), (4.2.50) и (4.2.54) подобно (4.2.69) находим

$$\begin{aligned}
 \overset{(k)}{\mathbf{M}}'_T(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) - \overset{(k)}{\mathbf{M}}'_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= -(k+2) \overset{(k)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} (-1)^{k+p} \overset{(p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}), \\
 \overset{(k)}{\mathbf{M}}'_T(x^3 \mathbf{P}^{\hat{P}}) + \overset{(k)}{\mathbf{M}}'_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= -(k+2) \overset{(k)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \overset{(p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}).
 \end{aligned} \tag{4.2.81}$$

Учитывая (4.2.50) и (4.2.81), соотношение (4.2.68) в рассматриваемом случае можно представить в форме

$$\begin{aligned}
 \overset{(k)}{\mathbf{M}}'_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) &= (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \overset{(p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\
 &+ \frac{k+2}{2} (g_{\hat{P}}^3 - g_{\hat{P}}^3) \overset{(k)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [g_{\hat{P}}^3 - (-1)^{k+p} g_{\hat{P}}^3] \overset{(p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}),
 \end{aligned} \tag{4.2.82}$$

$$\mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \boldsymbol{\mu}^3; \quad \mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{P}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{P}^3; \quad \mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\nu} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \hat{\nu} \boldsymbol{\mu}^3.$$

С помощью (4.2.82) из (4.2.64) и (4.2.65) нетрудно получить искомые представления системы уравнений движения в моментах относительно системы ортонормированной полиномов Чебышева второго рода. В самом деле, будем иметь

$$\begin{aligned} & \nabla_P^{(k)} \mathbf{M}_T(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \frac{k+2}{2} (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_T^{(k)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) - (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_T^{(p)}(\mathbf{P}^{\hat{P}}) + \\ & + (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_T^{(p)}(\mathbf{P}^3) + \rho \mathbf{M}_T^{(k)}(\mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_T^{(k)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (4.2.83)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_P^{(k)} \mathbf{M}_T(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \frac{k+2}{2} (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_T^{(k)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) - (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_T^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \\ & + (k+1) \sum_{p=k}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_T^{(p)}(\boldsymbol{\mu}^3) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_T^{(k)}(\underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbf{M}_T^{(k)}(\mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_T^{(k)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{P}^{\hat{P}}, \quad \mathbf{P}^3 \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{P}^3, \quad \mathbf{F} \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{F}, \quad \partial_t^2 \mathbf{u} \rightarrow \hat{\nu} \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ & \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}} \rightarrow \hat{\nu} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}, \quad \boldsymbol{\mu}^3 \rightarrow \hat{\nu} \boldsymbol{\mu}^3, \quad \underline{\mathbf{P}}^T \rightarrow \hat{\nu} \underline{\mathbf{P}}^T, \quad \mathbf{m} \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{m}, \quad \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi} \rightarrow \hat{\nu} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.2.84)$$

Системы уравнений (4.2.83) и (4.2.84) аналогично (4.2.76)–(4.2.79) целесообразно называть различными представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода ММДТТТ.

Следует заметить, что представления системы уравнений с помощью (4.2.38) и (4.2.52) не доставляет труда, поэтому на этом останавливаться не будем.

Очевидно, совершенно аналогично (4.2.76)–(4.2.79), (4.2.83) и (4.2.84), используя соотношения (4.2.62) и (4.2.63), можно получить различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева первого рода. С целью сокращения письма выписывать их не будем.

4.3 Представления ОС в моментах

Различные представления искомых соотношений можно получить, исходя из (4.1.50)–(4.1.54). Однако с целью сокращения письма ограничимся получением этих соотношений, исходя только из (4.1.51). На основании (4.2.47), (4.2.48) и (4.2.71) будем иметь

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u}) = \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}} \mathbf{u}) = \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{r}^3 [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{u}) + \\ & + \frac{k+1}{2} (g_+^3 - g_-^3) \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{u}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{u}), \quad (4.3.1) \\ & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbf{u}) = \nabla_P^{(k)} \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{u}) = \mathbf{r}^M \nabla_P^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(g_M^{\hat{P}} \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

Заметим, что соответствующие (4.3.1) соотношения нулевого приближения и приближения порядка r соответственно представляются в видах

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u}) = \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}} \mathbf{u}) \approx \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{r}^3 [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{u}) + \\ & + \frac{k+1}{2} \mathbf{r}^P (g_+^3 - g_-^3) \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{u}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{r}^P [g_+^3 - (-1)^{k+p} g_-^3] \mathbf{M}_L^{(p)}(\mathbf{u}), \quad (4.3.2) \\ & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbf{u}) = \nabla_P^{(k)} \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^M \nabla_M^{(k)} \mathbf{M}_L^{(k)}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\partial_3\mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{M}}_L^{\prime(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\mathbf{u}) = \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{r}^3 [1 - (-1)^{k+p}] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \frac{k+1}{2} \mathbf{r}^M (g_{\hat{P}}^3 - g_{\hat{P}}^3) \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{r}^M [g_{\hat{P}}^3 - (-1)^{k+p} g_{\hat{P}}^3] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}), \quad (4.3.3) \\
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\partial_P\mathbf{u}) &= \nabla_P \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^M \nabla_P \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \varphi.
 \end{aligned}$$

Следует заметить, что при упрощенном методе редукции бесконечной системы к конечной системе (более подробно об упрощенном методе редукции сказано ниже), фиксируя некоторое неотрицательное целое число N , в ОС моментами векторов перемещений и вращений, порядок которых больше N , пренебрегаем. Учитывая только что сказанное, из (4.3.2) и (4.3.3) получим соотношения приближений $(0, N)$ и (r, N) соответственно, если в них верхний предел сумм ∞ заменить на N . Они будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\partial_3\mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{M}}_L^{\prime(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\mathbf{u}) \approx \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N \mathbf{r}^3 [1 - (-1)^{k+p}] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \frac{k+1}{2} \mathbf{r}^P (g_{\hat{P}}^3 - g_{\hat{P}}^3) \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{u}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N \mathbf{r}^P [g_{\hat{P}}^3 - (-1)^{k+p} g_{\hat{P}}^3] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(\mathbf{u}), \quad (4.3.4) \\
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\partial_P\mathbf{u}) &= \nabla_P \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^M \nabla_M \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \varphi;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\partial_3\mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{M}}_L^{\prime(k)}(\mathbf{r}^{\hat{3}}\mathbf{u}) = \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N \mathbf{r}^3 [1 - (-1)^{k+p}] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \frac{k+1}{2} \mathbf{r}^M (g_{\hat{P}}^3 - g_{\hat{P}}^3) \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}) - \frac{2k+1}{2} \sum_{p=k}^N \mathbf{r}^M [g_{\hat{P}}^3 - (-1)^{k+p} g_{\hat{P}}^3] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}), \quad (4.3.5) \\
 \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\partial_P\mathbf{u}) &= \nabla_P \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(\mathbf{r}^{\hat{P}}\mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^M \nabla_P \underline{\mathbf{M}}_L^{(k)}(g_{(r)M}^{\hat{P}}\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \varphi.
 \end{aligned}$$

Следует заметить, что, имея приведенные выше соотношения для систем полиномов Чебышева (см. соответствующие разделы), не представляет труда получить подобные (4.3.1)–(4.3.5) соотношения относительно этих систем полиномов, на получении которых с целью сокращения письма останавливаться не будем.

Применяя оператор моментов k -го порядка к (4.1.51) и учитывая в отдельности (4.3.1)–(4.3.5) и аналогичные соотношения для систем полиномов Чебышева, получим ОС физического содержания в моментах соответствующих приближений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Совершенно аналогично из (4.1.57) можно найти ОС теплового содержания в моментах. С целью сокращения письма ОС в моментах выписать не будем. Следовательно, в дальнейшем их будем считать известными.

4.4 О граничных и начальных условиях в микрополярной МДТТТ

Выписаны граничные условия кинематического, физического и теплового содержаний на лицевых поверхностях и боковой грани при новой параметризации области тонкого тела. Из граничных условий на боковой грани получены соответствующие граничные условия в моментах. Даны начальные условия в моментах.

4.4.1 Граничные условия на лицевых поверхностях

Сперва рассмотрим граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях и представим их при рассматриваемой параметризации области тонкого тела.

Пусть $\mathbf{P}^{(+)}$ и $\mathbf{P}^{(-)}$ — заданные векторы напряжения, а $\boldsymbol{\mu}^{(+)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(-)}$ — заданные векторы моментного напряжения на лицевых поверхностях $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{n}^{(+)}$ и $\mathbf{n}^{(-)}$ орты внешних нормалей к $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ соответственно. Нетрудно заметить, что для $\mathbf{n}^{(-)}$ и $\mathbf{n}^{(+)}$ в случае параметризации при произвольной базовой поверхности будем иметь выражения

$$\mathbf{n}^{(-)} = -\frac{\mathbf{r}^{\bar{3}}}{\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}} = -\frac{1}{\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}}}(\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}), \quad \mathbf{n}^{(+)} = \frac{\mathbf{r}^{\dagger 3}}{\sqrt{g^{\dagger 3\dagger 3}}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\dagger 3\dagger 3}}}(\mathbf{r}^{\dagger 3} - g_{\dagger P}^{\dagger 3} g_{\dagger M}^{\dagger P} \mathbf{r}^{\dagger M}). \quad (4.4.1)$$

Тогда с помощью (4.4.1) граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях тонкого тела (4.2.75) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(-)} = (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}^{(-)}} \mathbf{P}, \quad \mathbf{r}^{\dagger 3} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(+)} = (\mathbf{r}^{\dagger 3} - g_{\dagger P}^{\dagger 3} g_{\dagger M}^{\dagger P} \mathbf{r}^{\dagger M}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{(+)} = \sqrt{g^{\dagger 3\dagger 3}^{(+)}}, \quad (4.4.2)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(-)} = \mathbf{P} \Big|_{x^3=-1}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^{(+)} = \mathbf{P} \Big|_{x^3=1}; \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad x' \in S.$$

При неизотермических процессах на лицевых поверхностях $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ могут быть заданы нормальные составляющие $\bar{q}^{(+)}$ и $\bar{q}^{(-)}$ вектора потока тепла \mathbf{q} соответственно. Тогда граничные условия (условия второго рода или условия типа Неймана) [336] на лицевых поверхностях аналогично (4.4.2) представляются в форме

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}^{(-)} = (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}^{(-)}} \bar{q}, \quad \mathbf{r}^{\dagger 3} \cdot \mathbf{q}^{(+)} = (\mathbf{r}^{\dagger 3} - g_{\dagger P}^{\dagger 3} g_{\dagger M}^{\dagger P} \mathbf{r}^{\dagger M}) \cdot \mathbf{q}^{(+)} = \sqrt{g^{\dagger 3\dagger 3}^{(+)}}, \quad (4.4.3)$$

$$\mathbf{q}^{(-)} = \mathbf{q} \Big|_{x^3=-1}, \quad \mathbf{q}^{(+)} = \mathbf{q} \Big|_{x^3=1}, \quad x' \in S.$$

Могут быть заданы граничные условия, соответствующие теплообмену с окружающей средой по закону Ньютона (граничные условия третьего рода) [336]. В этом случае граничные условия на $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ соответственно имеют вид

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} \cdot \mathbf{q}^{(-)} = (\mathbf{r}^{\bar{3}} - g_{\bar{P}}^{\bar{3}} g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}) \cdot \mathbf{q}^{(-)} = -\sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}^{(-)}} \beta (T_c - T), \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{r}^{\dagger 3} \cdot \mathbf{q}^{(+)} = (\mathbf{r}^{\dagger 3} - g_{\dagger P}^{\dagger 3} g_{\dagger M}^{\dagger P} \mathbf{r}^{\dagger M}) \cdot \mathbf{q}^{(+)} = \sqrt{g^{\dagger 3\dagger 3}^{(+)}} \beta (T_c - T), \quad x' \in S,$$

где T_c — заданная температура окружающей среды, β — коэффициент теплоотдачи (кал/см²·с·град), а

$$\beta^{(-)} = \beta \Big|_{x^3=-1}, \quad \beta^{(+)} = \beta \Big|_{x^3=1}, \quad T^{(-)} = T \Big|_{x^3=-1}, \quad T^{(+)} = T \Big|_{x^3=1}, \quad T_c^{(-)} = T_c \Big|_{x^3=-1}, \quad T_c^{(+)} = T_c \Big|_{x^3=1}. \quad (4.4.5)$$

Ниже будут рассмотрены и граничные условия первого рода или условия типа Дирихле.

Далее отметим, что при упрощенном методе редукции для каждого приближенного решения краевой задачи, аналогично тому как это делается в [68] для классического варианта теории с применением полиномов Лежандра, строится корректирующее слагаемое, обеспечивающее выполнение граничных условий на лицевых поверхностях. С целью сокращения письма здесь на построении корректирующих слагаемых при различных граничных условиях на лицевых поверхностях останавливаться не будем (см. выше в третьей главе). Однако, отметим также, что при новой параметризации области тонкого тела эти вопросы рассмотрены в [281], а аналогичные вопросы в случае тонкого тела с двумя малыми размерами можно смотреть в [283, 296].

Из изложенного выше видно, что трехмерные законы Гука и теплопроводности Фурье в теории тонких тел заменяются соответствующими бесконечными системами законов в моментах. При этом каждый закон содержит бесконечное число слагаемых. Поэтому аналогично системам уравнений движения и притока тепла в моментах следует их редуцировать к конечным системам законов в моментах, каждый закон которых будет содержать конечное число слагаемых. Редукция производится следующим образом: фиксируем некоторые (в частности, те же самые числа, что при редукции систем уравнений) неотрицательные целые числа r и N , а затем из бесконечной системы законов в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения порядка r выбираем совокупность первых $N + 1$ законов. При упрощенном методе редукции из бесконечной системы законов в моментах приближения порядка r выбираем совокупность первых $N + 1$ законов, в каждом законе которой пренебрегаем моментами искомым величин, порядок которых больше N . В этой связи целесообразно вводить определения.

Определение 4.4.1. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N + 1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений порядка r , назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, N) .

Определение 4.4.2. Совокупность законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах, которая состоит из первых $N + 1$ законов соответствующей бесконечной системы законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах порядка r и каждый закон которой не содержит моментов искомым величин, порядок которых больше N , назовем системой законов Гука (теплопроводности Фурье) в моментах приближения (r, N) .

4.4.2 Граничные условия в моментах в теории тонких тел

Для корректной постановки задач в теории тонких тел к любой системе уравнений, согласованной или несогласованной (при упрощенной схеме редукции к системе конечного порядка) с граничными условиями на лицевых поверхностях, следует присоединить граничные условия на контуре ∂S основной базовой поверхности S .

На боковой грани Σ могут быть заданы кинематические условия (векторы перемещений и вращений) или статические (векторы напряжения и моментного напряжения). На одной ее части Σ_1 могут быть заданы кинематические условия, а на другой части Σ_2 — статические ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$). При неизотермических процессах на некоторой части боковой грани еще задаются граничные условия теплового содержания первого рода (типа Дирихле) или второго рода (типа Неймана), или же третьего рода (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона). Ниже рассмотрены кинематические, физические и тепловые граничные условия на боковой грани и из них получены соответствующие граничные условия в моментах на граничном контуре основной базовой поверхности.

В дальнейшем предполагаем, что боковая грань Σ состоит из линейчатых поверхностей и фиксированы некоторые неотрицательные целые числа r и N , задание которых означает, что рассматриваются системы уравнений в моментах приближения (r, N) , системы законов Гука и теплопроводности Фурье в нормированных моментах или в моментах приближения (r, N) , а также соответствующие граничные условия на граничном контуре основной базовой поверхности и начальные условия в моментах. Тогда, очевидно, неизвестными будут моменты $\underline{\mathbf{P}}^{(m)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(m)}, \underline{\mathbf{u}}^{(m)}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}^{(m)}, T^{(m)}$, $m = \overline{0, N}$. Например, для микрополярной теории тонких тел при неизотермических процессах задача будет корректно поставлена, если на граничном контуре ∂S основной базовой поверхности S заданы $2N + 2$ векторных

кинематических граничных условий, а на его части $\partial S_q \subseteq \partial S - N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае первой краевой задачи) или на ∂S заданы $2N + 2$ векторных статических граничных условий, а на $\partial S_q \subseteq \partial S - N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае второй краевой задачи), или на одной его части ∂S_1 могут быть заданы $2N + 2$ векторных кинематических граничных условий, на остальной части ∂S_2 ($\partial S_1 \cup \partial S_2 = \partial S$, $\partial S_1 \cap \partial S_2 = \emptyset$) — $2N + 2$ векторных статических граничных условий, а на $\partial S_q \subseteq \partial S - N + 1$ граничных условий теплового содержания (в случае смешанной краевой задачи). Заметим, что в случае динамических задач к граничным условиям в моментах следует присоединять начальные условия в моментах, о которых речь пойдет ниже.

4.4.3 Кинематические граничные условия в моментах

Пусть на боковой грани Σ заданы векторы перемещений \mathbf{u} и вращений $\boldsymbol{\varphi}$, т.е.

$$\mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{f}(x', x^3, t), \quad \boldsymbol{\varphi}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{g}(x', x^3, t)$$

Тогда кинематические граничные условия в моментах приближения N относительно какой-нибудь системы полиномов представляются в виде

$$\mathbf{u}^{(k)}(x', t) = \mathbf{f}^{(k)}(x', t), \quad \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(x', t) = \mathbf{g}^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S \quad (4.4.6)$$

Здесь $\mathbf{f}^{(k)}(x', t)$ и $\mathbf{g}^{(k)}(x', t)$, $k = \overline{0, N}$, — известные векторные поля на ∂S как моменты известных векторных полей $\mathbf{f}(x', x^3, t)$ и $\mathbf{g}(x', x^3, t)$ соответственно.

4.4.4 Физические граничные условия в моментах

Пусть на боковой грани Σ заданы векторы напряжения $\mathbf{P}(x', x^3, t)$ и моментного напряжения $\boldsymbol{\mu}(x', x^3, t)$. Тогда граничные условия в силу формул Коши на боковой грани Σ можно записать в форме

$$\hat{\mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{P}}(x', x^3, t) = \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad \hat{\mathbf{m}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}(x', x^3, t) = \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad x' \in \partial S, \quad -1 \leq x^3 \leq 1. \quad (4.4.7)$$

Здесь $\hat{\mathbf{m}}$ — единичный вектор нормали в произвольной точке на боковой грани.

Прежде чем получить граничные условия в моментах, выведем некоторые геометрические соотношения на боковой грани при рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Обозначая через $d\hat{\Sigma}$ элементарную площадку с одной вершиной в точке с координатами (x^1, x^2, x^3) и со сторонами $d\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_I dx^I$ и $\mathbf{r}_3 dx^3$, найдем

$$\begin{aligned} d\hat{\Sigma} &= d\hat{\Sigma} \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_3 dx^I dx^3 = \sqrt{g} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3 = \sqrt{g} g_I^K \epsilon_{JK} \mathbf{r}^J dx^I dx^3, \\ d\hat{\Sigma}^{(+)} &= d\hat{\Sigma}^{(+)(+)} \hat{\mathbf{m}} = \sqrt{g^{(+)}} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3 = \sqrt{g} \epsilon_{JK} g_I^K \mathbf{r}^J dx^I dx^3, \\ d\Sigma &= d\Sigma \mathbf{m} = \sqrt{g} \epsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3, \quad d\Sigma^{(-)} = d\Sigma^{(-)(-)} \mathbf{m} = \sqrt{g^{(-)}} \epsilon_{IK} g_I^K \mathbf{r}^I dx^J dx^3. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Последние три соотношения (4.4.8) получаются аналогично первому. Следовательно, их можно получить также из первого соотношения (4.4.8) при $x^3 = 1$, $x^3 = -h^{-1}\bar{h}$ ($z = 0$) и $x^3 = -1$ соответственно. Здесь $d\hat{\Sigma}^{(+)}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке M с координатами $(x^1, x^2, 1)$ и со сторонами $d\hat{\mathbf{r}}^{(+)} = \mathbf{r}_I dx^I$ и $\mathbf{r}_3 dx^3$; $d\Sigma^{(-)}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке M с координатами $(x^1, x^2, -h^{-1}\bar{h})$ и со сторонами

$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_I dx^I$ и $\mathbf{r}_3 dx^3$; $d\hat{\Sigma}^{(-)}$ — элементарная площадка с одной вершиной в точке $\hat{M}^{(-)}$ с координатами $(x^1, x^2, -1)$ и со сторонами $d\hat{\mathbf{r}}^{(+)} = \mathbf{r}_I^{(+)} dx^I$ и $\mathbf{r}_3 dx^3$; $\hat{\mathbf{m}}^{+}$, $\hat{\mathbf{m}}^{(-)}$ и $\hat{\mathbf{m}}^{(-)}$ — единичные векторы нормалей к боковой грани в точках \hat{M}^{+} , M и $\hat{M}^{(-)}$ соответственно.

Далее в силу первого и третьего соотношений (4.4.8) получим

$$d\hat{\Sigma} = \hat{\vartheta} \frac{\sqrt{g^{\hat{K}\hat{L}} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} d\Sigma = \frac{\sqrt{g^{MN} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_{\hat{I}}^{\hat{K}} g_{\hat{J}}^{\hat{L}} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} d\Sigma. \quad (4.4.9)$$

Умножая первое, второе, третье и четвертое соотношения (4.4.8) на $\mathbf{r}_{\hat{K}}$, $\mathbf{r}_{\hat{K}}^{+}$, \mathbf{r}_K и $\mathbf{r}_{\hat{K}}^{-}$ соответственно, будем иметь

$$\begin{aligned} d\hat{\Sigma} \hat{m}_{\hat{I}} &= \sqrt{\hat{g}} \epsilon_{IJ} dx^J dx^3, & d\hat{\Sigma} \hat{m}_{\hat{I}}^{(+)(+)} &= \sqrt{\hat{g}} \epsilon_{IJ} dx^J dx^3, \\ d\Sigma m_I &= \sqrt{g} \epsilon_{IJ} dx^J dx^3, & d\Sigma m_I^{(-)(-)} &= \sqrt{g} \epsilon_{IJ} dx^J dx^3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d\hat{\Sigma} \hat{m}_{\hat{I}} = \hat{\vartheta} d\Sigma m_I = \hat{\vartheta} d\hat{\Sigma} \hat{m}_{\hat{I}}^{(+)(+)} = \hat{\vartheta} d\hat{\Sigma} \hat{m}_{\hat{I}}^{(-)(-)} \quad (4.4.10)$$

Теперь найдем граничные условия в моментах. Прежде всего заметим, что (4.4.7) можно представить в виде

$$\hat{m}_{\hat{I}} \mathbf{P}^{\hat{I}} = \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad \hat{m}_{\hat{I}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\hat{I}} = \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad x' \in \partial S. \quad (4.4.11)$$

Умножая каждое соотношение (4.4.11) на $d\hat{\Sigma}$ и учитывая (4.4.10), найдем

$$m_I g_J^{\hat{I}} \mathbf{P}^J = \mathbf{P} \frac{d\hat{\Sigma}}{d\Sigma} \hat{\vartheta}^{-1}, \quad m_I g_J^{\hat{I}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^J = \boldsymbol{\mu} \frac{d\hat{\Sigma}}{d\Sigma} \hat{\vartheta}^{-1}, \quad x' \in \partial S. \quad (4.4.12)$$

Вводя обозначение

$$a(x', x^3) = \frac{d\hat{\Sigma}}{d\Sigma} \hat{\vartheta}^{-1} = \frac{\sqrt{g^{MN} \epsilon_{MK} \epsilon_{NL} g_{\hat{I}}^{\hat{K}} g_{\hat{J}}^{\hat{L}} dx^I dx^J}}{\sqrt{g^{KL} \epsilon_{KI} \epsilon_{LJ} dx^I dx^J}} \hat{\vartheta}^{-1}, \quad (4.4.13)$$

равенства (4.4.12) можно записать в форме

$$m_I g_J^{\hat{I}} \mathbf{P}^J = a(x', x^3) \mathbf{P}(x', x^3, t), \quad m_I g_J^{\hat{I}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^J = a(x', x^3) \boldsymbol{\mu}(x', x^3, t), \quad x' \in \partial S. \quad (4.4.14)$$

Представляя $a(x', x^3)$ в виде ряда относительно z ($z = \bar{h} + x^3 h$)

$$a(x', x^3) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)}(x') (\bar{h} + x^3 h)^s, \quad A_{(s)}(x') = \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial^s a}{\partial (z)^s} \right)_{(z=0)} \quad (4.4.15)$$

и учитывая (4.1.46), из (4.4.14) получим граничные условия приближения порядка r

$$\begin{aligned} m_I g_J^{\hat{I}} \mathbf{P}^J &= a_{(r)}(x', x^3) \mathbf{P}, & m_I g_J^{\hat{I}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^J &= a_{(r)}(x', x^3) \boldsymbol{\mu}, & x' \in \partial S, \\ a_{(r)}(x', x^3) &= \sum_{s=0}^r A_s(x') (\bar{h} + x^3 h)^s, & r &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Учитывая (4.1.46) и первую формулу (4.4.15) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x^3 в правых и левых частях первых двух соотношений (4.4.16), получим

$$m_I A_{(s)J}^I \mathbf{P}^J = A_{(s)}(x') \mathbf{P}, \quad m_I A_{(s)J}^I \boldsymbol{\mu}^J = A_{(s)}(x') \boldsymbol{\mu}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \quad x' \in \partial S. \quad (4.4.17)$$

Соотношения (4.4.14) и (4.4.17) эквивалентны, а соотношения (4.4.16) эквивалентны первым $r+1$ равенствам (4.4.17). Применяя оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы полиномов (Лежандра, Чебышева) к (4.4.16), найдем

$$m_I \mathbf{M}_{(r)J}^{(k)}(g^I \mathbf{P}^J) = \mathbf{M}_{(r)}^{(k)}(a_{(r)} \mathbf{P}), \quad m_I \mathbf{M}_{(r)J}^{(k)}(g^I \boldsymbol{\mu}^J) = \mathbf{M}_{(r)}^{(k)}(a_{(r)} \boldsymbol{\mu}), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S^{(-)}. \quad (4.4.18)$$

Учитывая (4.4.17), из (4.4.18) будем иметь

$$m_I A_{(s)J}^I \mathbf{P}^J = A_{(s)}^{(k)} \mathbf{P}, \quad m_I A_{(s)J}^I \boldsymbol{\mu}^J = A_{(s)}^{(k)} \boldsymbol{\mu}, \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S. \quad (4.4.19)$$

которые можно еще получить, применяя оператор моментов k -го порядка к (4.4.17).

Заметим, что на основании (4.4.17) из (4.4.18) можно исключить моменты искомым и известных величин, порядок которых превосходит N . Тогда получим соотношения, которые назовем статическими граничными условиями в моментах приближения (r, N) . Они эквивалентны (4.4.19), поэтому в качестве статических граничных условий в моментах приближения (r, N) целесообразно рассматривать соотношения (4.4.19).

4.4.5 Граничные условия теплового содержания в моментах

Рассмотрены граничные условия первого (типа Дирихле), второго (типа Неймана) и третьего (теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона) родов [336] и из них получены соответствующие граничные условия в моментах.

4.4.5.1 Граничные условия первого рода в моментах

В этом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани Σ задается температура

$$T(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = T_0(x', x^3, t)$$

Отсюда аналогично (4.4.6) искомые граничные условия первого рода в моментах будут иметь вид

$$T^{(k)}(x', t) = T_0^{(k)}(x', t), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S_q \subseteq \partial S \quad (4.4.20)$$

где $T_0^{(k)}(x', t)$, $k = \overline{0, N}$ — известные моменты известного скалярного поля $T_0(x', x^3, t)$.

4.4.5.2 Граничные условия второго рода в моментах

В рассматриваемом случае на части $\Sigma_q \subseteq \Sigma$ боковой грани выполняется условие

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = q_0(x', x^3, t) \quad (m_I q^I \Big|_{\Sigma_q} = q_0).$$

Отсюда, не останавливаясь на выводе, аналогично (4.4.19) получим искомые условия в форме

$$m_I A_{(s)J}^I q^J(x', t) = A_{(s)}^{(k)} q_0(x', t), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S_q \subseteq \partial S. \quad (4.4.21)$$

Соотношения (4.4.21) назовем граничными условиями теплового содержания второго рода в моментах приближения (r, N) .

4.4.5.3 Граничные условия третьего рода в моментах

В рассматриваемом случае граничные условия представляются в виде

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}(x', x^3, t) \Big|_{\Sigma_q} = \beta (T_c - T \Big|_{\Sigma_q}) \quad \left(m_I q^I \Big|_{\Sigma_q} = \beta (T_c - T \Big|_{\Sigma_q}) \right). \quad (4.4.22)$$

Тогда аналогично (4.4.21) из (4.4.22) для искомым условий будем иметь выражения

$$m_I A^I_{(s)J} q^J(x', t) = A_{(s)} \beta (T_c - T), \quad s = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \partial S_q \subseteq \partial S. \quad (4.4.23)$$

Соотношения (4.4.23) назовем граничными условиями теплового содержания третьего рода в моментах приближения (r, N) .

При написании (4.4.23) предполагается, что коэффициент теплоотдачи β не зависит от x^3 . Заметим также, что можно было рассматривать граничные условия более общего вида [336], чем приведенные выше. Если системы уравнений движения и притока тепла в моментах получить из других их представлений, аналогичных (4.1.44) и второму соотношению (4.1.48), то пришлось бы системы граничных условий физического и теплового (второго и третьего родов) содержания в моментах представить в соответствующем виде. На этих вопросах с целью сокращения письма останавливаться не будем.

4.4.6 Начальные условия в моментах

При рассмотрении нестационарных задач в некоторый момент времени $t = t_0$ должны быть заданы начальные условия. Пусть для нестационарной (динамической) задачи микрополярной МДТГ начальные условия представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{u}_0(x', x^3), & \partial_t \mathbf{u}(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{v}_0(x', x^3), \\ \varphi(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \varphi_0(x', x^3), & \partial_t \varphi(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} &= \omega_0(x', x^3). \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

а для нестационарной задачи теплопроводности начальное условие имеет форму

$$T(x', x^3, t) \Big|_{t=t_0} = T^0(x', x^3). \quad (4.4.25)$$

Из (4.4.24) для искомым начальных условий в моментах будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{u}_0^{(k)}(x'), & \partial_t \mathbf{u}^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \mathbf{v}_0^{(k)}(x'), \\ \varphi^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \varphi_0^{(k)}(x'), & \partial_t \varphi^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} &= \omega_0^{(k)}(x'), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \overset{(-)}{S}. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Аналогично из (4.4.25) для нестационарной задачи теплопроводности получим следующую систему начальных условий в моментах:

$$T^{(k)}(x', t) \Big|_{t=t_0} = T^0(x'), \quad k = \overline{0, N}, \quad x' \in \overset{(-)}{S}. \quad (4.4.27)$$

Заметим, что (4.4.26) и (4.4.27) представляют собой систему начальных условий в моментах приближения N динамической задачи микрополярной термоупругости тонких тел (ТУТТ).

4.5 Постановки задач в моментах микрополярной ТУТТ

С целью сокращения письма ограничимся рассмотрением постановок задач при упрощенном методе редукции.

4.5.1 Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ

Постановка этой задачи при упрощенном методе редукции включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ;

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) микрополярной МДТТТ;

3) систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ при упрощенном методе редукции;

4) систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции;

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

6) системы начальных условий кинематического и теплового содержания в моментах приближения N .

4.5.2 Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N)

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) не входят механические характеристики (моменты тензоров напряжений $\underline{\mathbf{P}}^{(k)}$ и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$), то отдельно рассматривается нестационарная температурная задача в моментах приближения (r, N) , которая при упрощенном методе редукции включает в себя:

1) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, N) без механических характеристик;

2) систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, N) при упрощенном методе редукции;

3) какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

4) систему начальных условий теплового содержания в моментах приближения N .

В этом случае динамическая задача в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ разделяется на две задачи: нестационарную температурную задачу в моментах приближения (r, N) , решением которой определяется температурное поле, в дальнейшем считающееся известным и динамическую задачу в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ при неизотермических процессах с известным температурным полем.

4.5.3 Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ

Постановка этой задачи, например, при упрощенном методе редукции включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ;

2) систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем при упрощенном методе редукции;

3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

3a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N для первой краевой задачи;

3b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ для второй краевой задачи;

3c) систем кинематических граничных условий в моментах приближения N на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи;

4) систему кинематических начальных условий в моментах приближения N .

Таким образом, выше даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, N) . Из этих постановок задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r и N , постановки задач в моментах желаемых приближений. Кроме того, можно получить постановки задач при изотермических процессах. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, N) классических теорий ТУТТ и УТТ.

Следует отметить, что вопросы этой главы изложены также в [303].

Глава 5

Метод ортогональных полиномов при математическом моделировании микрополярных упругих тонких тел с двумя малыми размерами

5.1 К параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами. Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения. Рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра

Рассмотрены классическая и новая параметризации и параметризация при произвольной базовой линии области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 . Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела с двумя малыми размерами. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики. В частности, рассмотрены различные семейства базисов (реперов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций. Получены выражения для компонент ЕТВР. Получены представления градиента, дивергенции тензора и уравнений движения при рассматриваемых параметризациях. Выписаны основные рекуррентные формулы и получены некоторые дополнительные рекуррентные соотношения, играющие важную роль при построении различных вариантов теории тонких тел.

5.1.1 К формулам Серре-Френе и параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами

Даны удобные для дальнейшего пользования представления формул Серре-Френе, а также приведены некоторые геометрические характеристики при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами.

К формулам Серре-Френе. Пусть пространственная регулярная кривая задается векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — естественный параметр (длина дуги), который для удобства в дальнейшем обозначим через x^3 . Рассмотрим некоторый ортонормированный базис $\mathbf{r}_1(x^3), \mathbf{r}_2(x^3), \mathbf{r}_3(x^3)$, $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$, связанный с кривой. Тогда нетрудно видеть, что деривационные формулы для этого базиса представятся в виде

$$\partial_3 \mathbf{r}_i = \Gamma_{i3}^j \mathbf{r}_j = \Gamma_{i3,j} \mathbf{r}^j, \quad \Gamma_{i3}^j = \Gamma_{i3,j}. \quad (5.1.1)$$

Следовательно, в силу ортонормированности базиса имеем

$$\Gamma_{iz,j} = \partial_3 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}_i \cdot \partial_3 \mathbf{r}_j = -\Gamma_{j3,i}.$$

Тогда деривационные формулы (5.1.1) можно записать в форме

$$\partial_3 \mathbf{r}_1 = \Gamma_{13,2} \mathbf{r}_2 - \Gamma_{33,1} \mathbf{r}_3, \quad \partial_3 \mathbf{r}_2 = \Gamma_{23,3} \mathbf{r}_3 - \Gamma_{13,2} \mathbf{r}_1, \quad \partial_3 \mathbf{r}_3 = \Gamma_{33,1} \mathbf{r}_1 - \Gamma_{23,3} \mathbf{r}_2. \quad (5.1.2)$$

Вводя обозначения

$$P_{12} = -P_{21} = \Gamma_{13,2}, \quad P_{23} = -P_{32} = \Gamma_{23,3}, \quad P_{31} = -P_{13} = \Gamma_{33,1},$$

соотношения (5.1.2) получают вид [423]

$$\partial_3 \mathbf{r}_1 = P_{12} \mathbf{r}_2 - P_{31} \mathbf{r}_3, \quad \partial_3 \mathbf{r}_2 = P_{23} \mathbf{r}_3 - P_{12} \mathbf{r}_1, \quad \partial_3 \mathbf{r}_3 = P_{31} \mathbf{r}_1 - P_{23} \mathbf{r}_2. \quad (5.1.3)$$

Выберем в качестве третьего базисного вектора единичный вектор касательной ($\mathbf{r}_3 = \mathbf{s} = d\mathbf{r}/dx^3$) кривой γ (рис. 5.1), а в качестве первого — единичный вектор главной нормали ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{m}$). Тогда второй вектор \mathbf{r}_2 совпадает с единичным вектором бинормали ($\mathbf{r}_2 = \mathbf{b} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1$). Следовательно, таким образом определенный базис совпадает с естественным трехгранником кривой γ , для которого соотношения (5.1.3) переходят в известные формулы Серре-Френе [67, 133, 335, 348]

$$\partial_3 \mathbf{r}_3 = k_1 \mathbf{r}_1, \quad \partial_3 \mathbf{r}_2 = k_2 \mathbf{r}_1, \quad \partial_3 \mathbf{r}_1 = -k_2 \mathbf{r}_2 - k_1 \mathbf{r}_3, \quad (5.1.4)$$

где k_1 — кривизна кривой, а k_2 — кручение.

5.1.1.1 К классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами прямоугольного поперечного сечения

Определение 5.1.1. Область евклидова трехмерного пространства, один размер которой намного больше остальных, называется тонкой областью с двумя малыми размерами.

Определение 5.1.2. Трехмерное тело, занимающее тонкую область с двумя малыми размерами, называется трехмерным тонким телом с двумя малыми размерами.

Определение 5.1.3. Любая пространственная регулярная линия (кривая) называется базовой линией.

В качестве базовой рассматривается кривая, проходящая через центры поперечных сечений тонкого тела с двумя малыми размерами. Радиус-вектор произвольной точки M области тела представляется в виде (рис. 5.1)

$$\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = \mathbf{r}(x^3) + x^I \mathbf{r}_I(x^3), \quad -h_I(x^3) \leq x^I \leq h_I(x^3). \quad (5.1.5)$$

На рис. 5.1 показано и поперечное сечение тонкого тела. Ортонормированный базис $\mathbf{r}_1(x^3)$, $\mathbf{r}_2(x^3)$, $\mathbf{r}_3(x^3)$, связанный с базовой кривой γ , выбран так, что базисный вектор \mathbf{r}_1 перпендикулярен к стороне AB , а базисный вектор \mathbf{r}_2 — к BC . Заметим, что и в том случае, когда $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ — базис естественного трехгранника базовой кривой, рассматривается такое тело, стороны AB и BC поперечного сечения которого также перпендикулярны \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно.

Определение 5.1.4. Параметризация области тонкого тела с двумя малыми размерами, при которой с его осью связан базис естественного трехгранника, называется естественной параметризацией области тонкого тела.

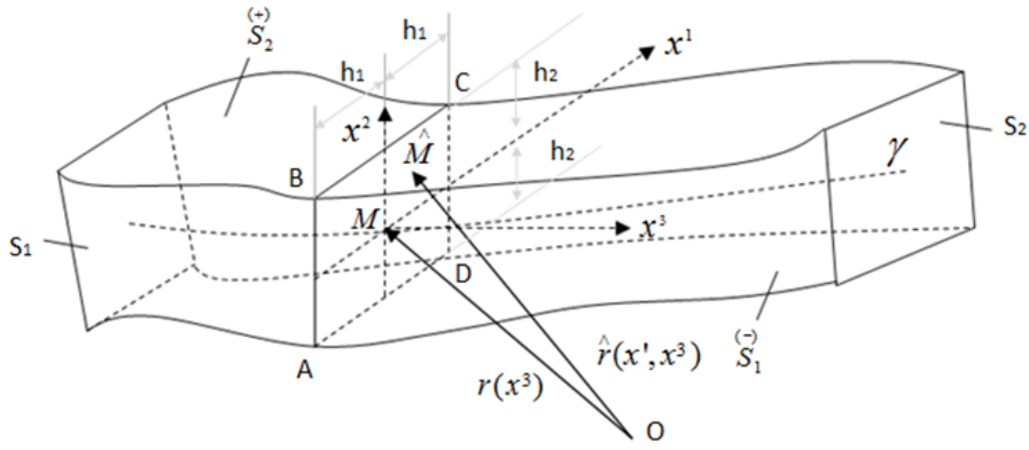


Рис. 5.1: Естественная параметризация тонкого тела с двумя малыми размерами

Построим в произвольной точке \hat{M} области тонкого тела ковариантный и контравариантный базисы. Дифференцируя (5.1.5) сперва по x^I , а затем по x^3 и учитывая (5.1.3) для ковариантных базисных векторов получим выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{I}} &\equiv \partial_I \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_I(x^3), \\ \mathbf{r}_{\hat{3}} &\equiv \partial_3 \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_3 + x^I \partial_3 \mathbf{r}_I = (1 - P_{31}x^1 + P_{23}x^2)\mathbf{r}_3 - P_{12}x^2\mathbf{r}_1 + P_{12}x^1\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Аналогично (5.1.6) с учетом (5.1.4) получим

$$\mathbf{r}_{\hat{I}} = \mathbf{r}_I(x^3), \quad \mathbf{r}_{\hat{3}} = k_2(x^2\mathbf{r}_1 - x^1\mathbf{r}_2) + (1 - x^1k_1)\mathbf{r}_3. \quad (5.1.7)$$

Нетрудно заметить, что в силу (5.1.6) найдем

$$\sqrt{\hat{g}} = \hat{\vartheta} = (\mathbf{r}_{\hat{1}} \times \mathbf{r}_{\hat{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{3}} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 1 - P_{31}x^1 + P_{23}x^2. \quad (5.1.8)$$

В дальнейшем выражения для геометрических характеристик представим с помощью (5.1.6), из которых при необходимости выпишем соответствующие соотношения при естественной параметризации области тонкого тела, учитывая, что в последнем случае $P_{12} = -k_2$, $P_{31} = k_1$, $P_{23} = 0$.

Нетрудно заметить, что на основании (5.1.6) компоненты переноса $g_{\hat{p}q} = g_{\hat{p}}^q = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_q$ ЕТВР представляются в виде

$$g_{\hat{p}q} = g_{\hat{p}}^q = \begin{cases} g_{\hat{p}q} = g_{\hat{p}}^q = \delta_{Pq}, \\ g_{\hat{3}1} = g_{\hat{3}}^1 = -P_{12}x^2, \\ g_{\hat{3}2} = g_{\hat{3}}^2 = P_{12}x^1, \\ g_{\hat{3}3} = g_{\hat{3}}^3 = \hat{\vartheta} = 1 - P_{31}x^1 + P_{23}x^2. \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Найдем выражения для векторов контравариантного базиса в произвольной точке \hat{M} . Легко усмотреть, что имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\hat{I}} &= C^{\hat{I}J} \mathbf{r}_J \times \mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \epsilon^{IJ} \mathbf{r}_J \times \mathbf{r}_3 = \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{IJ} g_3^k \mathbf{r}_J \times \mathbf{r}_k = \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{IJ} \epsilon_{JKL} g_3^k \mathbf{r}^L = \\ &= \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{IJ} \epsilon_{JK} g_3^K \mathbf{r}^3 + \hat{\vartheta}^{-1} \epsilon^{IJ} \epsilon_{J3L} g_3^3 \mathbf{r}^L = -\hat{\vartheta}^{-1} g_3^I \mathbf{r}^3 + \hat{\vartheta}^{-1} g_3^3 \mathbf{r}^I = \mathbf{r}^I - \hat{\vartheta}^{-1} g_3^I \mathbf{r}^3, \\ \mathbf{r}^{\hat{3}} &= \frac{1}{2} C^{\hat{3}\hat{I}\hat{J}} \mathbf{r}_{\hat{I}} \times \mathbf{r}_{\hat{J}} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \epsilon^{IJ} \mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J = \hat{\vartheta}^{-1} \mathbf{r}^3, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbf{r}^{\hat{I}} = \mathbf{r}^I - \hat{\vartheta}^{-1} g_3^I \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^I - g_3^I g_3^3 \mathbf{r}^3, \quad \mathbf{r}^{\hat{3}} = \hat{\vartheta}^{-1} \mathbf{r}^3 = g_3^3 \mathbf{r}^3. \quad (5.1.10)$$

Теперь в силу (5.1.10) нетрудно найти представления компонент переноса $g^{\hat{p}q} = g_q^{\hat{p}} = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^q$ ЕТВР. В самом деле, находим

$$g^{\hat{p}q} = g_q^{\hat{p}} = \begin{cases} g^{\hat{P}Q} = g_Q^{\hat{P}} = \delta_Q^P, \\ g^{\hat{3}Q} = g_Q^{\hat{3}} = 0, \\ g_3^{\hat{P}} = -\hat{\vartheta}^{-1} g_3^P = -g_3^P g_3^{\hat{3}}, \\ g_3^{\hat{3}} = \hat{\vartheta}^{-1}. \end{cases} \quad (5.1.11)$$

Следует заметить, что если $|-P_{31}x^1 + P_{23}x^2| < 1$, то

$$g_3^{\hat{3}} = \frac{1}{1 - P_{31}x^1 + P_{23}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{31}x^1 - P_{23}x^2)^k. \quad (5.1.12)$$

5.1.1.2 К новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами

Рассмотрим трехмерное криволинейное тонкое тело с поперечным сечением в виде параллелограмма, одно из ребер которого, обозначаемое через $\overset{(-)}{\gamma}$ и проходящее через M (рис. 5.2), выберем в качестве основной базовой линии. Векторное параметрическое уравнение базового ребра представим соотношением $\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3)$, где x^3 — произвольный параметр. В частности, в качестве x^3 можно взять естественный параметр s .

Радиус-вектор произвольной точки M [245] области тонкого тела (рис. 5.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x', x^3) &= \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3) + x^K \mathbf{h}_K(x^3) = (1 - x^1 - x^2) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3) + x^K \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(K)}(x^3), \\ 0 \leq x \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Здесь $\overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(I)} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(I)}(x^3)$, $I = 1, 2$, $\forall x^3 \in \mathbb{R}^1$, задают базовые линии (смежные ребра), обозначаемые $\overset{(+)}{\gamma}_I$, $I = 1, 2$ и проходящие через M_I , $I = 1, 2$, соответственно, а векторы

$$\mathbf{h}_I(x^3) = \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(I)}(x^3) - (\delta_I^1 + \delta_I^2) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3), \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1, \quad (5.1.14)$$

отображающие основную базовую линию $\overset{(-)}{\gamma}$ на базовые линии $\overset{(+)}{\gamma}_I$, $I = 1, 2$ (рис. 5.2), вообще говоря, не являются перпендикулярными к основной базовой линии $\overset{(-)}{\gamma}$ [245]. Однако, ниже ограничимся рассмотрением того случая, когда они перпендикулярны к основной базовой линии. В дальнейшем будем считать выполненными условия

$$|\mathbf{h}_I(x^3)| = |\overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(I)}(x^3) - (\delta_I^1 + \delta_I^2) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3)| \ll (\delta_I^1 + \delta_I^2) l < (\delta_I^1 + \delta_I^2) \cdot \infty, \quad (5.1.15)$$

означающие тонкость рассматриваемого тела. Здесь l — длина базовой линии $\overset{(-)}{\gamma}$.

Нетрудно заметить, что (5.1.13) при соблюдении условий (5.1.15) — математическая запись векторного параметрического уравнения трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами. Далее, не останавливаясь на подробном изложении вопросов, касающихся параметризации [245], ниже получим некоторые самые необходимые для дальнейшего изложения материала геометрические характеристики γ_g -семейства параметризации, где γ — произвольная линия, определяющая с помощью (5.1.13), изменяя x^3 , при некоторых постоянных значениях x^1 и x^2 , удовлетворяющих условию $0 < x^I < 1$.

Обозначим векторы скоростей базовых линий $\overset{(-)}{\gamma}$ и $\overset{(+)}{\gamma}_K$ через $\mathbf{r}_{\frac{3}{3}}^{\overset{(-)}}(x^3)$ и $\mathbf{r}_{\frac{3}{(K)3}}^{\overset{(+)}}(x^3)$ соответственно. Следовательно, имеем

$$\mathbf{r}_{\frac{3}{3}}^{\overset{(-)}}(x^3) = \partial_3 \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^3), \quad \mathbf{r}_{\frac{3}{(K)3}}^{\overset{(+)}}(x^3) = \partial_3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{(K)}(x^3). \quad (5.1.16)$$

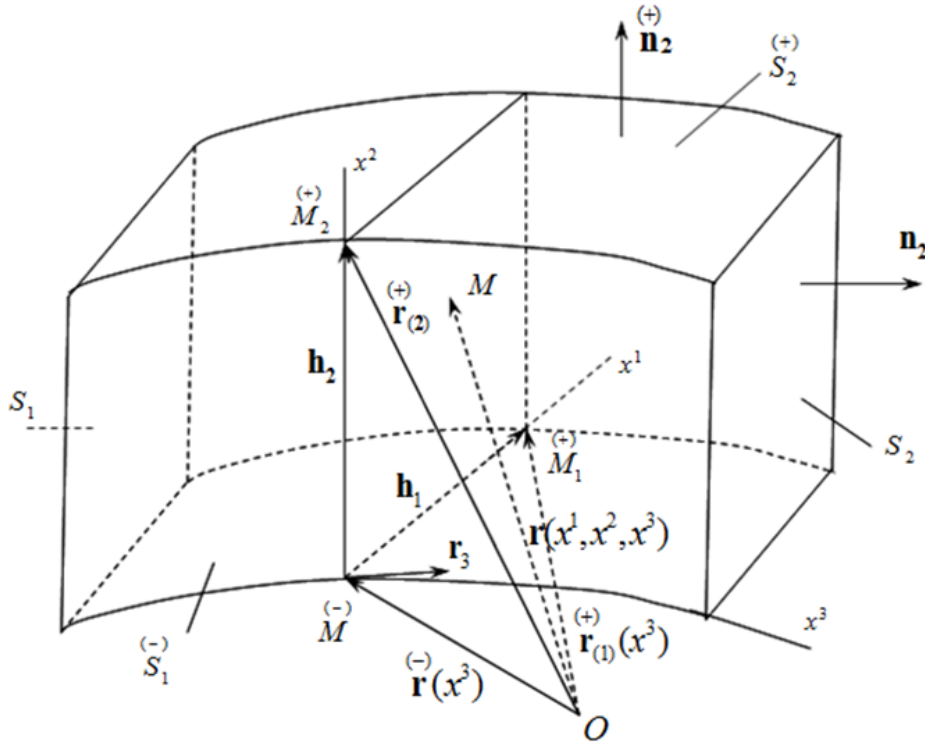


Рис. 5.2: Новая параметризация области тонкого тела с двумя малыми размерами

Дифференцируя (5.1.13) по x^I , получим

$$\mathbf{r}_I(x^3) \equiv \partial_I \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{h}_I(x^3), \quad \forall x^I \in [0, 1], \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}. \quad (5.1.17)$$

На основании (5.1.17) можно утверждать, что

$$\mathbf{h}_I(x^3) = \mathbf{r}_I^-(x^3) = \mathbf{r}_I(x^3) = \mathbf{r}_{(\alpha)I}^+(x^3), \quad \alpha = 1, 2, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \quad (5.1.18)$$

Теперь дифференцируя (5.1.18) по x^3 , найдем

$$\partial_3 \mathbf{h}_I(x^3) = \partial_3 \mathbf{r}_I^-(x^3) = \partial_3 \mathbf{r}_I(x^3) = \partial_3 \mathbf{r}_{(\alpha)I}^+(x^3), \quad \alpha = 1, 2, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \quad (5.1.19)$$

Нетрудно видеть, что из (5.1.18) также имеем

$$\begin{aligned} \partial_K \mathbf{h}_I(x^3) &= \partial_K \mathbf{r}_I^-(x^3) = \partial_K \mathbf{r}_I(x^3) = \partial_K \mathbf{r}_{(\alpha)I}^+(x^3) = 0, \\ \alpha &= 1, 2, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Далее, дифференцируя (5.1.13) по x^3 с учетом (5.1.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3(x^1, x^3) &\equiv \partial_3 \mathbf{r}(x^1, x^3) = (1 - x^1 - x^2) \mathbf{r}_3^-(x^3) + x^K \mathbf{r}_{(K)3}^+(x^3) = \\ &= \mathbf{r}_3^-(x^3) + x^K \partial_3 \mathbf{h}_K(x^3) = \mathbf{r}_3^-(x^3) + x^K \partial_3 \mathbf{r}_K^-(x^3) = \mathbf{r}_3^-(x^3) + x^K \partial_3 \mathbf{r}_K(x^3) = \\ &= \mathbf{r}_3^-(x^3) + x^K \partial_3 \mathbf{r}_{(\alpha)K}^+(x^3), \quad \alpha = 1, 2, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Учитывая (5.1.20), соотношения (5.1.17) и (5.1.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p(x^1, x^3) &= (1 - x^1 - x^2) \mathbf{r}_p^-(x^3) + x^K \mathbf{r}_{(K)p}^+(x^3) = \mathbf{r}_p^-(x^3) + x^K \partial_p \mathbf{h}_K(x^3) = \\ &= \mathbf{r}_p^-(x^3) + x^K \partial_p \mathbf{r}_K^-(x^3) = \mathbf{r}_p^-(x^3) + x^K \partial_p \mathbf{r}_K(x^3) = \mathbf{r}_p^-(x^3) + x^K \partial_p \mathbf{r}_{(\alpha)K}^+(x^3), \\ \alpha &= 1, 2, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad \forall x^3 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

Следует отметить, что в точках основной базовой линии $\overset{(-)}{\gamma}$ имеем следующие семейства ковариантных и контравариантных базисов:

$$\mathbf{r}_{\bar{I}} = \mathbf{h}_I, \mathbf{r}_{\bar{3}}; \quad \mathbf{r}^{\bar{I}} = \sqrt{g^{(-)}} \epsilon^{IJ} \mathbf{r}_{\bar{J}} \times \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad \mathbf{r}^{\bar{3}} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad (5.1.23)$$

где

$$\sqrt{g^{(-)}} = (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}} = S(x^3) \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}},$$

а $S(x^3)$ — площадь поперечного сечения тонкого тела в точке x^3 . Вспомним, что $\mathbf{h}_I \perp \mathbf{r}_{\bar{3}}$ и поперечным сечением является параллелограмм со сторонами \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 .

Следовательно, элементы фундаментальной и обратной матриц (компоненты ЕТВР) для базисов (5.1.23) представляются в виде

$$\begin{aligned} g_{\bar{I}\bar{J}} &= \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{h}_J, \quad g_{\bar{I}\bar{3}} = \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}} = 0, \quad g_{\bar{3}\bar{3}} = \mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad g^{\bar{1}\bar{1}} = \sqrt{g^{(-)}} g_{\bar{2}\bar{2}}^{-1}, \\ g^{\bar{2}\bar{2}} &= \sqrt{g^{(-)}}^{-1} g_{\bar{1}\bar{1}}^{-1}, \quad g^{\bar{I}\bar{J}} = -\sqrt{g^{(-)}}^{-1} g_{\bar{I}\bar{J}}^{-1}, \quad I \neq J, \quad g^{\bar{I}\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

В силу (5.1.14) нетрудно заметить, что

$$\mathbf{r}_{(I)\bar{3}}^{\dagger} = (\delta_I^1 + \delta_I^2) \mathbf{r}_{\bar{3}} + \partial_3 \mathbf{r}_{\bar{I}} = (\delta_I^1 + \delta_I^2) \mathbf{r}_{\bar{3}} + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}} = [(\delta_I^1 + \delta_I^2) g_{\bar{3}}^{\bar{q}} + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{q}}] \mathbf{r}_{\bar{q}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}_{(I)\bar{3}}^{\dagger} = (\delta_I^1 + \delta_I^2) \mathbf{r}_{\bar{3}} + \partial_3 \mathbf{h}_I = [(\delta_I^1 + \delta_I^2) g_{\bar{3}}^{\bar{q}} + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{q}}] \mathbf{r}_{\bar{q}} = [(\delta_I^1 + \delta_I^2) g_{\bar{3}\bar{q}} + \Gamma_{\bar{I}\bar{3},\bar{q}}^{\bar{q}}] \mathbf{r}^{\bar{q}}. \quad (5.1.25)$$

Очевидно, векторы $\mathbf{r}_{(I)\bar{K}}^{\dagger} = \mathbf{h}_I(x^3)$ и $\mathbf{r}_{(I)\bar{3}}^{\dagger}$ (см. (5.1.18) и (5.1.25)) образуют семейство ковариантных базисов в точках базовых линий $\overset{(+)}{\gamma}_{(I)}$. В силу (5.1.18) и (5.1.25) имеем

$$\sqrt{g_{(I)}^{(+)}} = (\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{r}_{(I)\bar{3}}^{\dagger} = \sqrt{g^{(-)}} (\delta_I^1 + \delta_I^2 + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{3}}), \quad \vartheta_{(I)}^{(\mp)} = \sqrt{g_{(I)}^{(+)}} g^{(-)}^{-1} = \delta_I^1 + \delta_I^2 + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{3}}. \quad (5.1.26)$$

Имея семейство ковариантных базисов, семейство контравариантных базисов можно построить обычным образом. В самом деле, на основании (5.1.18), (5.1.25) и (5.1.26) находим

$$\mathbf{r}_{(I)}^{\dagger K} = \mathbf{r}_{\bar{K}} - \vartheta_{(I)}^{(\mp)} \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{K}} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger \bar{3}} = \vartheta_{(I)}^{(\mp)} \mathbf{r}_{\bar{3}}. \quad (5.1.27)$$

Элементы фундаментальной и обратной матриц (компоненты ЕТВР) для семейств базисов (5.1.18) и (5.1.25) и (5.1.27), как легко усмотреть, определяются формулами

$$\begin{aligned} g_{(IJ)\bar{K}\bar{L}}^{\dagger\dagger} &= \mathbf{r}_{(I)\bar{K}}^{\dagger} \cdot \mathbf{r}_{(J)\bar{L}}^{\dagger} = \mathbf{h}_K \cdot \mathbf{h}_L = g_{\bar{K}\bar{L}}, \\ g_{(IJ)\bar{K}\bar{3}}^{\dagger\dagger} &= \mathbf{r}_{(I)\bar{K}}^{\dagger} \cdot \mathbf{r}_{(J)\bar{3}}^{\dagger} = \mathbf{h}_K \cdot \mathbf{r}_{(J)\bar{3}}^{\dagger} = \Gamma_{\bar{J}\bar{3},\bar{K}}^{\bar{q}}, \quad g_{(IJ)\bar{3}\bar{K}}^{\dagger\dagger} = \Gamma_{\bar{I}\bar{3},\bar{K}}^{\bar{q}}, \\ g_{(IJ)\bar{3}\bar{3}}^{\dagger\dagger} &= \mathbf{r}_{(I)\bar{3}}^{\dagger} \cdot \mathbf{r}_{(J)\bar{3}}^{\dagger} = (\delta_I^1 + \delta_I^2)(\delta_J^1 + \delta_J^2) g_{\bar{3}\bar{3}} + (\delta_I^1 + \delta_I^2) \Gamma_{\bar{J}\bar{3},\bar{3}}^{\bar{q}} + \\ &+ (\delta_J^1 + \delta_J^2) \Gamma_{\bar{I}\bar{3},\bar{3}}^{\bar{q}} + \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{p}} \Gamma_{\bar{J}\bar{3},\bar{p}}^{\bar{q}}, \quad g_{(IJ)}^{\dagger\dagger KL} = \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger K} \cdot \mathbf{r}_{(J)}^{\dagger L} = g^{\bar{K}\bar{L}} - \vartheta_{(I)}^{(\mp)} \vartheta_{(J)}^{(\mp)} \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{K}} \Gamma_{\bar{J}\bar{3}}^{\bar{L}} g^{\bar{3}\bar{3}}, \\ g_{(IJ)}^{\dagger\dagger K\bar{3}} &= \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger K} \cdot \mathbf{r}_{(J)}^{\dagger \bar{3}} = -\vartheta_{(I)}^{(\mp)} \vartheta_{(J)}^{(\mp)} \Gamma_{\bar{I}\bar{3}}^{\bar{K}} g^{\bar{3}\bar{3}}, \quad g_{(IJ)}^{\dagger\dagger \bar{3}\bar{3}} = \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger \bar{3}} \cdot \mathbf{r}_{(J)}^{\dagger \bar{3}} = \vartheta_{(I)}^{(\mp)} \vartheta_{(J)}^{(\mp)} g^{\bar{3}\bar{3}}. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

В дальнейшем важную роль играют основные компоненты переноса ЕТВР, которые определяются с помощью базисов (5.1.23) и (5.1.18), (5.1.25) и (5.1.27) следующим образом:

$$g_{(I)\bar{p}\bar{q}}^{\dagger} = \mathbf{r}_{(K)\bar{p}}^{\dagger} \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad g_{(I)\bar{p}}^{\bar{q}} = \mathbf{r}_{(I)\bar{p}}^{\dagger} \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}}, \quad g_{(I)}^{\dagger\bar{p}\bar{q}} = \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger\bar{p}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}}, \quad g_{(I)\bar{q}}^{\dagger\bar{p}} = \mathbf{r}_{(I)}^{\dagger\bar{p}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad I = 1, 2. \quad (5.1.29)$$

Компоненты (5.1.24) и основные компоненты переноса (5.1.29) назовем основными компонентами ЕТВР. С помощью основных компонент ЕТВР определяются его другие компоненты, в том числе и компоненты (5.1.28). В самом деле, символы Кристоффеля входящие в (5.1.28), в силу (5.1.25) определяются через основные компоненты ЕТВР в виде

$$\Gamma_{I\bar{3},\bar{q}}^- = g_{(I)\bar{3}\bar{q}}^+ - (\delta_I^1 + \delta_I^2)g_{\bar{3}\bar{q}}^-, \quad \Gamma_{I\bar{3}}^{\bar{q}} = g_{(I)\bar{3}}^{\bar{q}} - (\delta_I^1 + \delta_I^2)g_{\bar{3}}^{\bar{q}}. \quad (5.1.30)$$

Учитывая (5.1.30), компоненты (5.1.28) можно выразить с помощью компонент ЕТВР. Очевидно, из (5.1.30) (см. также (5.1.25)) имеем

$$\begin{aligned} g_{(I)\bar{3}\bar{J}}^+ &= \Gamma_{I\bar{3},\bar{J}}^- = \partial_3 \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{h}_J, \quad I \neq J, \quad g_{(I)\bar{3}I}^+ = \Gamma_{I\bar{3},I}^- = \partial_3 \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{h}_I = h_I \partial_3 h_I, \\ g_{(I)\bar{3}\bar{3}}^+ &= \Gamma_{I\bar{3},\bar{3}}^- = \partial_3 \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}} = -\mathbf{h}_I \cdot \partial_3 \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad g_{(I)\bar{3}}^{\bar{J}} = g_{(I)\bar{3}\bar{K}}^{\bar{J}\bar{K}}, \quad g_{(I)\bar{3}}^{\bar{3}} = g_{(I)\bar{3}\bar{3}}^{\bar{3}\bar{3}}. \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Из (5.1.24) и (5.1.31) видно, что зная векторные уравнения базовых линий, можно определить основные компоненты ЕТВР.

Заметим, что в важном частном случае, когда \mathbf{h}_I и $\mathbf{r}_{\bar{3}}$ имеют направления естественного трехгранника и основная базовая линия $\overset{(-)}{\gamma}$ задана естественной параметризацией, то $|\mathbf{r}_{\bar{3}}| = 1$, $\mathbf{h}_I = h_I \mathbf{r}_{\bar{I}}$, $I = 1, 2$, $|\mathbf{r}_{\bar{1}}| = 1$, где $\mathbf{r}_{\bar{1}}$ и $\mathbf{r}_{\bar{2}}$ — единичные векторы нормали и бинормали к $\overset{(-)}{\gamma}$ соответственно. Очевидно, в этом случае с помощью простых выкладок находим

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^{(-)}} &= h_1 h_2, \quad g_{I\bar{J}}^- = \mathbf{h}_I \cdot \mathbf{h}_J = h_I h_J \delta_{IJ}, \quad < I, J = 1, 2 >, \quad g_{(I)\bar{P}\bar{3}}^+ = 0, \\ g_{(1)\bar{3}\bar{1}}^+ &= h_1 \partial_3 h_1, \quad g_{(1)\bar{3}\bar{2}}^+ = -h_1 h_2 k_2^{(-)}, \quad g_{(1)\bar{3}\bar{3}}^+ = -h_1 k_1^{(-)}, \quad g_{(2)\bar{3}\bar{1}}^+ = 0, \\ g_{(2)\bar{3}\bar{2}}^+ &= h_2 (\partial_3 h_2 + h_2 k_2^{(-)}), \quad g_{(2)\bar{3}\bar{3}}^+ = 0, \quad g_{(I)\bar{P}}^{\bar{J}} = \delta_I^J, \quad g_{(I)\bar{P}}^{\bar{3}} = 0, \quad g_{(1)\bar{3}}^{\bar{1}} = h_1^{-1} \partial_3 h_1, \\ g_{(1)\bar{3}}^{\bar{2}} &= -h_1 h_2^{-1} k_2^{(-)}, \quad g_{(1)\bar{3}}^{\bar{3}} = -h_1 k_1^{(-)}, \quad g_{(2)\bar{3}}^{\bar{1}} = h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + h_2 k_2^{(-)}), \quad g_{(2)\bar{3}}^{\bar{2}} = 0, \quad g_{(2)\bar{3}}^{\bar{3}} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

При получении (5.1.32) были учтены формулы

$$\begin{aligned} g_{I\bar{J}}^- &= h_I h_J \delta_{IJ}, \quad < I, J = 1, 2 >, \quad g_{I\bar{3}}^- = 0, \quad g_{\bar{3}\bar{3}}^- = 1, \\ g^{\bar{I}\bar{J}} &= h_I^{-1} h_J^{-1} \delta_{IJ}, \quad < I, J = 1, 2 >, \quad g^{\bar{I}\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = 1. \end{aligned}$$

Нетрудно показать также, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{3}\bar{3},\bar{3}}^- &= \partial_3 \mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}} = \frac{1}{2} \partial_3 (\mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}}) = \frac{1}{2} \partial_3 g_{\bar{3}\bar{3}}^-, \quad g_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{3}\bar{3}} = \frac{1}{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}, \\ \Gamma_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3},\bar{m}}^{\bar{3}\bar{m}} \Gamma_{\bar{3}\bar{3},\bar{3}}^- = g_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{3}\bar{3}} \Gamma_{\bar{3}\bar{3},\bar{3}}^- = \frac{1}{2g_{\bar{3}\bar{3}}^-} \partial_3 g_{\bar{3}\bar{3}}^- = \partial_3 \ln \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-} = \frac{1}{\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}} \partial_3 \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}, \\ \Gamma_{\bar{3}\bar{3},\bar{3}}^- &= \frac{1}{2} \partial_3 g_{\bar{3}\bar{3}}^-, \quad \Gamma_{\bar{3}\bar{3}}^{\bar{3}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}} \partial_3 \sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}, \quad \nabla_3 A^{\bar{3}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}} \partial_3 (\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-} A^{\bar{3}}) + g_{(I)\bar{3}}^{\bar{3}} A^{\bar{I}}, \\ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3) &= \frac{1}{\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-}} \partial_3 [\sqrt{g_{\bar{3}\bar{3}}^-} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3)] + g_{(I)\bar{3}}^{\bar{3}} \mathbf{M}(\mathbf{P}^I). \end{aligned}$$

При естественной параметризации $\overset{(-)}{\gamma}$ ($g_{\bar{3}\bar{3}}^- = 1$) имеем

$$\nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3) = \partial_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3) + g_{(I)\bar{3}}^{\bar{3}} \mathbf{M}(\mathbf{P}^I) = \partial_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3) - h_1 k_1^{(-)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^1), \quad g_{(2)\bar{3}}^{\bar{3}} = 0.$$

Теперь на основании (5.1.22) определим векторы контравариантного базиса в произвольной точке формулой

$$\mathbf{r}^p = \frac{1}{2} C^{pqs} \mathbf{r}_q \times \mathbf{r}_s \quad (5.1.33)$$

и введем в рассмотрение компоненты переноса ЕТВР

$$g_{p\bar{q}} = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad g_{\bar{p}}^{\bar{q}} = \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad g^{p\bar{q}} = \mathbf{r}^p \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad g_{\bar{q}}^p = \mathbf{r}^p \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}. \quad (5.1.34)$$

Далее нетрудно заметить, что с помощью первых двух формул (5.1.34) и (5.1.22) находим

$$g_{p\bar{q}} = (1 - x^1 - x^2) g_{p\bar{q}} + x^K g_{(K)p\bar{q}}, \quad g_{\bar{p}}^{\bar{q}} = (1 - x^1 - x^2) g_{\bar{p}}^{\bar{q}} + x^K g_{(K)\bar{p}}^{\bar{q}}. \quad (5.1.35)$$

Отсюда на основании простых вычислений получим

$$\begin{aligned} g_{P\bar{Q}} &= g_{P\bar{Q}}, \quad g_{P\bar{3}} = 0, \quad g_{3\bar{q}} = (1 - x^1 - x^2) g_{3\bar{q}} + x^K g_{(K)3\bar{q}}, \\ g_{\bar{P}}^{\bar{Q}} &= g_{\bar{P}}^{\bar{Q}}, \quad g_{\bar{P}}^{\bar{3}} = 0, \quad g_{\bar{3}}^{\bar{q}} = (1 - x^1 - x^2) g_{\bar{3}}^{\bar{q}} + x^K g_{(K)\bar{3}}^{\bar{q}}. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Очевидно, связь между базисными векторами осуществляются с помощью компонент переноса ЕТВР (5.1.34) следующими формулами:

$$\mathbf{r}_p = g_{\bar{p}}^q \mathbf{r}_q = g_{p\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \mathbf{r}^{\bar{p}} = g^{\bar{p}q} \mathbf{r}_q = g_{\bar{q}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad (5.1.37)$$

сохраняющими силу при жонглировании индексами.

Нетрудно найти выражения для $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$. В самом деле, в силу (5.1.18) и (5.1.21) или (5.1.22) имеем

$$\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_{\bar{1}} \times \mathbf{r}_{\bar{2}}) \cdot \mathbf{r}_3 = \sqrt{\overset{(-)}{g}} \mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \mathbf{r}_3 = \sqrt{\overset{(-)}{g}} g_{\bar{3}}^{\bar{3}},$$

т.е.

$$\sqrt{g} = \sqrt{\overset{(-)}{g}} g_{\bar{3}}^{\bar{3}}, \quad \overset{(-)}{\vartheta} = \sqrt{\overset{(-)}{g} g^{-1}} = g_{\bar{3}}^{\bar{3}} = 1 - x^1 - x^2 + x^K g_{(K)\bar{3}}^{\bar{3}}. \quad (5.1.38)$$

Теперь найдем выражения для базисных векторов \mathbf{r}^P и \mathbf{r}^3 . Следовательно, их выражения можно найти, исходя из (5.1.33) и учтя (5.1.35)–(5.1.38), однако получим их более простым путем.

Учитывая (5.1.37) и (5.1.38) найдем

$$\mathbf{r}^P = C^{PQ} \mathbf{r}_Q \times \mathbf{r}_3 = C^{PQ} \mathbf{r}_{\bar{Q}} \times \mathbf{r}_s g_{\bar{s}}^{\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{P}} - \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} g_{\bar{3}}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g}} = \frac{\mathbf{r}_{\bar{1}} \times \mathbf{r}_{\bar{2}}}{\sqrt{\overset{(-)}{g}}} = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} \mathbf{r}_{\bar{3}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^{\bar{P}} - \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} g_{\bar{3}}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad \mathbf{r}^3 = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} \mathbf{r}_{\bar{3}}. \quad (5.1.39)$$

Заметим, что на основании (5.1.37) имеем

$$\mathbf{r}^P = g_{\bar{m}}^P \mathbf{r}^{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\bar{P}} + g_{\bar{3}}^P \mathbf{r}_{\bar{3}}. \quad (5.1.40)$$

В силу (5.1.18) из сравнения (5.1.40) с (5.1.39) заключаем, что справедливы соотношения

$$g_{\bar{M}}^P = g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \quad g_{\bar{3}}^P = -\overset{(-)}{\vartheta}^{-1} g_{\bar{3}}^{\bar{P}} = -g_{\bar{3}}^{\bar{P}} g_{\bar{3}}^{\bar{3}}, \quad g_{\bar{M}}^{\bar{3}} = 0, \quad g_{\bar{3}}^{\bar{3}} = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = (g_{\bar{3}}^{\bar{3}})^{-1}. \quad (5.1.41)$$

Очевидно, если $|x^1 + x^2 - x^K g_{(K)\bar{3}}^{\bar{3}}| < 1$, то

$$g_{\bar{3}}^{\bar{3}} = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = \left[1 - \left(x^1 + x^2 - x^K g_{(K)\bar{3}}^{\bar{3}} \right) \right]^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(x^1 + x^2 - x^K g_{(K)\bar{3}}^{\bar{3}} \right)^s. \quad (5.1.42)$$

5.1.1.3 К параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии

В этом случае в качестве базовой рассматривается линия, относительно которой область тонкого тела несимметрично расположена. Считаем, что тонкое тело имеет поперечное сечение в виде прямоугольника (рис. 5.3). Базовая линия проходит через точку M , касательной которой является вектор \mathbf{r}_3 .

Радиус-вектор произвольной точки \hat{M} области тонкого тела представляется в виде

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) &= \mathbf{r}(x^3) + \sum_{K=1}^2 [\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)] \mathbf{e}_K(x^3) = \\ &= \mathbf{r}(x^3) + \sum_{K=1}^2 h_K^{-1} [\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)] \mathbf{r}_K(x^3), \quad -1 \leq x^I \leq 1,\end{aligned}\quad (5.1.43)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^3)$ — векторное параметрическое уравнение базовой линии, $\bar{h}_I = (h_I^{(+)} - h_I^{(-)})/2$, $h_I = (h_I^{(+)} + h_I^{(-)})/2$, $\mathbf{r}_I = h_I \mathbf{e}_I$, $\langle I = 1, 2 \rangle$, $\mathbf{r}_3 = \partial_3 \mathbf{r}$, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — единичные векторы главной нормали и бинормали к базовой линии γ соответственно. Итак, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{r}_3$ — базис естественного трехгранника.

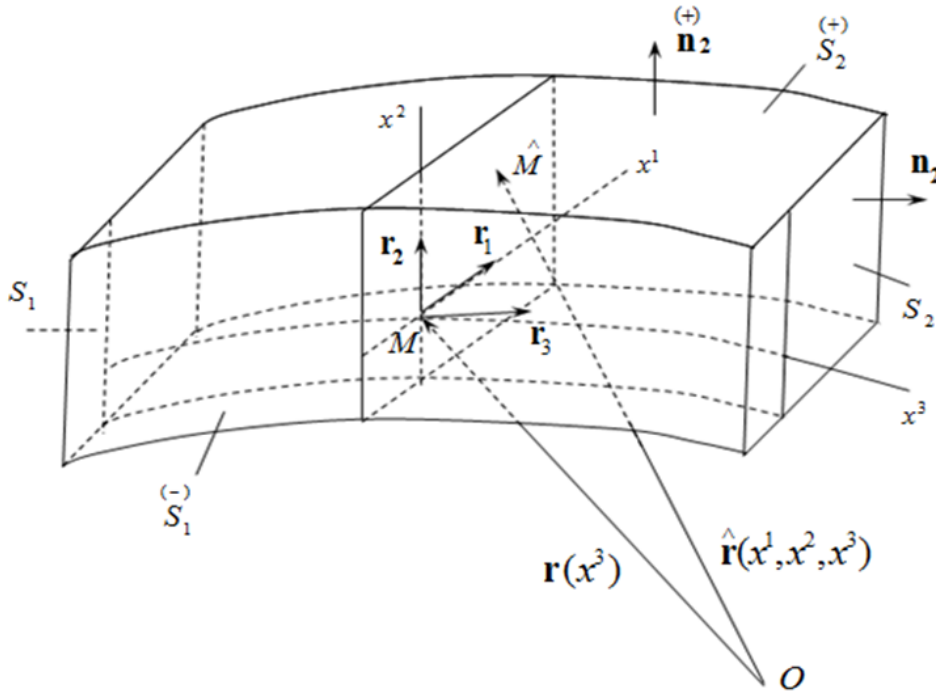


Рис. 5.3: Параметризация области тонкого тела при произвольной базовой кривой

Дифференцируя (5.1.43) по x^I , получим

$$\mathbf{r}_{\hat{i}} = \partial_I \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = h_I \mathbf{e}_I = \mathbf{r}_I, \quad \langle I = 1, 2 \rangle, \quad -1 \leq x^I \leq 1, \quad x^3 \in \mathbb{R}^1. \quad (5.1.44)$$

Теперь дифференцируя (5.1.43) по x^3 и учитывая формулы Серре-Френе (5.1.4) будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\hat{3}} \equiv \partial_3 \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) &= h_1^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)] \mathbf{r}_1 + \\ &+ h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) + k_2 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)] \mathbf{r}_2 + [1 - k_1 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)] \mathbf{r}_3.\end{aligned}\quad (5.1.45)$$

Очевидно, соотношениями (5.1.44) и (5.1.45) построен ковариантный базис в произвольной точке \hat{M} области тонкого тела. При этом из (5.1.44) видно, что во всех точках области тонкого тела первые два вектора базиса одни и те же и равны $\mathbf{r}_I = h_I \mathbf{e}_I$,

$< I = 1, 2 >$. В дальнейшем в качестве базиса, связанного с базовой линии, выберем $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$. Тогда имеем

$$\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = h_1 h_2, \quad \mathbf{r}^1 = h_1^{-2} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}^2 = h_2^{-2} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3. \quad (5.1.46)$$

Найдем элементы фундаментальной и обратной матриц для базисов, связанных с базовой линией γ . На основании (5.1.44) и (5.1.46) находим

$$g_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{33} = 1, \quad g^{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} h_\beta^{-1} \delta_{\alpha\beta}, \quad g^{33} = 1, \quad < \alpha, \beta = 1, 2 >. \quad (5.1.47)$$

Нетрудно заметить, что в силу (5.1.44) и (5.1.45) получим

$$\sqrt{\hat{g}} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = \sqrt{g} [1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \quad \hat{\vartheta} = \sqrt{\hat{g} g^{-1}} = 1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1). \quad (5.1.48)$$

Не представляет большого труда найти выражения для компонент $g_{\hat{p}q} = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_q$ и $g_{\hat{p}}^q = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^q$ ЕТВР. В самом деле, с помощью (5.1.44), (5.1.45) и (5.1.46) получим

$$g_{\hat{p}q}, g_{\hat{p}}^q = \begin{cases} g_{\hat{P}Q} = g_{PQ} = h_P h_Q \delta_{PQ}, & < P, Q = 1, 2 >, & g_{\hat{P}}^Q = g_P^Q, \\ g_{\hat{P}3} = g_{P3} = 0, & g_{\hat{P}}^3 = g_P^3 = 0, \\ g_{\hat{3}1} = h_1 [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2(\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ g_{\hat{3}}^1 = h_1^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2(\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ g_{\hat{3}2} = h_2 [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2(\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ g_{\hat{3}}^2 = h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2(\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ g_{\hat{3}3} = g_{33}^3 = 1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1) = \hat{\vartheta}. \end{cases} \quad (5.1.49)$$

Заметим, что векторы контравариантного базиса в произвольной точке \hat{M} можно найти по формуле $\mathbf{r}^{\hat{p}} = \frac{1}{2} C^{\hat{p}\hat{q}\hat{s}} \mathbf{r}_{\hat{q}} \times \mathbf{r}_{\hat{s}}$ и тогда можно ввести в рассмотрение $g^{\hat{p}q} = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^q$ и $g_{\hat{p}}^q = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_q$ — компоненты переноса ЕТВР. Очевидно, для связи между базисными векторами имеют место формулы

$$\mathbf{r}^{\hat{p}} = g_{\hat{p}q}^{\hat{p}} \mathbf{r}^q, \quad \mathbf{r}^p = g_{p\hat{q}}^p \mathbf{r}^{\hat{q}} \quad (g_k^{\hat{p}} g_{\hat{q}}^k = g_{\hat{q}}^{\hat{p}}, \quad g_{\hat{m}}^p g_q^{\hat{m}} = g_q^p), \quad (5.1.50)$$

сохраняющие силу при жонглировании свободными и немymi индексами.

Найдем выражения для $\mathbf{r}^{\hat{P}}$ и $\mathbf{r}^{\hat{3}}$. В силу (5.1.44), (5.1.48), (5.1.49) и (5.1.48) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{\hat{P}} &= C^{\hat{P}\hat{Q}} \mathbf{r}_{\hat{Q}} \times \mathbf{r}_{\hat{3}} = \sqrt{\hat{g}} \epsilon^{PQ} \mathbf{r}_q \times \mathbf{r}_s g_{\hat{3}}^s = \mathbf{r}^P - \hat{\vartheta}^{-1} g_{\hat{3}}^P \mathbf{r}^3, \\ \mathbf{r}^{\hat{3}} &= \sqrt{\hat{g}^{-1}} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{\hat{g}^{-1}} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{\hat{g}^{-1} g} \mathbf{r}^3 = \hat{\vartheta}^{-1} \mathbf{r}^3. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{r}^{\hat{P}} = \mathbf{r}^P + g_{\hat{3}}^{\hat{P}} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^P - g_{\hat{3}}^P g_{\hat{3}}^{\hat{3}} \mathbf{r}^3, \quad \mathbf{r}^{\hat{3}} = g_{\hat{3}}^{\hat{3}} \mathbf{r}^3. \quad (5.1.51)$$

Нетрудно заметить, что в силу (5.1.44), (5.1.46) и (5.1.51) для компонент $g^{\hat{p}q}$ и $g_{\hat{p}}^q$ имеем выражения

$$g^{\hat{p}q}, g_{\hat{p}}^q = \begin{cases} g^{\hat{P}Q} = g^{PQ}, & g_{\hat{Q}}^{\hat{P}} = g_Q^P, \\ g^{\hat{P}3} = g_{\hat{3}}^{\hat{P}} = -g_{\hat{3}}^P g_{\hat{3}}^3, \\ g^{\hat{3}Q} = 0, & g_{\hat{Q}}^{\hat{3}} = 0, \\ g^{\hat{3}3} = g_{\hat{3}}^{\hat{3}} = (g_{\hat{3}}^3)^{-1} = \hat{\vartheta}^{-1}. \end{cases} \quad (5.1.52)$$

Следовательно, если $|k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)| < 1$, то

$$g_{\hat{3}}^{\hat{3}} = \hat{\vartheta}^{-1} = [1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)]^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} [k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)]^s. \quad (5.1.53)$$

5.2 Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами

Даны представления градиента, дивергенции тензора и уравнений движения при рассмотренных выше параметризациях.

5.2.1 Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами

По определению градиента и в силу (5.1.10) для некоторого тензора $\mathbb{F}(x', x^3)$ имеем

$$\hat{\nabla}\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbb{F} = \mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbb{F} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbb{F} + (\mathbf{r}^{\hat{P}} - g_3^{\hat{P}} g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^{\hat{3}}) \partial_P \mathbb{F} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^{\hat{3}} (\partial_3 - g_3^{\hat{P}} \partial_P) \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbb{F}.$$

Таким образом, искомое представление градиента тензора имеет вид

$$\hat{\nabla}\mathbb{F} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^{\hat{3}} N_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\hat{P}} \partial_P \mathbb{F}, \quad (5.2.1)$$

где введен дифференциальный оператор

$$N_3 = \partial_3 - g_3^{\hat{P}} \partial_P. \quad (5.2.2)$$

На основании определения дивергенции из (5.2.1), например, для тензора второго ранга \mathbb{P} получим одно искомое представление в виде

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbb{P} = g_3^{\hat{3}} N_3 \mathbb{P}^{\hat{3}} + \partial_P \mathbb{P}^{\hat{P}}. \quad (5.2.3)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $\nabla_P \mathbb{P}^m = \partial_P \mathbb{P}^m$.

Другое представление дивергенции тензора второго ранга \mathbb{P} имеет форму

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \partial_P (\sqrt{\hat{g}} \mathbb{P}^{\hat{P}}) = \frac{1}{\hat{\vartheta} \sqrt{\hat{g}}} \partial_3 (\sqrt{\hat{g}} \hat{\vartheta} \mathbb{P}^{\hat{3}}) + \frac{1}{\hat{\vartheta}} \partial_P (\hat{\vartheta} \mathbb{P}^{\hat{P}}). \quad (5.2.4)$$

Очевидно, дивергенция тензора второго ранга можно также представить следующим образом:

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbb{P} = \mathbf{r}^{\hat{P}} \cdot \nabla_P \mathbb{P} = \nabla_3 \mathbb{P}^{\hat{3}} + \nabla_P \mathbb{P}^{\hat{P}}. \quad (5.2.5)$$

Учитывая (5.2.3)–(5.2.5), уравнения движения моментной теории можно записать в следующих видах:

$$g_3^{\hat{3}} N_3 \mathbb{P}^{\hat{3}} + \partial_P \mathbb{P}^{\hat{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_3^{\hat{3}} N_3 \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} + \partial_P \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \mathbb{P} + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \partial_3 (\sqrt{\hat{g}} \hat{\vartheta} \mathbb{P}^{\hat{3}}) + \partial_P (\hat{\vartheta} \mathbb{P}^{\hat{P}}) + \rho \hat{\vartheta} \mathbf{F} &= \rho \hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \partial_3 (\sqrt{\hat{g}} \hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \partial_P (\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \hat{\vartheta} \mathbb{P}^T + \rho \hat{\vartheta} \mathbf{m} &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\nabla_3 \mathbb{P}^{\hat{3}} + \nabla_P \mathbb{P}^{\hat{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}} + \nabla_P \boldsymbol{\mu}^{\hat{P}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \mathbb{P} + \rho \mathbf{m} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.2.8)$$

5.2.2 Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами

В этом случае с помощью (5.1.39)–(5.1.41) аналогично (5.2.1) для градиента некоторого тензора \mathbb{F} получим следующее искомое представление

$$\nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^p \partial_p \mathbb{F} = g_3^3 \bar{\mathbf{r}}^3 N_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^P \partial_P \mathbb{F}, \quad (5.2.9)$$

где введен следующий дифференциальный оператор:

$$N_3 = \partial_3 - g_3^{\bar{P}} \partial_P. \quad (5.2.10)$$

В силу определения дивергенции из (5.2.9) для дивергенции тензора второго ранга \mathbb{P} находим одно искомое представление в форме

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = g_3^3 N_3 \mathbb{P}^{\bar{3}} + \partial_P \mathbb{P}^{\bar{P}}. \quad (5.2.11)$$

Заметим, что в этом случае $\partial_P \mathbb{P}^{\bar{m}} = \partial_P \mathbb{P}^{\bar{m}}$. Другое представление дивергенции тензора второго ранга \mathbb{P} аналогично (5.2.4) записывается в виде

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P (\sqrt{g} \mathbb{P}^P) = \frac{1}{\sqrt{g}^{(-)}} \partial_3 \left(\sqrt{g}^{(-)} \vartheta \mathbb{P}^3 \right) + \frac{1}{\vartheta} \partial_P \left(\vartheta \mathbb{P}^P \right). \quad (5.2.12)$$

И, наконец, аналогично (5.2.5) будем иметь

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = \mathbf{r}^p \cdot \partial_p \mathbb{P} = \nabla_3 \mathbb{P}^3 + \nabla_P \mathbb{P}^P. \quad (5.2.13)$$

Пользуясь (5.2.11)–(5.2.13), для уравнений движения моментной теории получим следующие представления:

$$g_3^3 N_3 \mathbb{P}^{\bar{3}} + \partial_P \mathbb{P}^{\bar{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_3^3 N_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \partial_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{P}} + \underline{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{P} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbb{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \quad (5.2.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}^{(-)}} \partial_3 \left(\sqrt{g}^{(-)} \vartheta \mathbb{P}^3 \right) + \partial_P \left(\vartheta \mathbb{P}^P \right) + \rho \vartheta \mathbf{F} = \rho \vartheta \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (5.2.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}^{(-)}} \partial_3 \left(\sqrt{g}^{(-)} \vartheta \boldsymbol{\mu}^3 \right) + \partial_P \left(\vartheta \boldsymbol{\mu}^P \right) + \underline{\mathbb{C}} \otimes \vartheta \mathbb{P} + \rho \vartheta \mathbf{m} = \underline{\mathbb{J}} \cdot \vartheta \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi};$$

$$\nabla_3 \mathbb{P}^3 + \nabla_P \mathbb{P}^P + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \partial_3 \boldsymbol{\mu}^3 + \nabla_P \boldsymbol{\mu}^P + \underline{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{P} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbb{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.2.16)$$

5.2.3 Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии

В рассматриваемом случае искомые представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения по форме полностью совпадают с соответствующим представлениям этих операторов и уравнений движения при классической параметризации с учетом того, что геометрические характеристики имеют другой вид (см. (5.1.43)–(5.1.49) и др.). В этой связи выписывать их не будем. Отметим только то, что градиент тензора представляется в форме (5.2.1), дивергенция тензора второго ранга — соотношениями (5.2.3)–(5.2.5), а уравнения движения моментной теории имеют вид (5.2.6)–(5.2.8).

5.3 Элементы теории моментов. Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода при разных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами

Даны определения моментов (m, n) -го порядка некоторой величины относительно систем ортогональных полиномов Лежандра и Чебышева второго рода при разных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами, а также различные представления системы уравнений движения в моментах относительно этих систем полиномов.

5.3.1 Элементы теории моментов

Ограничимся получением искомых представлений системы уравнений в моментах при новой параметризации и в том случае, когда при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами в качестве базы выбирается произвольная линия. В рассматриваемом случае разложение величин производится по двум поперечным координатам x^1 и x^2 . При этом следует заметить, что при новой параметризации $0 \leq x^I \leq 1$, а в случае параметризации при произвольной базовой линии $-1 \leq x^I \leq 1$. В этой связи следует ввести соответствующее определение моментов величин относительно некоторой системы ортогональных полиномов.

Пусть $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая ортогональная система полиномов на сегменте $[a, b]$, а $\mathbb{F}(x', x^3)$ — какое-нибудь тензорное поле.

Определение 5.3.1. Моментом (m, n) -го порядка величины $\mathbb{F}(x', x^3)$ относительно системы полиномов $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, обозначаемом $\mathbb{M}^{(m,n)}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \frac{1}{\|u_m\|^{-2}\|u_n\|^{-2}} \int_a^b \int_a^b \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) u_m(x^1) u_n(x^2) h(x^1) h(x^2) dx^1 dx^2. \quad (5.3.1)$$

Здесь $\|u_k\|$ — норма полинома u_k , а h — весовая функция.

Если в качестве $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ рассматривается система полиномов Лежандра $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$, то $h = 1$ и в случае параметризации при произвольной базовой линии $\|P_k\| = \sqrt{2/(2k+1)}$, $a = -1$ и $b = 1$. Поэтому, вводя обозначение $\mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbb{F})$ для момента (m, n) -го порядка относительно системы полиномов Лежандра, вместо (5.3.1) будем иметь

$$\mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \frac{2m+1}{2} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) P_m(x^1) P_n(x^2) dx^1 dx^2. \quad (5.3.2)$$

Аналогично (5.3.2) при новой параметризации $a = 0$, $b = 1$ и так как $h = 1$ и $\|P_k^*\| = 1/\sqrt{2k+1}$, то (5.3.1) представится в виде

$$\mathbb{M}_L^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F}) = (2m+1)(2n+1) \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) P_m^*(x^1) P_n^*(x^2) dx^1 dx^2. \quad (5.3.3)$$

Заметим, что система полиномов Лежандра на сегменте $[0, 1]$ называется системой смещенных полиномов Лежандра и обозначается через $\{P_k^*\}_{k=0}^{\infty}$.

В случае системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}\}_{k=0}^{\infty}$, когда параметризация производится при произвольной базовой линии, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$, где $x = x^1$ или $x = x^2$. Кроме того, $a = -1$ и $b = 1$. Поэтому, вводя обозначение $\mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbb{F})$ для момента (m, n) -го порядка относительно системы полиномов Чебышева второго рода, (5.3.1) заменится интегралом

$$\mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) \hat{U}_m(x^1) \hat{U}_n(x^2) h(x^1) h(x^2) dx^1 dx^2. \quad (5.3.4)$$

Следовательно, при новой параметризации $a = 0$, $b = 1$ и имеем дело с системой смещенных полиномов Чебышева второго рода $\{\hat{U}^*\}_{k=0}^{\infty}$, поэтому (5.3.1) запишется в форме

$$\mathbb{M}_T^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) \hat{U}_m^*(x^1) \hat{U}_n^*(x^2) h^*(x^1) h^*(x^2) dx^1 dx^2. \quad (5.3.5)$$

Здесь $h^*(t) = 2\sqrt{t(1-t)}$, где $t = x^1$ или $t = x^2$.

Следует отметить, что при необходимости (в зависимости от граничных условий на лицевых поверхностях) по одной координате можно использовать разложение по одной системе полиномов, а по другой координате по другой системе полиномов. Например, если рассматривается параметризация при произвольной базовой линии и по первой координате x^1 разложение производится по системе полиномов Лежандра, а по второй координате x^2 — по ортонормированной системе полиномов Чебышева второго рода, то можно ввести определение.

Определение 5.3.2. Моментом m -го порядка по первой координате относительно системы полиномов Лежандра и n -го порядка по второй координате относительно ортонормированной системы полиномов Чебышева второго рода величины $\mathbb{F}(x^1, x^3)$, обозначаемом $\mathbb{M}^{(m,n)}(\mathbb{F})$, называется интеграл

$$\mathbb{M}^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) P_m(x^1) \hat{U}_n(x^2) h(x^2) dx^1 dx^2.$$

Далее отметим также, что все утверждения, теоремы и соотношения, касающиеся теории моментов [266, 269, 273, 274, 277, 281] (см. также выше вторую, третью и четвертую главы), в отдельности справедливы относительно каждого переменного x^1 и x^2 при соответствующих параметризациях. Поэтому нет надобности рассматривать их здесь.

В дальнейшем для удобства изложения материала и обращения к (5.3.2)–(5.3.4) назовем $\mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbb{F})$, $\mathbb{M}_L^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F})$ и $\mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbb{F})$, $\mathbb{M}_T^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F})$ операторами моментов (m, n) -го порядка Лежандра и Чебышева второго рода соответственно. При этом первый индекс m относится к переменному x^1 , а второй индекс n — к переменному x^2 . Часто, если из контекста ясно о какой системе полиномов идет речь, индексы L , T и "*" можно опускать. Кроме того, предполагаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbb{F}) P_m(x^1) P_n(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F}) P_m^*(x^1) P_n^*(x^2) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(m,\cdot)}(\mathbb{F}) P_m(x^1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(\cdot,n)}(\mathbb{F}) P_n(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^*{}^{(m,\cdot)}(\mathbb{F}) P_m^*(x^1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^*{}^{(\cdot,n)}(\mathbb{F}) P_n^*(x^2) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbb{F}) \hat{U}_m(x^1) \hat{U}_n(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F}) \hat{U}_m^*(x^1) \hat{U}_n^*(x^2) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(m,\cdot)}(\mathbb{F}) \hat{U}_m(x^1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(\cdot,n)}(\mathbb{F}) \hat{U}_n(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^*{}^{(m,\cdot)}(\mathbb{F}) \hat{U}_m^*(x^1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^*{}^{(\cdot,n)}(\mathbb{F}) \hat{U}_n^*(x^2) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}^{(m,n)}(\mathbb{F}) P_m(x^1) \hat{U}_n(x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{M}^*{}^{(m,n)}(\mathbb{F}) P_m^*(x^1) \hat{U}_n^*(x^2). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Следовательно, с учетом значений систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода на концах сегментов ортогональности, из (5.3.6) можно получить выражения для

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{(-,)} &= \mathbb{F}|_{x^1=a}, & \mathbb{F}^{(+,)} &= \mathbb{F}|_{x^1=1}, & \mathbb{F}^{(, -)} &= \mathbb{F}|_{x^2=a}, & \mathbb{F}^{(+, +)} &= \mathbb{F}|_{x^2=1}, \\ \mathbb{F}^{(-, -)} &= \mathbb{F}|_{\substack{x^1=a \\ x^2=a}}, & \mathbb{F}^{(-, +)} &= \mathbb{F}|_{\substack{x^1=a \\ x^2=1}}, & \mathbb{F}^{(+, -)} &= \mathbb{F}|_{\substack{x^1=1 \\ x^2=a}}, & \mathbb{F}^{(+, +)} &= \mathbb{F}|_{\substack{x^1=1 \\ x^2=1}}, \end{aligned}$$

где $a = -1$ или $a = 0$.

Очевидно и в рассматриваемом случае следует ввести оператор «штрих», относительно каждого переменного x^1 и x^2 и если он введен, то момент (m, n) -го порядка частных производных $\partial_i \mathbb{F}$ представится в виде

$$\mathbb{M}^{(m, n)}(\partial_i \mathbb{F}) = g_i^3 \partial_3 \mathbb{M}^{(m, n)}(\mathbb{F}) + g_i^1 \mathbb{M}^{(m', n)}(\mathbb{F}) + g_i^2 \mathbb{M}^{(m, n')}(\mathbb{F}), \quad (5.3.7)$$

а для повторных производных имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(m, n)}(\partial_i \partial_j \mathbb{F}) &= g_i^1 g_j^1 \mathbb{M}^{(m'', n)}(\mathbb{F}) + (g_i^1 g_j^2 + g_i^2 g_j^1) \mathbb{M}^{(m', n')}(\mathbb{F}) + \\ &+ (g_i^1 g_j^3 + g_i^3 g_j^1) \partial_3 \mathbb{M}^{(m', n)}(\mathbb{F}) + g_i^2 g_j^2 \mathbb{M}^{(m, n'')}(\mathbb{F}) + (g_i^2 g_j^3 + g_i^3 g_j^2) \partial_3 \mathbb{M}^{(m, n')}(\mathbb{F}) + g_i^3 g_j^3 \partial_3^2 \mathbb{M}^{(m, n)}(\mathbb{F}). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Заметим, что соотношения (5.3.7) и (5.3.8) справедливы для любой системы полиномов. В каждом конкретном случае системы полиномов операторам моментов в (5.3.7) и (5.3.8) следует приписать просто соответствующие индексы и вспомнить определение оператора «штрих» (см. выше, а также например, в [269, 274, 277, 281, 283]). Выпишем ниже некоторые соотношения на основании выведенных выше формул. В случае системы полиномов Лежандра для операторов «штрих» $\mathbb{M}_L^{(m', n)}(\mathbb{F})$ и $\mathbb{M}_L^{(m, n')}(\mathbb{F})$ имеем выражения (см. (4.2.36) – (4.2.38), а также [281, 283]):

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(m', n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{(m, n)}(\partial_1 \mathbb{F}) = (2m+1) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m+2p+1, n}{p} \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}) = \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}) = \\ &= \frac{2m+1}{2} [\mathbb{F}^{(+, n)} - (-1)^m \mathbb{F}^{(-, n)}] - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(m, n')}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{(m, n)}(\partial_2 \mathbb{F}) = (2n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m, n+2p+1}{p} \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}) = \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}) = \\ &= \frac{2n+1}{2} [\mathbb{F}^{(m, +)} - (-1)^n \mathbb{F}^{(m, -)}] - \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(m', n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{(m, n)}(\partial_1 \mathbb{F}) = \\ &= \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}) + \frac{2m+1}{2} [\mathbb{M}_L^{(+, n)}(\mathbb{F}) - (-1)^m \mathbb{M}_L^{(-, n)}(\mathbb{F})], \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{(m, n')}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{(m, n)}(\partial_2 \mathbb{F}) = \\ &= \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}) + \frac{2n+1}{2} [\mathbb{M}_L^{(m, +)}(\mathbb{F}) - (-1)^n \mathbb{M}_L^{(m, -)}(\mathbb{F})]. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{(+, n)} &= \mathbb{M}_L^{(+, n)}(\mathbb{F})|_{x^1=1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p, n}{p} \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}), & \mathbb{F}^{(-, n)} &= \mathbb{M}_L^{(-, n)}(\mathbb{F})|_{x^1=-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_L^{(p, n)}(\mathbb{F}), \\ \mathbb{F}^{(m, +)} &= \mathbb{M}_L^{(m, +)}(\mathbb{F})|_{x^2=1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m, p}{p} \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}), & \mathbb{F}^{(m, -)} &= \mathbb{M}_L^{(m, -)}(\mathbb{F})|_{x^2=-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_L^{(m, p)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}'_L(\mathbb{F}) &= \sum_{p=M+1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(p,n)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}'_L(\mathbb{F}) &= \sum_{p=M+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_L^{(p,n)}(\mathbb{F}), & M \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbb{M}'_L(\mathbb{F}) &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \mathbb{M}_L^{(m,p)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}'_L(\mathbb{F}) &= \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \mathbb{M}_L^{(m,p)}(\mathbb{F}), & N \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Для системы полиномов Чебышева второго рода аналогичные (5.3.9)–(5.3.12) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_T(\partial_1 \mathbb{F}) = 2(m+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(m+2p+1,n)}(\mathbb{F}) = (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_T^{(p,n)}(\mathbb{F}), \\ \mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_T(\partial_2 \mathbb{F}) = 2(n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_T^{(m,n+2p+1)}(\mathbb{F}) = (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_T^{(m,p)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_T(\partial_1 \mathbb{F}) = \\ &= (m+1) \left\{ \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_T^{(p,n)}(\mathbb{F}) + [\mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) - (-1)^m \mathbb{M}'_T(\mathbb{F})] \right\}, \\ \mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_T(\partial_2 \mathbb{F}) = \\ &= (n+1) \left\{ \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_T^{(m,p)}(\mathbb{F}) + [\mathbb{M}'_T(\mathbb{F}) - (-1)^n \mathbb{M}'_T(\mathbb{F})] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

где введены обозначения, которые из (5.3.14) получатся, если индекс "L" у операторов моментов заменить на "T".

Не доставляет труда доказать справедливость следующих соотношений :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \{ [a(x^3) + x^1 b(x^3)]^s \partial_1 \mathbb{F} \} &= \mathbb{M} \{ [a(x^3) + x^1 b(x^3)]^s \mathbb{F} \}, \\ \mathbb{M} \{ [a(x^3) + x^2 b(x^3)]^s \partial_2 \mathbb{F} \} &= \mathbb{M} \{ [a(x^3) + x^2 b(x^3)]^s \mathbb{F} \}, \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\nabla_p u_{\bar{q}}) &= g_p^3 \nabla_3 \mathbb{M}(u_{\bar{q}}) + g_p^1 \mathbb{M}(u_{\bar{q}}) + g_p^2 \mathbb{M}(u_{\bar{q}}), \\ \mathbb{M}(\nabla_p u^{\bar{q}}) &= g_p^3 \nabla_3 \mathbb{M}(u^{\bar{q}}) + g_p^1 \mathbb{M}(u^{\bar{q}}) + g_p^2 \mathbb{M}(u^{\bar{q}}), \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

где $\sim \in \{\emptyset, \wedge\}$ при классической параметризации и в случае параметризации при произвольной базовой линии, а $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ при новой параметризации. Заметим, что (5.3.17) и (5.3.18) справедливы для любой системы полиномов.

5.3.2 Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода при различных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами

Применяя, например, к уравнениям (5.2.8) операторы моментов (m, n) -го порядка Лежандра и Чебышева и учитывая их линейность и (5.3.17) и (5.3.18), получим

$$\begin{aligned} \nabla_3 \mathbb{M}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) + \mathbb{M}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) + \rho \mathbb{M}(\mathbf{F}) &= \rho \mathbb{M}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\ \nabla_3 \mathbb{M}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{1}}) + \mathbb{M}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{2}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbb{M}}(\underline{\mathbf{P}}) + \rho \mathbb{M}(\mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbb{M}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \\ -(\delta_1^I + \delta_2^I) \leq x^I \leq \delta_1^I + \delta_2^I, & \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

При естественной параметризации

$$\nabla_3 A^3 = \partial_3 A^3 + A^m \Gamma_{m3}^3 = \partial_3 A^3 - k_1 A^1, \quad \Gamma_{M3}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^3 = -k_1.$$

Тогда

$$\nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \partial_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - k_1^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^{\hat{1}}).$$

Аналогично (5.3.19) из (5.2.7) находим

$$\begin{aligned} \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbf{M}^{(m',n)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{1}}) + \mathbf{M}^{(m,n')}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{2}}) + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{F}) &= \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}) + \mathbf{M}^{(m',n)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{1}}) + \mathbf{M}^{(m,n')}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{2}}) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \underline{\mathbf{P}}) + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\hat{\vartheta} \mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \\ -1 \leq x^I \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Заметим, что представления (5.3.19) и (5.3.20) системы уравнений движения в моментах справедливы для любой системы полиномов при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами в том случае, когда в качестве базовой выбирается произвольная линия.

При новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами в силу (5.3.17) и (5.3.18) из (5.2.16) и (5.2.15) будем иметь соответственно следующие представления:

$$\begin{aligned} \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{P}^3) + \mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^1) + \mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^2) + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{F}) &= \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu}^3) + \mathbf{M}^{(m',n)}(\boldsymbol{\mu}^1) + \mathbf{M}^{(m,n')}(\boldsymbol{\mu}^2) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{P}}) + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}(\mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}^{(m,n)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \\ 0 \leq x^I \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

$$\begin{aligned} \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \mathbf{P}^3) + \mathbf{M}^{(m',n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \mathbf{P}^1) + \mathbf{M}^{(m,n')} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \mathbf{P}^2) + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \mathbf{F}) &= \rho^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \partial_t^2 \mathbf{u}), \\ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \boldsymbol{\mu}^3) + \mathbf{M}^{(m',n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \boldsymbol{\mu}^1) + \mathbf{M}^{(m,n')} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \boldsymbol{\mu}^2) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \underline{\mathbf{P}}) + \\ + \rho^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \mathbf{m}) &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}^{(m,n)} \mathbf{M}^{(-)}(\vartheta \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

имеющие место для любой системы полиномов (уравнения при новой параметризации получаются из соответствующих уравнений в случае параметризации при произвольной базовой линии, если заменить $\mathbf{P}^{\hat{p}} \rightarrow \mathbf{P}^p$, $\boldsymbol{\mu}^{\hat{p}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^p$, $\hat{\vartheta} \rightarrow \vartheta^{(-)}$). Из (5.3.19) и (5.3.20) видно, что для получения искомым представлений системы уравнений движения в моментах следует найти выражения для слагаемых, которые имеют индекс со штрихом ($\mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}})$, $\mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}})$ и т.д.). При этом нетрудно заметить, что из найденных выражений для $\mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}})$, и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}})$ соответствующие выражения для остальных аналогичных слагаемых можно получить заменой $\mathbf{P}^{\hat{1}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^{\hat{1}}$, $\mathbf{P}^{\hat{2}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^{\hat{2}}$; $\mathbf{P}^{\hat{1}} \rightarrow \hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{1}}$, $\mathbf{P}^{\hat{2}} \rightarrow \hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{2}}$ и $\mathbf{P}^{\hat{1}} \rightarrow \hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{1}}$, $\mathbf{P}^{\hat{2}} \rightarrow \hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{2}}$.

Аналогично для получения искомым представлений (5.3.21) и (5.3.22) достаточно найти выражения для $\mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^1)$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^2)$, а потом из них получить выражения для остальных слагаемых с помощью соответствующих замен.

Итак, найдем выражения для $\mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^1)$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^2)$. В силу соответствующих соотношений (5.1.49) и (5.1.52) имеем

$$\mathbf{P}^{\hat{1}} = g_m^{\hat{1}} \mathbf{P}^m = \mathbf{P}^I + g_3^{\hat{1}} \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^I - g_3^I g_3^{\hat{3}} \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^I - g_3^I \mathbf{P}^{\hat{3}},$$

т.е.

$$\mathbf{P}^{\hat{1}} = \mathbf{P}^1 - g_3^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}, \quad \mathbf{P}^{\hat{2}} = \mathbf{P}^2 - g_3^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}. \tag{5.3.23}$$

Учитывая линейность операторов моментов и «штрих», соотношение четвертой строки (5.1.49) и первую формулу (5.3.23), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= \mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^1) - \mathbf{M}^{(m',n)}(g_3^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = \mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1}(\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{M}^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{M}^{(m',n)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{M}^{(m',n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}). \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Аналогично (5.3.24) на основании шестой строки (5.1.49) и второй формулы (5.3.23) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) &= \mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1}(\partial_3 \bar{h}_2 - k_2 \bar{h}_1) \mathbf{M}^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{M}^{(m,n')}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{M}^{(m,n')}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}). \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Легко заметить, что выражения для $\mathbf{M}^{(m',n)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{2}})$, $\mathbf{M}^{(m',n)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^{\hat{2}})$, $\mathbf{M}^{(m',n)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^{\hat{2}})$ получим из (5.3.24) и (5.3.25), если заменить букву \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, $\hat{\vartheta} \mathbf{P}$ и $\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}$ соответственно.

Далее при новой параметризации в силу (5.1.41) и последнего соотношения (5.1.36) имеем

$$\mathbf{P}^P = g_m^P \mathbf{P}^{\bar{m}} = \mathbf{P}^{\bar{P}} + g_3^P \mathbf{P}^{\bar{3}} = \mathbf{P}^{\bar{P}} - g_3^P g_3^{\bar{3}} \mathbf{P}^{\bar{3}} = \mathbf{P}^{\bar{P}} - g_3^{\bar{P}} \mathbf{P}^{\bar{3}} = \mathbf{P}^{\bar{P}} - x^I g_{(I)\bar{3}}^{\bar{P}} \mathbf{P}^{\bar{3}},$$

т.е.

$$\mathbf{P}^P = \mathbf{P}^{\bar{P}} - x^I g_{(I)\bar{3}}^{\bar{P}} \mathbf{P}^{\bar{3}}, \quad \mathbf{P}^{\bar{3}} = g_{\bar{3}}^{\bar{3}} \mathbf{P}^{\bar{3}}. \quad (5.3.26)$$

На основании линейности операторов моментов и «штрих» и (5.3.26) получим

$$\mathbf{M}^{(m',n)*}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{M}^{(m',n)*}(\mathbf{P}^{\bar{1}}) - g_{(I)\bar{3}}^{\bar{1}} \mathbf{M}^{(m',n)*}(x^I \mathbf{P}^{\bar{3}}), \quad \mathbf{M}^{(m,n')*}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{M}^{(m,n')*}(\mathbf{P}^{\bar{2}}) - g_{(I)\bar{3}}^{\bar{2}} \mathbf{M}^{(m,n')*}(x^I \mathbf{P}^{\bar{3}}). \quad (5.3.27)$$

Заметим, что выражения для $\mathbf{M}^{(m',n)}(\boldsymbol{\mu}^1)$ и $\mathbf{M}^{(m,n')}(\boldsymbol{\mu}^2)$, $\mathbf{M}^{(m',n)*}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^1)$ и $\mathbf{M}^{(m,n')*}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}^2)$, $\mathbf{M}^{(m',n)*}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^1)$ и $\mathbf{M}^{(m,n')*}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}^2)$ можно найти из (5.3.27), если букву \mathbf{P} заменить на $\boldsymbol{\mu}$, $\hat{\vartheta} \mathbf{P}$ и $\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}$ соответственно.

Учитывая (5.3.24), (5.3.25), (5.3.27) и получаемые из них указанными выше заменами буквы \mathbf{P} соотношения, из (5.3.19), (5.3.20), (5.3.21) и (5.3.22) выведем соответствующие представления системы уравнений движения в моментах, справедливые как для системы полиномов Лежандра, так и для системы полиномов Чебышева второго рода. С целью сокращения письма выписывать их не будем. Однако, ниже получим другие представления, имеющие преимущество при практическом применении и выпишем их в отдельности для систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода.

5.3.2.1 Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми параметрами

С целью получения этих представлений нужно найти выражения для (5.3.24), (5.3.25), а также (5.3.27) относительно системы полиномов Лежандра и учитывать их в (5.3.19)–(5.3.22) соответственно. Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае имеют место

соотношения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m',n)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -(m+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 + (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \\
 &= m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2m+1}{2} \left\{ \sum_{p=0}^m [1 + (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \left[\mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \right\}, \\
 \mathbf{M}_L^{(m,n')}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -(n+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 + (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \\
 &= n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2n+1}{2} \left\{ \sum_{p=0}^n [1 + (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \left[\mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \mathbf{M}_L^{(,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^1=1}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \quad \mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \mathbf{M}_L^{(,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^1=-1}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \\
 \mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^2=1}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \quad \mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}|_{x^2=-1}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}).
 \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

 На основании рекуррентной формулы $(2k+1)xP_k(x) = kP_{k-1}(x) + (k+1)P_{k+1}(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m',n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(m',n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(m',n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \\
 \mathbf{M}_L^{(m,n')}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,n')}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,n')}(\mathbf{P}^{\hat{3}}).
 \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

В силу (5.3.9) и (5.3.10) соотношения (5.3.30) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m',n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = \\
 &= \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] = \\
 &= -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(+,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) - (-1)^m \mathbf{M}_L^{(-,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] = \\
 &= -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \\
 &+ \frac{2m+1}{2} \left[\left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(+,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(+,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (-1)^m \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(-,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(-,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right) \right], \\
 \mathbf{M}_L^{(m,n')}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = \\
 &= \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] = \\
 &= -\frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2n+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,+)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) - (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,-)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] = \\
 &= -\frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \left[\left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (-1)^n \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

В дальнейшем при применении (5.3.31) с целью сокращения письма целесообразно пользоваться представлениями, имеющими в первых и третьих строках этих соотношений.

Учитывая (5.3.9) и первые соотношения (5.3.28) и (5.3.31), из (5.3.24) найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) + h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} h_1^{-1} [(\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2)] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Аналогично (5.3.32) в силу (5.3.10) и вторых соотношений (5.3.28) и (5.3.31) из (5.3.25) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) &= \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^2) + h_2^{-1} \partial_3 h_2 (n+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} h_2^{-1} [(\partial_3 h_2^{(+)} - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2^{(-)} + k_2 \bar{h}_1)] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Выражения для $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}_L^{(m,n')}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{2}})$, $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\nu}\mathbf{P}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}_L^{(m,n')}(\hat{\nu}\mathbf{P}^{\hat{2}})$, $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\nu}\boldsymbol{\mu}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}_L^{(m,n')}(\hat{\nu}\boldsymbol{\mu}^{\hat{2}})$ можно получить из (5.3.32) и (5.3.33), если заменить букву \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$, $\hat{\nu}P$ и $\hat{\nu}\boldsymbol{\mu}$ соответственно.

Приведем и другие представления для $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}})$ и $\mathbf{M}_L^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}})$. В силу вторых представлений (5.3.9) (последнее равенство) и первых соотношений (5.3.28) и (5.3.31) (вторые равенства в этих формулах) из (5.3.24) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} [(\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2)] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} (\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{M}_L^{(+,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] - \right. \\ &\left. - (-1)^m \left[\mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^1) + h_1^{-1} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2) \mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{M}_L^{(-,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \\ \mathbf{M}_L^{(\sim,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(\sim,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(\sim,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Теперь (5.3.25) представим в аналогичном (5.3.34) виде. На основании последних равенств (5.3.10) и вторых соотношений (5.3.28) и (5.3.31) из (5.3.25) находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) &= -\frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} [(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1)] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\
 &- \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) - h_2^{-1} (\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{M}_L^{(m,+)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] - \right. \\
 &\left. - (-1)^n \left[\mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) + h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_1^{-1} h_1 k_2 \mathbf{M}_L^{(m,-)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{5.3.35}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \\
 \mathbf{M}_L^{(m,\sim)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,\sim)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,\sim)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.
 \end{aligned}$$

Далее целесообразно представить (5.3.34) и (5.3.35) с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях. В этой связи рассмотрим вопрос о граничных условиях при рассматриваемой параметризации.

5.3.2.2 О граничных условиях при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии

Обозначим через $S_1^{(-)}$ и $S_2^{(-)}$ лицевые поверхности тонкого тела с двумя малыми размерами, определяемые с помощью (5.1.43) при $x^1 = -1$ и произвольных x^2 и x^3 и $x^2 = -1$ и произвольных x^1 и x^3 соответственно, а через $S_1^{(+)}$ и $S_2^{(+)}$ лицевые поверхности, определяемые при $x^1 = 1$ и произвольных x^2 и x^3 и $x^2 = 1$ и произвольных x^1 и x^3 соответственно. Кроме того, левый торец, определяемый с помощью (5.1.43) при $x^3 = x_1^3 = const$ и $-1 \leq x^I \leq 1$, обозначим через S_1 , а через S_2 обозначим правый торец, который определяется при $x^3 = x_2^3 = const$ ($x_2^3 > x_1^3$) и $-1 \leq x^I \leq 1$. Пусть $\mathbf{P}_{(1)}^{(-)}(x^2, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(-)}(x^2, x^3, t)$ — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на S_1 , $\mathbf{P}_{(1)}^{(+)}(x^2, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(+)}(x^2, x^3, t)$ — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на S_1 , $\mathbf{P}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^3, t)$ ($\mathbf{P}_{(2)}^{(+)}(x^1, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(+)}(x^1, x^3, t)$) — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на S_2 (S_2). Кроме того, обозначим через $\mathbf{P}_{(1)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}(x^1, x^2, t)$ ($\mathbf{P}_{(2)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}(x^1, x^2, t)$) заданные векторы напряжения и моментного напряжения на торце S_1 (S_2).

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)} &= -\frac{\mathbf{r}^{\hat{\alpha}}}{\sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}} \Big|_{x^{\alpha}=-1}, \quad \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)} = \frac{\mathbf{r}^{\hat{\alpha}}}{\sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}} \Big|_{x^{\alpha}=1}, \quad \alpha = 1, 2, \\
 \mathbf{n}_{(1)} &= -\frac{\mathbf{r}^{\hat{3}}}{\sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}}}} \Big|_{x^3=x_1^3}, \quad \mathbf{n}_{(2)} = \frac{\mathbf{r}^{\hat{3}}}{\sqrt{g^{\hat{3}\hat{3}}}} \Big|_{x^3=x_2^3},
 \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

где $\mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)}$ — единичный вектор нормали к $S_{\alpha}^{(-)}$, ($\alpha = 1, 2$), $\mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)}$ — единичный вектор нормали к $S_{\alpha}^{(+)}$, ($\alpha = 1, 2$), $\mathbf{n}_{(\alpha)}$ — единичный вектор нормали к S_{α} , ($\alpha = 1, 2$). Очевидно, в

рассматриваемом случае в силу второй формулы (5.1.51)

$$\mathbf{n}_{(1)} = -\mathbf{r}^3 = -\mathbf{r}_3|_{x^3=x_1^3}, \quad \mathbf{n}_{(2)} = \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3|_{x^3=x_2^3}. \quad (5.3.37)$$

Теперь не представляет труда записать граничные условия физического содержания теории тонких тел с двумя малыми размерами. В самом деле, будем иметь

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{(\alpha)} \cdot \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(\alpha)} &= \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{(\alpha)}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{(\alpha)} \cdot \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(\alpha)} &= \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{(\alpha)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{(\alpha)} \cdot \overset{(-)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(\alpha)} &= \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{(\alpha)} \cdot \overset{(+)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(\alpha)} &= \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)} &= \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}, \quad < \alpha = 1, 2 >, \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(\alpha)} &= \underline{\mathbf{P}}|_{x^{(\alpha)}=-1}, & \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(\alpha)} &= \underline{\mathbf{P}}|_{x^{(\alpha)}=1}, & \underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)} &= \underline{\mathbf{P}}|_{x^3=x_\alpha^3}, \\ \overset{(-)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(\alpha)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{x^{(\alpha)}=-1}, & \overset{(+)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{(\alpha)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{x^{(\alpha)}=1}, & \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)} &= \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{x^3=x_\alpha^3}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Запишем, например, соотношения первой строки (5.3.38) в развернутом виде. Имеем

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{(1)} \cdot \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(1)}(x^2, x^3, t) &= \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{(1)}(x^2, x^3, t), & \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{(1)} \cdot \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(1)}(x^2, x^3, t) &= \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{(1)}(x^2, x^3, t), \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{(2)} \cdot \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(2)}(x^1, x^3, t) &= \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{(2)}(x^1, x^3, t), & \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{(2)} \cdot \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}}_{(2)}(x^1, x^3, t) &= \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{(2)}(x^1, x^3, t), \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(1)}^3(x^1, x^2, t) &= -\hat{\vartheta} \mathbf{P}_{(1)}(x^1, x^2, t), \quad \text{при } x^3 = x_1^3, \\ \mathbf{P}_{(2)}^3(x^1, x^2, t) &= \hat{\vartheta} \mathbf{P}_{(2)}(x^1, x^2, t), \quad \text{при } x^3 = x_2^3. \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

При написании (5.3.40) были учтены формулы (5.3.37).

Далее нетрудно заметить, что в силу (5.1.51) имеем

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{r}}^{\hat{1}} &= \mathbf{r}^{\hat{1}}|_{x^1=-1} = \mathbf{r}^1 - \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \mathbf{r}^3, & \overset{(+)}{\mathbf{r}}^{\hat{1}} &= \mathbf{r}^{\hat{1}}|_{x^1=1} = \mathbf{r}^1 - \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \mathbf{r}^3, \\ \overset{(-)}{\mathbf{r}}^{\hat{2}} &= \mathbf{r}^{\hat{2}}|_{x^2=-1} = \mathbf{r}^2 - \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \mathbf{r}^3, & \overset{(+)}{\mathbf{r}}^{\hat{2}} &= \mathbf{r}^{\hat{2}}|_{x^2=1} = \mathbf{r}^2 - \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \mathbf{r}^3, \\ g^{\hat{1}\hat{1}} &= g^{11} - \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} (g_3^1)^2 = g^{11} - (\overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}})^2, & g^{\hat{2}\hat{2}} &= g^{22} - (\overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}})^2, & g^{\hat{3}\hat{3}} &= (g_3^3)^2. \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^1|_{x^1=-1} = h_1^{-1} [-\partial_3 \bar{h}_1 + k_2(\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^1|_{x^1=1} = h_1^{-1} [\partial_3 \bar{h}_1 + k_2(\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^2|_{x^2=-1} = -h_2^{-1} [\partial_3 \bar{h}_2 + k_2(\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^2|_{x^2=1} = h_2^{-1} [\partial_3 \bar{h}_2 - k_2(\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^3|_{x^1=-1} = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = \hat{\vartheta}^{-1}|_{x^1=-1} = (1 + \overset{(-)}{h}_1 k_1)^{-1}, \\ \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} &= g_3^3|_{x^1=1} = \overset{(+)}{\vartheta}^{-1} = \hat{\vartheta}^{-1}|_{x^1=1} = (1 - \overset{(+)}{h}_1 k_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

Заметим, что в данном случае $\overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}}, \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}}, g^{\hat{3}\hat{3}} = (g_3^3)^2$ не зависят от x^2 . Отметим также, что

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{g}^{\hat{1}\hat{1}} &= g^{\hat{1}\hat{1}}|_{x^1=-1} = g^{11} - (\overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}})^2, & \overset{(+)}{g}^{\hat{1}\hat{1}} &= g^{\hat{1}\hat{1}}|_{x^1=1} = g^{11} - (\overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}})^2, \\ \overset{(-)}{g}^{\hat{2}\hat{2}} &= g^{\hat{2}\hat{2}}|_{x^2=-1} = g^{22} - (\overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(-)}{g}_{\frac{3}{3}})^2, & \overset{(+)}{g}^{\hat{2}\hat{2}} &= g^{\hat{2}\hat{2}}|_{x^2=1} = g^{22} - (\overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}} \overset{(+)}{g}_{\frac{3}{3}})^2. \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

Учитывая (5.3.36), (5.3.41)–(5.3.43), после простых выкладок граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях тонкого тела (5.3.39) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(1)}^{(-)} + h_1^{-1}(\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) g_3^{(-)} \mathbf{P}_{(1)}^{(-)} - h_1^{-1} h_2 k_2 (x^2 g_3^{(-)} \mathbf{P}_{(1)}^{(-)}) &= -\mathbf{P}_{(1)}^{(-)\vee}(x^2, x^3, t), \\
 \mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - h_1^{-1}(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) g_3^{(+)} \mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - h_1^{-1} h_2 k_2 (x^2 g_3^{(+)} \mathbf{P}_{(1)}^{(+)}) &= \mathbf{P}_{(1)}^{(+)\vee}(x^2, x^3, t), \\
 \mathbf{P}_{(2)}^{(-)} + h_2^{-1}(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) g_3^{(-)} \mathbf{P}_{(2)}^{(-)} + h_2^{-1} h_1 k_2 (x^1 g_3^{(-)} \mathbf{P}_{(2)}^{(-)}) &= -\mathbf{P}_{(2)}^{(-)\vee}(x^1, x^3, t), \\
 \mathbf{P}_{(2)}^{(+)} - h_2^{-1}(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) g_3^{(+)} \mathbf{P}_{(2)}^{(+)} + h_2^{-1} h_1 k_2 (x^1 g_3^{(+)} \mathbf{P}_{(2)}^{(+)}) &= \mathbf{P}_{(2)}^{(+)\vee}(x^1, x^3, t), \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu},
 \end{aligned} \tag{5.3.44}$$

где запись $\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}$ означает, что вместо нее следует выписать соотношения, которые получаются из выписанных соотношений (5.3.44), если букву \mathbf{P} заменить на $\boldsymbol{\mu}$. Аналогичная запись применяется и в дальнейшем. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(-)\vee} &= \sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=-1} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(-)}, & \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(+)\vee} &= \sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=1} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(+)}, \\
 \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{(-)\vee} &= \sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=-1} \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{(-)}, & \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{(+)\vee} &= \sqrt{g^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=1} \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{(+)}.
 \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

Теперь на основании (5.3.44) легко усмотреть, что граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях тонкого тела в моментах запишутся в форме

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^1) + h_1^{-1}(\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{M}_L^{(-,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -\mathbf{M}_L^{(-,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(-)\vee}), \\
 \mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1}(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{M}_L^{(+,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \mathbf{M}_L^{(+,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(+)\vee}), \\
 \mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^2) + h_2^{-1}(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{M}_L^{(m,-)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -\mathbf{M}_L^{(m,-)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(-)\vee}), \\
 \mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1}(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{M}_L^{(m,+)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= \mathbf{M}_L^{(m,+)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(+)\vee}), \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

Выпишем и граничные условия на торцах в моментах. Применяя к (5.3.40) оператор моментов (m, n) -го порядка, получим искомые соотношения в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(1)}^{(m,n)} &= -\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}_{(1)}) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbf{P}_{(2)}^{(m,n)} &= -\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \mathbf{P}_{(2)}) \text{ при } x^3 = x_2^3, \\
 \boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(m,n)} &= -\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}_{(1)}) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(m,n)} &= -\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta} \boldsymbol{\mu}_{(2)}) \text{ при } x^3 = x_2^3,
 \end{aligned} \tag{5.3.47}$$

где вторая строка (5.3.47) написана по аналогии первой.

Заметим, что при необходимости (5.3.47) можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\hat{3}}) &= -\mathbf{P}_{(1)}^{(m,n)} \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\hat{3}}) &= \mathbf{P}_{(2)}^{(m,n)} \text{ при } x^3 = x_2^3, \\
 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{\hat{3}}) &= -\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(m,n)} \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{\hat{3}}) &= \boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(m,n)} \text{ при } x^3 = x_2^3.
 \end{aligned} \tag{5.3.48}$$

Следует заметить, что совершенно аналогично (5.3.46)–(5.3.48) можно рассматривать граничные условия теплового содержания. В случае тонкого тела с одним малым размером при применении системы полиномов Чебышева второго рода они приведены [273, 281]. С целью сокращения письма здесь на этом останавливаться не будем.

Учитывая (5.3.46), соотношения (5.3.34) и (5.3.35) можно записать с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) = & -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} \left[(\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2m+1}{2} \left\{ h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.49)$$

$\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) = & -\frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} \left[(\partial_3 h_2^{(+)} - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2^{(-)} + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ & - \frac{2n+1}{2} \left\{ h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) - \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}) + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.50)$$

$\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}$.

Теперь не представляет труда выписать некоторые искомые представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра в случае параметризации области тонкого тела при произвольной базовой линии. В самом деле, учитывая (5.3.32) и (5.3.33), из (5.3.46) получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_3 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) + h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \right. \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} h_1^{-1} \left[(\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ & - \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \\ & + \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^2) + h_2^{-1} \partial_3 h_2 (n+1) \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ & - \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^{\infty} h_2^{-1} \left[(\partial_3 h_2^{(+)} - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2^{(-)} + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \left. \right\} + \\ & + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\ & \{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} + \underset{\cong}{\mathbf{C}} \otimes \underset{\cong}{\mathbf{M}}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}) + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{m}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

Совершенно аналогично (5.3.51) из (5.3.20) находим

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P} \rightarrow \hat{\nu} \mathbf{P}\} + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\nu} \mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\nu} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\ \{\boldsymbol{\mu} \rightarrow \hat{\nu} \boldsymbol{\mu}\} + \underset{\cong}{\mathbf{C}} \otimes \underset{\cong}{\mathbf{M}}_L^{(m,n)}(\hat{\nu} \mathbf{P}) + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\nu} \mathbf{m}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\nu} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.3.52)$$

где выражение в фигурных скобках в первом (втором) уравнении (5.3.52) получается указанной заменой из выражения в фигурных скобках в первом (втором) уравнении (5.3.51).

Далее на основании (5.3.49) и (5.3.50) из (5.3.19) будем иметь следующее искомое представление системы уравнений движения в моментах:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \right. \\
 & + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3^{(-)} h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] - \\
 & - \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3^{(-)} h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\
 & - \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \left. \right\} + \\
 & + \mathbf{\Phi}^{(m,n)} = \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \mathbf{u}),
 \end{aligned} \tag{5.3.53}$$

$$\{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{M}}}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}) + \mathbf{M}^{(m,n)} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Phi}^{(m,n)}(x^3, t) &= \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) \right] + \\
 & + \frac{2n+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}) + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{F}), \\
 \mathbf{M}^{(m,n)}(x^3, t) &= \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{\vee}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{\vee}) \right] + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{\vee}) + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{\vee}) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{m}).
 \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

Для того, чтобы получить представление системы уравнений движения в моментах из (5.3.20) аналогично (5.3.53) с учетом граничных условий на лицевых поверхностях, нужно первое (пятое) и второе (шестое) равенства (5.3.44) умножить на $\hat{\vartheta}|_{x^1=-1}$, $(\hat{\vartheta}|_{x^1=1})$, а третье (седьмое) и четвертое (восьмое) — на $\hat{\vartheta}|_{x^2=-1}$, $(\hat{\vartheta}|_{x^2=1})$ и потом из полученных соотношений найти аналогичные (5.3.46) условия в моментах. Далее с помощью последних соотношений следует получить аналогичные (5.3.49) и (5.3.50) выражения для $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^1)$, $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^2)$, $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^1)$ и $\mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^2)$ с учетом граничных условий на лицевых поверхностях.

Наконец, учитывая последние соотношения, из (5.3.20) получим искомое представление системы уравнений движения в моментах. В самом деле, нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае подобные (5.3.49) и (5.3.50) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m',n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^1) &= -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3^{(-)} h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \left\{ h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(x^2 \hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \left[\mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}) \right] \right\}, \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu},
 \end{aligned} \tag{5.3.55}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_L^{(m,n')}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^2) &= -\frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3^{(-)} h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) - \\
 &- \frac{2n+1}{2} \left\{ h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(x^1 \hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) - \left[\mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{\vee(+)} + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{\vee(-)}) \right] \right\}, \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu},
 \end{aligned} \tag{5.3.56}$$

где введены обозначения

$$\underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)}^{\vee(-)} = \hat{\vartheta} \Big|_{x^\alpha = -1} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{\vee(-)}, \quad \underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)}^{\vee(+)} = \hat{\vartheta} \Big|_{x^\alpha = 1} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{\vee(+)}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad < \alpha = 1, 2 >.$$

Учитывая (5.3.55) и (5.3.56), из (5.3.20) искомое представление системы уравнений движения в моментах запишутся в форме

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \nabla_3^{(m,n)} \mathbf{M}_L(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^1) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \right. \\
 &+ \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3^{(-)} h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \\
 &+ \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbf{M}_L^{(p,n-1)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{M}_L^{(p,n+1)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) \right] - \\
 &- \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} \left[(\partial_3^{(+)} h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3^{(-)} h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) - \\
 &- \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,p)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^3) \right] \Big\} + \\
 &+ \underline{\boldsymbol{\Phi}} = \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 \{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} &+ \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{P}) + \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.3.57}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \underline{\boldsymbol{\Phi}}(x^3, t) &= \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(,n)}(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{\vee(+)} + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(,n)}(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{\vee(-)}) \right] + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{\vee(+)} + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{\vee(-)}) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{F}), \\
 \underline{\mathbf{M}}(x^3, t) &= \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(,n)}(\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}^{\vee(+)} + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(,n)}(\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(1)}^{\vee(-)}) \right] + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(2)}^{\vee(+)} + (-1)^n \mathbf{M}_L^{(m,)}(\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(2)}^{\vee(-)}) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\hat{\vartheta}\mathbf{m}).
 \end{aligned} \tag{5.3.58}$$

Следует заметить, что соотношения (5.3.51)–(5.3.53), (5.3.56), (5.3.57) являются различными представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра в случае параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии.

Теперь найдем различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра при новой параметризации области тонкого тела. В этой связи следует найти соответствующие выражения для (5.3.27) и учитывать

их в (5.3.21) и (5.3.22). Прежде всего заметим, что в рассматриваемом случае принимаемые часто аналогичные (5.3.9)–(5.3.12) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\partial_1 \mathbb{F}) = 2(2m+1) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m+2p+1, n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}) = (2m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}) = \\ &= (2m+1) \left[\mathbb{M}_L^{*(+,n)}(\mathbb{F}) - (-1)^m \mathbb{M}_L^{*(-,n)}(\mathbb{F}) \right] - (2m+1) \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\partial_2 \mathbb{F}) = 2(2n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m, n+2p+1}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}) = (2n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}) = \\ &= (2n+1) \left[\mathbb{M}_L^{*(m,+)}(\mathbb{F}) - (-1)^n \mathbb{M}_L^{*(m,-)}(\mathbb{F}) \right] - (2n+1) \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\partial_1 \mathbb{F}) = \\ &= (2m+1) \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}) + (2m+1) \left[\mathbb{M}_L^{*(+,n)'}(\mathbb{F}) - (-1)^m \mathbb{M}_L^{*(-,n)'}(\mathbb{F}) \right], \end{aligned} \quad (5.3.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\partial_2 \mathbb{F}) = \\ &= (2n+1) \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}) + (2n+1) \left[\mathbb{M}_L^{*(m,+)}'(\mathbb{F}) - (-1)^n \mathbb{M}_L^{*(m,-)}'(\mathbb{F}) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.62)$$

где подобно (5.3.13) и (5.3.14) введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(+,n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbb{F})|_{x^1=1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}_L^{*(-,n)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbb{F})|_{x^1=0} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}), \\ \mathbb{M}_L^{*(m,+)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbb{F})|_{x^2=1} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}_L^{*(m,-)}(\mathbb{F}) &= \mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbb{F})|_{x^2=0} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}), \end{aligned} \quad (5.3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(+,n)'}(\mathbb{F}) &= \sum_{p=M+1}^{\infty} \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}_L^{*(-,n)'}(\mathbb{F}) &= \sum_{p=M+1}^{\infty} (-1)^p \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbb{F}), & M &\in \mathbb{N}_0, \\ \mathbb{M}_L^{*(m,+)}'(\mathbb{F}) &= \sum_{p=N+1}^{\infty} \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}), & \mathbb{M}_L^{*(m,-)}'(\mathbb{F}) &= \sum_{p=N+1}^{\infty} (-1)^p \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbb{F}), & N &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

Нетрудно получить аналогичные (5.3.28) и (5.3.31) соотношения. В самом деле, учитывая

$$tP_k^*(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{2k+1} P_{k-1}^*(t) + P_k^*(t) + \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}^*(t) \right], \quad 0 \leq t \leq 1,$$

найдем

$$\mathbb{M}_L^{*(k)}(t\mathbb{F}) = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{2k-1} \mathbb{M}_L^{*(k-1)}(\mathbb{F}) + \mathbb{M}_L^{*(k)}(\mathbb{F}) + \frac{k+1}{2k+3} \mathbb{M}_L^{*(k+1)}(\mathbb{F}) \right], \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5.3.65)$$

Далее на основании (5.3.59), (5.3.60), (5.3.65) после простых выкладок будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(x^1 \mathbf{P}^3) &= -(m+1) \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + (2m+1) \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3) = \\ &= m \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) - (2m+1) \sum_{p=0}^m \binom{p,n}{p} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3) + (2m+1) \mathbb{M}_L^{*(+,n)}(\mathbf{P}^3), \\ \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(x^2 \mathbf{P}^3) &= -(n+1) \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + (2n+1) \sum_{p=n}^{\infty} \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3) = \\ &= n \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) - (2n+1) \sum_{p=0}^n \binom{m,p}{p} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3) + (2n+1) \mathbb{M}_L^{*(m,+)}(\mathbf{P}^3), \end{aligned} \quad (5.3.66)$$

где введены обозначения

$$\mathbb{M}_L^{*(+,n)}(\mathbf{P}^3) = \mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbf{P}^3|_{x^1=1}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3), \quad \mathbb{M}_L^{*(m,+)}(\mathbf{P}^3) = \mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbf{P}^3|_{x^2=1}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3). \quad (5.3.67)$$

Далее легко усмотреть, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(x^2\mathbf{P}^3) &= (2m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(x^2\mathbf{P}^3) = \\ &= (2m+1) \left\{ \left[\mathbb{M}_L^{*(+,n)}(x^2\mathbf{P}^3) - (-1)^m \mathbb{M}_L^{*(-,n)}(x^2\mathbf{P}^3) \right] - \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(x^2\mathbf{P}^3) \right\}, \\ \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(x^1\mathbf{P}^3) &= (2n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(x^1\mathbf{P}^3) = \\ &= (2n+1) \left\{ \left[\mathbb{M}_L^{*(m,+)}(x^1\mathbf{P}^3) - (-1)^n \mathbb{M}_L^{*(m,-)}(x^1\mathbf{P}^3) \right] - \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(x^1\mathbf{P}^3) \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.68)$$

Формулы (5.3.68) с помощью (5.3.65) можно было выписать в более развернутом виде, однако, с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

Теперь получим подобные (5.3.32) и (5.3.33) соотношения. В силу третьего равенства формулы (5.3.59) и первых равенств первых соотношений (5.3.66) и (5.3.68) из первой формулы (5.3.27) находим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(\mathbf{P}^1) &= (2m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^1) + (m+1) g_{(1)\frac{1}{3}}^{-1} \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) - \\ &- (2m+1) \sum_{p=m}^{\infty} \left[g_{(1)\frac{1}{3}}^{-1} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{m+p}) g_{(2)\frac{1}{3}}^{-1} \right] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3) - \\ &- \frac{2m+1}{2} g_{(2)\frac{1}{3}}^{-1} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbb{M}_L^{*(p,n-1)}(\mathbf{P}^3) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbb{M}_L^{*(p,n+1)}(\mathbf{P}^3) \right], \\ \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

Заметим, что при естественной параметризации базовой линии $\bar{\gamma}^{(-)}$ компонента $g_{(2)\frac{1}{3}}^{-1} = 0$.

Аналогично (5.3.69) с помощью третьего равенства формулы (5.3.60) и первых равенств вторых соотношений (5.3.66) и (5.3.68) из второго соотношения (5.3.27) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(P^2) &= (2n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(P^2) + (n+1) g_{(2)\frac{1}{3}}^{-2} \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(P^3) - \\ &- (2n+1) \sum_{p=n}^{\infty} \left[g_{(2)\frac{1}{3}}^{-2} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{n+p}) g_{(1)\frac{1}{3}}^{-2} \right] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(P^3) - \\ &- \frac{2n+1}{2} g_{(1)\frac{1}{3}}^{-2} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbb{M}_L^{*(m-1,p)}(P^3) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbb{M}_L^{*(m+1,p)}(P^3) \right], \\ \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

Наконец, получим аналогичные (5.3.34), (5.3.35) соотношения. На основании последних равенств (5.3.59) и первых формул (5.3.66) и (5.3.68) из первого соотношения (5.3.27)

имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}_L^{*(m',n)}(\mathbf{P}^1) &= -(2m+1) \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^1) - mg_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + \\
 &+ (2m+1) \sum_{p=0}^m \left[g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{m+p}) g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} \right] \mathbb{M}_L^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3) + \\
 &+ \frac{2m+1}{2} g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbb{M}_L^{*(p,n-1)}(\mathbf{P}^3) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbb{M}_L^{*(p,n+1)}(\mathbf{P}^3) \right] + \\
 &+ (2m+1) \left\{ \mathbb{M}_L^{*(+,n)}[\mathbf{P}^{\bar{1}} - g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} \mathbf{P}^3 - g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} (x^2 \mathbf{P}^3)] - (-1)^m \mathbb{M}_L^{*(-,n)}[\mathbf{P}^{\bar{1}} - g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} (x^2 \mathbf{P}^3)] \right\}, \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.3.71}$$

Следует заметить, что при естественной параметризации основной базовой линии $\bar{\gamma}^{(-)}$ компонента ЕТВР $g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{1}} = 0$ и в этом случае (5.3.51) получит простой вид.

Аналогично (5.3.71) с помощью последних равенств (5.3.60) и вторых соотношений (5.3.66) и (5.3.68) из второй формулы (5.3.27) получим

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}_L^{*(m,n')}(\mathbf{P}^2) &= -(2n+1) \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbf{P}^2) - ng_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} \mathbb{M}_L^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + \\
 &+ (2n+1) \sum_{p=0}^n \left[g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{n+p}) g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} \right] \mathbb{M}_L^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3) + \\
 &+ \frac{2n+1}{2} g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbb{M}_L^{*(m-1,p)}(\mathbf{P}^3) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbb{M}_L^{*(m+1,p)}(\mathbf{P}^3) \right] + \\
 &+ (2n+1) \left\{ \mathbb{M}_L^{*(m,+)}[\mathbf{P}^{\bar{2}} - g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} (x^1 \mathbf{P}^3) - g_{(2)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} \mathbf{P}^3] - (-1)^n \mathbb{M}_L^{*(m,-)}[\mathbf{P}^{\bar{2}} - g_{(1)\frac{1}{3}}^{\bar{2}} (x^1 \mathbf{P}^3)] \right\}, \\
 \mathbf{P} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.3.72}$$

Далее запишем (5.3.71) и (5.3.72) с учетом граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела. В этой связи в рассматриваемом случае выведем аналогичные (5.3.44) и (5.3.46) соотношения.

5.3.2.3 О граничных условиях при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами

Обозначим через $S_1^{(-)}$ и $S_2^{(-)}$ лицевые поверхности тонкого тела с двумя малыми размерами, которые определяются посредством (5.1.13) при $x^1 = 0$ и произвольных x^2 и x^3 и $x^2 = 0$ и произвольных x^1 и x^3 ($0 \leq x^I \leq 1$) соответственно, а через $S_1^{(+)}$ и $S_2^{(+)}$ лицевые поверхности, определяемые при $x^1 = 1$ и произвольных x^2 и x^3 и $x^2 = 1$ и произвольных x^1 и x^3 соответственно. При этом левый торец, определяемый с помощью (5.1.13) при $x^3 = x_1^3 = const$ и $0 \leq x^I \leq 1$, обозначим через S_1 , а через S_2 обозначим правый торец, который определяется при $x^3 = x_2^3 = const$ ($x_2^3 > x_1^3$) и $0 \leq x^I \leq 1$. Пусть $\mathbf{P}_{(1)}^{(-)}(x^2, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(-)}(x^2, x^3, t)$ ($\mathbf{P}_{(1)}^{(+)}$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(+)}$) — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на лицевой поверхности $S_1^{(-)}$ ($S_1^{(+)}$), $\mathbf{P}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^3, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^3, t)$ ($\mathbf{P}_{(2)}^{(+)}$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(+)}$) заданные векторы напряжения и моментного напряжения на $S_2^{(-)}$ ($S_2^{(+)}$), а $\mathbf{P}_{(1)}^{(-)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{(-)}(x^1, x^2, t)$ ($\mathbf{P}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{(-)}(x^1, x^2, t)$) — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на торце S_1 (S_2).

Далее легко усмотреть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)} &= -\frac{\mathbf{r}^\alpha}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=0}, & \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)} &= \frac{\mathbf{r}^\alpha}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}\Big|_{x^\alpha=1}, & \alpha &= 1, 2, \\ \mathbf{n}_{(1)} &= -\frac{\mathbf{r}^3}{\sqrt{g^{33}}}\Big|_{x^3=x_1^3}, & \mathbf{n}_{(2)} &= \frac{\mathbf{r}^3}{\sqrt{g^{33}}}\Big|_{x^3=x_2^3}, \end{aligned} \quad (5.3.73)$$

где $\mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)}$ ($\mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)}$) — единичный вектор нормали к S_α (S_α), $\alpha = 1, 2$, а $\mathbf{n}_{(\alpha)}$ — единичный вектор нормали к S_α , $\alpha = 1, 2$.

Теперь нетрудно записать граничные условия физического содержания теории тонких тел с двумя малыми размерами. В самом деле, аналогично (5.3.38) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)} \cdot \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)}^{(-)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(-)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)} \cdot \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)}^{(+)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(+)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}, \\ \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(-)} \cdot \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)}^{(-)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(-)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)}^{(+)} \cdot \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)}^{(+)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(+)}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}, & < \alpha = 1, 2 >, \end{aligned} \quad (5.3.74)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)}^{(-)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}\Big|_{x^\alpha=0}, & \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)}^{(+)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}\Big|_{x^\alpha=1}, & \mathbf{\tilde{P}}_{(\alpha)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}\Big|_{x^3=x_\alpha^3}, \\ \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)}^{(-)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}\Big|_{x^\alpha=0}, & \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)}^{(+)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}\Big|_{x^\alpha=1}, & \mathbf{\tilde{\mu}}_{(\alpha)} &= \mathbf{\mu}_{(\alpha)}\Big|_{x^3=x_\alpha^3}, & < \alpha = 1, 2 >. \end{aligned}$$

Далее с помощью первых двух формул (5.3.73) и первой и второй строк (5.3.74) аналогично (5.3.44) граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях можно записать в форме

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}^{\bar{1}} - g^{\bar{1}}_{(2)\frac{1}{3}}(x^2\mathbf{P}^3)]\Big|_{x^1=0} &= -\mathbf{P}_{(1)}^{(-)}, & [\mathbf{P}^{\bar{1}} - g^{\bar{1}}_{(1)\frac{1}{3}}\mathbf{P}^3 - g^{\bar{1}}_{(2)\frac{1}{3}}(x^2\mathbf{P}^3)]\Big|_{x^1=1} &= \mathbf{P}_{(1)}^{(+)}, \\ [\mathbf{P}^{\bar{2}} - g^{\bar{2}}_{(1)\frac{1}{3}}(x^1\mathbf{P}^3)]\Big|_{x^2=0} &= -\mathbf{P}_{(2)}^{(-)}, & [\mathbf{P}^{\bar{2}} - g^{\bar{2}}_{(1)\frac{1}{3}}(x^1\mathbf{P}^3) - g^{\bar{2}}_{(2)\frac{1}{3}}\mathbf{P}^3]\Big|_{x^2=1} &= \mathbf{P}_{(2)}^{(+)}, \\ \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{\mu}, \end{aligned} \quad (5.3.75)$$

где подобно (5.3.45) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(-)\vee} &= \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\Big|_{x^\alpha=0} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(-)}, & \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(+)\vee} &= \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\Big|_{x^\alpha=1} \mathbf{P}_{(\alpha)}^{(+)}, \\ \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(-)\vee} &= \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\Big|_{x^\alpha=0} \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(-)}, & \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(+)\vee} &= \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\Big|_{x^\alpha=1} \mathbf{\mu}_{(\alpha)}^{(+)}. \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

Теперь нетрудно записать граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях в моментах. В самом деле, аналогично (5.3.46) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(-,n)}[\mathbf{P}^{\bar{1}} - g^{\bar{1}}_{(2)\frac{1}{3}}(x^2\mathbf{P}^3)] &= -\mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(-)\vee}), & \mathbb{M}_L^{*(+,n)}[\mathbf{P}^{\bar{1}} - g^{\bar{1}}_{(1)\frac{1}{3}}\mathbf{P}^3 - g^{\bar{1}}_{(2)\frac{1}{3}}(x^2\mathbf{P}^3)] &= \mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(+)\vee}), \\ \mathbb{M}_L^{*(m,-)}[\mathbf{P}^{\bar{2}} - g^{\bar{2}}_{(1)\frac{1}{3}}(x^1\mathbf{P}^3)] &= -\mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(-)\vee}), & \mathbb{M}_L^{*(m,+)}[\mathbf{P}^{\bar{2}} - g^{\bar{2}}_{(1)\frac{1}{3}}(x^1\mathbf{P}^3) - g^{\bar{2}}_{(2)\frac{1}{3}}\mathbf{P}^3] &= \mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(+)\vee}), \\ \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{\mu}. \end{aligned} \quad (5.3.77)$$

Заметим, что (5.3.77) можно представить также следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^{*(-,n)}(\mathbf{P}^1) &= \mathbb{M}_L^{*(,n)}[(\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{\tilde{P}})\Big|_{x^1=0}] = -\mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(-)\vee}), & \mathbb{M}_L^{*(+,n)}(\mathbf{P}^1) &= \mathbb{M}_L^{*(,n)}[(\mathbf{r}^1 \cdot \mathbf{\tilde{P}})\Big|_{x^1=1}] = \mathbb{M}_L^{*(,n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{(+)\vee}), \\ \mathbb{M}_L^{*(m,-)}(\mathbf{P}^2) &= \mathbb{M}_L^{*(m,)}[(\mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{\tilde{P}})\Big|_{x^2=0}] = -\mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(-)\vee}), & \mathbb{M}_L^{*(m,+)}(\mathbf{P}^2) &= \mathbb{M}_L^{*(m,)}[(\mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{\tilde{P}})\Big|_{x^2=1}] = \mathbb{M}_L^{*(m,)}(\mathbf{P}_{(2)}^{(+)\vee}), \\ \mathbf{P} &\rightarrow \mathbf{\mu}. \end{aligned}$$

в фигурных скобках второго уравнения (5.3.81) — из выражения в фигурных скобках второго уравнения (5.3.80) заменой буквы $\boldsymbol{\mu}$ на $\vartheta \boldsymbol{\mu}$.

Далее с помощью (5.3.78) и (5.3.79) из (5.3.21) найдем представление системы уравнений движения в моментах с учетом граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела с двумя малыми размерами. Оно будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_3^{(m,n)} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) - (2m+1) \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^{\bar{1}}) - mg_{(1)3}^{-1} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \right. \\
 & + (2m+1) \sum_{p=0}^m \left[g_{(1)3}^{-1} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{m+p}) g_{(2)3}^{-1} \right] \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \\
 & + \frac{2m+1}{2} g_{(2)3}^{-1} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) \right] - \\
 & - (2n+1) \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^{\bar{2}}) - ng_{(2)3}^{-2} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \\
 & + (2n+1) \sum_{p=0}^n \left[g_{(2)3}^{-2} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{n+p}) g_{(1)3}^{-2} \right] \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \\
 & + \frac{2n+1}{2} g_{(1)3}^{-2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}^3) \right] \left. \right\} + \\
 & + \Phi^*(x^3, t) = \rho \mathbb{M}_L^*(\partial_t^2 \mathbf{u}),
 \end{aligned} \tag{5.3.82}$$

$$\{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} + \mathbf{C} \otimes \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}) + \mathbf{M}^*(x^3, t) = \mathbf{J} \cdot \mathbb{M}_L^*(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(x^3, t) &= (2m+1) \left[\mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee(+)} + (-1)^m \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee(-)}) \right] + \\
 & + (2n+1) \left[\mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee(+)} + (-1)^n \mathbb{M}_L^*(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee(-)}) \right] + \rho \mathbb{M}_L^*(\mathbf{F}), \\
 \mathbf{M}^*(x^3, t) &= (2m+1) \left[\mathbb{M}_L^*(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{\vee(+)} + (-1)^m \mathbb{M}_L^*(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^{\vee(-)}) \right] + \\
 & + (2n+1) \left[\mathbb{M}_L^*(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{\vee(+)} + (-1)^n \mathbb{M}_L^*(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^{\vee(-)}) \right] + \rho \mathbb{M}_L^*(\mathbf{m}).
 \end{aligned} \tag{5.3.83}$$

Если в выражении в фигурных скобках первого (второго) соотношения (5.3.82) осуществить замену буквы \mathbf{P} на $\vartheta \mathbf{P}$ ($\boldsymbol{\mu}$ на $\vartheta \boldsymbol{\mu}$), то получим представление системы уравнений движения в моментах, которое следует из (5.3.22). Будем иметь

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{P} \rightarrow \vartheta \mathbf{P}\} + \Phi^*(x^3, t) &= \rho \mathbb{M}_L^*(\vartheta \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 \{\boldsymbol{\mu} \rightarrow \vartheta \boldsymbol{\mu}\} + \mathbf{C} \otimes \mathbb{M}_L^*(\vartheta \mathbf{P}) + \mathbf{M}^*(x^3, t) &= \mathbf{J} \cdot \mathbb{M}_L^*(\vartheta \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.3.84}$$

где выражения для $\Phi^*(x^3, t)$ и $\mathbf{M}^*(x^3, t)$ в (5.3.84) получаются из (5.3.83), если в левых частях буквы Φ и \mathbf{M} заменить на Φ и \mathbf{M} соответственно, а в правых частях буквы \mathbf{P} и $\boldsymbol{\mu}$ — на \mathbf{P} и $\boldsymbol{\mu}$ соответственно. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(-)} = \vartheta \Big|_{x^\alpha=0} \mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(-)}, \quad \mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(+)} = \vartheta \Big|_{x^\alpha=1} \mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(+)}; \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}, \quad < \alpha = 1, 2 >,$$

а $\mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(-)}$, $\mathbb{P}_{(\alpha)}^{\vee(+)}$, $\boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{\vee(-)}$ и $\boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{\vee(+)}$ определяются с помощью (5.3.76).

Следует заметить, что граничные условия физического содержания в моментах на торцах имеют подобный (5.3.47) или (5.3.48) вид и представляются в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(1)}^{*3} &= -\mathbb{M}_L^* \left(\vartheta \mathbf{P}_{(1)} \right) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbf{P}_{(2)}^{*3} &= -\mathbb{M}_L^* \left(\vartheta \mathbf{P}_{(2)} \right) \text{ при } x^3 = x_2^3, \\ \boldsymbol{\mu}_{(1)}^{*3} &= -\mathbb{M}_L^* \left(\vartheta \boldsymbol{\mu}_{(1)} \right) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \boldsymbol{\mu}_{(2)}^{*3} &= -\mathbb{M}_L^* \left(\vartheta \boldsymbol{\mu}_{(2)} \right) \text{ при } x^3 = x_2^3 \end{aligned} \quad (5.3.85)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_L^* \left(\mathbf{P}_{(1)}^3 \right) &= -\mathbb{M}_L^* \left(\mathbf{P}_{(1)} \right) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbb{M}_L^* \left(\mathbf{P}_{(2)}^3 \right) &= \mathbb{M}_L^* \left(\mathbf{P}_{(2)} \right) \text{ при } x^3 = x_2^3, \\ \mathbb{M}_L^* \left(\boldsymbol{\mu}_{(1)}^3 \right) &= -\mathbb{M}_L^* \left(\boldsymbol{\mu}_{(1)} \right) \text{ при } x^3 = x_1^3, & \mathbb{M}_L^* \left(\boldsymbol{\mu}_{(2)}^3 \right) &= \mathbb{M}_L^* \left(\boldsymbol{\mu}_{(2)} \right) \text{ при } x^3 = x_2^3. \end{aligned} \quad (5.3.86)$$

5.3.2.4 Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами

Искомые представления получим, если найдем выражения для (5.3.24), (5.3.25) и (5.3.27) в моментах относительно систем полиномов Чебышева второго рода при разных параметризациях и полученные соотношения учтем в (5.3.19)–(5.3.22) подходящим образом.

Заметим, что так как при применении систем полиномов Чебышева второго рода не удастся получить соотношения в моментах с учетом граничных условий на лицевых поверхностях с конечным числом слагаемых, то ограничимся выводом соотношений без учета граничных условий.

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае в силу рекуррентной формулы $2x\hat{U}_k(x) = \hat{U}_{k-1}(x) + \hat{U}_{k+1}(x)$ и (5.3.15) аналогичные (5.3.28) и (5.3.30) соотношения представляются в виде

$$\mathbb{M}_T^{(m',n)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = -(m+2) \mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 + (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_T^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}), \quad (5.3.87)$$

$$\mathbb{M}_T^{(m,n')}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = -(n+2) \mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 + (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_T^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}),$$

$$\mathbb{M}_T^{(m',n)}(x^2 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{M}_T^{(m',n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}_T^{(m',n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right], \quad \mathbb{M}_T^{(m,n')}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) = \frac{1}{2} \left[\mathbb{M}_T^{(m-1,n')}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}_T^{(m+1,n')}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right]. \quad (5.3.88)$$

Далее на основании первых формул (5.3.15) и (5.3.87) из (5.3.24) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{(m',n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_T^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) + (m+2) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} h_1^{-1} \left[(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbb{M}_T^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- \frac{m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\mathbb{M}_T^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}_T^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right], \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (5.3.89)$$

Аналогично (5.3.14) с помощью вторых соотношений (5.3.15) и (5.3.87) из (5.3.25) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{(m,n')}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) &= (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_T^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{2}}) + (n+2) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbb{M}_T^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ &- (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} h_2^{-1} \left[(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbb{M}_T^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\mathbb{M}_T^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbb{M}_T^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right], \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (5.3.90)$$

Нетрудно видеть, что аналогичные (5.3.89) и (5.3.90) выражения для $\overset{(m',n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{1}})$, $\overset{(m,n')}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\mathbf{P}^{\hat{2}})$, $\overset{(m',n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^{\hat{1}})$ и $\overset{(m,n')}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^{\hat{2}})$ получим из (5.3.89) и (5.3.90), если в них букву \mathbf{P} заменить на $\hat{\vartheta}\mathbf{P}$, а букву $\boldsymbol{\mu}$ — на $\hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}$.

Учитывая (5.3.89) и (5.3.90) из (5.3.19) найдем

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_3 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \overset{(p,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^1) + (m+2) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \right. \\
 & - (m+1) \sum_{p=m}^{\infty} h_1^{-1} \left[(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2)^{(+)} + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2)^{(-)} \right] \overset{(p,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\
 & - \frac{m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\overset{(p,n-1)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \overset{(p,n+1)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \\
 & + (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^2) + (n+2) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\
 & - (n+1) \sum_{p=n}^{\infty} h_2^{-1} \left[(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1)^{(+)} + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1)^{(-)} \right] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\overset{(m-1,p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \overset{(m+1,p)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \left. \right\} + \\
 & + \rho \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{F}) = \rho \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_T(\underline{\mathbf{P}}) + \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{5.3.91}$$

Совершенно аналогично (5.3.91) с помощью соотношений, получаемых из (5.3.89) и (5.3.90) указанной выше заменой букв, из (5.3.20) найдем представление системы уравнений движения в моментах в виде

$$\begin{aligned}
 & \{\mathbf{P} \rightarrow \hat{\vartheta}\mathbf{P}\} + \rho \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\mathbf{F}) = \rho \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \{\boldsymbol{\mu} \rightarrow \hat{\vartheta}\boldsymbol{\mu}\} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\underline{\mathbf{P}}) + \rho \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T(\hat{\vartheta}\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.3.92}$$

где выражение в фигурных скобках в первом (втором) соотношении (5.3.92) получается указанной заменой из выражения в фигурных скобках в первом (втором) уравнении (5.3.91).

Заметим, что в данном случае граничные условия в моментах получаются из (5.3.46) и (5.3.47) (или (5.3.48)), если в них индекс "L" у операторов моментов заменить на "T".

Уравнения (5.3.91), (5.3.92) являются различными представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода в случае параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии.

Теперь получим искомые представления системы уравнений движения относительно системы полиномов Чебышева второго рода при новой параметризации области тонкого тела. В этой связи, как и выше, получим некоторые необходимые соотношения. Нетрудно показать, что похожие (5.3.59)–(5.3.62) соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \overset{(m',n)}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}) = \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T^*(\partial_1 \mathbb{F}) = 4(m+1) \sum_{p=0}^{\infty} \overset{(m+2p+1,n)}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}) = 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \overset{(p,n)}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}), \\
 & \overset{(m,n')}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}) = \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_T^*(\partial_2 \mathbb{F}) = 4(n+1) \sum_{p=0}^{\infty} \overset{(m,n+2p+1)}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}) = 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_T^*(\mathbb{F}),
 \end{aligned} \tag{5.3.93}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(m',n)}(\mathbb{F}) &= \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\partial_1 \mathbb{F}) = \\
 &= 2(m+1) \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_T^{*(p,n)}(\mathbb{F}) + 2(m+1) \left[\mathbf{M}_T^{*(+,n)}(\mathbb{F}) - (-1)^m \mathbf{M}_T^{*(m,-)}(\mathbb{F}) \right], \\
 \mathbf{M}_T^{*(m,n')}(\mathbb{F}) &= \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\partial_2 \mathbb{F}) = \\
 &= 2(n+1) \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_T^{*(m,p)}(\mathbb{F}) + 2(n+1) \left[\mathbf{M}_T^{*(m,+)}(\mathbb{F}) - (-1)^n \mathbf{M}_T^{*(m,-)}(\mathbb{F}) \right],
 \end{aligned} \tag{5.3.94}$$

где введены обозначения, получаемые из (5.3.64), если в них индекс "L" заменить на "T".

Далее заметим, что в силу рекуррентного соотношения

$$x^\alpha \hat{U}_k^*(x^\alpha) = 2^{-2} \left[\hat{U}_{k-1}^*(x^\alpha) + 2\hat{U}_k^*(x^\alpha) + \hat{U}_{k+1}^*(x^\alpha) \right], \quad < \alpha = 1, 2 >, \tag{5.3.95}$$

имеют место формулы

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(k,\cdot)}(x^1 \mathbb{F}) &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{M}_T^{*(k-1,\cdot)}(\mathbb{F}) + 2\mathbf{M}_T^{*(k,\cdot)}(\mathbb{F}) + \mathbf{M}_T^{*(k+1,\cdot)}(\mathbb{F}) \right], \\
 \mathbf{M}_T^{*(\cdot,k)}(x^2 \mathbb{F}) &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{M}_T^{*(\cdot,k-1)}(\mathbb{F}) + 2\mathbf{M}_T^{*(\cdot,k)}(\mathbb{F}) + \mathbf{M}_T^{*(\cdot,k+1)}(\mathbb{F}) \right],
 \end{aligned} \tag{5.3.96}$$

а с помощью (5.3.95) и (5.3.96) в свою очередь можно доказать справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(k,\cdot)}(x^1 \partial_1 \mathbb{F}) &= \mathbf{M}_T^{*(k,\cdot)}(x^1 \mathbb{F}) = -(k+2) \mathbf{M}_T^{*(k,\cdot)}(\mathbb{F}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{M}_T^{*(p,\cdot)}(\mathbb{F}), \\
 \mathbf{M}_T^{*(\cdot,k)}(x^2 \partial_2 \mathbb{F}) &= \mathbf{M}_T^{*(\cdot,k)}(x^2 \mathbb{F}) = -(k+2) \mathbf{M}_T^{*(\cdot,k)}(\mathbb{F}) + 2(k+1) \sum_{p=k}^{\infty} \mathbf{M}_T^{*(\cdot,p)}(\mathbb{F}).
 \end{aligned} \tag{5.3.97}$$

На основании (5.3.97) аналогичные (5.3.66) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(m',n)}(x^1 \mathbf{P}^3) &= -(m+2) \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} \mathbf{M}_T^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3), \\
 \mathbf{M}_T^{*(m,n')}(x^2 \mathbf{P}^3) &= -(n+2) \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) + 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} \mathbf{M}_T^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3).
 \end{aligned} \tag{5.3.98}$$

Имея (5.3.93) и (5.3.96)–(5.3.98), нетрудно получить искомые представления системы уравнений движения в моментах. В самом деле, в силу первых соотношений (5.3.93), (5.3.96), (5.3.97) и (5.3.98) из первой формулы (5.3.27) получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(m',n)}(\mathbf{P}^1) &= 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_T^{*(p,n)}(\mathbf{P}^{\bar{1}}) + (m+2) g_{(1)\bar{3}}^{\bar{1}} \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) - \\
 &- 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} \left[g_{(1)\bar{3}}^{\bar{1}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{m+p}) g_{(2)\bar{3}}^{\bar{1}} \right] \mathbf{M}_T^{*(p,n)}(\mathbf{P}^3) - \\
 &- \frac{m+1}{2} g_{(2)\bar{3}}^{\bar{1}} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\mathbf{M}_T^{*(p,n-1)}(\mathbf{P}^3) + \mathbf{M}_T^{*(p,n+1)}(\mathbf{P}^3) \right], \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.3.99}$$

Аналогично (5.3.99) с помощью вторых формул (5.3.93), (5.3.96), (5.3.97) и (5.3.98) из второго соотношения (5.3.27) находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_T^{*(m,n')}(\mathbf{P}^2) &= 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_T^{*(m,p)}(\mathbf{P}^{\bar{2}}) + (n+2) g_{(2)\bar{3}}^{\bar{2}} \mathbf{M}_T^{*(m,n)}(\mathbf{P}^3) - \\
 &- 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} \left[g_{(2)\bar{3}}^{\bar{2}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{n+p}) g_{(1)\bar{3}}^{\bar{2}} \right] \mathbf{M}_T^{*(m,p)}(\mathbf{P}^3) - \\
 &- \frac{n+1}{2} g_{(1)\bar{3}}^{\bar{2}} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\mathbf{M}_T^{*(m-1,p)}(\mathbf{P}^3) + \mathbf{M}_T^{*(m+1,p)}(\mathbf{P}^3) \right], \quad \mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}.
 \end{aligned} \tag{5.3.100}$$

Учитывая (5.3.99) и (5.3.100), из (5.3.21) получим

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \nabla_3^{(m,n)} \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) + 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^{\bar{1}}) + (m+2) g_{(1)3}^{\bar{1}} \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) - \right. \\
 & - 2(m+1) \sum_{p=m}^{\infty} \left[g_{(1)3}^{\bar{1}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{m+p}) g_{(2)3}^{\bar{1}} \right] \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) - \\
 & - \frac{m+1}{2} g_{(2)3}^{\bar{1}} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \left[\underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) + \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) \right] + \\
 & + 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^{\bar{2}}) + (n+2) g_{(2)3}^{\bar{2}} \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) - \\
 & - 2(n+1) \sum_{p=n}^{\infty} \left[g_{(2)3}^{\bar{2}} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{n+p}) g_{(1)3}^{\bar{2}} \right] \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) - \\
 & - \frac{n+1}{2} g_{(1)3}^{\bar{2}} \sum_{p=n}^{\infty} [1 - (-1)^{n+p}] \left[\underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) + \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{P}^3) \right] \left. \right\} + \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{F}) = \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \{ \mathbf{P} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\mu}} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\mathbf{P}}) + \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_T^*(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{5.3.101}$$

Если бы исходили из (5.3.22), то пришли к представлению

$$\begin{aligned}
 & \{ \mathbf{P} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{P} \} + \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{F}) = \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\boldsymbol{\vartheta}} \partial_t^2 \mathbf{u}), \\
 & \{ \underline{\boldsymbol{\mu}} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\vartheta}} \underline{\boldsymbol{\mu}} \} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\boldsymbol{\vartheta}} \underline{\mathbf{P}}^T) + \rho \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{m}) = \underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_T^*(\underline{\boldsymbol{\vartheta}} \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.3.102}$$

где выражения в фигурных скобках в (5.3.102) получаются из соответствующих выражений в фигурных скобках в (5.3.101) указанной выше заменой букв.

Заметим, что в данном случае граничные условия физического содержания получаются из (5.3.77) и (5.3.85) (или (5.3.86)), если в них индекс "L" заменить на "T".

Уравнения (5.3.101) и (5.3.102) являются различными представлениями системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышева второго рода при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами.

Следует заметить, что приведенные выше представления системы уравнений движения в моментах целесообразно называть различными представлениями системы уравнений движения в моментах ММДТТТ с двумя малыми размерами. Следовательно, из них пренебрежением характеристиками микрополярной теории, получим представления системы уравнений движения в моментах классической МДТТТ с двумя малыми размерами. Заметим также, что каждое уравнение из (5.3.51), (5.3.52), (5.3.80), (5.3.81), (5.3.91), (5.3.92), (5.3.101) и (5.3.102) (без учета граничных условий) при фиксированных значениях m и n содержит бесконечное число слагаемых, а каждое уравнение из (5.3.53), (5.3.57), (5.3.82), (5.3.84) (с учетом граничных условий) конечное число слагаемых. При этом каждое уравнение из приведенных выше представлений в случае параметризации области тонкого тела при произвольной базовой линии содержит моменты контравариантной составляющей $\mathbf{P}^3 = g_3^3 \mathbf{P}^3$ ($\boldsymbol{\mu}^3 = g_3^3 \boldsymbol{\mu}^3$) тензора напряжений (тензора моментных напряжений), а при новой параметризации — моменты $\mathbf{P}^3 = g_3^3 \mathbf{P}^{\bar{3}}$ ($\boldsymbol{\mu}^3 = g_3^3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}}$), где g_3^3 и $g_3^{\bar{3}}$ представляются в виде рядов (5.1.42) и (5.1.53) соответственно. Вводя обозначения

$$g_{(r)3}^3 = \sum_{s=0}^r (x^1 + x^2 - x^K g_{(K)3}^{\bar{3}})^s, \quad g_{(r)3}^{\bar{3}} = \sum_{s=0}^r [k_1 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)]^s \tag{5.3.103}$$

и заменяя в (5.3.51), (5.3.53) и (5.3.91) ((5.3.80), (5.3.82) и (5.3.101)) $\mathbf{P}^{\hat{3}}$ и $\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}}$ (\mathbf{P}^3 и $\boldsymbol{\mu}^3$) на $\mathbf{P}_{(r)}^{\hat{3}}$ и $\boldsymbol{\mu}_{(r)}^{\hat{3}}$ ($\mathbf{P}_{(r)}^3$ и $\boldsymbol{\mu}_{(r)}^3$) соответственно, где

$$\mathbf{P}_{(r)}^{\hat{3}} = g_{(r)}^{\hat{3}} \mathbf{P}^3, \quad \boldsymbol{\mu}_{(r)}^{\hat{3}} = g_{(r)}^{\hat{3}} \boldsymbol{\mu}^3, \quad \mathbf{P}_{(r)}^3 = g_{(r)}^{\bar{3}} \mathbf{P}^{\bar{3}}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(r)}^3 = g_{(r)}^{\bar{3}} \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}}, \quad (5.3.104)$$

получим представления системы уравнений движения в моментах приближения порядка r (представления, которые не вошли в число ссылаемых представлений в последнем предложении, подлежат отдельному рассмотрению, так как из них представления системы уравнения движения в моментах приближения порядка r не следуют). Кроме того, если зафиксируем некоторые неотрицательные целые числа M и N , из приведенных выше представлений системы уравнений движения в моментах выберем первые $(M+1)(N+1)$ уравнений ($m = \overline{0, M}$, $n = \overline{0, N}$), а также в уравнениях, содержащих бесконечное число слагаемых, пренебрежем моментами неизвестных величин, порядок которых больше M (по первому индексу) и N (по второму индексу), то получим представления системы уравнений движения в моментах приближения (M, N) , а если представления системы уравнения движения в моментах получаются из соответствующих представлений приближения порядка r , то такие представления называются представлениями системы уравнений движения в моментах приближения (r, M, N) . Сказанное выше относится и к представлениям уравнений притока тепла.

Следует особо подчеркнуть, что при получении соотношений приближения порядка $r > 0$ во избежание ошибок лучше исходить из соотношений (5.3.24) и (5.3.25) ((5.3.27)) в случае параметризации при произвольной базовой линии (при новой параметризации) области тонкого тела и в каждом отдельном случае заново получить нужные соотношения. Конечно, можно было получить общие соотношения приближения r как в случае тонкого тела с одним малым размером при новой параметризации, а потом из них выводить частные случаи. При необходимости это сделать нетрудно, поэтому на этом останавливаться не будем. Приведенными выше соотношениями лучше пользоваться при $r = 0$ (нулевом приближении). В этом случае допускаем, что $g_3^{\hat{3}} \approx 1$ и $g_3^{\bar{3}} \approx 1$ и в полученных выше соотношениях $\mathbf{P}^{\hat{3}}(\boldsymbol{\mu}^{\hat{3}})$ следует заменить на $\mathbf{P}^3(\boldsymbol{\mu}^3)$ в случае параметризации области тонкого тела при произвольной базовой линии, а при новой параметризации $\mathbf{P}^{\bar{3}}(\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}})$ надо заменить на $\mathbf{P}^{\bar{3}}(\boldsymbol{\mu}^{\bar{3}})$.

5.4 Представления закона Гука микрополярной теории упругости в моментах при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами

Определяющие соотношения [281] в рассматриваемом случае можно записать в форме¹

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \tilde{\nabla} \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbb{A}}} \otimes \tilde{\nabla} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{b} \vartheta, \\ \boldsymbol{\mu} &= \underline{\underline{\mathbb{D}}} \otimes \tilde{\nabla} \boldsymbol{\varphi} + \underline{\underline{\mathbb{B}}} \otimes \tilde{\nabla} \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbb{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\beta} \vartheta, \quad \sim \in \{\wedge, \emptyset\}, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

где $\mathbf{b} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \mathbf{a} + \underline{\underline{\mathbb{A}}} \otimes \mathbf{d}$, $\boldsymbol{\beta} = \underline{\underline{\mathbb{D}}} \otimes \mathbf{d} + \underline{\underline{\mathbb{B}}} \otimes \mathbf{a}$.

Следовательно, с помощью (5.2.1) и (5.2.9) соотношения (5.4.1) можно записать в различных видах, а потом, используя приведенные выше соотношения для моментов

¹Вспомним, что если $\sim = \emptyset$, где \emptyset — знак пустого множества, над символами ничего не пишем.

некоторых выражений, представить их в моментах, однако здесь получим искомые соотношения немного иным путем. Из (5.4.1) видно, что для их представления в моментах достаточно записать в моментах градиент некоторого вектора. В первую очередь заметим, что если тело однородно относительно x^I , $I = 1, 2$, то, применяя к (5.4.1) оператор моментов (m, n) -го порядка, будем иметь

$$\underline{\mathbf{P}}^{(m,n)} = \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{A}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \boldsymbol{\varphi}) - \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(m,n)} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(m,n)}, \quad -1 \leq x^I \leq 1, \quad (5.4.2)$$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}^{(m,n)} = \underline{\mathbf{D}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(m,n)} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta^{(m,n)}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0;$$

$$\underline{\mathbf{P}}^{*(m,n)} = \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{A}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \boldsymbol{\varphi}) - \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{*(m,n)} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{*(m,n)}, \quad 0 \leq x^I \leq 1, \quad (5.4.3)$$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}^{*(m,n)} = \underline{\mathbf{D}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{*(m,n)} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta^{*(m,n)}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Заметим, что (5.4.2) и (5.4.3) справедливы для любой системы полиномов (Лежандра, Чебышева) на указанных сегментах.

Итак, с целью нахождения искомых представлений нужно найти выражения, например, для $\underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \mathbf{u})$ относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. По определению градиента имеем

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u} = \mathbf{r}^{\tilde{3}} \nabla_3 \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\tilde{P}} \nabla_P \mathbf{u}, \quad \sim \in \{\wedge, \emptyset\}. \quad (5.4.4)$$

Применяя оператор моментов (m, n) -го порядка к (5.4.4), в силу (5.3.17) и (5.3.18) получим

$$\underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \mathbf{u}) = \nabla_3 \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\mathbf{r}^{\tilde{3}} \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{(m,n')}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \mathbf{u}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.4.5)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\nabla \mathbf{u}) = \nabla_3 \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n)}(\mathbf{r}^{\tilde{3}} \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{*(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{M}}^{*(m,n')}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \mathbf{u}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.4.6)$$

Далее ограничимся получением системы ОС в моментах нулевого приближения ($r = 0$). При этом в случае параметризации области тонкого тела при произвольной базовой линии получим ее относительно системы полиномов Лежандра, а при новой параметризации относительно ортонормированной системы смещенных полиномов Чебышева второго рода (они имеют более простые и компактные рекуррентные соотношения). В этой связи при получении общих соотношений (например, высокого порядка приближения) предпочтительно применять систему полиномов Чебышева.

Итак, нужно найти выражения для $\underline{\mathbf{M}}_L^{(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{M}}_L^{(m,n')}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \mathbf{u})$ ($\underline{\mathbf{M}}_T^{*(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{M}}_T^{*(m,n')}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \mathbf{u})$), считая $g_3^{\hat{3}} \approx 1$ ($g_3^{\tilde{3}} \approx 1$). Нетрудно заметить, что если для достижения этой цели используем соотношения (5.3.11) и (5.3.12) ((5.3.15) и (5.3.16)), то придется повторить все выводы, которые применялись при получении (5.3.32) и (5.3.33) ((5.3.99) и (5.3.100)). Поэтому лучше использовать подходящим образом имеющиеся уже соотношения и с помощью их получить искомые выражения. Например, с целью получения выражения для $\underline{\mathbf{M}}_L^{(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u})$, достаточно в (5.3.32) заменить $\mathbf{P}^{\hat{1}}$ на $\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u}$, \mathbf{P}^1 на $\mathbf{r}^1 \mathbf{u}$ и $\mathbf{P}^{\hat{3}}$ на $\mathbf{r}^{\hat{3}} \mathbf{u} \approx \mathbf{r}^3 \mathbf{u}$ и осуществить простые выкладки. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}_L^{(m',n)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u}) &\approx \mathbf{r}^{\hat{1}} \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p,n)}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^{\hat{3}} (m+1) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \underline{\mathbf{M}}_L^{(m,n)}(\mathbf{u}) - \\ &- \mathbf{r}^{\hat{3}} \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M h_1^{-1} [(\partial_3^{(+)} h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3^{(-)} h_1 - k_2 \bar{h}_2)] \underline{\mathbf{M}}_L^{(p,n)}(\mathbf{u}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \overset{(p,n-1)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \frac{n+1}{2n+3} \overset{(p,n+1)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) \right] + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 \overset{(+)}{h}_1 + k_2 \bar{h}_2) \right] \overset{(+,n)}{\mathbf{M}}'_L(\mathbf{u}) - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \overset{(+,n)}{\mathbf{M}}'_L(x^2 \mathbf{u}) \right\} - \\
 & - (-1)^m \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 \overset{(-)}{h}_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \overset{(-,n)}{\mathbf{M}}'_L(\mathbf{u}) - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \overset{(-,n)}{\mathbf{M}}'_L(x^2 \mathbf{u}) \right\}, \\
 & \mathbf{u} \rightarrow \varphi.
 \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Аналогично (5.4.7) из (5.3.33) получим

$$\begin{aligned}
 & \overset{(m,n')}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{r}^2 \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (n+1) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) - \\
 & - \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N h_2^{-1} \left[(\partial_3 \overset{(+)}{h}_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 \overset{(-)}{h}_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \\
 & + \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \overset{(m-1,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \frac{m+1}{2m+3} \overset{(m+1,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) \right] + \\
 & + \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 \overset{(+)}{h}_2 - k_2 \bar{h}_1) \right] \overset{(m,+)}{\mathbf{M}}'_L(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \overset{(m,+)}{\mathbf{M}}'_L(x^1 \mathbf{u}) \right\} - \\
 & - (-1)^n \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 \overset{(-)}{h}_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \overset{(m,-)}{\mathbf{M}}'_L(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \overset{(m,-)}{\mathbf{M}}'_L(x^1 \mathbf{u}) \right\}, \\
 & \mathbf{u} \rightarrow \varphi.
 \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Заметим, что при выводе (5.4.7) и (5.4.8) были учтены (5.3.14) и (5.3.30). Легко усмотреть, что (5.4.7) и (5.4.8) можно также представить в виде

$$\begin{aligned}
 & \overset{(m',n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{r}^1 \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^1 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \overset{(p,n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (m+1) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) - \\
 & - \mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M h_1^{-1} \left[(\partial_3 \overset{(+)}{h}_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 \overset{(-)}{h}_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \overset{(p,n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) - \\
 & - \mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \overset{(p,n-1)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \frac{n+1}{2n+3} \overset{(p,n+1)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) \right] + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \left[\overset{(+,n)}{\mathbf{M}}'_L(\overset{(+)}{\mathbf{r}}^1 \mathbf{u}) - (-1)^m \overset{(-,n)}{\mathbf{M}}'_L(\overset{(-)}{\mathbf{r}}^1 \mathbf{u}) \right], \\
 & \mathbf{u} \rightarrow \varphi,
 \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{(m,n')}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{r}^2 \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (n+1) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \overset{(m,n)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) - \\
 & - \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N h_2^{-1} \left[(\partial_3 \overset{(+)}{h}_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 \overset{(-)}{h}_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \overset{(m,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \\
 & + \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \overset{(m-1,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) + \frac{m+1}{2m+3} \overset{(m+1,p)}{\mathbf{M}}_L(\mathbf{u}) \right] + \\
 & + \frac{2n+1}{2} \left[\overset{(m,+)}{\mathbf{M}}'_L(\overset{(+)}{\mathbf{r}}^2 \mathbf{u}) - (-1)^n \overset{(m,-)}{\mathbf{M}}'_L(\overset{(-)}{\mathbf{r}}^2 \mathbf{u}) \right], \\
 & \mathbf{u} \rightarrow \varphi.
 \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

В дальнейшем в зависимости от надобности используем или соотношения (5.4.7), (5.4.8), или (5.4.9), (5.4.10).

Теперь вначале с целью сокращения письма получим представление закона Гука классической теории термоупругости, а потом для микрополярной теории напомним его по аналогии.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае из первого соотношения (5.4.2) с учетом (5.4.5) и $\varphi = 0$, находим

$$\mathbf{P}_{(0)}^{(m,n)} = \mathbf{C}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^3 \nabla_3 \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \mathbf{M}_L(\mathbf{r}^1 \mathbf{u}) + \mathbf{M}_L(\mathbf{r}^2 \mathbf{u}) \right] - \mathbf{b} \vartheta, \quad -1 \leq x^I \leq 1. \quad (5.4.11)$$

Подставляя (5.4.7) и (5.4.8) в (5.4.11), получим одно представление системы законов Гука классической теории тонких тел с двумя малыми размерами. Придадим (5.4.11) другой вид. В этой связи введем временно обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \right]^{(+,n)'} - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(+,n+1)'} \right) \right\} - \\ &- (-1)^m \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right]^{(-,n)'} - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(-,n+1)'} \right) \right\}, \\ \mathbf{Y} &= \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \right]^{(m,+)' } + \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{u}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{u}^{(m+1,+)' } \right) \right\} - \\ &- (-1)^n \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right]^{(m,-)' } + \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{u}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{u}^{(m+1,-)' } \right) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{X} &= \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \right] \cdot \mathbf{u}^{(+,n)'} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{C}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(+,n+1)'} \right) \right\} - \\ &- (-1)^m \frac{2m+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{C}^1 - \mathbf{C}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \cdot \mathbf{u}^{(-,n)'} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{C}^3 h_1^{-1} h_2 k_2 \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(-,n+1)'} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{Y} &= \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \right] \cdot \mathbf{u}^{(m,+)' } + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{C}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{u}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{u}^{(m+1,+)' } \right) \right\} - \\ &- (-1)^n \frac{2n+1}{2} \left\{ \left[\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \cdot \mathbf{u}^{(m,-)' } + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{C}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{u}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{u}^{(m+1,-)' } \right) \right\}, \quad \mathbf{C}^m = \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{r}^m \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Далее, вводя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{(0,m)}^{(+)(1)} &= \frac{2m+1}{2} \mathbf{C}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}_{(0,m)}^{(+)(3)} = -\frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{C}^3, \\ \mathbf{C}_{(0,m)}^{(-)(1)} &= (-1)^{m+1} \frac{2m+1}{2} \mathbf{C}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbf{E}, \\ \mathbf{C}_{(0,m)}^{(-)(3)} &= (-1)^m \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{C}^3, \\ \mathbf{C}_{(0,n)}^{(+)(2)} &= \frac{2n+1}{2} \mathbf{C}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}_{(0,n)}^{(+)(3)} = \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{C}^3, \\ \mathbf{C}_{(0,n)}^{(-)(2)} &= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} \mathbf{C}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbf{E}, \\ \mathbf{C}_{(0,n)}^{(-)(3)} &= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{C}^3; \quad \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}, \end{aligned}$$

(5.4.14)

из (5.4.12) и (5.4.13) получим

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{C}} \otimes \underline{\mathbf{X}} &= \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'}, \\
 \underline{\mathbb{C}} \otimes \underline{\mathbf{Y}} &= \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' }.
 \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Учитывая (5.4.7), (5.4.8), (5.4.15), из (5.4.11) найдем искомое представление в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \underline{\mathbb{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'}, \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' }, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \\
 &= \underline{\mathbb{C}} \otimes \left\{ \mathbf{r}^3 \nabla_3 \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^1 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \underline{\mathbf{M}}^{(p,n)}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (m+1) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) - \right. \\
 &- \mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M h_1^{-1} \left[(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \underline{\mathbf{M}}^{(p,n)}(\mathbf{u}) - \\
 &- \mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=m}^M [1 - (-1)^{m+p}] \left[\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{M}}^{(p,n-1)}(\mathbf{u}) + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{M}}^{(p,n+1)}(\mathbf{u}) \right] + \\
 &+ \mathbf{r}^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \underline{\mathbf{M}}^{(m,p)}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (n+1) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \underline{\mathbf{M}}^{(m,n)}(\mathbf{u}) - \\
 &- \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N h_2^{-1} \left[(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \underline{\mathbf{M}}^{(m,p)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \left[\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{M}}^{(m-1,p)}(\mathbf{u}) + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{M}}^{(m+1,p)}(\mathbf{u}) \right] \left. \right\} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\
 &-1 \leq x^I \leq 1, \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}, \quad M, N \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Далее с целью сокращения письма введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{P}}_{(0)}^{(m,n)' }(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}) &= \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'}, \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(+)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } + \\
 &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \underline{\mathbb{C}}_{(0,n)}^{(-)(3)} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' },
 \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) \Big|_{\vartheta=0}, & \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) \Big|_{\vartheta=0}. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Тогда (5.4.16) в силу (5.4.18) и (5.4.19) можно записать в следующих кратких формах:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{b}} \vartheta = \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) + \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) = \\ &= \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{b}} \vartheta + \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

В силу изложенного выше нетрудно заметить, что ОС в моментах микрополярной термомупругости твердого тонкого тела с двумя малыми размерами представляется в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \underline{\mathbf{A}}, \varphi, \vartheta) &= \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{A}}, \varphi) - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi - \\ &\quad - \underline{\mathbf{b}} \vartheta + \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{A}}, \varphi), \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{D}}, \varphi, \underline{\mathbf{B}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{D}}, \varphi) + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{B}}, \mathbf{u}) - \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi - \\ &\quad - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{D}}, \varphi) + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{B}}, \mathbf{u}), \quad -1 \leq x^I \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

где выражение для $\underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{A}}, \varphi)$ ($\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{A}}, \varphi)$) получается из выражения $\underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$ ($\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$), если в последнем заменить $\underline{\mathbf{C}}$ и \mathbf{u} на $\underline{\mathbf{A}}$ и φ соответственно. Совершенно аналогично выражения для $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{D}}, \varphi)$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{D}}, \varphi)$ ($\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{B}}, \mathbf{u})$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{B}}, \mathbf{u})$) следуют из соответствующих выражений $\underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$, если в них заменить $\underline{\mathbf{C}}$ и \mathbf{u} на $\underline{\mathbf{D}}$ и φ ($\underline{\mathbf{C}}$ на $\underline{\mathbf{B}}$), а также \mathbf{P} на $\boldsymbol{\mu}$.

Следует заметить, что для получения ОС в моментах приближения порядка $r \geq 1$, достаточно найти выражение для $\underline{\mathbf{M}}_{(r)}^{(m,n)}(\hat{\nabla} \mathbf{u})$ (5.4.5) при $\mathbf{r}^3 = g_{(r)}^3 \mathbf{r}^3$, что, конечно, в свою

очередь означает нахождение выражений для $\underline{\mathbf{P}}_{(r)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$, $\underline{\mathbf{P}}_{(r,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{P}}_{(r)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u})$, а потом в приведенных выше соотношениях индекс "0" заменить на "r". Заметим, что если тело обладает центром симметрии, то ОС для такого тела получаются из ОС для микрополярной теории при $\underline{\mathbf{A}} = 0$ и $\underline{\mathbf{B}} = 0$.

Далее следует найти систему уравнений для определения (нормирующих функций) векторов-функций $\mathbf{u}^{(+,k)l}$, $\mathbf{u}^{(-,k)l}$, $k = n - 1, n, n + 1$ и $\mathbf{u}^{(l,+)}l$, $\mathbf{u}^{(l,-)}l$, $l = m - 1, m, m + 1$ с помощью граничных условий на лицевых поверхностях и моментов $\mathbf{u}^{(m,n)}$ и $\vartheta^{(m,n)}$, $m = \overline{0, M}$, $n = \overline{0, N}$, где M и N – фиксированные неотрицательные целые числа. В начале для простоты ограничимся рассмотрением частного случая, когда кручение основной базовой линии $k_2 = 0$. Тогда приведенные выше соотношения получают более обозримый вид. В частности, в этом случае (5.4.16)–(5.4.18) представляются в форме

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) = \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) + \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{\prime(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}), \quad (5.4.22)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \underline{\mathbf{C}} \otimes \left\{ \mathbf{r}^3 \nabla_3 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^1 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^M [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{u}) + \right. \\
 &+ \mathbf{r}^3 (m+1) h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{u}) - \mathbf{r}^3 \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^M h_1^{-1} [\partial_3 h_1^{(+)} + (-1)^{m+p} \partial_3 h_1^{(-)}] \mathbf{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \mathbf{r}^2 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N [1 - (-1)^{n+p}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}^3 (n+1) h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{u}) - \\
 &\left. - \mathbf{r}^3 \frac{2n+1}{2} \sum_{p=n}^N h_2^{-1} [\partial_3 h_2^{(+)} + (-1)^{n+p} \partial_3 h_2^{(-)}] \mathbf{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{u}) \right\} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta'; \tag{5.4.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}'_{(0)}^{(m,n)}(\underline{\mathbf{C}}, \mathbf{u}) &= \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}' + \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}' + \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}' + \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}'; \\
 \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} &= \frac{2m+1}{2} \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} \partial_3 h_1) \mathbf{E}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} = (-1)^{m+1} \frac{2m+1}{2} \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3 h_1^{-1} \partial_3 h_1) \mathbf{E}, \\
 \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} &= \frac{2n+1}{2} \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} \partial_3 h_2) \mathbf{E}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} \partial_3 h_2) \mathbf{E}. \tag{5.4.24}
 \end{aligned}$$

5.4.1 Метод нормированных моментов поля тензора напряжений

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае, так как $k_2 = 0$ и

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{1}} &= \mathbf{r}^1 - \hat{g}^{(+)} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3, \quad \hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{1}} = \mathbf{r}^1 - \hat{g}^{(-)} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3, \\
 \hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{2}} &= \mathbf{r}^2 - \hat{g}^{(+)} \frac{2}{3} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3, \quad \hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{2}} = \mathbf{r}^2 - \hat{g}^{(-)} \frac{2}{3} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3, \tag{5.4.25}
 \end{aligned}$$

граничные условия на лицевых поверхностях (5.3.46) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^{(n)}(\hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)})) &= \hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)} = \mathbf{M}^{(n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}), \quad \mathbf{M}^{(n)}(\hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)}) = \hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{1}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)} = -\mathbf{M}^{(n)}(\mathbf{P}_{(1)}^{\vee}), \\
 \mathbf{M}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)})) &= \hat{\mathbf{r}}^{(+)} \hat{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+)} = \mathbf{M}^{(m)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}), \quad \mathbf{M}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)}) = \hat{\mathbf{r}}^{(-)} \hat{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-)} = -\mathbf{M}^{(m)}(\mathbf{P}_{(2)}^{\vee}). \tag{5.4.26}
 \end{aligned}$$

В силу (5.4.24) находим

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} &= a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)}, \quad \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} = -b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)}, \\
 \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} &= b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)}, \quad \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} = -a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)}, \\
 \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} &= a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)}, \quad \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} = -b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)}, \\
 \sum_{n=0}^N (-1)^m \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(+)(2)} &= b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)}, \quad \sum_{n=0}^N (-1)^m \underline{\mathbf{C}}_{(0,n)}^{(-)(2)} = -a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)}, \tag{5.4.27}
 \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)} = \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)} = \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \tag{5.4.28} \\
 a_I &= \sum_{k=0}^I \frac{2k+1}{2}, \quad b_I = \sum_{k=0}^I (-1)^k \frac{2k+1}{2}, \quad I = M, N.
 \end{aligned}$$

Теперь отметим, что в данном случае приближенное выражение для тензора напряжений будет иметь вид

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}(x', x^3) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)}(x^3) P_m(x^1) P_n(x^2). \quad (5.4.29)$$

Следовательно, из (5.4.29) получим

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} = \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)} P_m(x^1), \quad \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,-)} = \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,n)} P_n(x^2).$$

Отсюда с учетом граничных условий (5.4.26) в свою очередь находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{r}}^{(+,1)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} &= \underline{\mathbf{r}}^{(+,1)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} = \underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{(+,n)} \right), & \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{r}}^{(-,1)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,-)} &= -\underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{(-,n)} \right), \\ \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{r}}^{(+,2)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} &= \underline{\mathbf{r}}^{(+,2)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} = \underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{(+,n)} \right), & \sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{r}}^{(-,2)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,-)} &= -\underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(2)}^{(-,n)} \right). \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

Подставляя (5.4.22) в (5.4.30), с учетом второго равенства (5.4.23) и (5.4.25)–(5.4.28) получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{(M)}^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} + \underline{\mathbf{F}}_{(M)}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + \underline{\mathbf{F}}_{(n)}^{(+)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } \right) + \underline{\mathbf{F}}_{(n)}^{(-)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } \right) &= \mathbf{F}_{(n)}, \\ \underline{\mathbf{G}}_{(M)}^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} + \underline{\mathbf{G}}_{(M)}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + \underline{\mathbf{G}}_{(n)}^{(+)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } \right) + \underline{\mathbf{G}}_{(n)}^{(-)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } \right) &= \mathbf{G}_{(n)}, \\ \underline{\mathbf{H}}_{(m)}^{(+)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)' } \right) + \underline{\mathbf{H}}_{(m)}^{(-)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)' } \right) + \underline{\mathbf{H}}_{(N)}^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + \underline{\mathbf{H}}_{(N)}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } &= \mathbf{H}_{(m)}, \\ \underline{\mathbf{K}}_{(m)}^{(+)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)' } \right) + \underline{\mathbf{K}}_{(m)}^{(-)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)' } \right) + \underline{\mathbf{K}}_{(N)}^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + \underline{\mathbf{K}}_{(N)}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } &= \mathbf{K}_{(m)}, \\ m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{(M)}^{(+)} &= a_M (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{F}}_{(M)}^{(-)} &= -b_M (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{F}}_{(n)}^{(+)} &= \frac{2n+1}{2} (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{F}}_{(n)}^{(-)} &= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{F}_{(n)} &= \underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{(+,n)} \right) - \sum_{m=0}^M (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}; \\ \underline{\mathbf{G}}_{(M)}^{(+)} &= b_M (\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{G}}_{(M)}^{(-)} &= -a_M (\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{G}}_{(n)}^{(+)} &= \frac{2n+1}{2} (\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{G}}_{(n)}^{(-)} &= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} (\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{G}_{(n)} &= -\underline{\mathbf{M}}_L \left(\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{(-,n)} \right) - \sum_{m=0}^M (-1)^m (\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)}; \\ \underline{\mathbf{H}}_{(N)}^{(+)} &= a_N (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \underline{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{(N)}^{(-)} &= -b_N (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{H}_{(m)}^{(+)} &= \frac{2m+1}{2} (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{H}_{(m)}^{(-)} &= (-1)^{m+1} \frac{2m+1}{2} (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{H}_{(m)} &= \mathbf{M}_L^{(m, \cdot)} \left(\mathbf{P}_{(2)}^{(+)} \right) - \sum_{n=0}^N (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{P}_{(0, M, N)}^{(m, n)}; \\
 \mathbf{K}_{(N)}^{(+)} &= b_N (\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{K}_{(N)}^{(-)} &= -a_N (\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{K}_{(m)}^{(+)} &= \frac{2m+1}{2} (\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{K}_{(m)}^{(-)} &= (-1)^{m+1} \frac{2m+1}{2} (\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{C} \otimes^2 (\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{r}^3) \mathbf{E}, \\
 \mathbf{K}_{(m)} &= -\mathbf{M}_L^{(m, \cdot)} \left(\mathbf{P}_{(2)}^{(-)} \right) - \sum_{n=0}^N (-1)^n (\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \partial_3 h_2 \mathbf{r}^3) \cdot \mathbf{P}_{(0, M, N)}^{(m, n)}.
 \end{aligned}$$

Итак, в виде (5.4.31) имеем систему уравнений для определения векторов-функций $\mathbf{u}^{(m, +)'} , \mathbf{u}^{(m, -)'}$, $m = \overline{0, M}$, и $\mathbf{u}^{(+, n)'} , \mathbf{u}^{(-, n)'}$, $n = \overline{0, N}$. Число неизвестных совпадает с числом уравнений. Разрешая эту систему, найдем искомые векторы-функции, выраженные с помощью моментов $\mathbf{u}^{(m, n)}$ и $\vartheta^{(m, n)}$, $m = \overline{0, M}$, $n = \overline{0, N}$, и граничных условий на лицевых поверхностях. Учитывая полученные выражения для (нормирующих функций) $\mathbf{u}^{(m, +)'} , \mathbf{u}^{(m, -)'}$, $m = \overline{0, M}$, и $\mathbf{u}^{(+, n)'} , \mathbf{u}^{(-, n)'}$, $n = \overline{0, N}$, из (5.4.22) получим выражения для моментов $\mathbf{P}_{(0)}^{(m, n)}$, $m = \overline{0, M}$, $n = \overline{0, N}$, называемых, следуя И.Н.Векуа [68], нормированными моментами тензора напряжений, в силу которых из (5.4.29) в свою очередь найдем выражение для тензора напряжений $\mathbf{P}_{(0)}(x', x^3)$, удовлетворяющего граничным условиям на лицевых поверхностях.

Теперь рассмотрим общий случай. Итак, считаем, что кручение $k_2 \neq 0$. В этом случае для моментов тензора напряжений имеем соотношение (5.4.16), а граничные условия на лицевых поверхностях (5.3.46) представляются в виде

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}_{(0)}^{(-, n)1} + h_1^{-1} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \mathbf{P}_{(0)}^{(-, n)3} - \\
 & \quad - h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{P}_{(0)}^{(-, n-1)3} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{P}_{(0)}^{(-, n+1)3} \right) = -\mathbf{M}_L \left(\mathbf{P}_{(1)}^{(-)} \right), \\
 & \mathbf{P}_{(0)}^{(+, n)1} - h_1^{-1} (\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{P}_{(0)}^{(+, n)3} - \\
 & \quad - h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{P}_{(0)}^{(+, n-1)3} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{P}_{(0)}^{(+, n+1)3} \right) = \mathbf{M}_L \left(\mathbf{P}_{(1)}^{(+)} \right), \\
 & \mathbf{P}_{(0)}^{(m, -)2} + h_2^{-1} (\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1) \mathbf{P}_{(0)}^{(m, -)3} + \\
 & \quad + h_2^{-1} h_1 k_2 \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{P}_{(0)}^{(m-1, -)3} + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{P}_{(0)}^{(m+1, -)3} \right) = -\mathbf{M}_L \left(\mathbf{P}_{(2)}^{(-)} \right), \\
 & \mathbf{P}_{(0)}^{(m, +)2} - h_2^{-1} (\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1) \mathbf{P}_{(0)}^{(m, +)3} + \\
 & \quad + h_2^{-1} h_1 k_2 \left(\frac{m}{2m-1} \mathbf{P}_{(0)}^{(m-1, +)3} + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{P}_{(0)}^{(m+1, +)3} \right) = \mathbf{M}_L \left(\mathbf{P}_{(2)}^{(+)} \right), \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}.
 \end{aligned} \tag{5.4.33}$$

Заметим, что $\mathbf{P}_{(0)}$ имеет выражение (5.4.29), поэтому в (5.4.33) моментами $\mathbf{P}_{(0)}^{(k, l)}$, если $k > M$ или $l > N$ пренебрегаем. Кроме того $\mathbf{P}_{(0)}^{(k, l)} = 0$, если $k < 0$ или $l < 0$.

Теперь нетрудно усмотреть, что в силу (5.4.16) и (5.4.29) будем иметь

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-,n)} &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)} + \\
 &+ b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} - b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} \right) - \\
 &- a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'} \right) + \\
 &+ a_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } \right) + a_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } \right) \right] - \\
 &- b_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } \right) - b_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' } \right) \right], \\
 \\
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,n)} &= \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)} + a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} - a_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} \right) - \\
 &- b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} + b_M \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'} \right) + \\
 &+ a_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } \right) + a_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left[\sum_{m=0}^M \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } \right) \right] - \\
 &- b_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)} \cdot \left(\sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } \right) - b_n \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left[\sum_{m=0}^M \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' } \right) \right], \\
 \\
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,-)} &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)} + \\
 &+ a_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} \right) - a_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} \right) \right] - \\
 &- b_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} \right) + b_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} \right) \right] + \\
 &+ b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } \right) - \\
 &- a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } - a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' } \right), \\
 \\
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,+)} &= \sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{P}}_{(0,M,N)}^{(m,n)} + \\
 &+ a_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(1)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{u}}^{(+,n)'} \right) - a_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(+,n+1)'} \right) \right] - \\
 &- b_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(1)} \cdot \left(\sum_{n=0}^N \underline{\mathbf{u}}^{(-,n)'} \right) + b_m \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{n}{2n-1} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \underline{\mathbf{u}}^{(-,n+1)'} \right) \right] + \\
 &+ a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,+)' } + a_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,+)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,+)' } \right) - \\
 &- b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)(2)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(m,-)' } - b_N \underline{\mathbf{C}}_{(0)}^{(2,3)} \cdot \left(\frac{m}{2m-1} \underline{\mathbf{u}}^{(m-1,-)' } + \frac{m+1}{2m+3} \underline{\mathbf{u}}^{(m+1,-)' } \right), \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N},
 \end{aligned} \tag{5.4.34}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(+)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \left[\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} (\partial_3 h_1^{(+)} + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{r}^3 \right] \underline{\underline{\mathbf{E}}}, & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(-)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \left[\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} (\partial_3 h_1^{(-)} - k_2 \bar{h}_2) \mathbf{r}^3 \right] \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \\
 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(+)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \left[\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} (\partial_3 h_2^{(+)} - k_2 \bar{h}_1) \mathbf{r}^3 \right] \underline{\underline{\mathbf{E}}}, & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(-)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \left[\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} (\partial_3 h_2^{(-)} + k_2 \bar{h}_1) \mathbf{r}^3 \right] \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \\
 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(1,3)} &= h_1^{-1} h_2 k_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^3, & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(0)}^{(2,3)} &= h_2^{-1} h_1 k_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^3, & \underline{\underline{\mathbf{C}}}^3 &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{r}^3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \\
 a_k &= \frac{2k+1}{2}, & b_k &= (-1)^k \frac{2k+1}{2}, & k &= m, n, & a_I &= \sum_{k=0}^I a_k, & b_I &= \sum_{k=0}^I b_k, & I &= M, N.
 \end{aligned} \tag{5.4.35}$$

Учитывая (5.4.34), из (5.4.33), получим систему уравнений относительно векторов-функций $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,+)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,-)'}$, $m = \overline{0, M+1}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(+,n)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(-,n)'}$, $n = \overline{0, N+1}$. Нетрудно заметить, что число уравнений в системе равно $2(M+N+2)$, а число неизвестных $2(M+N+2)+4$, т.е. число неизвестных на 4 больше числа уравнений. Итак, из полученной системы уравнений, если определим, например, векторы-функции $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,+)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,-)'}$, $m = \overline{0, M}$, и $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(+,n)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(-,n)'}$, $n = \overline{0, N}$, то они будут выражаться с помощью моментов $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(k,l)}$, $\vartheta^{(k,l)}$, $k = \overline{0, M}$, $l = \overline{0, N}$, граничных условий на лицевых поверхностях и четырех векторов-функций $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(M+1,+)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(M+1,-)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(+,N+1)'}$ и $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(-,N+1)'}$, которые для определенности можно положить равными нулю.

Предположим, что при решении системы были найдены выражения для $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,+)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(m,-)'}$, $m = \overline{0, M}$ и $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(+,n)'}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(-,n)'}$, $n = \overline{0, N}$. Тогда, подставляя их в (5.4.16), получим нормированные моменты $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}^{(m,n)}$ поля тензора напряжений, с учетом которых из (5.4.29) найдем выражение для нормированного поля тензора напряжений, удовлетворяющего граничным условиям на лицевых поверхностях.

Следует отметить, что совершенно аналогично изложенному выше можно получить представления закона теплопроводности Фурье и найти нормированные моменты вектора потока тепла и выражение вектора потока тепла, удовлетворяющего граничным условиям теплового содержания на лицевых поверхностях. Отметим также, что в случае микрополярной теории не представляет труда получить нормированные моменты полей тензоров напряжений и моментных напряжений и вектора потока тепла, а также найти выражения для тензоров напряжений и моментных напряжений и вектора потока тепла, которые будут согласованы с соответствующими граничными условиями на лицевых поверхностях. С целью сокращения письма на освещении этих вопросов останавливаться не будем. Подобные вопросы для тел с одним малым размером при применении систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода рассмотрены в [281]. В случае системы полиномов Чебышева второго рода они рассмотрены также в [273] (см. также выше третью главу).

5.4.2 Частично упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной

Этот метод заключается в пренебрежении моментами вектора перемещений (и вектора вращения в случае микрополярной теории), порядок которых по первому индексу больше M или по второму индексу больше N , где M и N — некоторые фиксированные неотрицательные целые числа и построении корректирующего слагаемого, о котором речь пойдет ниже. Другими словами в этом случае из бесконечной системы уравнений рассматривается $2(M+1)(N+1)$ уравнений. При этом из них первые $(M+1)(N+1)$ уравнений выбираются из системы уравнений в моментах поля тензора напряжений и первые $(M+1)(N+1)$ — из системы уравнений в моментах поля тензора моментных напряжений. Кроме того, в выражениях для $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}^{(m,n)}$ ($\underline{\underline{\mu}}_{(0)}^{(m,n)}$) следует положить $\underline{\underline{\mathbf{u}}}'^{(k,l)} = 0$, $\vartheta^{(k,l)} = 0$

$(\varphi^{(k,l)} = 0)$, если $k > M$ или $\mathbf{u}^{(k,l)} = 0$, $\vartheta^{(k,l)} = 0$ ($\varphi^{(k,l)} = 0$), если $l > N$. В дальнейшем с целью сокращения письма ограничимся рассмотрением классического случая. Полагая, что в данном случае, например, $\mathbf{u}^{(k,l)} = 0$, если $l > N$, из (5.4.16) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) &= \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)}(\underline{\mathbb{C}}, \mathbf{u}, \vartheta) + \\ &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(1)} \cdot \mathbf{u}^{(+,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(+)(3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(+,n+1)'} \right) + \\ &+ \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(1)} \cdot \mathbf{u}^{(-,n)'} + \underline{\mathbb{C}}_{(0,m)}^{(-)(3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(-,n+1)'} \right), \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

$m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}.$

Заметим, что при $n = N$ в правой части (5.4.36) имеются функции $\mathbf{u}^{(+,N+1)'}$ и $\mathbf{u}^{(-,N+1)'}$, которые по предположению приравниваются нулю. Таким образом, нужно определить векторы-функций $\mathbf{u}^{(+,n)'}$, $\mathbf{u}^{(-,n)'}$, $n = \overline{0, N}$ с помощью граничных условий на $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ и моментов $\mathbf{u}^{(k,l)}$, $\vartheta^{(k,l)}$, $k = \overline{0, M}$, $l = \overline{0, N}$. Очевидно, число искоемых векторов-функций равно $2(N+1)$. Видно, что в этом случае полученное приближенное решение удовлетворит граничным условиям на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ и не удовлетворит граничным условиям на поверхностях $S_2^{(+)}$ и $S_2^{(-)}$. Для обеспечения выполнения граничных условий на этих поверхностях надо построить корректирующее слагаемое. Вначале получим систему уравнений относительно векторов-функций $\mathbf{u}^{(+,n)'}$ и $\mathbf{u}^{(-,n)'}$, $n = \overline{0, N}$, а затем построим корректирующее слагаемое. Заметим, что в данном случае приближенные выражения для искоемых полей вектора перемещений и тензора напряжений представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(N)}(x', x^3) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_{(N)}^{(m,n)} P_m(x^1) P_n(x^2), \\ \mathbf{P}_{(0,N)}(x', x^3) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_{(0,N)}^{(m,n)} P_m(x^1) P_n(x^2). \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

В рассматриваемом случае граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях можно получить из (5.4.33), если букву $\mathbf{P}_{(0)}$ заменить на $\mathbf{P}_{(0,N)}$. Например, граничные условия на поверхностях $S_1^{(-)}$ и $S_1^{(+)}$ представляются в форме

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,n)1} + h_1^{-1} (\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2) \mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,n)3} - \\ &- h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,n-1)3} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,n+1)3} \right) = -\mathbf{M}(\mathbf{P}_{(1)}^{(-)}), \\ &\mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,n)1} - h_1^{-1} (\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2) \mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,n)3} - \\ &- h_1^{-1} h_2 k_2 \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,n-1)3} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,n+1)3} \right) = \mathbf{M}(\mathbf{P}_{(1)}^{(+)}), \quad n = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (5.4.38)$$

Заметим, что, в данном случае так как приближенное выражение для тензора напряжений представляются вторым соотношением (5.4.37), то при $n = N$ в левых частях (5.4.38) моменты $\mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,N+1)3}$ и $\mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,N+1)3}$ следует положить равным нулю.

Далее, учитывая (5.4.36), из второго соотношения (5.4.37) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,n)} &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)} + \\ &+ b_M \underline{\mathbb{C}}_{(0)}^{(+)(1)} \cdot \mathbf{u}^{(+,n)'} - b_M \underline{\mathbb{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(+,n+1)'} \right) - \end{aligned}$$

$$-a_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(-,n)'} + a_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(-,n+1)'} \right), \quad (5.4.39)$$

$$\mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,n)} = \sum_{m=0}^M \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)}$$

$$+ a_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(+)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(+,n)'} - a_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(+,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(+,n+1)'} \right) - \\ - b_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(-)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(-,n)'} + b_M \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(0)}^{(1,3)} \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \mathbf{u}^{(-,n-1)'} + \frac{n+1}{2n+3} \mathbf{u}^{(-,n+1)'} \right), \quad n = \overline{0, N}.$$

Очевидно, соотношения (5.4.39) можно было получить из первых двух соотношений (5.4.34), если в них последними двумя строками пренебрегли и букву $\mathbf{P}_{(0)}$ заменили на $\mathbf{P}_{(0,N)}$. Подставляя (5.4.39) в (5.4.38) и учитывая

$$\mathbf{u}^{(-,N+1)'} = 0, \quad \mathbf{u}^{(+,N+1)'} = 0, \quad \mathbf{P}_{(0,N)}^{(-,N+1)} = 0, \quad \mathbf{P}_{(0,N)}^{(+,N+1)} = 0,$$

будем иметь систему уравнений относительно векторов-функций $\mathbf{u}^{(-,n)}'$ и $\mathbf{u}^{(+,n)}'$, $n = \overline{0, N}$. При этом число уравнений в системе совпадает с числом неизвестных. Разрешая эту систему и полученные выражения для $\mathbf{u}^{(-,n)}'$ и $\mathbf{u}^{(+,n)}'$, $n = \overline{0, N}$, учитывая в (5.4.36), получим *частично нормированные моменты поля тензора напряжений*, с учетом которых из второго соотношения (5.4.37) найдем частично нормированное поле тензора напряжений, согласованное с граничными условиями на лицевых поверхностях $S_1^{(-)}$ и $S_1^{(+)}$. Для того, чтобы выполнялись граничные условия на лицевых поверхностях $S_2^{(-)}$ и $S_2^{(+)}$ нужно построить корректирующее слагаемое $\mathbf{U}_0(x^2, x^3, t)$, которое добавляется к приближенному выражению вектора перемещений $\mathbf{u}_{(N)}(x', x^3, t)$ (5.4.37) и которое должно удовлетворить следующим условиям:

- 1) поле напряжений, соответствующее полю перемещений $\mathbf{u}_{(N)} + \mathbf{U}_0$, согласовано с граничными условиями на лицевых поверхностях $S_2^{(-)}$ и $S_2^{(+)}$;
- 2) моменты $\mathbf{U}_0^{(k,l)}$ векторного поля \mathbf{U}_0 равны нулю, если $k \in \mathbb{N}_0$, $l \leq N$;
- 3) нормы векторного поля \mathbf{U}_0 и поля тензора напряжений $\mathbf{P}_{(0,N)}(\mathbf{U}_0)$ можно сделать сколь угодно малыми внутри тонкого тела, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что имеет место условие

$$|\mathbf{U}_0(x^2, x^3, t)| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{P}_{(0,N)}(\mathbf{U}_0)\| < \varepsilon, \quad -h_2 + \delta \leq x^2 \leq h_2 - \delta, \quad x^3 \in \gamma. \quad (5.4.40)$$

Ищем корректирующее слагаемое в виде

$$\mathbf{U}_0(x^1, x^3, t) = \mathbf{A}_{n+1}(x^1, x^3, t) [P_{n+2}(x^2) - P_n(x^2)] + \\ + \mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t) [P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)], \quad n > N, \quad (5.4.41)$$

где $\mathbf{A}_k(x^1, x^3, t)$, $k = n+1, n+2$, подлежащие определению функции. Легко видеть, что

$$\mathbf{U}_0^{(k,l)} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq l \leq N, \quad (\partial_1 \mathbf{U}_0) \Big|_{x^2=\pm 1} = 0, \quad (\partial_3 \mathbf{U}_0) \Big|_{x^2=\pm 1} = 0, \quad (5.4.42)$$

а также в силу рекуррентной формулы

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (5.4.43)$$

имеем

$$\partial_2 \mathbf{U}_0 = (2n+3)\mathbf{A}_{n+1}(x^1, x^3, t)P_{n+1}(x^2) + (2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t)P_{n+2}(x^2).$$

Отсюда, учитывая значения полиномов Лежандра на концах сегмента $[-1, 1]$, находим

$$\begin{aligned} (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ &= (\partial_2 \mathbf{U}_0) \Big|_{x^2=1} = (2n+3)\mathbf{A}_{n+1}(x^1, x^3, t) + (2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t), \\ (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- &= (\partial_2 \mathbf{U}_0) \Big|_{x^2=-1} = (-1)^n \left[-(2n+3)\mathbf{A}_{n+1}(x^1, x^3, t) + (2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t) \right]. \end{aligned}$$

Рассматривая последние два соотношения как систему уравнений относительно \mathbf{A}_k , $k = n+1, n+2$, и разрешая ее, получим

$$\mathbf{A}_k(x^1, x^3, t) = \frac{1}{2(2k+1)} \left[(\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ + (-1)^n (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- \right], \quad k = n+1, n+2. \quad (5.4.44)$$

Итак, для нахождения выражения для \mathbf{U}_0 нужно определить $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^+$ и $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^-$.

Заметим, что в данном случае тензор напряжений $\underline{\mathbf{P}}_{(0)}$ представляется в форме

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)} = \underline{\mathbf{P}}_{(0,N)} + \underline{\mathbf{P}}_0, \quad \underline{\mathbf{P}}_0 = \underline{\mathbf{C}} \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0 \approx \underline{\mathbf{C}} \otimes (\mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^1 \partial_1 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^2 \partial_2 \mathbf{U}_0). \quad (5.4.45)$$

Из второго соотношения (5.4.45) с учетом последних двух соотношений (5.4.42) получим

$$\underline{\mathbf{P}}_0^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} = \underline{\mathbf{P}}_0 \Big|_{x^2=1} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+, \quad \underline{\mathbf{P}}_0^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} = \underline{\mathbf{P}}_0 \Big|_{x^2=-1} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^-. \quad (5.4.46)$$

В силу первого равенства (5.4.45) и граничных условий на S_2^+ и S_2^- (см. соответствующие формулы (5.3.39), (5.3.44) и (5.3.45)) имеем

$$\mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_0^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} = \mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)}, \quad \mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_0^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} = -\mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{r}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)}. \quad (5.4.47)$$

На основании (5.4.46) из (5.4.47) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_n^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{m \cdot n} \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ &= \mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{g}_m^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)}, \quad \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} = \mathbf{r}^m \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)}, \\ \mathbf{g}_m^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_n^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{m \cdot n} \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- &= -\mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{g}_m^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)}, \quad \underline{\mathbf{C}}^{m \cdot n} = \mathbf{r}^m \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{r}^n \underline{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 2} - 2 \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 3} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{3 \cdot 3} \right) \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ &= \mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \left(\mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \right), \\ \left(\underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 2} - 2 \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 3} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{3 \cdot 3} \right) \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- &= -\mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \left(\mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \right). \end{aligned} \quad (5.4.48)$$

Учитывая, что

$$g_3^{\hat{I}} = -g_3^I g_3^{\hat{3}}, \quad \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \hat{I} \approx -\mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} I, \quad \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \hat{I} \approx -\mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} I,$$

(5.4.48) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 2} - 2 \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 3} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{3 \cdot 3} \right) \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ &= \mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \left(\mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \right), \\ \left(\underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 2} - 2 \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{2 \cdot 3} + \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \underline{\mathbf{C}}^{3 \cdot 3} \right) \cdot (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- &= -\mathbf{P}_{(2)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \left(\mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} - \mathbf{g}_3^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{P}_{(0,N)}^{\left(\begin{smallmatrix} - \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)} \right). \end{aligned} \quad (5.4.49)$$

Нетрудно заметить, что первое соотношение (5.4.49) представляет систему из трех уравнений относительно трех компонент вектора $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^+$, а второе относительно трех компонент вектора $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^-$. Разрешая эти системы, найдем векторы $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^+$ и $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^-$,

выраженные с помощью граничных условий на лицевых поверхностях $S_2^{(+)}$ и $S_2^{(-)}$ и частично нормированных моментов поля тензора напряжений. Учитывая найденные выражения для векторов $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^+$ и $(\partial_2 \mathbf{U}_0)^-$, из (5.4.44) получим выражения для $\mathbf{A}_k(x^1, x^3, t)$, $k = n + 1, n + 2$, с помощью которых в свою очередь из (5.4.41) получим искомое выражение корректирующего слагаемого. Имея в виду неравенства [392]

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad \sqrt[4]{1-x^2} |P_n(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}, \quad |P_n(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi n} \sqrt[4]{1-x^2+1}} \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (5.4.50)$$

легко доказать, что для достаточно большого $n > N$ внутри области тонкого тела выполняются неравенства (5.4.40). Нетрудно проверить, что поле напряжений $\mathbf{P}_{(0)} = \mathbf{P}_{(0,N)} + \mathbf{P}_0$ удовлетворяет граничным условиям на лицевых поверхностях. Таким образом, построено добавочное слагаемое $\mathbf{U}_0(x^1, x^3, t)$ при частично упрощенном методе приведения бесконечной системы уравнений к конечной, удовлетворяющее указанным выше требованиям.

5.4.3 Упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной

С целью сокращения письма ограничимся рассмотрением теории тонких тел в рамках классической теории упругости.

В этом случае из бесконечной системы уравнений выделяем первые $(M + 1)(N + 1)$ уравнений и предполагаем, что

$$\mathbf{u}^{(k,)} = 0, \quad k > M, \quad \mathbf{u}^{(,l)} = 0, \quad l > N, \quad M \in \mathbb{N}_0, \quad N \in \mathbb{N}_0. \quad (5.4.51)$$

Очевидно, из (5.4.51) имеем

$$\mathbf{u}^{(k,l)} = 0, \quad k > M, \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \mathbf{u}^{(k,l)} = 0, \quad l > N, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Решив какую-нибудь краевую задачу приближения $(0, M, N)$, получим приближенные выражения полей вектора перемещений и тензора напряжений в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(M,N)} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \mathbf{u}^{(m,n)}_{(M,N)} P_m(x^1) P_n(x^2), \\ \mathbf{P}_{(0,M,N)} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)} P_m(x^1) P_n(x^2), \end{aligned} \quad (5.4.52)$$

где выражение для $\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(m,n)}$ имеет вид (5.4.17). Следовательно, выражения (5.4.52) удовлетворяют граничным условиям на торцах. Например, если на торцах задано поле перемещений, то построенное приближенное решение (первое соотношение (5.4.52)) согласуется с кинематическими граничными условиями вида $\mathbf{u}^{(m,n)} = f_{(1)}^{(m,n)}$ при $x^3 = x_1^3$, $\mathbf{u}^{(m,n)} = f_{(2)}^{(m,n)}$ при $x^3 = x_2^3$, где $f_{(I)}^{(m,n)}$, $I = 1, 2$, — моменты заданных векторных полей на торцах S_1 и S_2 соответственно.

Очевидно, возникает вопрос, в какой мере (5.4.52) удовлетворяют граничным условиям физического содержания на лицевых поверхностях. Вообще говоря, эти условия не будут выполняться с необходимой точностью. В этой связи встает вопрос, нельзя ли к приближенному выражению вектора перемещения $\mathbf{u}_{(M,N)}(x', x^3, t)$ добавить слагаемое $\mathbf{U}_0(x', x^3, t)$ (корректирующее слагаемое), удовлетворяющее следующим условиям:

1) поле тензора напряжений, соответствующее полю перемещений $\mathbf{u}_{(M,N)} + \mathbf{U}_0$, согласовано с граничными условиями в моментах на лицевых поверхностях $S_I^{(+)}$ и $S_I^{(-)}$, $I = 1, 2$,

2) моменты $\overset{(k,l)}{\mathbf{U}}_0$ векторного поля \mathbf{U}_0 равны нулю, если $k \leq M$ и $l \leq N$,

3) нормы тензорных полей \mathbf{U}_0 и $\mathbf{P}_0 = \underset{\cong}{\mathbb{C}}^2 \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0$ можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}_0| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{P}_0\| < \varepsilon \quad (\|\mathbf{P}_0\| = \sqrt{\mathbf{P}_0^2 \otimes \mathbf{P}_0}), \\ -\overset{(-)}{h}_I + (\delta_I^1 + \delta_I^2)\delta \leq x^I \leq \overset{(+)}{h}_I - (\delta_I^1 + \delta_I^2)\delta, \quad x^3 \in \gamma. \end{aligned} \quad (5.4.53)$$

Докажем, что векторное поле \mathbf{U}_0 , удовлетворяющее перечисленным условиям, существует. Будем искать \mathbf{U}_0 в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(x', x^3, t) = & \mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t)[P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\ & + \mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t)[P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)] + \mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t)[P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \\ & + \mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t)[P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \quad m > M, \quad n > N, \end{aligned} \quad (5.4.54)$$

и определим векторы-функции $\mathbf{B}_k(x^2, x^3, t)$, $k = m+1, m+2$ и $\mathbf{A}_l(x^1, x^3, t)$, $l = n+1, n+2$, так, что векторное поле $\mathbf{U}_0(x', x^3, t)$ удовлетворяло указанным выше условиям.

Нетрудно заметить, что $\overset{(k,l)}{\mathbf{U}}_0 = 0$, если $k \leq M$ и $l \leq N$, т.е. векторное поле \mathbf{U}_0 , представленное в виде (5.4.54), удовлетворяет второму из перечисленных выше условий. Далее из (5.4.54) имеем

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{U}_0 = & (2m+5)\mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t)P_{m+2}(x^1) + (2m+7)\mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t)P_{m+3}(x^1) + \\ & + \partial_1 \mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t)[P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \partial_1 \mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t)[P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \\ \partial_2 \mathbf{U}_0 = & \partial_2 \mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t)[P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \partial_2 \mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t)[P_{m+4}(x^1) - \\ & - P_{m+2}(x^1)] + (2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t)P_{n+2}(x^2) + (2n+7)\mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t)P_{n+3}(x^2), \\ \partial_3 \mathbf{U}_0 = & \partial_3 \mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t)[P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \partial_3 \mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t)[P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)] + \\ & + \partial_3 \mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t)[P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \partial_3 \mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t)[P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)]. \end{aligned} \quad (5.4.55)$$

Поле тензора напряжений, соответствующее векторному полю $\mathbf{u}_{(M,N)} + \mathbf{U}_0$, представляется следующим образом:

$$\mathbf{P}_{(0)} = \mathbf{P}_{(0,M,N)} + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \underset{\cong}{\mathbb{C}}^2 \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0. \quad (5.4.56)$$

Очевидно, в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 = & \underset{\cong}{\mathbb{C}}^2 \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0 \approx \underset{\cong}{\mathbb{C}}^2 \otimes (\mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^1 \partial_1 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^2 \partial_2 \mathbf{U}_0) = \\ = & \underset{\cong}{\mathbb{C}}^2 \otimes \left[\mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{U}_0 + (\mathbf{r}^1 - g_3^1 \mathbf{r}^3) \partial_1 \mathbf{U}_0 + (\mathbf{r}^2 - g_3^2 \mathbf{r}^3) \partial_2 \mathbf{U}_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.4.57)$$

Легко усмотреть, что на основании (5.4.55) будем иметь

$$\begin{aligned} (\partial_1 \mathbf{U}_0)^+ = & (\partial_1 \mathbf{U}_0)|_{x^1=1} = (2m+5)\mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t) + (2m+7)\mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t) + \\ & + (\partial_1 \mathbf{A}_{n+2})^+[P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + (\partial_1 \mathbf{A}_{n+3})^+[P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \\ (\partial_1 \mathbf{U}_0)^- = & (\partial_1 \mathbf{U}_0)|_{x^1=-1} = \\ = & (-1)^m \left[(2m+5)\mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t) - (2m+7)\mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t) \right] + \\ & + (\partial_1 \mathbf{A}_{n+2})^- [P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + (\partial_1 \mathbf{A}_{n+3})^- [P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \\ (\partial_1 \mathbf{U}_0)_+ = & (\partial_1 \mathbf{U}_0)|_{x^2=1} = (2m+5)(\mathbf{B}_{m+2})_+ P_{m+2}(x^1) + (2m+7)(\mathbf{B}_{m+3})_+ P_{m+3}(x^1), \\ (\partial_1 \mathbf{U}_0)_- = & (\partial_1 \mathbf{U}_0)|_{x^2=-1} = (2m+5)(\mathbf{B}_{m+2})_- P_{m+2}(x^1) + (2m+7)(\mathbf{B}_{m+3})_- P_{m+3}(x^1), \\ (\partial_1 \mathbf{A}_r)^+ = & (\partial_1 \mathbf{A}_r)|_{x^1=1}, \quad (\partial_1 \mathbf{A}_r)^- = (\partial_1 \mathbf{A}_r)|_{x^1=-1}, \quad r = n+2, n+3, \\ (\mathbf{B}_s)_+ = & (\mathbf{B}_s)|_{x^2=1}, \quad (\mathbf{B}_s)_- = (\mathbf{B}_s)|_{x^2=-1}, \quad s = m+2, m+3; \end{aligned} \quad (5.4.58)$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_2 \mathbf{U}_0)^+ &= (\partial_2 \mathbf{U}_0)|_{x^1=1} = (2n+5)(\mathbf{A}_{n+2})^+ P_{n+2}(x^2) + (2n+7)(\mathbf{A}_{n+3})^+ P_{n+3}(x^2), \\
 (\partial_2 \mathbf{U}_0)^- &= (\partial_2 \mathbf{U}_0)|_{x^1=-1} = (2n+5)(\mathbf{A}_{n+2})^- P_{n+2}(x^2) + (2n+7)(\mathbf{A}_{n+3})^- P_{n+3}(x^2), \\
 (\partial_2 \mathbf{U}_0)_+ &= (\partial_2 \mathbf{U}_0)|_{x^2=1} = (\partial_2 \mathbf{B}_{m+2})_+ [P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\
 &\quad + (\partial_2 \mathbf{B}_{m+3})_+ [P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)] + \\
 &\quad + (2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t) + (2n+7)\mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t), \\
 (\partial_2 \mathbf{U}_0)_- &= (\partial_2 \mathbf{U}_0)|_{x^2=-1} = (\partial_2 \mathbf{B}_{m+2})_- [P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\
 &\quad + (\partial_2 \mathbf{B}_{m+3})_- [P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)] + \\
 &\quad + (-1)^n [(2n+5)\mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t) - (2n+7)\mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t)], \\
 (\mathbf{A}_r)^+ &= (\mathbf{A}_r)|_{x^1=1}, \quad (\mathbf{A}_r)^- = (\mathbf{A}_r)|_{x^1=-1}, \quad r = n+2, n+3, \\
 (\partial_2 \mathbf{B}_s)_+ &= (\partial_2 \mathbf{B}_s)|_{x^2=1}, \quad (\partial_2 \mathbf{B}_s)_- = (\partial_2 \mathbf{B}_s)|_{x^2=-1}, \quad s = m+2, m+3;
 \end{aligned} \tag{5.4.59}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_3 \mathbf{U}_0)^+ &= (\partial_3 \mathbf{U}_0)|_{x^1=1} = (\partial_3 \mathbf{A}_{n+2})^+ [P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \\
 &\quad + (\partial_3 \mathbf{A}_{n+3})^+ [P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \\
 (\partial_3 \mathbf{U}_0)^- &= (\partial_3 \mathbf{U}_0)|_{x^1=-1} = (\partial_3 \mathbf{A}_{n+2})^- [P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \\
 &\quad + (\partial_3 \mathbf{A}_{n+3})^- [P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_3 \mathbf{U}_0)_+ &= (\partial_3 \mathbf{U}_0)|_{x^2=1} = (\partial_3 \mathbf{B}_{m+2})_+ [P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\
 &\quad + (\partial_3 \mathbf{B}_{m+3})_+ [P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)],
 \end{aligned} \tag{5.4.60}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_3 \mathbf{U}_0)_- &= (\partial_3 \mathbf{U}_0)|_{x^2=-1} = (\partial_3 \mathbf{B}_{m+2})_- [P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\
 &\quad + (\partial_3 \mathbf{B}_{m+3})_- [P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)], \\
 (\partial_3 \mathbf{A}_r)^+ &= (\partial_3 \mathbf{A}_r)|_{x^1=1}, \quad (\partial_3 \mathbf{A}_r)^- = (\partial_3 \mathbf{A}_r)|_{x^1=-1}, \quad r = n+2, n+3, \\
 (\partial_3 \mathbf{B}_s)_+ &= (\partial_3 \mathbf{B}_s)|_{x^2=1}, \quad (\partial_3 \mathbf{B}_s)_- = (\partial_3 \mathbf{B}_s)|_{x^2=-1}, \quad s = m+2, m+3.
 \end{aligned}$$

Учитывая (5.4.58)–(5.4.60), легко доказать, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
 &\underline{\mathbf{M}}_L^{(l)} \left[\left(\mathbf{r}^1 - \overset{(+)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) (\partial_1 \mathbf{U}_0)^+ \right] = \\
 &= \left[\mathbf{r}^1 - h_1^{-1} \left(\partial_3 \overset{(+)}{h}_1 + k_2 \bar{h}_2 \right) \mathbf{r}^3 \right] \left[(2m+5) \overset{(l)}{\mathbf{B}}_{m+2}(x^3, t) + (2m+7) \overset{(l)}{\mathbf{B}}_{m+3}(x^3, t) \right] - \\
 &\quad - h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{r}^3 \left[(2m+5) \left(\frac{l}{2l-1} \overset{(l-1)}{\mathbf{B}}_{m+2} + \frac{l+1}{2l+3} \overset{(l+1)}{\mathbf{B}}_{m+2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (2m+7) \left(\frac{l}{2l-1} \overset{(l-1)}{\mathbf{B}}_{m+3} + \frac{l+1}{2l+3} \overset{(l+1)}{\mathbf{B}}_{m+3} \right) \right], \\
 &\underline{\mathbf{M}}_L^{(l)} \left[\left(\mathbf{r}^1 - \overset{(-)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) (\partial_1 \mathbf{U}_0)^+ \right] = \\
 &= (-1)^m \left[\mathbf{r}^1 + h_1^{-1} \left(\partial_3 \overset{(-)}{h}_1 - k_2 \bar{h}_2 \right) \mathbf{r}^3 \right] \left[(2m+5) \overset{(l)}{\mathbf{B}}_{m+2}(x^3, t) - (2m+7) \overset{(l)}{\mathbf{B}}_{m+3}(x^3, t) \right] - \\
 &\quad - (-1)^m h_1^{-1} h_2 k_2 \mathbf{r}^3 \left[(2m+5) \left(\frac{l}{2l-1} \overset{(l-1)}{\mathbf{B}}_{m+2} + \frac{l+1}{2l+3} \overset{(l+1)}{\mathbf{B}}_{m+2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (2m+7) \left(\frac{l}{2l-1} \overset{(l-1)}{\mathbf{B}}_{m+3} + \frac{l+1}{2l+3} \overset{(l+1)}{\mathbf{B}}_{m+3} \right) \right], \quad 0 \leq l \leq N;
 \end{aligned} \tag{5.4.61}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} \left[\left(\mathbf{r}^2 - \binom{(+)}{g} \frac{2}{3} \mathbf{r}^3 \right) (\partial_2 \mathbf{U}_0)_+ \right] = \\
 & = \left[\mathbf{r}^2 - h_2^{-1} \left(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1 \right) \mathbf{r}^3 \right] \left[(2n+5) \mathbf{A}_{n+2}^{(k)}(x^3, t) + (2n+7) \mathbf{A}_{n+3}^{(k)}(x^3, t) \right] + \\
 & \quad + h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{r}^3 \left[(2n+5) \left(\frac{k}{2k-1} \mathbf{A}_{n+2}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3} \mathbf{A}_{n+2}^{(k+1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (2n+7) \left(\frac{k}{2k-1} \mathbf{A}_{n+3}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3} \mathbf{A}_{n+3}^{(k+1)} \right) \right], \\
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} \left[\left(\mathbf{r}^2 - \binom{(-)}{g} \frac{2}{3} \mathbf{r}^3 \right) (\partial_2 \mathbf{U}_0)_- \right] = \\
 & = (-1)^n \left[\mathbf{r}^2 + h_2^{-1} \left(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1 \right) \mathbf{r}^3 \right] \left[(2n+5) \mathbf{A}_{n+2}^{(k)}(x^3, t) - (2n+7) \mathbf{A}_{n+3}^{(k)}(x^3, t) \right] + \\
 & \quad + (-1)^n h_2^{-1} h_1 k_2 \mathbf{r}^3 \left[(2n+5) \left(\frac{k}{2k-1} \mathbf{A}_{n+2}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3} \mathbf{A}_{n+2}^{(k+1)} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - (2n+7) \left(\frac{k}{2k-1} \mathbf{A}_{n+3}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3} \mathbf{A}_{n+3}^{(k+1)} \right) \right], \quad 0 \leq k \leq M;
 \end{aligned} \tag{5.4.62}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [(\partial_2 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [x^2 (\partial_2 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [(\partial_2 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \\
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [x^2 (\partial_2 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [(\partial_3 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(l, \cdot)} [(\partial_3 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \quad 0 \leq l \leq N; \\
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [(\partial_1 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [x^1 (\partial_1 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [(\partial_1 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \\
 & \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [x^1 (\partial_1 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [(\partial_3 \mathbf{U}_0)_+] = 0, \quad \underline{\mathbf{M}}_L^{(k, \cdot)} [(\partial_3 \mathbf{U}_0)_-] = 0, \quad 0 \leq k \leq M.
 \end{aligned} \tag{5.4.63}$$

С помощью (5.4.61)–(5.4.63) из (5.4.57) находим

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{P}}_0^{(+, l)} = \left[\underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 1} - h_1^{-1} \left(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2 \right) \underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 3} \right] \cdot \\
 & \quad \cdot \left[(2m+5) \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l)}(x^3, t) + (2m+7) \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l)}(x^3, t) \right] - \\
 & \quad - h_1^{-1} h_2 k_2 \underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 3} \cdot \left[(2m+5) \left(\frac{l}{2l-1} \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l-1)} + \frac{l+1}{2l+3} \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l+1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (2m+7) \left(\frac{l}{2l-1} \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l-1)} + \frac{l+1}{2l+3} \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l+1)} \right) \right], \\
 & \underline{\mathbf{P}}_0^{(-, l)} = (-1)^m \left[\underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 1} + h_1^{-1} \left(\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2 \right) \underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 3} \right] \cdot \\
 & \quad \cdot \left[(2m+5) \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l)}(x^3, t) - (2m+7) \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l)}(x^3, t) \right] - \\
 & \quad - (-1)^m h_1^{-1} h_2 k_2 \underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 3} \cdot \left[(2m+5) \left(\frac{l}{2l-1} \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l-1)} + \frac{l+1}{2l+3} \underline{\mathbf{B}}_{m+2}^{(l+1)} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - (2m+7) \left(\frac{l}{2l-1} \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l-1)} + \frac{l+1}{2l+3} \underline{\mathbf{B}}_{m+3}^{(l+1)} \right) \right], \quad 0 \leq l \leq N;
 \end{aligned} \tag{5.4.64}$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{P}}_0^{(k, +)} = \left[\underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 2} - h_2^{-1} \left(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1 \right) \underline{\mathbf{C}}^{s \cdot 3} \right] \cdot \\
 & \quad \cdot \left[(2n+5) \mathbf{A}_{n+2}^{(k)}(x^3, t) + (2n+7) \mathbf{A}_{n+3}^{(k)}(x^3, t) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +h_2^{-1}h_1k_2\mathcal{C}^{s\cdot 3} \cdot \left[(2n+5)\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{A}_{n+2}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{A}_{n+2}^{(k+1)}\right) + \right. \\
 & \quad \left. + (2n+7)\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{A}_{n+3}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{A}_{n+3}^{(k+1)}\right) \right], \\
 \mathbf{P}_0^{(k,-)s} & = (-1)^n \left[\mathcal{C}^{s\cdot 2} + h_2^{-1}\left(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1\right) \mathcal{C}^{s\cdot 3} \right] \cdot \\
 & \quad \cdot \left[(2n+5)\mathbf{A}_{n+2}^{(k)}(x^3, t) - (2n+7)\mathbf{A}_{n+3}^{(k)}(x^3, t) \right] + \\
 & + (-1)^n h_2^{-1}h_1k_2\mathcal{C}^{s\cdot 3} \cdot \left[(2n+5)\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{A}_{n+2}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{A}_{n+2}^{(k+1)}\right) - \right. \\
 & \quad \left. - (2n+7)\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{A}_{n+3}^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{A}_{n+3}^{(k+1)}\right) \right], \quad 0 \leq k \leq M.
 \end{aligned} \tag{5.4.65}$$

Теперь заметим, что на основании первого соотношения (5.4.56) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{(0)}^{(+,l)s} & = \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(+,l)s} + \mathbf{P}_0^{(+,l)s}, & \mathbf{P}_{(0)}^{(-,l)s} & = \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(-,l)s} + \mathbf{P}_0^{(-,l)s}, \\
 \mathbf{P}_{(0)}^{(k,+)} & = \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,+)} + \mathbf{P}_0^{(k,+)}, & \mathbf{P}_{(0)}^{(k,-)} & = \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,-)} + \mathbf{P}_0^{(k,-)}.
 \end{aligned} \tag{5.4.66}$$

В силу (5.4.66) из (5.4.33) получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0^{(-,l)1} + h_1^{-1}\left(\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2\right) \mathbf{P}_0^{(-,l)3} - h_1^{-1}h_2k_2\left(\frac{l}{2l-1}\mathbf{P}_0^{(-,l-1)3} + \frac{l+1}{2l+3}\mathbf{P}_0^{(-,l+1)3}\right) & = \\
 = -\mathbf{M}_L\left(\mathbf{P}_{(1)}^{(-,l)}\right) - \left[\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(-,l)1} + h_1^{-1}\left(\partial_3 h_1 - k_2 \bar{h}_2\right) \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(-,l)3} - \right. \\
 \left. - h_1^{-1}h_2k_2\left(\frac{l}{2l-1}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(-,l-1)3} + \frac{l+1}{2l+3}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(-,l+1)3}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{5.4.67}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0^{(+,l)1} - h_1^{-1}\left(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2\right) \mathbf{P}_0^{(+,l)3} - h_1^{-1}h_2k_2\left(\frac{l}{2l-1}\mathbf{P}_0^{(+,l-1)3} + \frac{l+1}{2l+3}\mathbf{P}_0^{(+,l+1)3}\right) & = \\
 = \mathbf{M}_L\left(\mathbf{P}_{(1)}^{(+,l)}\right) - \left[\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(+,l)1} - h_1^{-1}\left(\partial_3 h_1 + k_2 \bar{h}_2\right) \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(+,l)3} - \right. \\
 \left. - h_1^{-1}h_2k_2\left(\frac{l}{2l-1}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(+,l-1)3} + \frac{l+1}{2l+3}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(+,l+1)3}\right) \right], \quad l = \overline{0, N};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0^{(k,-)2} + h_2^{-1}\left(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1\right) \mathbf{P}_0^{(k,-)3} + h_2^{-1}h_1k_2\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{P}_0^{(k-1,-)3} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{P}_0^{(k+1,-)3}\right) & = \\
 = -\mathbf{M}_L\left(\mathbf{P}_{(2)}^{(k,-)}\right) - \left[\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,-)2} + h_2^{-1}\left(\partial_3 h_2 + k_2 \bar{h}_1\right) \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,-)3} + \right. \\
 \left. + h_2^{-1}h_1k_2\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k-1,-)3} + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k+1,-)3}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{5.4.68}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0^{(k,+)}2 - h_2^{-1}\left(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1\right) \mathbf{P}_0^{(k,+)}3 + h_2^{-1}h_1k_2\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{P}_0^{(k-1,+)}3 + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{P}_0^{(k+1,+)}3\right) & = \\
 = \mathbf{M}_L\left(\mathbf{P}_{(2)}^{(k,+)}\right) - \left[\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,+)}2 - h_2^{-1}\left(\partial_3 h_2 - k_2 \bar{h}_1\right) \mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k,+)}3 + \right. \\
 \left. + h_2^{-1}h_1k_2\left(\frac{k}{2k-1}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k-1,+)}3 + \frac{k+1}{2k+3}\mathbf{P}_{(0,M,N)}^{(k+1,+)}3\right) \right], \quad k = \overline{0, M}.
 \end{aligned}$$

Учитывая (5.4.64), из (5.4.67) получим систему уравнений относительно $\mathbf{B}_s^{(l)}$, $l = \overline{0, N}$, $s = m+2, m+3$. Нетрудно заметить, что число уравнений в системе будет равняться $2(N+1)$, а число неизвестных $2(N+1) + 8$. Среди неизвестных будут и такие, как $\mathbf{B}_r^{(-2)}$,

(-1) (N+1) (N+2)

$\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{B}_r, r = m + 2, m + 3$ которые, следовательно, можно положить равными нулю. Тогда получим систему уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Разрешая эту систему, получим выражения для моментов $\mathbf{B}_r, l = \overline{0, N}, r = m + 2, m + 3$. Таким образом, векторы-функции $\mathbf{B}_r(x^2, x^3, t), r = m + 2, m + 3$, должны иметь вид

$$\mathbf{B}_r(x^2, x^3, t) = \sum_{l=0}^N \mathbf{B}_r^{(l)}(x^3, t) P_l(x^2), \quad r = m + 2, m + 3. \quad (5.4.69)$$

Заметим, что в полученной системе уравнений коэффициенты при $\mathbf{B}_r^{(-2)}$ и $\mathbf{B}_r^{(-1)}, r = m + 2, m + 3$, оказываются равными нулю, т.е. они автоматически исключаются из числа неизвестных.

Совершенно аналогично в силу (5.4.65) из (5.4.68) найдем систему уравнений относительно $\mathbf{A}_s^{(k)}, k = \overline{0, M}, s = n + 2, n + 3$. Число уравнений в полученной системе будет $2(M + 1)$, а число неизвестных $2(M + 1) + 8$. В качестве лишних неизвестных можно рассматривать $\mathbf{A}_s^{(-2)}, \mathbf{A}_s^{(-1)}, \mathbf{A}_s^{(M+1)}, \mathbf{A}_s^{(M+2)}, s = n + 2, n + 3$. Полагая, что они равны нулю, получим систему уравнений, в которой число уравнений будет равняться числу неизвестных.

Разрешая эту систему, найдем выражения для моментов $\mathbf{A}_s^{(k)}, k = \overline{0, M}, s = n + 2, n + 3$. Следовательно, векторы-функции $\mathbf{A}_s(x^1, x^3, t), s = n + 2, n + 3$, должны представляться в форме

$$\mathbf{A}_r(x^1, x^3, t) = \sum_{k=0}^M \mathbf{A}_r^{(k)}(x^3, t) P_k(x^1), \quad s = n + 2, n + 3. \quad (5.4.70)$$

Отметим, что коэффициенты при $\mathbf{A}_s^{(-2)}$ и $\mathbf{A}_s^{(-1)}, s = n + 2, n + 3$ в системе уравнений оказываются равными нулю, т.е. они и автоматически исключаются из числа неизвестных.

Подставляя (5.4.69) и (5.4.70) в (5.4.54), получим выражение корректирующего слагаемого $\mathbf{U}_0(x', x^3, t)$, удовлетворяющего всем указанным выше условиям. Следовательно, при доказательстве (5.4.53) следует использовать (5.4.50).

Следует отметить, что совершенно аналогично изложенному выше можно рассматривать различные представления уравнения притока тепла, закона теплопроводности Фурье и граничных условий теплового содержания в моментах, а также все методы приведения бесконечной системы к конечной. Эти вопросы в случае тонких тел с одним малым размером можно смотреть в [281] (см. также третью главу). Здесь с целью сокращения письма на этих вопросах останавливаться не будем. Однако ниже при формулировке постановок задач будем их считать известными.

5.4.4 Постановки задач в теории тонких тел с двумя малыми размерами

Даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной термоупругости тонких тел с двумя малыми размерами.

5.4.4.1 Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной термоупругости тонких тел с двумя малыми размерами

Постановка этой задачи включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ;

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТМДТТТ;

3) систему ОС физического содержания в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ или систему ОС физического содержания в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ при частично упрощенном методе редукции, или систему ОС физического содержания в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ при упрощенном методе редукции;

4) систему ОС теплового содержания (законов теплопроводности Фурье) в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, M, N) или систему ОС теплового содержания в моментах приближения (r, M, N) при частично упрощенном методе редукции, или систему ОС теплового содержания в моментах приближения (r, M, N) при упрощенном методе редукции;

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения (M, N) для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения (M, N) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

6) системы начальных условий кинематического и теплового содержания в моментах приближения (M, N) .

5.4.4.2 Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M, N) не входят механические характеристики (моменты тензоров напряжений $\mathbf{P}^{(k)}$ и моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$), то отдельно рассматривается нестационарная температурная задача в моментах приближения (r, N) , которая включает в себя:

1) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M, N) без механических характеристик;

2) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, M, N) , или систему ОС теплового содержания в моментах приближения (r, M, N) при частично упрощенном методе редукции, или систему ОС теплового содержания в моментах приближения (r, M, N) при упрощенном методе редукции;

3) какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

4) систему начальных условий теплового содержания в моментах приближения (M, N) .

В этом случае динамическая задача в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ разделяется на две задачи: нестационарную температурную задачу в моментах

приближения (r, M, N) , решением которой определяется температурное поле, в дальнейшем считающееся известным и динамическую задачу в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ при неизотермических процессах с известным температурным полем.

5.4.4.3 Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ с двумя малыми размерами

Постановка этой задачи включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ;

2) систему ОС физического содержания в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем, или систему ОС физического содержания в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем при частично упрощенном методе редукции, или систему ОС физического содержания в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем при упрощенном методе редукции;

3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

3a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения (M, N) для первой краевой задачи;

3b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ для второй краевой задачи;

3c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения (M, N) на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M, N) микрополярной МДТТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи;

4) систему кинематических начальных условий в моментах приближения (M, N) .

Задачи при неизотермических процессах, которые разделяются на температурную задачу и задачу ТМДТТТ с известным температурным полем, называются несвязанными задачами ТМДТТТ [336].

Таким образом, выше даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, M, N) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M, N) . Из этих постановок задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r , M и N , постановки задач в моментах желаемых приближений. Кроме того, можно получить постановки задач при изотермических процессах. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, M, N) классических ТУТТ и УТТ.

Метод разложения по одной поперечной координате

5.5 Представления системы уравнений движения в моментах при разложении по одной координате

С целью сокращения письма ограничимся рассмотрением классического случая. Считаем, что уравнение движения представляется, например, первым соотношением (5.2.8)

$$\nabla_3 \mathbf{P}^{\dot{3}} + \nabla_I \mathbf{P}^{\dot{I}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}. \quad (5.5.1)$$

Заметим, что

$$\nabla_n \mathbf{P}^{\dot{3}} = \nabla_n (g_m^{\dot{3}} \mathbf{P}^m) = g_m^{\dot{3}} \nabla_n \mathbf{P}^m = g_3^{\dot{3}} \nabla_n \mathbf{P}^3 = \nabla_n (g_3^{\dot{3}} \mathbf{P}^3).$$

Отсюда, следовательно, получаем

$$\nabla_I \mathbf{P}^{\dot{3}} = \nabla_I (g_3^{\dot{3}} \mathbf{P}^3) = g_3^{\dot{3}} \nabla_I \mathbf{P}^3 = g_3^{\dot{3}} \partial_I \mathbf{P}^3. \quad (5.5.2)$$

Далее в силу $g_3^{\dot{I}} = -g_3^I g_3^{\dot{3}}$ (см. (5.1.52)) и (5.5.2) находим

$$\nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{1}} = \partial_1 \mathbf{P}^1 - g_3^1 \nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{3}}, \quad \nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{2}} = \partial_2 \mathbf{P}^2 - g_3^2 \nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{3}}. \quad (5.5.3)$$

Учитывая (см. (5.1.49))

$$\begin{aligned} g_3^1 &= h_1^{-1} [\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)] + h_1^{-1} \partial_3 h_1 x^1, \\ g_3^2 &= h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] - h_2^{-1} h_1 k_2 x^1, \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

соотношения (5.5.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{1}} &= \partial_1 \mathbf{P}^1 - h_1^{-1} [\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)] \nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{3}} - h_1^{-1} \partial_3 h_1 (x^1 \nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{3}}), \\ \nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{2}} &= \partial_2 \mathbf{P}^2 - h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{3}} + h_2^{-1} h_1 k_2 (x^1 \nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{3}}). \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Применяя оператор моментов m -го порядка по первой координате x^1 к соотношениям (5.5.5), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(m,)} (\nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{1}}) &= \mathbf{M}^{(m,)} (\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} [\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)] \mathbf{M}^{(m,)} (\mathbf{P}^{\dot{3}}) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{M}^{(m,)} (x^1 \mathbf{P}^{\dot{3}}), \\ \mathbf{M}^{(m,)} (\nabla_2 \mathbf{P}^{\dot{2}}) &= \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)} (\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)} (\mathbf{P}^{\dot{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)} (x^1 \mathbf{P}^{\dot{3}}). \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Отметим, что соотношения (5.5.6) верны как для полиномов Лежандра, так и для полиномов Чебышева.

Нетрудно заметить, что первое соотношение (5.5.6) аналогично (5.3.32) относительно системы полиномов Лежандра можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m,)} (\mathbf{P}^{\dot{1}}) &= \mathbf{M}_L^{(m,)} (\nabla_1 \mathbf{P}^{\dot{1}}) = \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)} (\mathbf{P}^1) + \\ &+ h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L^{(m,)} (\mathbf{P}^{\dot{3}}) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} \left[\binom{(+)}{g}_{\frac{1}{3}} - (-1)^{m+p} \binom{(-)}{g}_{\frac{1}{3}} \right] \mathbf{M}_L^{(p,)} (\mathbf{P}^{\dot{3}}), \\ \binom{(+)}{g}_{\frac{1}{3}} &= h_1^{-1} \left[\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2) \right], \quad \binom{(-)}{g}_{\frac{1}{3}} = -h_1^{-1} \left[\partial_3 \bar{h}_1 - k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Другое аналогичное (5.3.34) представление первого соотношения (5.5.6) будет иметь форму

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= \mathbf{M}_L^{(m,)}(\nabla_1 \mathbf{P}^{\hat{1}}) = -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^1) - \\ &- h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m \left[\binom{(+,)}{g}_{\frac{1}{3}} - (-1)^{m+p} \binom{(-,)}{g}_{\frac{1}{3}} \right] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \left\{ \mathbf{M}_L^{(+,)}(\mathbf{P}^1) - \binom{(+,)}{g}_{\frac{1}{3}} \mathbf{M}_L^{(+,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - (-1)^m \left[\mathbf{M}_L^{(-,)}(\mathbf{P}^1) - \binom{(-,)}{g}_{\frac{1}{3}} \mathbf{M}_L^{(-,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Заметим, что при выводе (5.5.7) и (5.5.8) было использовано соотношение (см. еще (5.3.28))

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) &= -(m+1) \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 + (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) = \\ &= m \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 + (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{M}_L^{(+,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + (-1)^m \mathbf{M}_L^{(-,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в силу граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях $\bar{S}_1^{(-)}$ и $\bar{S}_1^{(+)}$ (см. первые две формулы (5.3.44) и (5.3.46)) соотношение (5.5.8) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^{(m',)}(\mathbf{P}^{\hat{1}}) &= \mathbf{M}_L^{(m,)}(\nabla_1 \mathbf{P}^{\hat{1}}) = -\frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^1) - \\ &- h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m \left[\binom{(+,)}{g}_{\frac{1}{3}} - (-1)^{m+p} \binom{(-,)}{g}_{\frac{1}{3}} \right] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{P}_{(1)}^{(+)}(x^2, x^3, t) + (-1)^m \mathbf{P}_{(1)}^{(-)}(x^2, x^3, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Теперь не доставляет труда в рассматриваемом случае получить различные представления уравнений движения. В самом деле, применяя к (5.5.1) оператор моментов m -го порядка относительно полиномов Лежандра или Чебышева по первой координате x^1 , в силу (5.5.6) получим одно искомое представление уравнений движения в моментах в виде

$$\begin{aligned} \nabla_3 \mathbf{M}^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \mathbf{M}^{(m',)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} [\partial_3 \bar{h}_1 + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)] \mathbf{M}^{(m',)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 \mathbf{M}^{(m',)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ + \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \partial_2 \mathbf{M}^{(m,)}(x^1 \mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ + \rho \mathbf{M}^{(m,)}(\mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}^{(m,)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \quad m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Следует заметить, что при получении уравнений движения различных приближений во избежание ошибок лучше исходить из (5.5.10). Теперь, применяя к (5.5.1) оператор моментов m -го порядка по первой координате x^1 относительно системы полиномов Лежандра и учитывая вначале второе соотношение (5.5.6) и (5.5.7), а затем второе соотношение (5.5.6) и (5.5.9), будем иметь следующие искомые представления уравнений движения в моментах:

$$\begin{aligned} \nabla_3 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^1) + h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^{\infty} \left[\binom{(+,)}{g}_{\frac{1}{3}} - (-1)^{m+p} \binom{(-,)}{g}_{\frac{1}{3}} \right] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + \\ + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \partial_2 \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \right. \\ \left. + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{F}) = \rho \mathbf{M}_L^{(m,)}(\partial_t^2 \mathbf{u}); \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla_3 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\
 & + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m \left[g_{\frac{1}{3}}^{(+,)} - (-1)^{m+p} g_{\frac{1}{3}}^{(-,)} \right] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - \\
 & - k_2 \bar{h}_1] \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + h_2^{-1} h_1 k_2 \partial_2 \left[\frac{m}{2m-1} \mathbf{M}_L^{(m-1,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbf{M}_L^{(m+1,)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] + \\
 & + \mathbf{\Phi}^{(m,)} = \rho \mathbf{M}_L^{(m,)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \quad m \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Здесь введено обозначение

$$\mathbf{\Phi}^{(m,)}(x^2, x^3, t) = \frac{2m+1}{2} \left[\mathbf{P}_{(1)}^{\vee(+)}(x^2, x^3, t) + (-1)^m \mathbf{P}_{(1)}^{\vee(-)}(x^2, x^3, t) \right] + \rho \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{F}).$$

5.6 Представление закона Гука в моментах при разложении по одной координате

Получим представление закона Гука в моментах при разложении по координате x^1 в рамках классической теории упругости. Очевидно, в рассматриваемом случае закон Гука имеет вид

$$\mathbf{P} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \hat{\nabla} \mathbf{u} - \mathbf{b} \vartheta = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \left(\mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\hat{1}} \partial_1 \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\hat{2}} \partial_2 \mathbf{u} \right) - \mathbf{b} \vartheta.$$

Отсюда для закона Гука нулевого приближения получим выражение

$$\mathbf{P}_{(0)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \left(\mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\hat{1}} \partial_1 \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\hat{2}} \partial_2 \mathbf{u} \right) - \mathbf{b} \vartheta, \tag{5.6.1}$$

где считаем, что (см. (5.1.51) и (5.5.4))

$$\mathbf{r}^{\hat{3}} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^3 \approx \mathbf{r}^3, \quad \mathbf{r}^{\hat{1}} = \mathbf{r}^1 - g_3^I \mathbf{r}^{\hat{3}} \approx \mathbf{r}^1 - g_3^I \mathbf{r}^3. \tag{5.6.2}$$

Применяя к (5.6.1) оператор моментов m -го порядка по первой координате x^1 , получим

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{(0)}^{(m,)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \left[\mathbf{r}^{\hat{3}} \partial_3 \mathbf{M}^{(m,)}(\mathbf{u}) + \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(m,)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \partial_1 \mathbf{u}) + \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(m,)}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \partial_2 \mathbf{u}) \right] - \underline{\underline{\mathbf{b}}} \vartheta^{(m,)}. \tag{5.6.3}$$

Легко усмотреть, что аналогично (5.5.7) находим

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{M}}}_L^{(m,)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \partial_1 \mathbf{u}) &= \underline{\underline{\mathbf{M}}}_L^{(m',)}(\mathbf{r}^{\hat{1}} \mathbf{u}) = \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M \left[\mathbf{r}^1 - g_{\frac{1}{3}}^{(+,)} \mathbf{r}^3 - (-1)^{m+p} \left(\mathbf{r}^1 - g_{\frac{1}{3}}^{(-,)} \mathbf{r}^3 \right) \right] \mathbf{M}_L^{(p,)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{u}) + \frac{2m+1}{2} \left[\left(\mathbf{r}^1 - g_{\frac{1}{3}}^{(+,)} \mathbf{r}^3 \right) \mathbf{M}_L^{(+,)}(\mathbf{u}) - (-1)^m \left(\mathbf{r}^1 - g_{\frac{1}{3}}^{(-,)} \mathbf{r}^3 \right) \mathbf{M}_L^{(-,)}(\mathbf{u}) \right].
 \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

Нетрудно показать, что имеет место и соотношение

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{M}}}_L^{(m,)}(\mathbf{r}^{\hat{2}} \nabla_2 \mathbf{u}) &= \mathbf{r}^2 \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{u}) - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m,)}(\mathbf{u}) + \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \left[\frac{m}{2m-1} \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m-1,)}(\mathbf{u}) + \frac{m+1}{2m+3} \partial_2 \mathbf{M}_L^{(m+1,)}(\mathbf{u}) \right].
 \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

Учитывая (5.6.3) и (5.6.5), из (5.6.3) получим искомое представление закона Гука нулевого приближения в моментах в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \left\{ \mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M \left[\mathbf{r}^1 - \binom{(+,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 - (-1)^{m+p} \left(\mathbf{r}^1 - \binom{(-,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \right. \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \right] \partial_2 \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \left[\frac{m}{2m-1} \partial_2 \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) + \frac{m+1}{2m+3} \partial_2 \mathbf{M}_L(\mathbf{u}) \right] \left. \right\} - \mathbf{b} \vartheta^{(m,)} + \\
 &+ \frac{2m+1}{2} \left[\left(\underline{\mathbf{C}}^1 - \binom{(+,)}{g} \frac{1}{3} \underline{\mathbf{C}}^3 \right) \cdot \mathbf{M}'_L(\mathbf{u}) - (-1)^m \left(\underline{\mathbf{C}}^1 - \binom{(-,)}{g} \frac{1}{3} \underline{\mathbf{C}}^3 \right) \cdot \mathbf{M}'_L(\mathbf{u}) \right], \quad m \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

Соотношение (5.6.6) в краткой форме можно представить следующим образом:

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,)} = \underline{\mathbf{P}}_{(0,M)}^{(m,)} + a_m \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(+,)} \cdot \mathbf{u}' - b_m \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(-,)} \cdot \mathbf{u}', \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{5.6.7}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}_{(0,M)}^{(m,)} &= \underline{\mathbf{C}}^{\otimes 2} \left\{ \mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{u} + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=m}^M \left[\mathbf{r}^1 - \binom{(+,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 - (-1)^{m+p} \left(\mathbf{r}^1 - \binom{(-,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \mathbf{u} + \right. \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_1^{-1} \partial_3 h_1 (m+1) \mathbf{u} + \left[\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}^3 h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 \bar{h}_1] \right] \partial_2 \mathbf{u} + \\
 &+ \mathbf{r}^3 h_2^{-1} h_1 k_2 \left[\frac{m}{2m-1} \partial_2 \mathbf{u} + \frac{m+1}{2m+3} \partial_2 \mathbf{u} \right] \left. \right\} - \mathbf{b} \vartheta^{(m,)}, \quad m \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

$$\underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(+,)} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \left(\mathbf{r}^1 - \binom{(+,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right), \quad \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(-,)} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \left(\mathbf{r}^1 - \binom{(-,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right). \tag{5.6.9}$$

Заметим, что в соотношениях (5.6.7) и (5.6.8) моменты рассматриваются относительно системы полиномов Лежандра.

Теперь представим (5.6.7) в нормированных моментах. С этой целью нужно $\mathbf{u}'^{(+,)}$ и $\mathbf{u}'^{(-,)}$ определить с помощью граничных условий на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$.

В рассматриваемом случае приближенное выражение для поля тензора напряжений, очевидно, можно представить в форме

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)} \approx \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,)}(x^2, x^3, t) P_m(x^1). \tag{5.6.10}$$

Отсюда будем иметь

$$\underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,)} = \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,)}(x^2, x^3, t), \quad \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-,)} = \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(m,)}(x^2, x^3, t). \tag{5.6.11}$$

Нетрудно заметить, что граничные условия на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ можно записать следующим образом:

$$\left(\mathbf{r}^1 - \binom{(+,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,)} = \underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{\vee(+,)}, \quad \left(\mathbf{r}^1 - \binom{(-,)}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-,)} = -\underline{\mathbf{P}}_{(1)}^{\vee(-)}. \tag{5.6.12}$$

Учитывая (5.6.7), из (5.6.11) получим

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(+,)} &= \sum_{m=0}^M \underline{\mathbf{P}}_{(0,M)}^{(+,)} + a_M \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(+,)} \cdot \mathbf{u}' - b_M \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(-,)} \cdot \mathbf{u}', \\
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(-,)} &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \underline{\mathbf{P}}_{(0,M)}^{(+,)} + b_M \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(+,)} \cdot \mathbf{u}' - a_M \underline{\mathbf{C}}'_{(0)}^{(-,)} \cdot \mathbf{u}'.
 \end{aligned} \tag{5.6.13}$$

На основании (5.6.13) из (5.6.12) находим

$$\begin{aligned}
 & \left[a_M \left(\mathbf{r}^1 - \binom{+}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbb{C}^2 \otimes \left(\mathbf{r}^1 - \binom{+}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \binom{+}{\mathbf{u}}' - \\
 & \quad - \left[b_M \left(\mathbf{r}^1 - \binom{+}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbb{C}^2 \otimes \left(\mathbf{r}^1 - \binom{-}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \binom{-}{\mathbf{u}}' = \\
 & \quad = \mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - \sum_{m=0}^M \left(\mathbf{r}^1 - \binom{+}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbf{P}_{(0,M)}, \\
 & \left[b_M \left(\mathbf{r}^1 - \binom{-}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbb{C}^2 \otimes \left(\mathbf{r}^1 - \binom{+}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \binom{+}{\mathbf{u}}' - \\
 & \quad - \left[a_M \left(\mathbf{r}^1 - \binom{-}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbb{C}^2 \otimes \left(\mathbf{r}^1 - \binom{-}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \right] \binom{-}{\mathbf{u}}' = \\
 & \quad = -\mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - \sum_{m=0}^M (-1)^m \left(\mathbf{r}^1 - \binom{-}{g} \frac{1}{3} \mathbf{r}^3 \right) \cdot \mathbf{P}_{(0,M)}.
 \end{aligned} \tag{5.6.14}$$

Соотношения (5.6.14) представляют систему для определения нормирующих вектор-функций $\binom{+}{\mathbf{u}}'$ и $\binom{-}{\mathbf{u}}'$. Найдя эти функции и учитывая их в (5.6.7), получим выражения для нормированных моментов поля тензора напряжений, с помощью которых в свою очередь из (5.6.10) определим выражение для нормированного поля тензора напряжений, согласованного с граничными условиями на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$.

Теперь рассмотрим упрощенный метод редукции бесконечной системы к конечной. Этот метод ничем не отличается от соответствующего метода, принимаемого в теории тонких тел с одним малым размером [281] (см. также выше третью главу). Таким образом, из бесконечной системы уравнений (5.5.12) ((5.5.11)) выделяются первые $M+1$ уравнений и предполагается, что $\binom{k,}{\mathbf{u}} = 0$, $\binom{k,}{\vartheta} = 0$, $k > M$, $M \in \mathbb{N}_0$. В этом случае в качестве закона Гука в моментах рассматривается (5.6.8) при $m = \overline{0, M}$. При этом, очевидно, что $\mathbf{P}_{(0,M)}^{(k,)} = 0$, $k > M$.

Решив какую-нибудь краевую задачу приближения $(0, M)$, получим приближенные выражения полей вектора перемещения и тензора напряжений в виде

$$\mathbf{u}_{(M)} = \sum_{m=0}^M \binom{m,}{\mathbf{u}}_{(M)}(x^2, x^3, t) P_m(x^1), \quad \mathbf{P}_{(0,M)} = \sum_{m=0}^M \mathbf{P}_{(0,M)}^{(m,)}(x^2, x^3, t) P_m(x^1), \tag{5.6.15}$$

где выражение для $\mathbf{P}_{(0,M)}^{(m,)}$ задается соотношением (5.6.8).

Следует заметить, что решения (5.6.15) удовлетворяют граничным условиям на торцах, но, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли к приближенному выражению вектора перемещения $\mathbf{u}_{(M)}(x^2, x^3, t)$ добавить корректирующее слагаемое $\mathbf{U}_0(x^2, x^3, t)$, удовлетворяющее, например, в случае задания физических граничных условий на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ следующим условиям (при задании кинематических граничных условий проблема решается легче (см. выше третью главу, а также [281])):

1) поле тензора напряжений, соответствующее полю перемещений $\mathbf{u}_{(M)} + \mathbf{U}_0$, согласовано с граничными условиями физического содержания на $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$;

2) моменты $\mathbf{U}_0^{(k,)}$ векторного поля \mathbf{U}_0 равны нулю, если $k \leq M$;

3) нормы тензорных полей \mathbf{U}_0 и $\mathbf{P}_0 = \mathbb{C}^2 \otimes \nabla \mathbf{U}_0$ можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{U}_0| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{P}_0\| < \varepsilon \quad (\|\mathbf{P}_0\| = \sqrt{\mathbf{P}_0^2 \otimes \mathbf{P}_0}), \\
 & -h_1 + \delta \leq x^1 \leq h_1 - \delta, \quad -1 \leq x^2 \leq 1, \quad x^3 \in \gamma.
 \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

Существование корректирующего слагаемого \mathbf{U}_0 , удовлетворяющего вышеуказанным условиям, доказывается аналогично тому, как это делается в теории тонких тел с одним малым размером [281] (см. также выше третью главу). В самом деле, его можно искать в виде

$$\mathbf{U}_0(x', x^3, t) = \mathbf{A}_{m+1}(x^2, x^3, t)[P_{m+2}(x^1) - P_m(x^1)] + \mathbf{A}_{m+2}(x^2, x^3, t)[P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)], \quad m > M. \quad (5.6.17)$$

Нетрудно заметить, что

$$\mathbf{U}_0^{(m,)} = -\mathbf{U}_0^{(m+2,)} = -\mathbf{A}_{m+1}(x^2, x^3, t), \quad \mathbf{U}_0^{(m+1,)} = -\mathbf{U}_0^{(m+3,)} = -\mathbf{A}_{m+2}(x^2, x^3, t).$$

Очевидно, $\mathbf{U}_0^{(k,)} = 0$ если $k \neq \overline{m, m+3}$ и в частности, $\mathbf{U}_0^{(k,)} = 0$, если $k < M$, т.е. функция $\mathbf{U}_0(x^1, x^3, t)$ удовлетворяет условию 2).

Заметим также, что в силу значений полиномов Лежандра на концах сегмента $[-1, 1]$ из (5.6.17) находим

$$\mathbf{U}_0^\pm = \mathbf{U}_0|_{x^1=-1;1} = 0, \quad (\partial_\alpha \mathbf{U}_0)^\pm = (\partial_\alpha \mathbf{U}_0)|_{x^1=-1;1} = 0, \quad \alpha = 2, 3. \quad (5.6.18)$$

Далее найдем выражения для $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^\pm = (\partial_1 \mathbf{U}_0)|_{x^1=-1;1}$ посредством заданных величин и моментов $\mathbf{u}_{(M)}^{(k,)}, \vartheta^{(k,)}, k = \overline{0, M}$. На основании рекуррентного соотношения (5.4.43) из (5.6.17) имеем

$$\partial_1 \mathbf{U}_0 = (2n+3)A_{m+1}(x^2, x^3, t)P_{m+1}(x^1) + (2n+5)A_{m+2}(x^2, x^3, t)P_{m+2}(x^1).$$

Отсюда, учитывая значения полиномов Лежандра на концах сегмента $[-1, 1]$, получим

$$\mathbf{A}_k(x^2, x^3, t) = \frac{1}{2(2k+1)} [(\partial_1 \mathbf{U}_0)^+ + (-1)^k (\partial_1 \mathbf{U}_0)^-], \quad k = m+1, m+2. \quad (5.6.19)$$

Итак, для того, чтобы найти окончательное выражение корректирующего слагаемого \mathbf{U}_0 нужно определить $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^\pm$. С этой целью отметим, что в данном случае тензор напряжений представляется в виде

$$\mathbf{P}_{(0)} = \mathbf{P}_{(0,M)} + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbb{C}^2 \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0 = \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbf{r}^3 \partial_3 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^2 \partial_2 \mathbf{U}_0 + \mathbf{r}^1 \partial_1 \mathbf{U}_0). \quad (5.6.20)$$

С помощью последних двух формул (5.6.18) из второго соотношения (5.6.20) будем иметь

$$\mathbf{P}_0^{(+)} = \mathbf{P}_0|_{x^1=1} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{r}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 (\partial_1 \mathbf{U}_0)^+, \quad \mathbf{P}_0^{(-)} = \mathbf{P}_0|_{x^1=-1} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbf{r}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 (\partial_1 \mathbf{U}_0)^-. \quad (5.6.21)$$

Очевидно, на основании первого равенства (5.6.20) и граничных условий на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ (см., например, первые два соотношения (5.3.44)) получаем

$$\mathbf{r}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - \mathbf{r}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \mathbf{P}_{(0,M)}, \quad \mathbf{r}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_{(1)}^{(-)} - \mathbf{r}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \mathbf{P}_{(0,M)}. \quad (5.6.22)$$

В силу (5.6.21) из (5.6.22) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{C}^{1 \cdot 1} - 2 \mathbf{g}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 \mathbb{C}^{1 \cdot 3} + \left(\mathbf{g}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 \right)^2 \mathbb{C}^{3 \cdot 3} \right] \cdot (\partial_1 \mathbf{U}_0)^+ &= \mathbf{P}_{(1)}^{(+)} - \left(\mathbf{P}_{(0,M)}^{(+)} - \mathbf{g}^{(+)} \hat{\mathbf{i}}_1 \mathbf{P}_{(0,M)}^{(+)} \right), \\ \left[\mathbb{C}^{1 \cdot 1} - 2 \mathbf{g}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 \mathbb{C}^{1 \cdot 3} + \left(\mathbf{g}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 \right)^2 \mathbb{C}^{3 \cdot 3} \right] \cdot (\partial_1 \mathbf{U}_0)^- &= -\mathbf{P}_{(1)}^{(-)} - \left(\mathbf{P}_{(0,M)}^{(-)} - \mathbf{g}^{(-)} \hat{\mathbf{i}}_1 \mathbf{P}_{(0,M)}^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

Заметим, что при написании (5.6.23) были учтены формулы, получаемые из второго соотношения (5.6.2) при $I = 1$ и $x^1 = \pm 1$ (см. также (5.5.4)).

Легко усмотреть, что первое соотношение (5.6.23) представляет систему из трех уравнений относительно трех компонент вектора $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^+$, а второе относительно трех компонент вектора $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^-$. Решив эти системы, найдем векторы $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^+$ и $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^-$, выраженные через граничные условия на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$ и моментов $\mathbf{u}_{(M)}^{(k,)}$, $\partial_\alpha \mathbf{u}_{(M)}^{(k,)}$ и $\vartheta^{(k,)}$, $\alpha = 2, 3$, $k = \overline{0, M}$. Учитывая полученные выражения векторов $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^+$ и $(\partial_1 \mathbf{U}_0)^-$, из (5.6.19) определим выражения для $\mathbf{A}_k(x^2, x^3, t)$, $k = m + 1, m + 2$, посредством которых из (5.6.17) найдем искомое выражение корректирующего слагаемого. На основании (5.4.50) нетрудно доказать, что при достаточно больших значениях $m > M$ внутри области тонкого тела выполняются неравенства (5.6.16). Легко проверить также, что поле напряжений $\mathbf{P}_{(0)} = \mathbf{P}_{(0, M)} + \mathbf{P}_0$, удовлетворяет граничным условиям на лицевых поверхностях $S_1^{(+)}$ и $S_1^{(-)}$. Таким образом, построено корректирующее слагаемое, удовлетворяющее вышеуказанным условиям.

В заключение отметим, что совершенно аналогично изложенному выше можно рассматривать различные представления уравнения притока тепла, закона теплопроводности Фурье и граничных условий теплового содержания в моментах, а также методы приведения бесконечной системы к конечной. Кроме того, можно получить различные представления системы уравнений движения и ОС физического и теплового содержаний в моментах приближения (r, M) , а также граничных и начальных условий. Эти вопросы в случае тонких тел с одним малым размером можно смотреть в [281] (см. также выше третью главу). Здесь с целью сокращения письма на этих вопросах останавливаться не будем. Однако ниже при формулировке постановок задач будем их считать известными.

5.6.1 Постановка задач ТУТТ с двумя малыми размерами в моментах при разложении искомых величин по одной координате

Рассматриваются постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M) и обсуждаются вопросы получения из них некоторых других частных случаев постановок задач при разложении искомых величин по одной координате.

Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ с двумя малыми размерами включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ;

2) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M) микрополярной ТМДТТТ;

3) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, M) микрополярной ТУТТ или систему ОС в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ при упрощенном методе редукции;

4) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, M) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, M) при упрощенном методе редукции;

5) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

5а) систему кинематических граничных условий в моментах приближения M для первой краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ для второй краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

5c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения M на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи и какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

б) системы начальных условий кинематического и теплового содержаний в моментах приближения M .

Если в систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M) не входят механические характеристики (моменты тензоров напряжений $\overset{(k)}{\mathbf{P}}$ и моментных напряжений $\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}$), то отдельно рассматривается нестационарная температурная задача в моментах приближения (r, N) , которая включает в себя:

1) систему уравнений притока тепла в моментах приближения (r, M) без механических характеристик;

2) систему законов теплопроводности Фурье в нормированных моментах вектора потока тепла приближения (r, M) или систему законов теплопроводности Фурье в моментах приближения (r, M) при упрощенном методе редукции;

3) какую-нибудь систему из трех родов систем граничных условий теплового содержания в моментах;

4) систему начальных условий теплового содержания в моментах приближения M .

В этом случае динамическая задача в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ разделяется на две задачи: нестационарную температурную задачу в моментах приближения (r, M) , решением которой определяется температурное поле, в дальнейшем считающееся известным и динамическую задачу в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ при неизотермических процессах с известным температурным полем, которая включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ;

2) систему ОС в нормированных моментах тензоров напряжений и моментных напряжений приближения (r, M) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем или систему ОС в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ с известным температурным полем при упрощенном методе редукции;

3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

3a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения M для первой краевой задачи;

3b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ для второй краевой задачи;

3c) систему кинематических граничных условий в моментах приближения M на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, M) микрополярной МДТТТ на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи;

4) систему кинематических начальных условий в моментах приближения M .

Задачи при неизотермических процессах, которые разделяются на температурную задачу и задачу ТМДТТТ с известным температурным полем, называются несвязанными задачами ТМДТТТ [336].

Таким образом, выше даны формулировки постановок связанной и несвязанной динамических задач в моментах приближения (r, M) микрополярной ТУТТ, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения (r, M) . Из этих постановок

задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r и M , постановки задач в моментах желаемых приближений. Кроме того, можно получить постановки задач при изотермических процессах. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, M) классических теорий ТУТТ и УТТ. Постановки задач микрополярной теории для произвольного анизотропного материала при классической параметризации области тонкого тела с одним малым размером при применении полиномов Лежандра рассмотрены в [264] (см. также выше четвертую главу).

Следует отметить, что вопросы этой главы изложены также в [304].

Глава 6

Метод ортогональных полиномов в теории микрополярных плоских тонких областей

6.1 Новая параметризация плоской тонкой криволинейной области

Это глава написана на основании работы [285] после устранения замеченных опечаток (см. также [304]). Рассматривается плоская тонкая криволинейная область, произвольная точка которой задается радиусом-вектором (рис. 6.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x^1, x^2) &= \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1) + x^2 \mathbf{h}(x^1) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1) + x^2 \left[\overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1) \right] = \\ &= (1 - x^2) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1) + x^2 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1), \quad 0 \leq x^2 \leq 1, \quad x^1 \in \overset{(-)}{\gamma}, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

где $\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1)$, $\overset{(+)}{\mathbf{r}} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1)$ задают внутреннюю $\overset{(-)}{\gamma}$ и внешнюю $\overset{(+)}{\gamma}$ базовые кривые соответственно (рис. 6.1).

Вектор $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x^1)$ устанавливает соответствие между точками внутренней и внешней базовых кривых с одинаковым значением x^1 . Следовательно, в общем случае \mathbf{h} не является перпендикулярным к $\overset{(-)}{\gamma}$.

$\overset{(-)}{\gamma}_{(g)}$ -параметризация определяется ковариантными $(\mathbf{r}_1^-, \mathbf{r}_2^- = \mathbf{h}, \mathbf{r}_3^- = \mathbf{b} = \text{const})$ и контравариантными $(\mathbf{r}^{\bar{1}}, \mathbf{r}^{\bar{2}}, \mathbf{r}^{\bar{3}})$ базисными¹ векторами. Здесь $\mathbf{b} = \text{const}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости рисунка. Следовательно,

$$\mathbf{r}_1^- = \frac{d\overset{(-)}{\mathbf{r}}}{dx^1}, \quad \mathbf{r}^{\bar{1}} = \frac{\mathbf{r}_2^- \times \mathbf{r}_3^-}{\sqrt{g^{(-)}}}, \quad \mathbf{r}^{\bar{2}} = \frac{\mathbf{r}_3^- \times \mathbf{r}_1^-}{\sqrt{g^{(-)}}}, \quad \mathbf{r}^{\bar{3}} = \frac{\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-}{\sqrt{g^{(-)}}} = \mathbf{r}_3^- = \mathbf{b}, \quad (6.1.2)$$

где

$$\sqrt{g^{(-)}} = (\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-) \cdot \mathbf{r}_3^- = \sqrt{g_{11}^{(-)}} h^0, \quad g_{11}^{(-)} = \mathbf{r}_1^- \cdot \mathbf{r}_1^-, \quad h^0 = \mathbf{h} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{n}}. \quad (6.1.3)$$

$\overset{(-)}{\gamma}_{(a)}$ -параметризация определяется ковариантными $(\mathbf{r}_1^-, \mathbf{r}_{(n)2}^- = \overset{(-)}{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_3^- = \mathbf{b})$ и контравариантными $(\mathbf{r}^{\bar{1}}_{(n)}, \mathbf{r}^{\bar{2}}_{(n)}, \mathbf{r}^{\bar{3}})$ базисными векторами.

¹В основном сохранены обозначения и соглашения, использованные в работах [234, 239, 285].

Заметим, что $\bar{\mathbf{n}}^{(-)}$ — единичный вектор нормали к внутренней базовой кривой $\bar{\gamma}^{(-)}$ (рис. 6.1), кроме того

$$\bar{\mathbf{r}}_{(n)}^1 = \frac{\bar{\mathbf{n}}^{(-)} \times \bar{\mathbf{r}}_3^{(-)}}{\sqrt{g_{(-)}^{(-)}}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}}{\sqrt{g_{(-)}^{(-)}}}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{(n)}^2 = \frac{\bar{\mathbf{r}}_3^{(-)} \times \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)}}{\sqrt{g_{(-)}^{(-)}}} = \bar{\mathbf{n}}^{(-)}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{(n)}^3 = \mathbf{b} = \bar{\mathbf{r}}_3^{(-)}, \quad (6.1.4)$$

где

$$\sqrt{g_{(-)}^{(-)}} = (\bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} \times \bar{\mathbf{n}}^{(-)}) \cdot \bar{\mathbf{r}}_3^{(-)} = |\bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} \times \bar{\mathbf{n}}^{(-)}| = |\bar{\mathbf{r}}_1^{(-)}| = \sqrt{g_{(-)}^{(-)}}, \quad (6.1.5)$$

а $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}$ — единичный вектор касательной к кривой $\bar{\gamma}^{(-)}$.

Представим $\bar{\mathbf{r}}_2^{(-)} = \mathbf{h}$ в виде

$$\bar{\mathbf{r}}_2^{(-)} = \mathbf{h} = h^0 \bar{\mathbf{n}}^{(-)} + \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(-)} = 0. \quad (6.1.6)$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\gamma}^1 \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} = \tilde{\gamma}_1^1 \bar{\mathbf{r}}_{(n)}^1, \quad \tilde{\gamma}_2^1 = 0, \quad \tilde{\gamma}_3^1 = 0, \quad \tilde{\gamma}^2 = 0, \quad \tilde{\gamma}^3 = 0. \quad (6.1.7)$$

Как легко усмотреть по (6.1.2)–(6.1.7) имеем

$$\bar{\mathbf{r}}^1 = \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}}{\sqrt{g_{(-)}^{(-)}}} - \frac{\tilde{\gamma}_1^1 \bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{h^0} = \frac{1}{g_{(-)}^{(-)}} \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} - \frac{\tilde{\gamma}_1^1 \bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{h^0}, \quad \bar{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{h^0} \bar{\mathbf{n}}^{(-)}, \quad \bar{\mathbf{r}}^3 = \mathbf{b} = \bar{\mathbf{r}}_3^{(-)}. \quad (6.1.8)$$

Обозначая через $\bar{s}^{(-)}$ естественный параметр для кривой $\bar{\gamma}^{(-)}$, имеем

$$\bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}^{(-)}}{dx^1} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}^{(-)} d\bar{s}^{(-)}}{d\bar{s}^{(-)} dx^1} = \frac{d\bar{s}^{(-)}}{dx^1} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)} = \sqrt{g_{(-)}^{(-)}} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}, \quad \sqrt{g_{(-)}^{(-)}} = \frac{d\bar{s}^{(-)}}{dx^1}. \quad (6.1.9)$$

Формулы Френе для плоской кривой имеют вид

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}}{d\bar{s}^{(-)}} = -k^{(-)} \bar{\mathbf{n}}^{(-)}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{d\bar{s}^{(-)}} = k^{(-)} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}, \quad (6.1.10)$$

где $k^{(-)}$ — кривизна кривой $\bar{\gamma}^{(-)}$.

Из (6.1.10) с учетом второй формулы (6.1.9) получаем

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}}{dx^1} = -\sqrt{g_{(-)}^{(-)}} k^{(-)} \bar{\mathbf{n}}^{(-)}, \quad \frac{d\bar{\mathbf{n}}^{(-)}}{dx^1} = \sqrt{g_{(-)}^{(-)}} k^{(-)} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)}, \quad k^{(-)} \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)}. \quad (6.1.11)$$

Теперь по (6.1.9) и (6.1.11) имеем

$$\bar{\mathbf{r}}_{11}^{(-)} = \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}^{(-)}}{dx^1{}^2} = \frac{d}{dx^1} \left(\sqrt{g_{(-)}^{(-)}} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(-)} \right) = d_1 \ln \sqrt{g_{(-)}^{(-)}} \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)} - g_{(-)}^{(-)} k^{(-)} \bar{\mathbf{n}}^{(-)}, \quad d_1 \equiv \frac{d}{dx^1}, \quad (6.1.12)$$

а по (6.1.6) и (6.1.11) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 = d_1 \left(h^0 \bar{\mathbf{n}}^{(-)} + \boldsymbol{\gamma} \right) &= \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^1 g_{(-)}^{(-)} k^{(-)} \right) \bar{\mathbf{n}}^{(-)} + \\ &+ \left(d_1 \tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_1^1 d_1 \ln \sqrt{g_{(-)}^{(-)}} + h^0 k^{(-)} \right) \bar{\mathbf{r}}_1^{(-)}. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

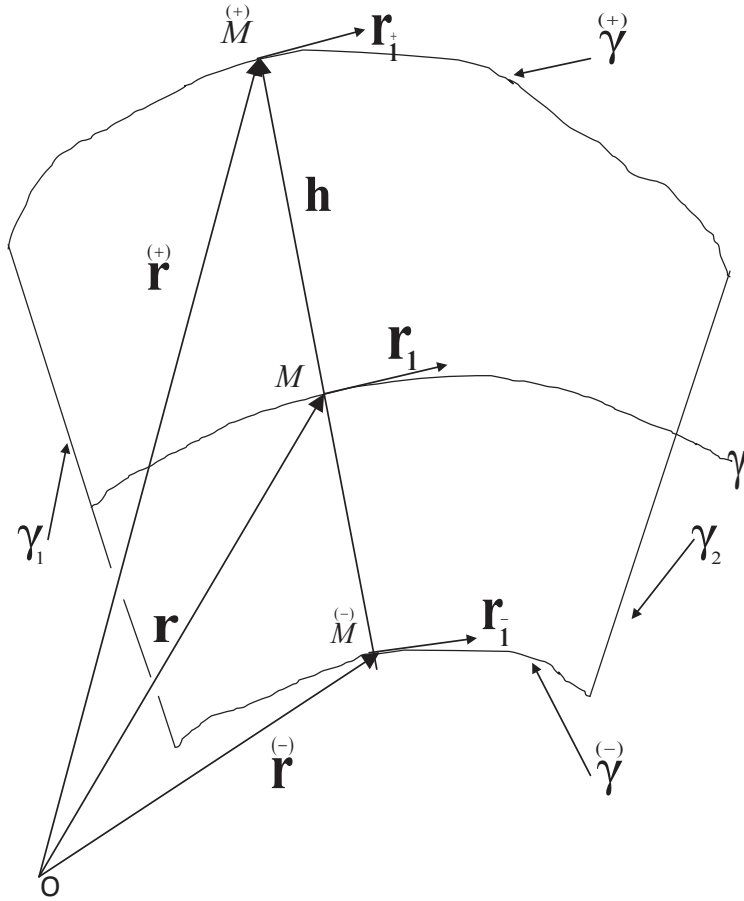


Рис. 6.1: Новая параметризация тонкой плоской области

На основании (6.1.1) находим

$$\mathbf{r}^{(+)}(x^1) = \mathbf{r}(x^1, x^2)|_{x^2=1} = \mathbf{r}^{(-)}(x^1) + \mathbf{h}(x^1). \quad (6.1.14)$$

Отсюда с учетом (6.1.13) и $\tilde{\gamma}_1^- = g_{11}^- \tilde{\gamma}_1^{\bar{1}}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^+ = \frac{d\mathbf{r}^{(+)}}{dx^1} = \mathbf{r}_1^- + d_1 \mathbf{h} = & \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^- k \right) \mathbf{n}^- + \\ & + \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}_1^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}_1^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^-} + h^0 k \right) \mathbf{r}_1^-. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Теперь на основании (6.1.2), (6.1.6), (6.1.8) и (6.1.15) легко найти компоненты ЕТВР при $\tilde{\gamma}_{(-)g}^{(-)}$ - и $\tilde{\gamma}_{(+)g}^{(+)}$ -параметризациях. В самом деле, имеем

$$g_{\bar{p}\bar{g}}, g^{\bar{p}\bar{g}} = \begin{cases} g_{11}^- = |\mathbf{r}_1^-|^2, & g^{\bar{1}\bar{1}} = g_{11}^{-1} + \left(h^{0-1} \tilde{\gamma}_1^{\bar{1}} \right)^2, \\ g_{12}^- = g_{21}^- = \tilde{\gamma}_1^-, & g^{\bar{1}\bar{2}} = g^{\bar{2}\bar{1}} = -h^{0-2} \tilde{\gamma}_1^{\bar{1}}, \\ g_{22}^- = |\mathbf{r}_2^-|^2 = h^2, & g^{\bar{2}\bar{2}} = h^{02}, \\ g_{p3}^- = \delta_{p3}, & g^{\bar{p}\bar{3}} = \delta^{p3} \end{cases} \quad (6.1.16)$$

для компонент ЕТВР при $\tilde{\gamma}_{(-)}^{(-)}$ -параметризации,

$$g_{p\bar{g}}^{+} = \begin{cases} g_{11}^{+-} = g_{11}^{-} \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{-}} + h^0 k^{(-)} \right), \\ g_{12}^{+-} = \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^{(-)} k \right) \overset{\circ}{h} + \\ \quad + \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{-}} + h^0 k^{(-)} \right) \tilde{\gamma}_1^{-}, \\ g_{21}^{+-} = \tilde{\gamma}_1^{-}, \\ g_{22}^{+-} = h^2, \\ g_{p3}^{+-} = \delta_{p3}, \quad g_{3Q}^{+-} = \delta_{3Q} = 0, \end{cases} \quad (6.1.17)$$

$$g_{p\bar{g}}^{\bar{g}} = \begin{cases} g_{11}^{\bar{g}} = -h^{0-1} \tilde{\gamma}^{\bar{1}} \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^{(-)} k \right) + \\ \quad + \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{-}} + h^0 k^{(-)} \right), \\ g_{11}^{\bar{g}2} = d_1 \ln h^0 - \tilde{\gamma}_1^{-} h^{0-1} k^{(-)}, \\ g_{12}^{\bar{g}} = 0, \\ g_{22}^{\bar{g}} = 1, \\ g_{p3}^{\bar{g}} = \delta_p^3, \quad g_{3\bar{Q}}^{\bar{g}} = 0, \end{cases} \quad (6.1.18)$$

для основных компонент переноса ЕТВР,

$$g_{p\bar{g}}^{++} = \begin{cases} g_{11}^{++} = \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^{(-)} k \right)^2 + \\ \quad + \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{-}} + h^0 k^{(-)} \right)^2 g_{11}^{-}, \\ g_{12}^{++} = g_{21}^{++} = \left(d_1 h^0 - \tilde{\gamma}_1^{(-)} k \right) h^0 + \\ \quad + \left(1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{-}} + h^0 k^{(-)} \right) \tilde{\gamma}_1^{-}, \\ g_{22}^{++} = h^2, \quad g_{p3}^{++} = \delta_{p3} \end{cases} \quad (6.1.19)$$

для ковариантных компонент ЕТВР при $\tilde{\gamma}_{(+)}^{(+)}$ -параметризации.

В частном случае, когда \mathbf{h} перпендикулярен к $\tilde{\gamma}^{(-)}$, т.е. $\mathbf{h} = h \mathbf{n}^{(-)}$ и $\gamma = 0$, эти соотношения получают вид соответственно

$$g_{p\bar{g}}^{-}, g_{p\bar{g}}^{\bar{g}} = \begin{cases} g_{11}^{-} = |\mathbf{r}_1^{-}|^2, & g_{11}^{\bar{g}} = g_{11}^{-1}, \\ g_{12}^{-} = g_{21}^{-} = 0, & g_{12}^{\bar{g}} = g_{21}^{\bar{g}} = 0, \\ g_{22}^{-} = h^2, & g_{22}^{\bar{g}} = h^{-2} = g_{22}^{-2}, \\ g_{p3}^{-} = \delta_{p3}, & g_{p3}^{\bar{g}} = \delta_{p3}, \end{cases} \quad (6.1.20)$$

$$g_{pg}^{+-}, g_{+p}^{\bar{g}} = \begin{cases} g_{11}^{+-} = g_{11}^{-} (1 - h b_{11}^{-}), & g_{+1}^{\bar{g}} = 1 - h b_{11}^{-}, \\ g_{12}^{+-} = h d_1 h, & g_{+1}^{\bar{g}2} = d_1 \ln h, \\ g_{21}^{+-} = 0, & g_{+2}^{\bar{g}1} = 0, \\ g_{22}^{+-} = h^2, & g_{+2}^{\bar{g}2} = 1, \\ g_{p3}^{+-} = \delta_{p3}, \quad g_{3Q}^{+-} = \delta_{3Q} = 0, & g_{+p}^{\bar{g}3} = \delta_p^3, \quad g_{+3}^{\bar{g}Q} = 0, \end{cases} \quad (6.1.21)$$

$$g_{p\bar{g}}^{++} = \begin{cases} g_{11}^{++} = (d_1 h)^2 + g_{11}^{-} (1 - h b_{11}^{-})^2 = (d_1 h)^2 + g_{11}^{-} (g_{+1}^{\bar{g}})^2, \\ g_{12}^{++} = g_{21}^{++} = h d_1 h, \\ g_{22}^{++} = h^2, \quad g_{p3}^{++} = \delta_{p3}. \end{cases} \quad (6.1.22)$$

Следует заметить, что

$$\mathbf{r}_{-2} = \mathbf{r}_{+2} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{r}_{-3} = \mathbf{r}_{+3} = \mathbf{b}, \quad (6.1.23)$$

которые были использованы при написании приведенных выше компонент. Кроме того, в рассматриваемом случае для компонент расширенного второго тензора имеем

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{pg}^{-} &= b_{11}^{-} \delta_{1p} \delta_{1g}, & \tilde{b}_{+p}^{\bar{g}} &= b_{11}^{-} \delta_{1p} \delta^{1g}, & \tilde{b}_{p\bar{g}}^{-} &= b_{11}^{-} \delta^{1p} \delta_{1g}, \\ b_{+1}^{-} &= -k, & b_{11}^{-} &= g_{11}^{-} b_{11}^{-} = -g_{11}^{-} k, & b_{11}^{-} &= g_{11}^{-} b_{11}^{-} = -g_{11}^{-} k. \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

Легко найти значения символов Кристоффеля при $\gamma_{(-)}^{(-)}$ -параметризации. В самом деле, по определению, например, символов Кристоффеля второго рода имеем

$$\Gamma_{p\bar{g}}^{\bar{l}} = \mathbf{r}_{p\bar{g}}^{-} \cdot \mathbf{r}^{\bar{l}}. \quad (6.1.25)$$

Легко усмотреть, что символы Кристоффеля, у которых хотя бы один индекс равен 3, равны нулю. Итак, надо вычислять такие символы, у которых индексы принимают значения 1 и 2. На основании (6.1.8), (6.1.12) и (6.1.13) получаем

$$\Gamma_{I\bar{J}}^{\bar{K}} = \begin{cases} \Gamma_{11}^{\bar{1}} = -g_{+1}^{\bar{g}2} + d_1 \ln h^0 \sqrt{g_{11}^{-}}, \\ \Gamma_{21}^{\bar{1}} = g_{+1}^{\bar{g}1} - 1, \\ \Gamma_{11}^{\bar{2}} = h^{0-1} b_{11}^{-}, \\ \Gamma_{21}^{\bar{2}} = g_{+1}^{\bar{g}2}, \\ \Gamma_{I\bar{2}}^{\bar{K}} = 0. \end{cases} \quad (6.1.26)$$

Символы Кристоффеля первого рода можно определить следующим образом:

$$\Gamma_{I\bar{J},\bar{K}}^{-} = g_{KL}^{-} \Gamma_{I\bar{J}}^{\bar{L}}. \quad (6.1.27)$$

Если \mathbf{h} перпендикулярен к $\overset{(-)}{\gamma}$, то соотношения (6.1.26) и (6.1.27) получают вид

$$\Gamma_{IJ}^{\bar{K}} = \begin{cases} \Gamma_{11}^{\bar{1}} = d_1 \ln \sqrt{g_{11}^-}, \\ \Gamma_{21}^{\bar{1}} = -h \overset{(-)}{b}_1^{\bar{1}}, \\ \Gamma_{11}^{\bar{2}} = h^{-1} \overset{(-)}{b}_{11}^{\bar{2}}, \\ \Gamma_{21}^{\bar{2}} = g_{11}^{\bar{2}} = d_1 \ln h, \\ \Gamma_{I2}^{\bar{K}} = 0. \end{cases} \quad (6.1.28)$$

и

$$\Gamma_{IJ,\alpha}^- = g_{\alpha\alpha}^- \Gamma_{IJ}^{\alpha-}. \quad (6.1.29)$$

Теперь из (6.1.1) получаем

$$\mathbf{r}_1 = \partial_1 \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = (1 - x^2) \mathbf{r}_1^- + x^2 \mathbf{r}_1^+, \quad \mathbf{r}_2 = \partial_2 \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1) = \mathbf{h}(x^1). \quad (6.1.30)$$

Положим, что

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{b}. \quad (6.1.31)$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{r}_2^- = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2^+ = \mathbf{h}, \quad \mathbf{r}_3^- = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3^+ = \mathbf{b}. \quad (6.1.32)$$

На основании (6.1.32) соотношения (6.1.30) и (6.1.31) можно представить в виде

$$\mathbf{r}_p = \left[(1 - x^2) g_{pg}^- + x^2 g_{pg}^+ \right] \mathbf{r}_g^- = \left[(1 - x^2) g_{pg}^- + x^2 g_{pg}^+ \right] \mathbf{r}^g. \quad (6.1.33)$$

Ковариантные базисные векторы \mathbf{r}_p и по ним определенные контравариантные базисные векторы \mathbf{r}^p определяют γ_g -параметризацию. Ковариантные компоненты ЕТВР при этой параметризации в силу (6.1.33) будут иметь вид

$$g_{pg} = (1 - x^2)^2 g_{pg}^- + x^2 (1 - x^2) (g_{pg}^+ + g_{pg}^-) + (x^2)^2 g_{pg}^+. \quad (6.1.34)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$g_{IJ} = (1 - x^2)^2 g_{IJ}^- + x^2 (1 - x^2) (g_{IJ}^+ + g_{IJ}^-) + (x^2)^2 g_{IJ}^+, \quad g_{p3} = g_{3p} = \delta_{p3}. \quad (6.1.35)$$

Теперь легко усмотреть, что по соотношениям общей теории тонких тел с одним малым размером легко получить соответствующие соотношения для теории плоских тонких криволинейных тел. В самом деле, для того, чтобы получить какое-либо соотношение по аналогичному соотношению общей теории надо: заменить x^3 на x^2 и полагать, что величины от x^2 не зависят.

Получим этим способом векторы контравариантного базиса γ_g -параметризации. В общей теории тонких тел векторы контравариантного базиса в произвольной точке определяются соотношением [234]

$$\mathbf{r}^k = \sqrt{\frac{g}{g}} \left[(1 - x^3)^2 g_{li}^- + x^3 (1 - x^3) \epsilon^{knm} \epsilon_{lpm} g_{n\bar{p}}^- + \frac{1}{2} (x^3)^2 \epsilon^{kmn} \epsilon_{lpq} g_{n\bar{p}}^- g_{n\bar{q}}^- \right] \mathbf{r}^{\bar{l}}.$$

Отсюда указанным выше способом получим

$$\mathbf{r}^k = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} \left[(1-x^2)^2 g_{-l}^{\bar{k}} + x^2(1-x^2) \epsilon^{knm} \epsilon_{lpm} g_{+n}^{\bar{p}} + \frac{1}{2} (x^2)^2 \epsilon^{kmn} \epsilon_{lpq} g_{+m}^{\bar{p}} g_{+n}^{\bar{q}} \right] \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad (6.1.36)$$

где

$$\sqrt{g} = \sqrt{g^{(-)}} \left[1 + x^2 \left(g_{+1}^{\bar{1}} - 1 \right) \right], \quad \vartheta = \sqrt{g^{(-)} g^{-1}} = 1 + x^2 \left(g_{+1}^{\bar{1}} - 1 \right). \quad (6.1.37)$$

В частности, из (6.1.36) получаем

$$\mathbf{r}^K = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} \left[(1-x^2) g_{-L}^{\bar{K}} + x^2 \epsilon^{KM} \epsilon_{LPM} g_{+M}^{\bar{P}} \right] \mathbf{r}^{\bar{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{b}, \quad (6.1.38)$$

или

$$\mathbf{r}^1 = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} \mathbf{r}^{\bar{1}}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}^{\bar{2}} - x^2 \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} g_{+1}^{\bar{2}} \mathbf{r}^{\bar{1}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{b} = const. \quad (6.1.39)$$

Введем в рассмотрение компоненты переноса ЕТВР, определяемые следующим образом:

$$g_{k\bar{l}} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_{\bar{l}}, \quad g_{\bar{k}}^{\bar{l}} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad g^{k\bar{l}} = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^{\bar{l}}, \quad g_{\bar{l}}^k = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_{\bar{l}}. \quad (6.1.40)$$

Выпишем выражения для этих компонент. Имеем

$$g_{k\bar{l}}, g_{\bar{k}}^{\bar{l}} = \begin{cases} g_{I\bar{J}} = (1-x^2)g_{-I\bar{J}} + x^2g_{+I\bar{J}}, & g_I^{\bar{J}} = (1-x^2)g_{-I}^{\bar{J}} + x^2g_{+I}^{\bar{J}}, \\ g_{K\bar{3}} = \delta_{K3}, & g_K^{\bar{3}} = \delta_K^3, \\ g_{3\bar{L}} = \delta_{3L} = 0, & g_3^{\bar{L}} = \delta_3^L = 0, \end{cases} \quad (6.1.41)$$

$$g^{k\bar{l}}, g_{\bar{l}}^k = \begin{cases} g^{1\bar{1}} = g_{-1}^1 g_{-1}^{\bar{1}}, & g_{-1}^1 = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} = \vartheta^{-1}, \\ g^{1\bar{2}} = g_{-1}^1 g_{-1}^{\bar{2}}, & g_{-2}^1 = 0, \\ g^{2\bar{1}} = g_{-1}^{2\bar{1}} - x^2 g_{-1}^1 g_{+1}^{\bar{2}} g_{-1}^{\bar{1}}, & g_{-1}^2 = -x^2 g_{-1}^1 g_{+1}^{\bar{2}}, \\ g^{2\bar{2}} = g_{-1}^{2\bar{2}} - x^2 g_{-1}^1 g_{+1}^{\bar{2}} g_{-1}^{\bar{2}}, & g_{-2}^2 = 1, \\ g^{K\bar{3}} = \delta^{K3}, \quad g^{3\bar{L}} = \delta^{3L} = 0, & g_{-3}^K = \delta_{-3}^K, \quad g_{-L}^3 = \delta_{-L}^3 = 0. \end{cases} \quad (6.1.42)$$

Если \mathbf{h} перпендикулярен к $\gamma^{(-)}$, то получаем

$$g_{k\bar{l}} = \begin{cases} g_{11} = (1-x^2)g_{-11} + x^2g_{+11}, \\ g_{12} = x^2g_{+12}, \quad g_{21} = 0, \\ g_{22} = h^2, \quad g_{K\bar{3}} = \delta_{K3}, \quad g_{3\bar{K}} = 0, \end{cases} \quad g_{\bar{k}}^{\bar{l}} = \begin{cases} g_1^{\bar{1}} = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} = \vartheta = 1 + x^2(g_{+1}^{\bar{1}} - 1), \\ g_1^{\bar{2}} = x^2g_{+1}^{\bar{2}}, \quad g_2^{\bar{1}} = 0, \\ g_2^{\bar{2}} = 1, \quad g_K^{\bar{3}} = \delta_K^3, \quad g_3^{\bar{L}} = 0, \end{cases} \quad (6.1.43)$$

$$g^{k\bar{l}}, g_{\bar{l}}^k = \begin{cases} g^{1\bar{1}} = g_{-1}^1 g_{-1}^{\bar{1}}, & g_{-1}^1 = \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g}} = \vartheta^{-1}, \\ g^{1\bar{2}} = 0, & g_{-2}^1 = 0, \\ g^{2\bar{1}} = -x^2 g_{-1}^1 g_{+1}^{\bar{2}} g_{-1}^{\bar{1}}, & g_{-1}^2 = -x^2 g_{-1}^1 g_{+1}^{\bar{2}}, \\ g^{2\bar{2}} = g_{-1}^{2\bar{2}}, & g_{-2}^2 = 1, \\ g^{K\bar{3}} = \delta^{K3}, \quad g^{3\bar{L}} = \delta^{3L} = 0, & g_{-3}^K = \delta_{-3}^K, \quad g_{-L}^3 = \delta_{-L}^3 = 0. \end{cases} \quad (6.1.44)$$

Легко усмотреть, что с учетом вторых формул первых строк (6.1.41) и (6.1.42) или (6.1.44) соотношения (6.1.39) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^1 = g_1^1 \mathbf{r}^{\bar{1}}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}^{\bar{2}} + g_1^2 \mathbf{r}^{\bar{1}} = \mathbf{r}^{\bar{2}} - g_1^1 g_1^{\bar{2}} \mathbf{r}^{\bar{1}} = \mathbf{r}^{\bar{2}} - x^2 g_1^1 g_1^{\bar{2}} \mathbf{r}^{\bar{1}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{b} = const. \quad (6.1.45)$$

Не представляет труда получить выражения для контравариантных компонент ЕТВР при γ_g -параметризации. В самом деле, получаем

$$g^{mn} = \begin{cases} g^{11} = (g_1^1)^2 g^{\bar{1}\bar{1}}, \\ g^{12} = (g_1^1)^2 \left[(1-x^2) g^{\bar{1}\bar{2}} + x^2 \left(g^{\bar{1}\bar{2}} g_1^{\bar{1}} - g^{\bar{1}\bar{1}} g_1^{\bar{2}} \right) \right], \\ g^{22} = g^{\bar{2}\bar{2}} - 2x^2 g_1^1 g^{\bar{1}\bar{2}} g_1^{\bar{2}} + (x^2)^2 (g_1^1)^2 g^{\bar{1}\bar{1}} \left(g_1^{\bar{2}} \right)^2, \\ g^{m3} = \delta^{m3}, \end{cases} \quad (6.1.46)$$

а когда \mathbf{h} перпендикулярен к $\overset{(-)}{\gamma}$ имеем

$$g^{mn} = \begin{cases} g^{11} = (g_1^1)^2 g^{\bar{1}\bar{1}}, \\ g^{12} = -x^2 (g_1^1)^2 g^{\bar{1}\bar{1}} g_1^{\bar{2}}, \\ g^{22} = g^{\bar{2}\bar{2}} + (x^2)^2 (g_1^1)^2 g^{\bar{1}\bar{1}} \left(g_1^{\bar{2}} \right)^2, \\ g^{m3} = \delta^{m3}. \end{cases} \quad (6.1.47)$$

Теперь найдем символы Кристоффеля при γ_g -параметризации. С этой целью по аналогии [234] имеем

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{IJ}^L &= g_{\bar{K}}^L \left(\partial_J g_I^{\bar{K}} + g_I^{\bar{M}} \Gamma_{\bar{M}\bar{J}}^{\bar{K}} \right) = g_I^{\bar{M}} \left(-\partial_J g_{\bar{M}}^L + g_{\bar{K}}^L \Gamma_{\bar{M}\bar{J}}^{\bar{K}} \right), \\ \hat{\Gamma}^{IJ,L} &= g_{\bar{L}\bar{K}} \left(\partial_J g_I^{\bar{K}} + g_I^{\bar{M}} \Gamma_{\bar{M}\bar{J}}^{\bar{K}} \right) = g_I^{\bar{K}} \left(-\partial_J g_{\bar{L}\bar{K}} + g_{\bar{L}}^{\bar{M}} \Gamma_{\bar{K}\bar{J},\bar{M}} \right). \end{aligned} \quad (6.1.48)$$

Заметим, что при написании (6.1.48) мы учли то обстоятельство, что если хотя бы один индекс у символов Кристоффеля равен 3, то они равны нулю.

На основании первого соотношения (6.1.48) легко получаем

$$\hat{\Gamma}_{IJ}^L = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{11}^1 = [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)] \{ x^2 (d_1 g_1^{\bar{1}} - h^0 b_1^{\bar{1}} g_1^{\bar{2}}) + \\ \quad + [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)] d_1 \ln \sqrt{g_{11}^{\bar{-}}} \}, \\ \hat{\Gamma}_{12}^1 = (g_1^{\bar{1}} - 1) [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)]^{-1}, \\ \hat{\Gamma}_{21}^1 = [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)]^{-1} d_1 \ln h^0, \\ \hat{\Gamma}_{11}^2 = x^2 [d_1 g_1^{\bar{2}} + (g_1^{\bar{2}})^2] - x^2 [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)]^{-1} g_1^{\bar{2}} \{ x^2 d_1 g_1^{\bar{1}} + \\ \quad + [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)] d_1 \ln h^0 \sqrt{g_{11}^{\bar{-}}} - g_1^{\bar{2}} \} + g_1^{\bar{2}\bar{2}} [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)] \cdot \\ \quad \cdot [g_{11}^{\bar{-}} (1 + d_1 \tilde{\gamma}^{\bar{1}} + \tilde{\gamma}^{\bar{1}} d_1 \ln g_{11}^{\bar{-}}) - g_{11}^{\bar{-}}], \\ \hat{\Gamma}_{12}^2 = g_1^{\bar{2}} \{ 1 - x^2 [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)] (g_1^{\bar{1}} - 1) \}, \\ \hat{\Gamma}_{21}^2 = x^2 [1 + x^2 (g_1^{\bar{1}} - 1)]^{-1} g_1^{\bar{2}} (h^0 b_1^{\bar{1}} - d_1 \ln h^0), \\ \hat{\Gamma}_{22}^L = 0. \end{cases} \quad (6.1.49)$$

Легко выписать (6.1.49) и в том случае, когда \mathbf{h} перпендикулярен к $\overset{(-)}{\gamma}$. Поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

Следует отметить, что нахождение связи между символами Кристоффеля $\overset{(-)}{\gamma}_{(g)}^-$ и γ_g^- параметризаций означает, как это следует из общей теории, осуществление связи между этими параметризациями. Следовательно,

$$\hat{\Gamma}_{IJ,K} = g_{KL} \hat{\Gamma}_{IJ}^L. \quad (6.1.50)$$

Теперь посмотрим, что происходит с кривизной кривой γ . По общей формуле имеем

$$\hat{b}_{IJ} = \mathbf{r}_{IJ} \cdot \frac{\mathbf{r}^2}{\sqrt{g^{22}}} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \hat{\Gamma}_{IJ}^2. \quad (6.1.51)$$

Отсюда для кривизны кривой γ получаем

$$\hat{b}_{11} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \hat{\Gamma}_{11}^2. \quad (6.1.52)$$

Подставляя в (6.1.52) значение $\hat{\Gamma}_{11}^2$ по (6.1.49), получим окончательное выражение для кривизны. Мы выпишем ее выражение в том случае, когда \mathbf{h} перпендикулярен к $\overset{(-)}{\gamma}$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{b}_{11} = & \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} \{x^2 [d_1 g_1^{\bar{2}} + (g_1^{\bar{2}})^2] - x^2 g_1^{\bar{2}} g_1^1 (x^2 d_1 \ln h \sqrt{g_{11}^-} - g_1^{\bar{2}})\} + \\ & + \frac{g^{22}}{\sqrt{g^{22}}} (1 - x^2 h \overset{(-)}{b}_{11}^-) g_{11}^- h \overset{(-)}{b}_{11}^- \hat{\Gamma}_{IJ}^2. \end{aligned} \quad (6.1.53)$$

Следует особо отметить, что если в качестве x^1 возьмем естественный параметр $\overset{(-)}{s}$, то $g_{11}^- = 1$ и приведенные выше соотношения упростятся. Кроме того, если $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = const$, то получим более упрощенные соотношения. Заметим, что при написании этого раздела была использована работа [239]. Отметим, что параметризация области тонкого тела с одним малым размером при произвольной базовой поверхности приведена в [284], а параметризация области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой кривой рассмотрена в [283] (см. также выше четвертую и пятую главы). Аналогично этим параметризациям и в данном случае нетрудно рассматривать параметризацию плоской тонкой области при произвольной базовой кривой. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

6.2 Представления некоторых дифференциальных операторов, дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий

6.2.1 Представления градиента, повторного градиента, дивергенции и лапласиана тензора

В силу определения градиента [67, 209, 335] и (6.1.45) в рассматриваемом случае для некоторого тензора \mathbb{F} получим

$$\nabla \mathbb{F} = \mathbf{r}^P \partial_P \mathbb{F} = g_{\bar{1}}^1 \mathbf{r}^{\bar{1}} \partial_1 \mathbb{F} + (\mathbf{r}^{\bar{2}} - g_{\bar{1}}^1 g_1^{\bar{2}} \mathbf{r}^{\bar{1}}) \partial_2 \mathbb{F} = g_{\bar{1}}^1 \mathbf{r}^{\bar{1}} (\partial_1 - g_1^{\bar{2}} \partial_2) \mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{2}} \partial_2 \mathbb{F}.$$

Отсюда, вводя дифференциальный оператор

$$N_1 = \partial_1 - g_1^2 \bar{\partial}_2, \quad (6.2.1)$$

получим следующее искомое представление градиента

$$\nabla \mathbb{F} = g_1^1 \mathbf{r}^1 \bar{N}_1 \mathbb{F} + \mathbf{r}^2 \bar{\partial}_2 \mathbb{F} = (g_1^1 \mathbf{r}^1 \bar{N}_1 + \mathbf{r}^2 \bar{\partial}_2) \mathbb{F}. \quad (6.2.2)$$

Имея представление градиента (6.2.2), нетрудно получить представление повторного градиента. В самом деле, осуществляя простые выкладки, найдем

$$\nabla \nabla \mathbb{F} = [g_1^1 g_1^1 \mathbf{r}^1 \bar{N}_1 \bar{N}_1 + g_1^1 (\mathbf{r}^1 \bar{N}_1 \bar{\partial}_2 + \mathbf{r}^2 \bar{N}_1 \bar{\partial}_2) + \mathbf{r}^2 \bar{\partial}_2^2] \mathbb{F}, \quad (6.2.3)$$

где

$$N_1 \bar{N}_1 = N_1^2 = (\nabla_1 - g_1^2 \bar{\nabla}_2)^2 = \nabla_1^2 - g_1^2 (\nabla_1 \bar{\nabla}_2 + \bar{\nabla}_2 \nabla_1) + g_1^2 g_1^2 \bar{\nabla}_2^2. \quad (6.2.4)$$

В силу определения дивергенции из (6.2.2) для тензора второго ранга $\mathbf{P} = P^{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J$ находим одно искомое представление в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = g_1^1 N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} + \partial_2 \mathbf{P}^2. \quad (6.2.5)$$

Заметим, что в этом случае $\nabla_2 \mathbf{P}^{\bar{1}} = \partial_2 \mathbf{P}^{\bar{1}}$. Другое представление дивергенции тензора второго ранга \mathbf{P} записывается в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_P (\sqrt{g} \mathbf{P}^P) = \frac{1}{\vartheta \sqrt{g^{(-)}}} \partial_1 \left(\sqrt{g^{(-)}} \vartheta \mathbf{P}^1 \right) + \frac{1}{\vartheta} \partial_2 \left(\vartheta \mathbf{P}^2 \right). \quad (6.2.6)$$

На основании (6.2.3) для лапласиана в рассматриваемом случае ($g^{\bar{1}\bar{2}} = 0$) будем иметь следующее представление

$$\Delta \mathbb{F} = \nabla \cdot \nabla \mathbb{F} = (g_1^1 g_1^1 g^{\bar{1}\bar{1}} N_1 \bar{N}_1 + g^{\bar{2}\bar{2}} \bar{\partial}_2^2) \mathbb{F}.$$

6.2.2 Представления дифференциальных уравнений движения и закона Гука

Учитывая (6.2.5) и (6.2.6), в рассматриваемом случае из (3.1.25) аналогично (3.1.27) и (3.1.28) получим следующие представления уравнений микрополярной теории плоской тонкой области:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g^{(-)}}} \partial_1 \left(\sqrt{g^{(-)}} \vartheta \mathbf{P}^1 \right) + \partial_2 \left(\vartheta \mathbf{P}^2 \right) + \rho \vartheta \mathbf{F} &= \rho \vartheta \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \frac{1}{\sqrt{g^{(-)}}} \partial_1 \left(\sqrt{g^{(-)}} \vartheta \boldsymbol{\mu}^1 \right) + \partial_2 \left(\vartheta \boldsymbol{\mu}^2 \right) + \mathbf{r}_3 \mathbf{C} \otimes \vartheta \mathbf{P} + \rho \vartheta \mathbf{m} &= \mathbf{J} \cdot \vartheta \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

$$g_1^1 N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} + \partial_2 \mathbf{P}^2 + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_1^1 N_1 \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} + \partial_2 \boldsymbol{\mu}^2 + \mathbf{r}_3 \mathbf{C} \otimes \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}; \quad (6.2.8)$$

Заметим, что в данном случае [307] тензоры напряжений и моментных напряжений имеют вид

$$\mathbf{P} = P^{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J + P^{33} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \boldsymbol{\mu} = \mu^{I3} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 + \mu^{3I} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I.$$

Нетрудно видеть, что из (3.2.46) в силу (6.2.2) при рассматриваемой параметризации аналогично (3.2.47) ОС представляются в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes (g_1^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}} \otimes (g_1^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\mathbf{D}} \otimes (g_1^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}} \otimes (g_1^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.\end{aligned}\quad (6.2.9)$$

Следует заметить, что в рассматриваемом случае тензор деформаций имеет вид $\boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi}$, а $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{b}$ [307]. Заметим также, что в соотношения (6.2.8) и (6.2.9) в качестве множителя входит компонента $g_1^1 = \overset{(-)}{\vartheta}^{-1} = [1 - x^2(1 - g_1^1)]^{-1}$ ЕТВР. Следовательно, если $|x^2(1 - g_1^1)| < 1$, то $g_1^1 = \sum_{s=0}^{\infty} [x^2(1 - g_1^1)]^s$.

Введем обозначение

$$g_{(r)1}^1 = \sum_{s=0}^r [x^2(1 - g_1^1)]^s,$$

которое назовем приближенным выражением порядка r для g_1^1 . Тогда, если в соотношениях (6.2.8) и (6.2.9) g_1^1 заменить на $g_{(r)1}^1$, получим соответствующие соотношения приближения порядка r . В этой связи введем следующие определения:

Определение 6.2.1. Уравнения, которые получаются из (6.2.8), если в разложении $g_{(r)1}^1$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются уравнениями приближения порядка r .

Очевидно, уравнения приближения порядка r представляются в виде

$$g_{(r)1}^1 N_1 \underline{\mathbf{P}}^{\bar{1}} + \partial_2 \underline{\mathbf{P}}^{\bar{2}} + \rho \underline{\mathbf{F}} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_{(r)1}^1 N_1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{1}} + \partial_2 \underline{\boldsymbol{\mu}}^{\bar{2}} + \mathbf{r}_3 \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.2.10)$$

Из (6.2.10) при $r = 0$ получим уравнения нулевого приближения, при $r = 1$ — уравнения первого приближения и т.д.

Определение 6.2.2. Соотношения, которые получаются из (6.2.9) при условии, что в разложении $g_{(r)1}^1$ сохранены первые $r + 1$ членов, называются ОС приближения порядка r .

Легко усмотреть, что ОС приближения порядка r аналогично уравнениям (6.2.10) представляются в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(r)} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes (g_{(r)1}^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}} \otimes (g_{(r)1}^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(r)} &= \underline{\mathbf{D}} \otimes (g_{(r)1}^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}} \otimes (g_{(r)1}^1 \bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.\end{aligned}\quad (6.2.11)$$

Определение 6.2.3. Соотношения, которые получаются из (6.2.11) при $r = 0$, называются ОС нулевого приближения, а при $r = 1$ — ОС первого приближения.

Нетрудно заметить, что ОС нулевого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes (\bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}} \otimes (\bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)} &= \underline{\mathbf{D}} \otimes (\bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}} \otimes (\bar{\mathbf{r}}^1 N_1 + \bar{\mathbf{r}}^2 \partial_2) \mathbf{u} - \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.\end{aligned}\quad (6.2.12)$$

6.2.3 О граничных условиях

Обозначим через $\overset{(-)}{\gamma}$ и $\overset{(+)}{\gamma}$ лицевые линии тонкого тела, определяемые с помощью (6.1.1) при $x^2 = 0$ и $x^2 = 1$ соответственно. Кроме того, левый торец, определяемый с помощью (6.1.1) при $x^1 = x_1^1 = const$ и $-1 \leq x^1 \leq 1$, обозначим через γ_1 , а через γ_2 обозначим правый торец, который определяется при $x^1 = x_2^1 = const$ ($x_2^1 > x_1^1$) и $0 \leq x^2 \leq 1$.

Пусть $\overset{(-)}{\mathbf{P}}(x^1, t)$ и $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, t)$ — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на $\overset{(-)}{\gamma}$, а $\overset{(+)}{\mathbf{P}}(x^1, t)$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, t)$ — заданные векторы напряжения и моментного напряжения на $\overset{(+)}{\gamma}$. Кроме того, обозначим через $\mathbf{P}_{(1)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(1)}(x^1, x^2, t)$ ($\mathbf{P}_{(2)}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}_{(2)}(x^1, x^2, t)$) заданные векторы напряжения и моментного напряжения на торце γ_1 (γ_2).

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{n}} &= -\frac{\mathbf{r}^2}{\sqrt{g^{22}}}\Big|_{x^2=0} = -\frac{\mathbf{r}^{\bar{2}}}{\sqrt{g^{\bar{2}\bar{2}}}}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}^2}{\sqrt{g^{22}}}\Big|_{x^2=1} = \frac{\mathbf{r}^{\dagger 2}}{\sqrt{g^{\dagger 2\dagger 2}}}, \\ \mathbf{n}_{(1)} &= -\frac{\mathbf{r}^1}{\sqrt{g^{11}}}\Big|_{x^1=x_1^1}, & \mathbf{n}_{(2)} &= \frac{\mathbf{r}^1}{\sqrt{g^{11}}}\Big|_{x^1=x_2^1}, \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

где $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к $\overset{(-)}{\gamma}$, $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к $\overset{(+)}{\gamma}$, $\mathbf{n}_{(\alpha)}$ — единичный вектор нормали к γ_α , ($\alpha = 1, 2$). Очевидно, в рассматриваемом случае в силу первой формулы (6.1.45)

$$\mathbf{n}_{(1)} = -\frac{\mathbf{r}^1}{\sqrt{g^{11}}}\Big|_{x^1=x_1^1} = -\frac{\mathbf{r}^{\bar{1}}}{\sqrt{g^{\bar{1}\bar{1}}}}\Big|_{x^1=x_1^1}, \quad \mathbf{n}_{(2)} = \frac{\mathbf{r}^1}{\sqrt{g^{11}}}\Big|_{x^1=x_2^1} = \frac{\mathbf{r}^{\bar{1}}}{\sqrt{g^{\bar{1}\bar{1}}}}\Big|_{x^1=x_2^1}. \quad (6.2.14)$$

Теперь не представляет труда записать граничные условия физического содержания теории тонких областей с одним малым размером. В самом деле, будем иметь

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} &= \overset{(-)}{\mathbf{P}}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} &= \overset{(+)}{\mathbf{P}}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{P}_{(\alpha)} &= \mathbf{P}_{(\alpha)}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} &= \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}, & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} &= \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}, & \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)} &= \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}, \quad < \alpha = 1, 2 >, \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}\Big|_{x^2=0}, & \overset{(+)}{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}\Big|_{x^2=1}, & \mathbf{P}_{(\alpha)} &= \mathbf{P}\Big|_{x^1=x_\alpha^1}, \\ \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}\Big|_{x^2=0}, & \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}\Big|_{x^2=1}, & \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)} &= \boldsymbol{\mu}\Big|_{x^1=x_\alpha^1}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Учитывая первые два соотношения (6.2.13) и (6.2.14), граничные условия (6.2.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \overset{(-)\bar{}}{\mathbf{P}^2} &= -\overset{(-)\vee}{\mathbf{P}^2}, & \overset{(+)\dagger}{\mathbf{P}^2} &= \overset{(+)\bar{}}{\mathbf{P}^2} - g_{\bar{1}\dagger}^{\dagger 1} g_{\dagger 1}^{\bar{2}} \overset{(+)\bar{}}{\mathbf{P}^1} = \overset{(+)\vee}{\mathbf{P}^2}, \\ \overset{(-)\bar{}}{\boldsymbol{\mu}^2} &= -\overset{(-)\vee}{\boldsymbol{\mu}^2}, & \overset{(+)\dagger}{\boldsymbol{\mu}^2} &= \overset{(+)\bar{}}{\boldsymbol{\mu}^2} - g_{\bar{1}\dagger}^{\dagger 1} g_{\dagger 1}^{\bar{2}} \overset{(+)\bar{}}{\boldsymbol{\mu}^1} = \overset{(+)\vee}{\boldsymbol{\mu}^2}, \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

$$\mathbf{P}_{(\alpha)}^{\bar{1}} = \overset{(+)\vee}{\mathbf{P}}_{(\alpha)}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}^{\bar{1}} = \overset{(+)\vee}{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6.2.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{(-)\vee}{\mathbf{P}^2} &= \sqrt{g^{22}}\Big|_{x^2=0} \overset{(-)}{\mathbf{P}}, & \overset{(+)\vee}{\mathbf{P}^2} &= \sqrt{g^{22}}\Big|_{x^2=1} \overset{(+)}{\mathbf{P}}, & \overset{(-)\vee}{\boldsymbol{\mu}^2} &= \sqrt{g^{22}}\Big|_{x^2=0} \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}, & \overset{(+)\vee}{\boldsymbol{\mu}^2} &= \sqrt{g^{22}}\Big|_{x^2=1} \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}, \\ \overset{(+)\vee}{\mathbf{P}}_{(\alpha)} &= \sqrt{g^{\bar{1}\bar{1}}}\Big|_{x^1=x_\alpha^1} \mathbf{P}_{(\alpha)}(x^1, x^2), & \overset{(+)\vee}{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)} &= \sqrt{g^{\bar{1}\bar{1}}}\Big|_{x^1=x_\alpha^1} \boldsymbol{\mu}_{(\alpha)}(x^1, x^2), & \alpha &= 1, 2. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

6.3 Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Некоторые соотношения теории моментов. Представления уравнений движения, определяющих соотношений и граничных условий в моментах. Постановки задач

6.3.1 Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра на сегменте [0,1]

Следует заметить, что нет нужды в рассматриваемом случае заново выводить рекуррентные соотношения для системы полиномов Лежандра и найти моменты k -го порядка входящих в уравнения и ОС выражений, так как они во второй и третьей главах в более общем случае уже получены. Для того, чтобы использовать имеющиеся уже соотношения для нахождения моментов нужных выражений в данном случае достаточно считать, что величины, входящие в трехмерные уравнения и ОС, зависят от x^1, x^2 , т.е. x' надо заменить на x^1 , а x^3 — на x^2 . Значит, в рассматриваемом случае координата x^2 выступает в роли x^3 . Кроме того, конечно, индексы принимают значения 1, 2. Например, из (2.2.4), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.13) и (2.2.14) для получения соответствующих соотношений в рассматриваемом случае достаточно в них x' и x^3 заменить на x^1 и x^2 , а индексы i, I и 3 на $I, 1$ и 2 соответственно. Нетрудно видеть, что после таких замен из указанных выше формул получим следующие соотношения:

$$\partial_1 f(x^1, x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_1 f(x^1) P_k(x^2), \quad \partial_2 f(x^1, x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x^1) P'_k(x^2), \quad (6.3.1)$$

$$M^{(k)}(\partial_I f) = (2k+1) \int_0^1 \partial_I f(x^1, x^2) P_k(x^2) dx^2 = \begin{cases} \partial_1 f(x^1), & \text{если } I = 1, \\ f^{(k)}(x^1), & \text{если } I = 2, \end{cases} \quad (6.3.2)$$

$$M^{(k)}(\partial_2 f) = M^{(k)}(f) = 2(2k+1) \sum_{m=0}^{\infty} f^{(k+2m+1)} = (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] f^{(p)}, \quad (6.3.3)$$

$$M^{(k)}(\partial_I f) = \begin{cases} \partial_1 f(x^1), & \text{если } I = 1, \\ (2k+1) [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \underline{f}', & \text{если } I = 2, \end{cases} \quad (6.3.4)$$

$$M^{(k)}(\partial_2 f) = \underline{f}'(x^1) = (2k+1) [f^{(+)} - (-1)^k f^{(-)}] - \underline{f}', \quad (6.3.5)$$

$$\underline{f}' = (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] f^{(p)}. \quad (6.3.6)$$

6.4 Представления дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий в моментах относительно системы полиномов Лежандра

Даны представления дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий в моментах относительно системы полиномов Лежандра.

6.4.1 Представления дифференциальных уравнений движения, в моментах относительно системы полиномов Лежандра

Вначале получим представление дифференциальных уравнений движения нулевого приближения в моментах. В этой связи заметим, что в силу определения 6.2.1 из (6.2.10) уравнения нулевого приближения запишутся в виде

$$N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} + \partial_2 \mathbf{P}^{\bar{2}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad N_1 \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} + \partial_2 \boldsymbol{\mu}^{\bar{2}} + \mathbf{r}_3 \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.4.1)$$

Видно, что для представления в моментах (6.4.1) нужно найти, например, выражения для $\overset{(k)}{M}(N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}})$ и $\overset{(k)}{M}(\partial_2 \mathbf{P}^{\bar{2}})$. Учитывая (6.2.1), $g_1^{\bar{2}} = x^2 g_1^{\bar{2}}$ (см. соответствующую формулу (6.1.43)), (6.3.1), (6.3.2), (6.3.3), (6.3.4) и (6.3.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{M}(N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}}) &= \overset{(k)}{M}(\nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}}) - g_1^{\bar{2}} \overset{(k)}{M}(x^2 \partial_2 \mathbf{P}^{\bar{1}}) = \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} - g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^{\bar{1}}] = \\ &= \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} - g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) (\sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{1}} - \mathbf{P}^{\bar{1}})]. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Далее на основании (6.3.2), (6.3.3), (6.3.5) из (6.4.2) после простых выкладок получим

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{M}(N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}}) + \overset{(k)}{M}(\partial_2 \mathbf{P}^{\bar{2}}) &= \\ &= \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^{\bar{1}}], \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{M}(N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}}) + \overset{(k)}{M}(\partial_2 \mathbf{P}^{\bar{2}}) &= \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{2}} - \\ &- g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{1}}] + (2k+1) [\mathbf{P}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} \mathbf{P}^{\bar{1}} - (-1)^k \mathbf{P}^{\bar{2}}]. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Учитывая граничные условия физического содержания на лицевых линиях соотношение (6.4.4) можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned} \overset{(k)}{M}(N_1 \mathbf{P}^{\bar{1}}) + \overset{(k)}{M}(\partial_2 \mathbf{P}^{\bar{2}}) &= \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{2}} - \\ &- g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{1}}] + (2k+1) [\mathbf{P}^{\bar{2}} + (-1)^k \mathbf{P}^{\bar{2}}], \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

где \mathbb{N}_0 — множество неотрицательных целых чисел.

Применяя оператор моментов k -го порядка к уравнениям (6.4.1), в силу его линейности и (6.4.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{P}^{\bar{1}}] + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \nabla_1 \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} [k \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}}] + \\ &+ \mathbf{r}_3 \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Совершенно аналогично (6.4.6) с помощью (6.4.5) из (6.4.1) получим

$$\begin{aligned} \nabla_1 \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} [k \mathbf{P}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{\bar{1}}] + \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \nabla_1 \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{\bar{2}} - g_1^{\bar{2}} [k \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \boldsymbol{\mu}^{\bar{1}}] + \\ &+ \mathbf{r}_3 \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{\Phi}^{(k)} = (2k+1) [\mathbf{P}^{\vee} + (-1)^k \mathbf{P}^{\vee}] + \rho \mathbf{F}^{(k)}, \quad \mathbf{M}^{(k)} = (2k+1) [\boldsymbol{\mu}^{(+)\vee} + (-1)^k \boldsymbol{\mu}^{(-)\vee}] + \rho \mathbf{m}^{(k)}.$$

Следует заметить, что в виде (6.4.6) и (6.4.7) получили различные представления системы уравнений движения в моментах нулевого приближения. Видно, что система уравнений в моментах является бесконечной системой, поэтому следует ее заменить конечной системой. Это производится следующим образом. Фиксируем некоторое неотрицательное целое число N и из (6.4.7) выбираем первые $N+1$ уравнений, т.е. рассматривается следующая система:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \mathbf{P}^{(k)\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}^{(p)\bar{2}} - g_{\pm}^2 [k \mathbf{P}^{(k)\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}^{(p)\bar{1}}] + \mathbf{\Phi}^{(k)} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(k)}, \\ \nabla_1 \boldsymbol{\mu}^{(k)\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{(p)\bar{2}} - g_{\pm}^2 [k \boldsymbol{\mu}^{(k)\bar{1}} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \boldsymbol{\mu}^{(p)\bar{1}}] + \\ + \mathbf{r}_3 \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)} &= \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}^{(k)}, \quad k = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

называемая системой уравнений движения в моментах приближения $(0, N)$ для теории двумерных тонких областей. Аналогично можно получить систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) , где r — некоторое натуральное число. В дальнейшем систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) будем считать известной.

6.4.2 Закон Гука в моментах относительно системы полиномов Лежандра

Вначале выведем закон Гука в моментах относительно системы полиномов Лежандра нулевого приближения. Учитывая (6.4.3), найдем

$$\begin{aligned} M^{(k)} [(\mathbf{r}^{\bar{1}} N_1 + \mathbf{r}^{\bar{2}} \partial_2) \mathbf{u}] &= M^{(k)} [\mathbf{r}^{\bar{1}} N_1 \mathbf{u}] + M^{(k)} [\mathbf{r}^{\bar{2}} \partial_2 \mathbf{u}] = \\ &= \mathbf{r}^{\bar{1}} [\partial_1 \mathbf{u}^{(k)} - g_{\pm}^2 (k \mathbf{u}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{u}^{(p)})] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p)}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Применяя оператор моментов k -го порядка к (6.2.12), в силу (6.4.9), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(0)}^{(k)} &= \mathbf{C}^2 \otimes \{ \mathbf{r}^{\bar{1}} [\partial_1 \mathbf{u}^{(k)} - g_{\pm}^2 (k \mathbf{u}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{u}^{(p)})] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p)} \} + \\ &+ \mathbf{A}^2 \otimes \{ \mathbf{r}^{\bar{1}} [\partial_1 \boldsymbol{\mu}^{(k)} - g_{\pm}^2 (k \boldsymbol{\mu}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}^{(p)})] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{(p)} \} - \\ &\quad - \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varphi}^{(k)} - \mathbf{b} \boldsymbol{\vartheta}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\mu}_{(0)}^{(k)} &= \mathbf{D}^2 \otimes \{ \mathbf{r}^{\bar{1}} [\partial_1 \boldsymbol{\mu}^{(k)} - g_{\pm}^2 (k \boldsymbol{\mu}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}^{(p)})] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \boldsymbol{\mu}^{(p)} \} + \\ &+ \mathbf{B}^2 \otimes \{ \mathbf{r}^{\bar{1}} [\partial_1 \mathbf{u}^{(k)} - g_{\pm}^2 (k \mathbf{u}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{u}^{(p)})] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p)} \} - \\ &\quad - \mathbf{B}^2 \otimes \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varphi}^{(k)} - \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\vartheta}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Соотношения (6.4.10) представляют закон Гука в моментах относительно системы полиномов Лежандра нулевого приближения для теории двумерных тонких тел. На практике вместо бесконечной системой (6.4.10) придется пользоваться конечной системой законов Гука. Эту систему, используя упрощенный метод редукции бесконечной системы

к конечной системе [68], можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{P}}_{(0)}^{(k)} &= \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \left\{ \mathbf{r}^{\bar{1}} \left[\partial_1 \underline{\mathbf{u}}^{(k)} - g_+^2 \left(k \underline{\mathbf{u}}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right) \right] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right\} + \\
 &+ \underline{\mathbf{A}}^2 \otimes \left\{ \mathbf{r}^{\bar{1}} \left[\partial_1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} - g_+^2 \left(k \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(p)} \right) \right] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(p)} \right\} - \\
 &\quad - \underline{\mathbf{C}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \varphi^{(k)} - \underline{\mathbf{b}} \vartheta^{(k)}, \\
 \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^{(k)} &= \underline{\mathbf{D}}^2 \otimes \left\{ \mathbf{r}^{\bar{1}} \left[\partial_1 \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} - g_+^2 \left(k \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(p)} \right) \right] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(p)} \right\} + \\
 &+ \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \left\{ \mathbf{r}^{\bar{1}} \left[\partial_1 \underline{\mathbf{u}}^{(k)} - g_+^2 \left(k \underline{\mathbf{u}}^{(k)} + (2k+1) \sum_{p=k+1}^N \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right) \right] + (2k+1) \mathbf{r}^{\bar{2}} \sum_{p=k+1}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underline{\mathbf{u}}^{(p)} \right\} - \\
 &\quad - \underline{\mathbf{B}}^2 \otimes \underline{\mathbf{C}} \varphi^{(k)} - \underline{\boldsymbol{\beta}} \vartheta^{(k)}, \quad k = \overline{0, N},
 \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

где N — некоторое фиксированное неотрицательное целое число. Итак фиксируя N , при этом методе редукции в ОС (6.4.10) моментами неизвестных величин, порядок которых превосходит N , пренебрегаем. Соотношения (6.4.11) назовем ОС приближения $(0, N)$. Очевидно, совершенно аналогично (6.4.11) можно получить ОС приближения (r, N) , где r — некоторое натуральное число. С целью сокращения письма на получении ОС приближения (r, N) останавливаться не будем. Однако, будем считать их известными.

6.4.3 Представление граничных условий физического содержания в моментах относительно системы полиномов Лежандра

Применяя оператор моментов k -го порядка к (6.2.17), получим граничные условия физического содержания на торцах в моментах относительно системы полиномов Лежандра

$$\underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)}^{(k)-} = \underline{\mathbf{P}}_{(\alpha)}^{(k)\vee}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)}^{(k)-} = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(\alpha)}^{(k)\vee}, \quad \alpha = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{6.4.12}$$

Аналогично (6.4.12) можно получить граничные условия другого характера в моментах. С целью сокращения письма на них останавливаться не будем.

6.4.4 Постановка динамических задач микрополярной теории упругости двумерных тонких областей в моментах

Рассматриваются постановки динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей и обсуждаются вопросы о получении из них некоторых других частных случаев постановок задач.

Постановка динамической задачи в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей включает в себя:

1) систему уравнений движения в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей;

2) систему ОС в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей;

3) в зависимости от типа краевых задач одну из следующих систем граничных условий в моментах:

3a) систему кинематических граничных условий в моментах приближения N для первой краевой задачи;

3b) систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей для второй краевой задачи;

3с) систем кинематических граничных условий в моментах приближения N на одной части граничного контура и систему статических граничных условий в моментах приближения (r, N) микрополярной теории двумерных тонких областей на остальной части граничного контура для смешанной краевой задачи;

4) систему начальных условий в моментах приближения N .

Таким образом, выше даны формулировки постановок динамических задач в моментах приближения (r, N) микрополярной теории упругости двумерных тонких областей. Из этих постановок задач нетрудно получить постановки соответствующих статических и квазистатических задач, а также, придавая различные значения r и N , постановки задач в моментах желаемых приближений. Наконец, если во всех приведенных и упомянутых выше постановках задач пренебречь моментами моментных напряжений и вектора внутреннего вращения, то получатся соответствующие постановки задач в моментах приближения (r, N) классической теории упругости двумерных тонких областей.

Глава 7

Применение метода ортогональных полиномов в теории многослойных тонких конструкций

Рассмотрена эффективная параметризация многослойной тонкой области, заключающаяся в использовании в отличие от классических подходов нескольких базовых поверхностей. Многие соотношения этой главы получаются из соответствующих соотношений первой главы, если в них корневые буквы снабжать снизу индексом, обозначающим номер слоя. Введены в рассмотрение свойственные предложенным параметризациям геометрические характеристики. В частности, выписаны выражения для компонент переноса ЕТВР, а также соотношения, связывающие сопровождающие рассмотренные в работе параметризации различные семейства реперов и базисов и порожденные ими соответствующие семейства символов Кристоффеля. Введены в рассмотрение компоненты контакта ЕТВР. Получены выражения для рассмотренных семейств символов Кристоффеля, компонент вторых тензоров и средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством компонент переноса единичного тензора второго ранга. Сформулирована фундаментальная теорема для многослойной тонкой области при ее новой параметризации.

Дано правило получения искомого соотношения многослойных тонких тел из соответствующего соотношения однослойных тонких тел. С помощью этого правила выписаны некоторые системы уравнений движения в моментах. Выписаны граничные, начальные и межслойные условия при различных связях соседних слоев.

7.1 Параметризация многослойной тонкой области трехмерного евклидова пространства с несколькими базовыми поверхностями

Рассмотрим многослойную тонкую область евклидова пространства, состоящую из не более чем счетного числа слоев. Пусть, слои пронумерованы по возрастанию, т. е., если, например, α — номер какого-нибудь слоя, то номером предыдущего слоя будет $\alpha - 1$, а номером последующего — $\alpha + 1$. Каждый слой имеет две лицевые поверхности. Лицевую поверхность слоя α , находящуюся со стороны предыдущего слоя $\alpha - 1$, назовем внутренней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(-)}{S}_\alpha$, а лицевую поверхность слоя α , находящуюся со стороны последующего слоя $\alpha + 1$, назовем внешней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(+)}{S}_\alpha$. Считаем, что лицевые поверхности каждого слоя — регулярные поверхности и в случае ограниченного незамкнутого слоя боковая поверхность является линейчатой поверхностью.

7.1.1 Векторное параметрическое уравнение слоя α и система векторных параметрических уравнений многослойной тонкой области

Радиус-вектор произвольной точки M_α слоя α представляется в виде

$$\mathbf{r}_\alpha(x^1, x^2, x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2) = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2), \quad (7.1.1)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall x^3 \in [0, 1],$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha = \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha = \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2), \quad \forall \alpha \quad (7.1.2)$$

являются векторными уравнениями базовых поверхностей $\overset{(-)}{S}_\alpha$ и $\overset{(+)}{S}_\alpha$ соответственно, x^1, x^2 — криволинейные (гауссовы) координаты на внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}_\alpha$, а \mathbb{N} — множество натуральных чисел.

Вектор

$$\mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2) = \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2), \quad \forall \alpha, \quad (7.1.3)$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}_\alpha$ на внешнюю $\overset{(+)}{S}_\alpha$, вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям. Причем конец каждого $\mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2)$ является началом $\mathbf{h}_{\alpha+1}(x^1, x^2)$, $\forall \alpha$, т. е. имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha+\delta}(x^1, x^2) &= \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta} \mathbf{h}_\nu = \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta} \mathbf{h}_\nu = \\ &= \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta} \left[\overset{(+)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) \right] = \\ &= \overset{(+)}{\mathbf{r}}_\alpha(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta} \left[\overset{(+)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) \right], \quad \forall \alpha, \delta. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Легко усмотреть, что из (7.1.1) следует (7.1.3), но не следует (7.1.4).

Пусть многослойная область состоит из K слоев. Тогда, вводя обозначение

$$\mathbf{h} = \sum_{\nu=1}^K \mathbf{h}_\nu = \sum_{\nu=1}^K \left[\overset{(+)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) \right], \quad (7.1.5)$$

будем иметь

$$\overset{(+)}{\mathbf{r}}_K(x^1, x^2) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}_1(x^1, x^2) + \mathbf{h}(x^1, x^2) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}_1(x^1, x^2) + \sum_{\nu=1}^K \left[\overset{(+)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) - \overset{(-)}{\mathbf{r}}_\nu(x^1, x^2) \right]. \quad (7.1.6)$$

Следует заметить, что (7.1.1) при фиксированном α — векторное параметрическое уравнение слоя α , а при изменении α нужное число раз и соблюдении условий (7.1.4) представляет систему векторных параметрических уравнений многослойной тонкой области.

Нетрудно видеть, что (7.1.1) при $\forall x^1, x^2$ и $x^3 = 0$ определяет внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}_\alpha$ слоя α , при $\forall x^1, x^2$ и $x^3 = 1$ — внешнюю базовую поверхность $\overset{(+)}{S}_\alpha$, а при $\forall x^1, x^2$ и $x^3 = \text{const}$, где $x^3 \in (0, 1)$ — эквидистантную от базовых поверхностей $\overset{(-)}{S}_\alpha$ и $\overset{(+)}{S}_\alpha$ поверхность, обозначаемая через $\overset{(-)}{S}_\alpha$.

7.1.2 Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризаций поверхности слоя α

Для производных от соотношений (7.1.1) и (7.1.2) по x^P в точках $\forall \overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}_\alpha$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, введем соответственно обозначения

$$\mathbf{r}_{\alpha P} \equiv \partial_P \mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_P \mathbf{r}_\alpha / \partial x^P, \quad \mathbf{r}_{\alpha \star} \equiv \partial_P \overset{(*)}{\mathbf{r}}_\alpha \equiv \partial \overset{(*)}{\mathbf{r}}_\alpha / \partial x^P, \quad \star \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha \quad (7.1.7)$$

Двойки векторов $\mathbf{r}_{\alpha 1} \mathbf{r}_{\alpha 2}^*$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, определенные в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}_\alpha$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, следовательно, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, а $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_{\alpha 1}^* \mathbf{r}_{\alpha 2}^*$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, — двумерные ковариантные поверхностные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемых поверхностей. По этим реперам (базисам), как известно [67, 209, 335], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_\alpha^1 \mathbf{r}_\alpha^2$ (базисы $\mathbf{r}_\alpha^1 \mathbf{r}_\alpha^2$), $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$. Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой в точке поверхностей $\overset{(*)}{S}_\alpha$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, реперы (базисы), получим соответствующие семейства (множества) реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации.

7.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области слоя α

Учитывая в первом соотношении (7.1.7) выражение радиус-вектора \mathbf{r} (7.1.1) и вводя обозначение $\mathbf{h}_{\alpha P} \equiv \partial \mathbf{h} / \partial x^P \equiv \partial_P \mathbf{h}$, получим

$$\mathbf{r}_{\alpha P} = \mathbf{r}_{\alpha P}^- + x^3 \mathbf{h}_{\alpha P} = (1 - x^3) \mathbf{r}_{\alpha P}^- + x^3 \mathbf{r}_{\alpha P}^+, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.8)$$

Теперь дифференцируя (7.1.1) по x^3 , как легко убеждаемся, имеем

$$\mathbf{r}_{\alpha 3} \equiv \partial_3 \mathbf{r}_\alpha \equiv \partial \mathbf{r}_\alpha / \partial x^3 = \mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2), \quad \forall x^3 \in [0, 1], \quad \forall \alpha. \quad (7.1.9)$$

На основании (7.1.9) можно принять, что

$$\mathbf{r}_{\alpha 3}^- \equiv \mathbf{r}_{\alpha 3} \equiv \mathbf{r}_{\alpha 3}^+ \equiv \partial_3 \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2), \quad \forall x^3 \in [0, 1], \quad \forall \alpha. \quad (7.1.10)$$

Соотношение (7.1.10) дает возможность в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}_\alpha$, $\star \in \{-, +\}$, $\forall \alpha$, определить пространственные ковариантные базисы $\mathbf{r}_{\alpha P}^*$, $\star \in \{-, +\}$, $\forall \alpha$, соответственно. Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}_\alpha$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, для каждого слоя α — один и тот же вектор $\mathbf{h}_\alpha(x^1, x^2)$.

Ввиду (7.1.10) соотношения (7.1.8) и (7.1.9) можно объединить и представить в виде

$$\mathbf{r}_{\alpha P} = \mathbf{r}_{\alpha P}^- + x^3 \mathbf{h}_{\alpha P} = (1 - x^3) \mathbf{r}_{\alpha P}^- + x^3 \mathbf{r}_{\alpha P}^+, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.11)$$

Тройки векторов $\mathbf{r}_{\alpha_1}^* \mathbf{r}_{\alpha_2}^* \mathbf{r}_{\alpha_3}^*$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, определенные в рассматриваемых точках $\overset{(\star)}{M} \in \overset{(\star)}{S}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, следовательно, образуют трехмерные ковариантные пространственные базисы, а $\overset{(\star)}{M} \mathbf{r}_{\alpha_1}^* \mathbf{r}_{\alpha_2}^* \mathbf{r}_{\alpha_3}^*$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$ — трехмерные ковариантные пространственные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам), как известно [67, 209, 335], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\overset{(\star)}{M} \mathbf{r}_{\alpha}^1 \mathbf{r}_{\alpha}^2 \mathbf{r}_{\alpha}^3$ (базисы $\mathbf{r}_{\alpha}^1 \mathbf{r}_{\alpha}^2 \mathbf{r}_{\alpha}^3$), $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$. В самом деле, на основании их определения [67, 209, 335] имеем

$$\mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\alpha\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \quad (7.1.12)$$

где $\overset{(\sim)}{C}^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = (\mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{k}} \times \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{p}}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{q}}$ — контравариантные компоненты дискриминантного тензора [67] в рассматриваемых точках $\overset{(\sim)}{M} \in \overset{(\sim)}{S}$ слоя α соответственно ($\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$).

Легко усмотреть, что (7.1.11) коротко представится в виде

$$\mathbf{r}_{\alpha p} = g_{\alpha p \alpha q}^{\star} \mathbf{r}_{\alpha q}^{\star} = g_{\alpha p q \alpha}^{\star} \mathbf{r}_{\alpha}^{\star}, \quad \star \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \quad (7.1.13)$$

где введены обозначения

$$g_{\alpha\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\tilde{q}}, \quad g_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.14)$$

На основании (7.1.11) и (7.1.14) для $g_{\alpha p \tilde{q}}$ и $g_{\alpha p}^{\tilde{q}}$ имеем

$$\begin{aligned} g_{\alpha p \tilde{q}} &= \mathbf{r}_{\alpha p} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\tilde{q}} = (1 - x^3)g_{\alpha p \tilde{q}}^- + x^3 g_{\alpha p \tilde{q}}^+, \\ g_{\alpha p}^{\tilde{q}} &= \mathbf{r}_{\alpha p} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{q}} = (1 - x^3)g_{\alpha p}^{\tilde{q}}^- + x^3 g_{\alpha p}^{\tilde{q}}^+, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Нетрудно получить выражения и для $g_{\alpha p q}^{\star}$. В самом деле, на основании (7.1.13) и (7.1.15) имеем

$$\begin{aligned} g_{\alpha p q}^{\star} &= \mathbf{r}_{\alpha p} \cdot \mathbf{r}_{\alpha q}^{\star} = g_{\alpha p n \alpha q}^{\star n} = (1 - x^3)^2 g_{\alpha p q}^{\star -} + x^3 (1 - x^3) (g_{\alpha p q}^{\star -} + g_{\alpha p q}^{\star +}) + (x^3)^2 g_{\alpha p q}^{\star +}, \\ \star &\in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Найдем выражения для $\sqrt{g}_{\alpha} = (\mathbf{r}_{\alpha_1} \times \mathbf{r}_{\alpha_2}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha_3}$. В силу первого равенства (8a12) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g}_{\alpha} &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_{\alpha I} \times \mathbf{r}_{\alpha J}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \sqrt{\overset{(\sim)}{g}_{\alpha}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\alpha I}^{\tilde{K}} g_{\alpha J}^{\tilde{L}} = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}_{\alpha}} \det(g_{\alpha p}^{\tilde{q}}) = \sqrt{\overset{(\sim)}{g}_{\alpha}} \det(g_{\alpha P}^{\tilde{Q}}), \\ \sim &\in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

где ϵ^{IJ} , ϵ_{KL} — символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{g}_{\alpha}} = (\mathbf{r}_{\alpha_1}^{\sim} \times \mathbf{r}_{\alpha_2}^{\sim}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha_3}^{\sim}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{\overset{(-)}{g}_{\alpha}} = \sqrt{g}_{\alpha} \Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{\overset{(+)}{g}_{\alpha}} = \sqrt{g}_{\alpha} \Big|_{x^3=1}, \quad \forall \alpha.$$

Из (7.1.17) в свою очередь имеем

$$\overset{(\sim)}{g}_{\alpha}^{\sim} \equiv \sqrt{\overset{(\sim)}{g}_{\alpha} \overset{(\sim)}{g}_{\alpha}^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\alpha I}^{\tilde{K}} g_{\alpha J}^{\tilde{L}} = \det(g_{\alpha P}^{\tilde{Q}}), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \quad (7.1.18)$$

Следует заметить, что аналогично (7.1.17) для более общего случая имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_{\alpha\check{I}} \times \mathbf{r}_{\alpha\check{J}}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} g_{\alpha\check{I}}^{\check{K}} g_{\alpha\check{J}}^{\check{L}} (\mathbf{r}_{\alpha\check{K}} \times \mathbf{r}_{\alpha\check{L}}) \cdot \mathbf{r}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\alpha\check{I}}^{\check{K}} g_{\alpha\check{J}}^{\check{L}} = \\ &= \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}) = \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}), \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha.\end{aligned}$$

Итак,

$$\sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\alpha\check{I}}^{\check{K}} g_{\alpha\check{J}}^{\check{L}} = \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}) = \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)}} \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}), \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.19)$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\vartheta_{\alpha}^{(\sim)} \equiv \sqrt{g_{\alpha}^{(\sim)} g_{\alpha}^{(\check{\sim})-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\alpha\check{I}}^{\check{K}} g_{\alpha\check{J}}^{\check{L}} = \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}) = \det(g_{\alpha\check{P}}^{\check{Q}}), \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.20)$$

Легко усмотреть, что при $\sim = \emptyset, \check{\sim} \in \{-, +\}$ из (7.1.19) получаем (7.1.17), а из (7.1.20) — (7.1.18). Кроме того, из (7.1.20) имеем

$$\vartheta_{\alpha}^{(\sim)} = \vartheta_{\alpha}^{(\check{\sim})-1}, \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha; \quad \vartheta_{\alpha}^{(\approx)} = 1, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.21)$$

С помощью (7.1.20) соотношения (7.1.18) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\vartheta_{\alpha}^{(-)} &= \sqrt{g_{\alpha}^{(-)} g_{\alpha}^{(-)-1}} = (1 - x^3)^2 \vartheta_{\alpha}^{(=)} + x^3 (1 - x^3) g_{\alpha\check{I}}^{\check{I}} + (x^3)^2 \vartheta_{\alpha}^{(\mp)}, \\ \vartheta_{\alpha}^{(+)} &= \sqrt{g_{\alpha}^{(+)} g_{\alpha}^{(+)-1}} = (1 - x^3)^2 \vartheta_{\alpha}^{(\pm)} + x^3 (1 - x^3) g_{\alpha\check{I}}^{\check{I}} + (x^3)^2 \vartheta_{\alpha}^{(\dagger)}, \quad \forall \alpha.\end{aligned} \quad (7.1.22)$$

Не представляет большого труда выражать $\mathbf{r}_{\alpha}^k, \forall \alpha$ через векторы $\mathbf{r}_{\alpha\check{m}}^{\check{m}}$ или $\mathbf{r}_{\alpha}^{\check{m}}, \sim \in \{-, +\}, \forall \alpha$. В самом деле, учитывая первое равенство (7.1.13), из (7.1.12) при $\sim = \emptyset$ получим

$$\mathbf{r}_{\alpha}^k = \frac{1}{2} C_{\alpha}^{kpq} \mathbf{r}_{\alpha p} \times \mathbf{r}_{\alpha q} = \frac{1}{2} C_{\alpha}^{kpq} g_{\alpha p}^{\check{m}} g_{\alpha q}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\alpha\check{m}}^{\check{m}} \times \mathbf{r}_{\alpha\check{n}}^{\check{n}} = \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\alpha p}^{\check{m}} g_{\alpha q}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}_{\alpha}^k = \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\alpha p}^{\check{m}} g_{\alpha q}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.23)$$

где $\epsilon^{kpq}, \epsilon_{lmn}$ — символы Леви-Чивиты.

В силу (7.1.23) можно вводить обозначения

$$\begin{aligned}g_{\alpha\check{l}}^k &= \mathbf{r}_{\alpha}^k \cdot \mathbf{r}_{\alpha\check{l}} = \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\alpha p}^{\check{m}} g_{\alpha q}^{\check{n}}, \\ g_{\alpha}^{k\check{l}} &= \mathbf{r}_{\alpha}^k \cdot \mathbf{r}_{\alpha\check{l}} = \frac{1}{2} \vartheta_{\alpha}^{(\sim)-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_{\alpha p}^{\check{m}} g_{\alpha q}^{\check{n}} g_{\alpha}^{\check{s}\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha,\end{aligned} \quad (7.1.24)$$

с помощью которых соотношение (7.1.23) представится в искомом виде

$$\mathbf{r}_{\alpha}^p = g_{\alpha\check{q}}^p \mathbf{r}_{\alpha\check{q}} = g_{\alpha\check{q}}^{p\check{q}} \mathbf{r}_{\alpha\check{q}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.25)$$

Легко усмотреть, что из первого соотношения (7.1.24) имеем

$$g_{\alpha\tilde{K}}^K = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} g_{\alpha I}^{\tilde{I}} \Rightarrow g_{\alpha\tilde{K}}^{\check{K}} = \overset{(\simeq)}{\vartheta}^{-1} g_{\alpha I}^{\tilde{I}} = \overset{(\sim)}{\vartheta} g_{\alpha I}^{\tilde{I}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \quad (7.1.26)$$

Заметим, что при написании второго соотношения (7.1.26) были учтены (7.1.20) и (7.1.21).

Введем в рассмотрение еще следующие объекты (матрицы):

$$g_{\alpha\beta\check{p}}^{\cdot\check{q}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}}^{\cdot} \cdot \mathbf{r}_{\beta}^{\check{q}}, \quad \simeq, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta \quad (7.1.27)$$

и объекты, получаемые из (7.1.27) жонглированием индексами. Нетрудно подсчитать, что число таких объектов при фиксированных α и β равно 36.

Легко усмотреть, что при $\alpha = \beta$ (7.1.27) содержит (7.1.14), (7.1.16) и (7.1.24). В самом деле, из (7.1.27) имеем

$$g_{\alpha\check{p}}^{\check{q}} = g_{\alpha\alpha\check{p}}^{\cdot\check{q}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}}^{\cdot} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^{\check{q}}, \quad \simeq, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha \quad (7.1.28)$$

и, жонглируя индексами, очевидно, получим рассмотренные выше объекты и еще $g_{\alpha}^{pq} = \mathbf{r}_{\alpha}^p \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^q$, $\forall \alpha$, т. е. и в этом случае число введенных величин равно 36.

Нетрудно заметить, что на основании (7.1.27) и (7.1.28) связи между различными семействами базисов представляются в виде

$$\mathbf{r}_{\alpha\check{p}} = g_{\alpha\check{p}\check{\alpha}\check{n}}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{\alpha}\check{n}} = g_{\alpha\beta\check{p}}^{\cdot\check{n}} \mathbf{r}_{\beta}^{\check{n}}, \quad \simeq, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \quad (7.1.29)$$

сохраняющие силу при жонглировании немymi и свободными индексами.

В силу (7.1.29) легко показать, что имеет место соотношение

$$g_{\alpha\beta\check{p}}^{\cdot\check{q}} = g_{\alpha\delta\check{p}}^{\cdot\check{n}} g_{\delta\beta\check{n}}^{\star\check{q}}, \quad \simeq, \sim, \star \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \delta. \quad (7.1.30)$$

Дифференцируя (7.1.4)–(7.1.6) по x^I и учитывая (7.1.29), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha+\beta I}^+ &= \mathbf{r}_{\alpha I}^- + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\beta} \left[g_{\nu I}^{\bar{k}} - g_{\nu I}^{\bar{k}} \right]_{\nu k} \mathbf{r}_{\nu k}^- = \mathbf{r}_{\alpha I}^+ + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\beta} \left[g_{\nu I}^{\bar{k}} - g_{\nu I}^{\bar{k}} \right]_{\nu k} \mathbf{r}_{\nu k}^-, \\ \partial_I \mathbf{h}(x^1, x^2) &= \sum_{\nu=1}^N \partial_I \mathbf{h}_{\nu}^{\cdot}(x^1, x^2) = \sum_{\nu=1}^N \left[\mathbf{r}_{\nu I}^+(x^1, x^2) - \mathbf{r}_{\nu I}^-(x^1, x^2) \right] = \\ &= \sum_{\nu=1}^N \left[g_{\nu I}^{\bar{k}}(x^1, x^2) - g_{\nu I}^{\bar{k}}(x^1, x^2) \right]_{\nu k} \mathbf{r}_{\nu k}^-(x^1, x^2), \\ \mathbf{r}_{NI}^+(x^1, x^2) &= \mathbf{r}_{1I}^-(x^1, x^2) + \sum_{\nu=1}^N \left[g_{\nu I}^{\bar{k}}(x^1, x^2) - g_{\nu I}^{\bar{k}}(x^1, x^2) \right]_{\nu k} \mathbf{r}_{\nu k}^-(x^1, x^2). \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

Естественно, построенные выше пространственные ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке поверхностей $\overset{(\star)}{\mathbf{S}}_{\alpha}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Отметим еще раз, что структура построенных выше нами $\overset{(\sim)}{\mathbf{S}}_{\alpha}^{\sim}$ -семейств реперов (базисов), $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, такова, что третьи базисные векторы $\mathbf{r}_{\alpha\check{3}} = \mathbf{h}_{\alpha}(x^1, x^2)$,

$\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$ в общем случае не являются перпендикулярным к соответствующим базовым поверхностям $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$. Однако в частном случае они могут быть и перпендикулярами, а в более частном случае могут быть единичными векторами нормалей к базовым поверхностям $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, обозначаемыми соответственно через $\overset{(\sim)}{n}_\alpha$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$.

Из вышеприведенного материала данной главы видно, что для каждого слоя многослойной области имеют место все соотношения первой главы. При условии, что величины, входящие в эти соотношения, снизу надо снабжать индексом, который обозначает номер данного слоя. В этой связи на подробном рассмотрении вопросов о параметризации многослойной области останавливаться не будем. В дальнейшем при необходимости нужные соотношения из соответствующих соотношений первой главы выпишем только что указанным способом (снабжая величины снизу индексом рассматриваемого слоя), а некоторые соотношения, аналогичные которым не входят в первую главу, будем получать.

7.1.4 Мультипликативные базисы

Для представления в предлагаемой теории тензоров, ранг которых не меньше двух, полезно вводить в рассмотрение мультипликативные базисы [67]. Так как мы в основном будем иметь дело с тензорами, ранг которых не больше четырех, поэтому целесообразно вводить мультипликативные базисы, образованные с помощью тензорного умножения двух, трех и четырех базисных векторов из рассматриваемых выше различных семейств базисов. Таким образом, определив $\overset{(\star)}{S}_{\alpha g}$ -семейства базисов, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, не пред-

ставляет труда составить указанные выше мультипликативные базисы рассматриваемого слоя α . В самом деле, введем следующее

Определение 7.1.1. Тензорные произведения базисных векторов из $\overset{(\star)}{S}_{\alpha g}$ -семейств, $\forall \alpha$,

$\star \in \{-, \emptyset, +\}$, обозначаемые

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\alpha \dot{m} \dot{n}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{n}}, & \mathbf{R}_{\alpha \dot{m} \dot{n} \dot{p}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{n}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{p}}, & \mathbf{R}_{\alpha \dot{m} \dot{n} \dot{p} \dot{q}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{n}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{p}} \otimes \mathbf{r}_{\alpha \dot{q}}, \\
 \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha
 \end{aligned} \tag{7.1.32}$$

и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются $\overset{(\star)}{S}_{\alpha g}$ -семействами двух-, трех- и четырехвекторных мультипликативных базисов слоя α .

Если число слоев многослойной тонкой области не меньше двух то в общем случае можно было вводить, например, для мультипликативных базисов следующее

Определение 7.1.2. Тензорные произведения из $\overset{(\sim)}{S}_{\alpha g}$ - и $\overset{(\smile)}{S}_{\beta g}$ -семейств базисных векто-

ров, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha \beta$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\alpha \beta \dot{m} \dot{n}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta \dot{n}}, & \mathbf{R}_{\alpha \beta \dot{m} \cdot \dot{n}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta \dot{n}}, & \mathbf{R}_{\alpha \beta \cdot \dot{m} \dot{n}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta \dot{n}}, & \mathbf{R}_{\alpha \beta \cdot \dot{m} \cdot \dot{n}} &= \mathbf{r}_{\alpha \dot{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta \dot{n}}, \\
 \sim, \smile &\in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha \beta
 \end{aligned} \tag{7.1.33}$$

называются $\overset{(\sim)}{S}_{\alpha \beta g, g}$ -семействами мультипликативных базисов¹, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha \beta$.

¹Напоминаем, что с целью сокращения письма знак тензорного умножения \otimes часто будем опускать.

Следует заметить, что по терминологии, принятой, например, в [335], базисы (7.1.32) и (7.1.33) можно называть многоточечными базисами. Так, что первый из (7.1.32) и (7.1.33) — двухточечные базисы, а второй и третий из (7.1.32) — трех- и четырехточечный базисы соответственно.

7.1.5 Деривационные формулы для мультипликативных базисов

Нетрудно вывести деривационные формулы для мультипликативных базисов, зная аналогичные формулы для базисных векторов. В связи с этим сперва выпишем деривационные формулы для $\overset{(\sim)}{\mathbf{S}}_{\alpha}^{(\sim)}$ -семейств базисных векторов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, которые на основании (1.1.28) получают вид

$$\mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} = \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}, \tilde{n}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{n}} = \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{n}}, \quad \mathbf{r}_{\alpha, \tilde{q}}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{n}} = -\Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{p}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha. \quad (7.1.34)$$

Теперь выведем деривационные формулы, например, для двухвекторных мультипликативных базисов. С этой целью продифференцируем, например, второе соотношение (7.1.33) по x^p . Имеем

$$\begin{aligned} \partial_p \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} &= \partial_p \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta}^{\tilde{n}} + \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{m}} \otimes \partial_p \mathbf{r}_{\beta}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\beta}^{\tilde{n}} + \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\beta, \tilde{p}}^{\tilde{n}}, \\ \sim, \cdot &\in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha, \beta. \end{aligned} \quad (7.1.35)$$

При написании (7.1.35) было использовано правило дифференцирования обычного произведения функций, которое имеет место и в рассматриваемом случае. Можно его строго доказать, но на этом не будем останавливаться.

Учитывая (7.1.34) в (7.1.35), получаем искомую формулу

$$\partial_p \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} = \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\beta}^{\tilde{q}\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.36)$$

Отсюда при $\alpha = \beta$ имеем

$$\partial_p \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} = \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} - \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha}^{\tilde{q}\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha. \quad (7.1.37)$$

Переносим члены, находящиеся в правых частях (7.1.36) и (7.1.37) в их левые части, будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_p \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} + \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\beta}^{\tilde{q}\tilde{n}} &= 0, \\ \partial_p \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} - \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{q}} + \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} \Gamma_{\alpha}^{\tilde{q}\tilde{n}} &= 0, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha, \beta. \end{aligned} \quad (7.1.38)$$

Левые части соотношений (7.1.38) представляют ковариантные производные от мультипликативных базисов $\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}}$ и $\mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}}$, $\sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha, \beta$.

Вводя для ковариантной производной, как обычно принято, обозначение ∇_p , соотношения (7.1.38) коротко можно записать в виде

$$\nabla_p \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}} = 0, \quad \nabla_p \mathbf{R}_{\alpha}^{\cdot\tilde{n}} = 0, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha, \beta, \quad (7.1.39)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами (в жонглировании индексы, обозначающие номера слоев, не участвуют).

Легко усмотреть, что, например, из второго соотношения (7.1.39) имеем формулы

$$\nabla_p \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{m}} = 0, \quad \nabla_p \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{n}} = 0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha. \quad (7.1.40)$$

Заметим, что формулы (7.1.40) можно было получить еще из (7.1.34), перенеся их левые части в правые и вводя обозначение для оператора ковариантной производной.

Аналогично (7.1.39) доказывается справедливость утверждений для мультипликативных базисов более высокого порядка, поэтому на этом останавливаться не будем. Словесно эти утверждения можно сформулировать следующим образом:

Утверждение 9. *Ковариантная производная от мультипликативного базиса любого порядка равняется нулю.*

7.1.6 Представление единичного тензора второго ранга

Нетрудно найти это представление. В самом деле, исходя из обычного представления этого тензора [209, 335], на основании (7.1.29) и (7.1.30) получаем

$$\underline{\mathbf{E}}_{\alpha} = g_{\alpha\bar{p}\alpha}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = g_{\alpha\bar{p}\alpha}^{\check{n}} g_{\alpha\beta}^{\check{m}} \mathbf{r}_{\check{m}}^{\bar{p}} = g_{\alpha\beta}^{\check{m}} \mathbf{r}_{\check{m}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = g_{\alpha\beta}^{\check{m}} g_{\alpha\beta}^{\check{p}} g_{\check{n}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = g_{\check{n}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = \underline{\mathbf{E}}_{\beta}.$$

Таким образом, искомое представление имеет вид

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\alpha\bar{p}} = \mathbf{R}_{\alpha}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = g_{\alpha\bar{p}\alpha}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = \underline{\mathbf{E}}_{\beta} = \mathbf{r}_{\beta}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\beta\check{n}} = \mathbf{R}_{\beta}^{\check{p}} g_{\check{p}\beta}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} = g_{\alpha\beta}^{\check{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}}, \quad (7.1.41)$$

$$\sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta,$$

сохраняющее силу при жонглировании немymi индексами.

Как видно из (7.1.41), введенные выше величины (7.1.27) и (7.1.28) представляют компоненты единичного тензора второго ранга для многослойной тонкой области трехмерного евклидова пространства.

Теперь введем следующие определения:

Определение 7.1.3. Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки любого слоя α в виде (7.1.1) и соблюдением условия (7.1.4) называется новой параметризацией многослойной тонкой области.

Определение 7.1.4. Компоненты $g_{\alpha\beta}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}^{\bar{p}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\simeq \in \{-, +\}$, $\forall \alpha, \beta$ и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются компонентами переноса ЕТВР при новой параметризации многослойной тонкой области.

Определение 7.1.5. Компоненты $g_{\alpha\beta}^{\check{p}\check{q}}$, $g_{\alpha\beta}^{\check{p}} \mathbf{r}_{\check{q}}^{\bar{p}}$, $g_{\alpha\beta}^{\check{p}\check{q}} \mathbf{r}_{\check{q}}^{\bar{p}}$, $\sim = -$ ($\simeq = +$), $\forall \alpha, \beta$ и компоненты переноса $g_{\alpha\beta}^{\check{p}\check{q}}$, $g_{\alpha\beta}^{\check{p}} \mathbf{r}_{\check{q}}^{\bar{p}}$, $\sim = +$, $\simeq = -$ ($\sim = -, \simeq = +$), $\forall \alpha, \beta$, называются основными компонентами ЕТВР при новой параметризации многослойной тонкой области, если в качестве базовых принимаются внутренние (внешние) базовые поверхности слоев.

Нетрудно найти выражения для $g_{\alpha\beta}^{pq}$ посредством основных компонент переноса. В самом деле, на основании (7.1.27) и (7.1.30) имеем

$$g_{\alpha\beta}^{pq} = \mathbf{r}_{\alpha}^{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}_{\beta}^{\bar{q}} = g_{\alpha\bar{p}\alpha}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} g_{\alpha\beta}^{\check{m}\check{n}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.42)$$

Учитывая (7.1.15), получим

$$\begin{aligned} g_{\alpha\bar{p}\alpha}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} g_{\alpha\beta}^{\check{m}\check{n}} &= \left[(1-x^3) g_{\alpha\bar{p}}^{\check{m}} + x^3 g_{\alpha\bar{p}}^{\check{m}} \right] \left[(1-x^3) g_{\beta}^{\check{n}} + x^3 g_{\beta}^{\check{n}} \right] g_{\alpha\beta}^{\check{m}\check{n}} = \\ &= \left[(1-x^3)^2 g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} + x^3 (1-x^3) \left(g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} + g_{\beta\alpha\bar{p}}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} \right) + (x^3)^2 g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} \right] g_{\alpha\beta}^{\check{m}\check{n}} = \\ &= (1-x^3)^2 g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}} + x^3 (1-x^3) \left(g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} + g_{\beta\alpha\bar{p}}^{\check{m}} \right) + (x^3)^2 g_{\alpha\bar{p}\beta}^{\check{m}} g_{\beta}^{\check{n}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \end{aligned} \quad (7.1.43)$$

Сравнивая (7.1.42) и (7.1.43), найдем искомое представление

$$g_{\alpha\beta pq} = (1 - x^3)^2 g_{\alpha\beta pq}^- + x^3(1 - x^3) \left(g_{\alpha\beta pq}^- + g_{\alpha\beta pq}^+ \right) + (x^3)^2 g_{\alpha\beta pq}^+, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Отсюда при $\alpha = \beta$ имеем (7.1.16).

Теорема 7.1.1. (Фундаментальная теорема для многослойной тонкой области в \mathbb{R}^3 при ее новой параметризации) Наличие единичного тензора второго ранга, представленного в виде

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\alpha\tilde{p}\tilde{\alpha}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{n}} = g_{\beta\tilde{p}\tilde{\beta}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{\beta}}^{\tilde{n}} = g_{\alpha\tilde{p}\tilde{\alpha}}^{\cdot\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{\alpha}}^{\cdot\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta,$$

необходимо и достаточно для существования, и притом единственной, с точностью до движения в \mathbb{R}^3 некоторой регулярной многослойной тонкой области при ее новой параметризации. При этом число независимых основных компонент ЕТВР зависит от типа семейства параметризации и числа слоев.

7.1.7 Представление изотропных тензоров четвертого ранга

Эти тензоры занимают особое место в механике деформируемого твердого тела. В частности, ими пользуются, например, при записи различных соотношений МДТТ. Поэтому целесообразно иметь их представление и в предлагаемом варианте теории. Нетрудно выписать эти представления. В самом деле, как легко усмотреть, при полном сокращении индексов к мультипликативным базисам, составленным из четного числа базисных векторов, при условии, что каждая пара зацепленных индексов принадлежит, например, к одному из $\overset{(\sim)}{\alpha}$ -семейств индексов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$, из них получим изотропные тензоры.

Обнаружив такую природу мультипликативных базисов, очевидно, при полном сокращении индексов к мультипликативному базису из четырех базисных векторов должны ожидать, что получим все изотропные тензоры четвертого ранга. Так как число изомеров мультипликативного базиса из четырех базисных векторов равно 24, то нетрудно показать, что при полном сокращении индексов ко всем изомерам указанным выше способом несводимыми друг к другу окажутся только следующие три:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx I} &= \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{m}\cdot\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{m}}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\beta\tilde{n}}^{\tilde{n}} = \underline{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}^{\approx} \underline{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}^{\approx} = \underline{\mathbf{E}}_{\alpha\beta}^{\approx}, & \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx II} &= \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{m}\tilde{n}\cdot\cdot} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{m}}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\beta\tilde{n}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\beta}^{\tilde{n}}, \\ \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx III} &= \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\cdot\tilde{n}\tilde{m}\cdot\cdot} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{m}}^{\tilde{m}} \underline{\mathbf{E}}_{\alpha}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\alpha\tilde{m}}^{\tilde{m}} \underline{\mathbf{E}}_{\alpha}^{\tilde{n}}, \quad \sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \end{aligned} \quad (7.1.44)$$

Так как в силу, например, (7.1.41) $\mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\alpha\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\beta}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\beta\tilde{p}}$, поэтому имеем

$$\underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx I} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx I} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx I}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx II} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx II} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx II}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx III} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx III} = \underline{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}^{\approx III}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Опуская индексы α, β и \sim, \cdot , тензоры (7.1.44) полностью совпадут с изотропными тензорами четвертого ранга, рассмотренными в [209], как и ожидалось.

7.1.8 О ковариантной производной от компонент тензоров

Так как выписанные ниже формулы для ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго рангов легко обобщаются на компоненты тензоров более высокого ранга, поэтому ограничимся нахождением ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго рангов.

Зная деривационные формулы для мультипликативных базисов, легко определить ковариантную производную от компонент тензоров. В самом деле, пусть \mathbf{A}_α тензор первого ранга (вектор), относящийся к слою α , тогда его можно представить в виде

$$\mathbf{A}_\alpha = A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} = A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.45)$$

Дифференцируя первое равенство (7.1.45) по x^n и учитывая первую из деривационных формул (7.1.34), будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{A}_\alpha &= \partial_n (A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}) = (\partial_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}}) \mathbf{r}_{\tilde{p}} + A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}\tilde{m}} = (\partial_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}}) \mathbf{r}_{\tilde{p}} + A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \Gamma_{\alpha\tilde{p}\tilde{m}}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = (\partial_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} + A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \Gamma_{\alpha\tilde{p}\tilde{m}}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{m}}, \\ &\sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему соотношению, дифференцируя $\mathbf{A}_\alpha = A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}$ по x^n и учитывая вторую из деривационных формул (7.1.34), получим

$$\partial_n \mathbf{A}_\alpha = \partial_n (A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}) = (\partial_n A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} - A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha.$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{A}_\alpha = \nabla_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \nabla_n A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha,$$

где для ковариантных производных введены обозначения

$$\nabla_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} = \partial_n A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} + A_{\alpha\tilde{p}}^{\tilde{p}} \Gamma_{\alpha\tilde{p}\tilde{m}}^{\tilde{m}}, \quad \nabla_n A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} = \partial_n A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} - A_{\tilde{p}\alpha}^{\tilde{p}} \Gamma_{\alpha\tilde{m}\tilde{p}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha. \quad (7.1.46)$$

Теперь рассмотрим тензор второго ранга $\mathbf{H}_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta$ и представим его в следующем виде:

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} = H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} = H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.47)$$

Дифференцируя, например, первое равенство (7.1.47) по x^n и учитывая деривационную формулу (7.1.36), найдем

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{H}_{\alpha\beta} &= \partial_n (H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}) = (\partial_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}) \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} + H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \partial_n \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} = (\partial_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}) \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} + H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{r}\tilde{n}}^{\tilde{r}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} - \\ &- H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{q}\tilde{n}}^{\tilde{s}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} = (\partial_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} + H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{r}\tilde{n}}^{\tilde{r}} - H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{q}\tilde{n}}^{\tilde{s}}) \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{H}_{\alpha\beta} = (\nabla_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}) \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta,$$

где для ковариантной производной введено обозначение

$$\nabla_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} = \partial_n H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} + H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{r}\tilde{n}}^{\tilde{r}} - H_{\alpha\beta}^{\tilde{p}\tilde{q}} \Gamma_{\alpha\tilde{q}\tilde{n}}^{\tilde{s}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.48)$$

Как видно из формул (7.1.46) и (7.1.48), нахождение выражений ковариантных производных от компонент тензоров, представленных в разных семействах базисов, производится по обычному правилу [67, 209, 335] с тем отличием, что семейства символов Кристоффеля определяются семействами немых индексов. Так, например, во втором слагаемом в правой части (7.1.48) немой индекс принадлежит к одному из $\binom{\sim}{\alpha}$ -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$ и поэтому семейство символов Кристоффеля соответственно является одним из $\binom{\sim}{\alpha}$ -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha$.

Теперь докажем следующее

Утверждение 10. Ковариантная производная от компонент единичного тензора второго ранга равняется нулю.

С целью доказательства этого утверждения опускаем индекс \tilde{q} в (7.1.27) и потом продифференцируем по x^n . Имеем

$$\partial_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\ddot{\cdot}} = \partial_n (\mathbf{r}_{\alpha\check{p}} \cdot \mathbf{r}_{\beta\check{q}}) = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}\check{n}} \cdot \mathbf{r}_{\beta\check{q}} + \mathbf{r}_{\alpha\check{p}} \cdot \mathbf{r}_{\beta\check{q}\check{n}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

Отсюда в силу первого соотношения деривационных формул (7.1.34) получаем

$$\partial_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\ddot{\cdot}} = g_{\alpha\beta\check{r}\check{q}\check{n}}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\alpha\check{p}\check{r}}^{\check{r}} + g_{\alpha\beta\check{p}\check{r}\check{n}}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\beta\check{q}\check{r}}^{\check{r}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.49)$$

Переносим члены, находящиеся в правой части (7.1.49), в левую и вводя обозначение для ковариантной производной, будем иметь

$$\nabla_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\ddot{\cdot}} = \partial_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\ddot{\cdot}} - g_{\alpha\beta\check{r}\check{q}\check{n}}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\alpha\check{p}\check{r}}^{\check{r}} - g_{\alpha\beta\check{p}\check{r}\check{n}}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\beta\check{q}\check{r}}^{\check{r}} = 0, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.50)$$

Заметим, что, если мы исходили бы из (7.1.27) при любом другом расположении индексов \check{p} и \check{q} , конечно, во всех случаях аналогично (7.1.50) доказали бы справедливость утверждения. Таким образом,

$$\nabla_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\ddot{\cdot}} = 0, \quad \nabla_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\check{\cdot}} = 0, \quad \nabla_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\check{\cdot}} = 0, \quad \nabla_n g_{\alpha\beta\check{p}\check{q}}^{\check{\cdot}} = 0, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.1.51)$$

Равенства (7.1.51) полностью доказывают утверждение.

Из утверждения 10 непосредственно вытекает

Следствие. Ковариантная производная от компонент изотропных и демитропных тензоров равняется нулю.

Заметим, что компоненты демитропных тензоров, которые являются тензорами нечетного ранга, меняют знак при несобственном ортогональном преобразовании, тогда как компоненты изотропных тензоров остаются неизменными при любом ортогональном преобразовании. Кроме того, единственным демитропным тензором третьего ранга является дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивиты) [209]. Поэтому, вводя в рассмотрение в предлагаемом варианте теории, например, трехточечный дискриминантный тензор

$$\mathbf{C} \underset{\cong}{=} C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}\check{n}}^{\check{r}} \mathbf{r}_{\alpha}^{\check{r}} \mathbf{r}_{\beta}^{\check{q}} \mathbf{r}_{\gamma}^{\check{n}}, \quad C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} = (\mathbf{r}_{\alpha\check{p}} \times \mathbf{r}_{\beta\check{q}}) \cdot \mathbf{r}_{\gamma\check{n}}, \quad \sim, \simeq, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \quad (7.1.52)$$

в силу следствия утверждения 10 будем иметь соотношения

$$\nabla_m C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} = \partial_m C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} - C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\check{r}\check{q}\check{n}}^{\check{r}} - C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\check{p}\check{r}\check{n}}^{\check{r}} - C_{\alpha\beta\gamma}^{\ddot{\cdot}} \Gamma_{\gamma\check{n}\check{m}}^{\check{r}} = 0, \quad (7.1.53)$$

$$\sim, \simeq, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma,$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Следует заметить, что (7.1.53) можно получить еще, продифференцировав второе соотношение (7.1.52) по x^m и учитывая деривационные формулы.

7.2 Связи между различными семействами параметризаций многослойной тонкой области

Введем следующее

Определение 7.2.1. Будем говорить, что связь между двумя семействами параметризаций многослойной области тонкого тела осуществлена, если найдены связи между порождающими эти семейства параметризаций семействами базисов и, вообще, между порожденными порождающими семействами базисов любыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими связываемые параметризации.

Очевидно, зная связь между двумя порождающими рассматриваемые семейства параметризаций семействами базисов, легко найти связь, например, между порожденными ими семействами символов Кристоффеля и, вообще, между порожденными ими любыми семействами соответствующих геометрических характеристик. Мы ограничимся нахождением связей между некоторыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими эти параметризации.

7.2.1 Связи между различными семействами мультипликативных базисов

Как видно, из (7.1.29) связи между $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{g}}$ - и $\overset{(\sim)}{\underset{\beta}{S}}_{\underset{\beta}{g}}$ -семействами базисов, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$,

$\forall \alpha, \beta$, осуществляются соотношением

$$\mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} = g_{\alpha\tilde{p}} \cdot \check{n} \mathbf{r}_{\beta\check{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \quad (7.2.1)$$

конечно, сохраняющим силу при жонглировании индексами.

В силу (7.2.1) легко найти связи между многоточечными мультипликативными базами. В самом деле, нетрудно видеть, что связи, например, между двуточечными мультипликативными базами будут иметь вид

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{q} = g_{\alpha\gamma\tilde{p}} \cdot \hat{m} g_{\beta\delta} \cdot \check{n} \mathbf{R}_{\gamma\delta} \cdot \check{m}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \quad (7.2.2)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Следует заметить, что обобщение (7.2.2) на мультипликативные базисы более высокого порядка не представляет большого труда и поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем, а в случае надобности по аналогии (7.2.2) выпишем нужные соотношения.

7.2.2 Связи между различными семействами символов Кристоффеля,

Найдем связи между $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{g}}$ - и $\overset{(\sim)}{\underset{\beta}{S}}_{\underset{\beta}{g}}$ -семействами символов Кристоффеля², $\sim, \smile \in$

$\{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha, \beta$. Дифференцируя (7.2.1) по x^q и пользуясь определениями символов Кристоффеля (1.1.28), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}\check{q}} &= \partial_q \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}} = \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{n} \right) \mathbf{r}_{\beta\check{n}} + g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{n} \mathbf{r}_{\beta\check{n}\check{q}} = \\ &= \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{n} \right) \mathbf{r}_{\beta\check{n}} + g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{m} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\beta\check{n}} = \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{n} + g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{m} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) \mathbf{r}_{\beta\check{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\tilde{p}\check{q}} &= \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{n} + g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{m} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) \mathbf{r}_{\beta\check{n}} = \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}\check{n}} - g_{\alpha\beta\tilde{p}} \cdot \check{m} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q},\check{n}} \right) \mathbf{r}_{\beta\check{n}}, \\ \sim, \smile &\in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

² Классификация символов Кристоффеля подробнее рассмотрена в [234, 250].

где второе равенство получается аналогично первому.

Умножая (7.2.3) почленно на $\mathbf{r}_{\alpha\tilde{l}}^{\cdot\check{k}} = g_{\alpha\beta\tilde{l}}^{\cdot\check{k}} \mathbf{r}_{\beta\check{k}}^{\cdot\check{k}}$ и $\mathbf{r}_{\alpha}^{\tilde{l}} = g_{\alpha\beta}^{\tilde{l}} \mathbf{r}_{\beta}^{\check{k}}$ и учитывая определения символов Кристоффеля (1.1.28), найдем искомые связи в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\tilde{p}\check{q},\tilde{l}} &= g_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot} \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{n}} + g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{m}} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) = g_{\alpha\beta\tilde{l}}^{\cdot\check{n}} \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}\check{n}}^{\cdot\cdot} - g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{m}} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q},\check{n}}^{\cdot\cdot} \right), \\ \Gamma_{\alpha\tilde{p}\check{q}}^{\tilde{l}} &= g_{\alpha\beta}^{\tilde{l}} \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{n}} + g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{m}} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) = g_{\alpha\beta}^{\tilde{l}} \left(\partial_q g_{\alpha\beta\tilde{p}\check{n}}^{\cdot\cdot} - g_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{m}} \Gamma_{\beta\check{m}\check{q},\check{n}}^{\cdot\cdot} \right), \\ &\sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha, \beta.\end{aligned}\quad (7.2.4)$$

Следует заметить, что, при $\alpha = \beta$, из (7.2.4) получаются соотношения, осуществляющие связи между различными семействами символов Кристоффеля рассматриваемого слоя, которые полностью совпадут с аналогичными соотношениями из работ [234, 250] (см. также выше первую главу).

7.2.3 Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора

Предполагается, что рассматриваемый тензор представлен в различных семействах мультипликативных базисов. Ограничимся рассмотрением тензора второго ранга $\underline{\mathbf{H}}$, представления которого имеют вид

$$\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}} \cdot \check{q} = \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n}, \quad \sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \quad (7.2.5)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

В силу (7.2.2) из (7.2.5) легко получаем

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{q}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}} \cdot \check{q} = g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}} \cdot \check{q}, \quad \sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость мультипликативных базисов $\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\tilde{p}} \cdot \check{q}$, $\sim, \cdot \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall \alpha, \beta$, искомые связи между компонентами представятся в виде

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{q}} = g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n}, \quad \sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \quad (7.2.6)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Нетрудно найти связи и между ковариантными производными от компонент тензора $\underline{\mathbf{H}}$. В самом деле, в силу утверждения 1.2 и правила нахождения ковариантной производной от суммы и произведения компонент тензоров из (7.2.6) имеем

$$\begin{aligned}\nabla_s \mathbf{H}_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{q}} &= \nabla_s (g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n}) = \nabla_s (g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}}) \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n} + g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \nabla_s \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n} = g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \nabla_s \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n}, \\ &\sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta.\end{aligned}$$

Таким образом, искомые связи имеют вид

$$\nabla_s \mathbf{H}_{\alpha\beta\tilde{p}}^{\cdot\check{q}} = g_{\alpha\gamma\tilde{p}\hat{m}}^{\cdot\cdot} g_{\beta\delta}^{\check{q}\check{n}} \nabla_s \mathbf{H}_{\gamma\delta}^{\hat{m}} \cdot \check{n}, \quad \sim, \cdot, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta. \quad (7.2.7)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами за исключением индекса s .

Заметим, что обобщение (7.2.6) и (7.2.7) на компоненты тензоров более высокого ранга не представляет никакого труда.

7.3 О компонентах ЕТВР

Как было сказано выше, не будем выписывать все соотношения этого раздела, так как для рассматриваемого слоя можно их получить из соответствующих соотношений первой главы, если коренные буквы в этих соотношениях снабдить снизу индексом, обозначающем номер слоя. Итак, считая известными эти соотношения и принимая за основную базовую внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}_\alpha$ слоя α , в силу определения (7.1.5) при $\beta = \alpha$ основными компонентами ЕТВР слоя α будут компоненты $g_{\alpha p q}^{\bar{-}}$, $g_{\alpha p}^{\bar{q}}$, $g_{\alpha}^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{\alpha p q}^{\bar{+}}$, $g_{\alpha p}^{\bar{q}}$, играющие важную роль в том смысле, что остальные компоненты и большинство геометрических характеристик выражаются через них.

Следует обратить внимание на компоненты $g_{\alpha\beta}^{\bar{q}}$. В частности, заслуживает внимания компоненты $g_{\alpha\beta p}^{\bar{q}} = \mathbf{r}_{\alpha p}^{\bar{+}} \cdot \mathbf{r}_{\beta}^{\bar{q}}$ при $\beta = \alpha + 1$ ($g_{\alpha\alpha+1 p}^{\bar{q}} = \mathbf{r}_{\alpha p}^{\bar{+}} \cdot \mathbf{r}_{\alpha+1}^{\bar{q}}$), называемые компонентами контакта ЕТВР.

7.4 Выражение различных семейств символов Кристоффеля данного слоя через основные компоненты ЕТВР того же слоя

Ограничимся рассмотрением $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$ -семейств символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, а за основную базовую принимаем внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}_\alpha$. Тогда, так как по определению (7.1.5) основными компонентами ЕТВР слоя α являются компоненты $g_{\alpha p q}^{\bar{-}}$, $g_{\alpha p}^{\bar{q}}$, $g_{\alpha}^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{\alpha p q}^{\bar{+}}$, $g_{\alpha p}^{\bar{q}}$, то задача заключается в выражении символов Кристоффеля (1.1.28) через них. С целью разрешения этой задачи разобьем ее на две части:

1. Выразим $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$ -семейства символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, +\}$, через основные компоненты ЕТВР слоя α .
2. Выразим $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$ -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР слоя α .

7.4.1 Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями слоя α , через основные компоненты ЕТВР этого слоя

Аналогично (1.1.28) для $\overset{(\sim)}{S}_\alpha$ -семейств символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, +\}$, будем иметь

$$\Gamma_{\alpha\check{p}\check{q}\check{l}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}}, \quad \Gamma_{\alpha\check{p}\check{q}}^{\check{k}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{\alpha}}^{\check{k}} = g_{\alpha\check{p}\check{q}}^{\check{k}l} \Gamma_{\alpha\check{p}\check{q},l}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (7.4.1)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\check{P}\check{q}} &= \partial_q \partial_P \mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}, \quad \mathbf{r}_{\alpha\check{P}\check{Q}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{Q}\check{P}}, \quad \mathbf{r}_{\alpha\check{P}\check{z}} = 0, \quad \mathbf{r}_{\alpha\check{z}\check{Q}} \neq 0, \quad \mathbf{r}_{\alpha\check{P}\check{z}} \neq \mathbf{r}_{\alpha\check{z}\check{P}}, \\ \mathbf{r}_{\alpha\check{z}\check{q}} &= \partial_q \mathbf{r}_{\alpha\check{z}} = \partial_q \mathbf{h}_{\alpha}(x^1, x^2) = \mathbf{r}_{\alpha\check{q}}^+ - \mathbf{r}_{\alpha\check{q}}^-, \quad \mathbf{r}_{\alpha\check{z}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{z}} = \mathbf{h}_{\alpha}(x^1, x^2), \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\alpha\check{p}\check{q},\check{l}} \sim (\Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{L}}, \Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{z}}, \Gamma_{\alpha\check{z}\check{Q},\check{l}}, \Gamma_{\alpha\check{p}\check{z},\check{l}}), \quad \check{\nu} \in \{-, +\},$$

где \sim — символ эквивалентности.

На основании третьего и шестого соотношений (7.4.2) и (7.4.1) нетрудно показать, что

$$\Gamma_{\alpha\check{p}\check{z},\check{l}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{p}\check{z}} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\check{l}} = 0, \quad \Gamma_{\alpha\check{z}\check{Q},\check{l}} = g_{\check{Q}\check{l}}^+ - g_{\check{Q}\check{l}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \quad (7.4.3)$$

Следует заметить, что

$$\Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{L}} = \frac{1}{2}(-\partial_L g_{\alpha\check{P}\check{Q}} + \partial_P g_{\alpha\check{Q}\check{L}} + \partial_Q g_{\alpha\check{L}\check{P}}) = \bar{\Gamma}_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}, \quad (7.4.4)$$

где, в силу соотношения первой строки (1.1.29) $\bar{\Gamma}_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{L}} = \overset{(\check{\nu})}{\Sigma}_{\alpha}$ -семейства символов Кристоффеля первого рода.

Далее на основании (7.4.1), шестого и седьмого соотношений (7.4.2) имеем

$$\Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{z}} = \mathbf{r}_{\alpha\check{P}\check{Q}} \cdot \mathbf{h}_{\alpha} = \partial_Q (\mathbf{r}_{\alpha\check{P}} \cdot \mathbf{h}_{\alpha}) - \mathbf{r}_{\alpha\check{P}} \cdot \mathbf{h}_{\alpha Q} = \partial_Q g_{\alpha\check{P}\check{z}} - g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}$$

и отсюда, учитывая второе соотношение (7.4.2), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{z}} &= \Gamma_{\alpha\check{Q}\check{P},\check{z}} = \frac{1}{2}(\partial_P g_{\alpha\check{Q}\check{z}} + \partial_Q g_{\alpha\check{P}\check{z}} - g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^+ - g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^- + g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^-) = \\ &= \partial_Q g_{\alpha\check{P}\check{z}} - g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\alpha\check{Q}\check{P}}^- = \partial_P g_{\alpha\check{Q}\check{z}} - g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^-, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Не представляет большого труда найти выражения и для символов Кристоффеля второго рода. В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\alpha\check{p}\check{q}}^{\check{k}} \sim (\bar{\Gamma}_{\alpha\check{P}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\alpha\check{z}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\alpha\check{p}\check{z}}^{\check{k}})$$

и на основании (7.4.1) и (7.4.3)–(7.4.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q}}^{\check{k}} &= g_{\alpha}^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{l}} = g_{\alpha}^{\check{k}\check{z}} (\partial_P g_{\alpha\check{Q}\check{z}} - g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\alpha\check{P}\check{Q}}^-) + g_{\alpha}^{\check{k}\check{L}} \bar{\Gamma}_{\alpha\check{P}\check{Q},\check{L}}, \\ \Gamma_{\alpha\check{z}\check{Q}}^{\check{k}} &= g_{\alpha}^{\check{k}} - g_{\alpha\check{Q}}^{\check{k}}, \quad \Gamma_{\alpha\check{p}\check{z}}^{\check{k}} = 0, \quad \check{\nu} \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

7.4.2 Выражение семейства символов Кристоффеля относительно семейства базисов, связанного с эквидистантной поверхностью слоя α через основные компоненты ЕТВР

Рассмотрим два способа нахождения выражений для $\overset{(\check{\nu})}{\Sigma}_{\alpha}$ -семейства символов Кристоффеля.

Первый из которых заключается в нахождении связи между $\overset{(\check{\nu})}{\Sigma}_{\alpha}$ - и $\overset{(\check{\nu})}{\Sigma}_{\alpha}^g$ -семействами

символов Кристоффеля таким образом, что S_{α}^g -семейства символов оказались определенными посредством $S_{\alpha}^{(\sim)g}$ -семейств символов, а второй — в определении S_{α}^g -семейств символов непосредственно через компоненты переноса ЕТВР слоя α .

Нетрудно заметить, что в первом случае по более общим соотношениям (7.2.4) остается только лишь выписать искомые связи. В самом деле, при $\sim = \emptyset$, $\beta = \alpha$ из (7.2.4) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha p q, l} &= g_{\alpha l \check{n}} \left(\partial_q g_{\alpha \check{p}}^{\check{n}} + g_{\alpha \check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\beta \check{m} \check{q}}^{\check{n}} \right) = g_{\alpha l}^{\check{n}} \left(\partial_q g_{\alpha p \check{n}} - g_{\alpha p}^{\check{m}} \Gamma_{\alpha \check{m} \check{q}, \check{n}} \right), \\ \Gamma_{\alpha \check{p} q}^s &= g_{\alpha}^s \left(\partial_q g_{\alpha \check{p}}^{\check{n}} + g_{\alpha \check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\alpha \check{m} \check{q}}^{\check{n}} \right) = g_{\alpha}^{s \check{n}} \left(\partial_q g_{\alpha p \check{n}} - g_{\alpha p}^{\check{m}} \Gamma_{\alpha \check{m} \check{q}, \check{n}} \right), \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, +\}, \forall \alpha.\end{aligned}\quad (7.4.7)$$

Далее, учитывая (7.1.15) и (7.4.3) — (7.4.6) подходящим образом в (7.4.7), окончательно получим искомые выражения для S_{α}^g -семейств символов Кристоффеля, на выписывании которых останавливаться не будем.

В случае второго способа нахождения выражения для S_{α}^g -семейства символов Кристоффеля поступаем следующим образом: сперва выписываем представления S_{α}^g -семейства символов Кристоффеля через S_{α}^g -семейство компонент ЕТВР, а затем в силу (7.1.16) учитываем, что $g_{\alpha r s} = g_{\alpha r \check{n}} g_{\alpha}^{\check{n} s}$, $\check{\sim} \in \{-, +\}$. В результате, например, для S_{α}^g -семейства символов Кристоффеля первого рода будем иметь

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha p q, l} &= \frac{1}{2} \left(-\partial_l g_{\alpha p q} + \partial_p g_{\alpha q l} + \partial_q g_{\alpha l p} \right) = \frac{1}{2} \left[-\partial_l (g_{\alpha p \check{n}} g_{\alpha}^{\check{n} q}) + \partial_p (g_{\alpha q \check{n}} g_{\alpha}^{\check{n} l}) + \partial_q (g_{\alpha l \check{n}} g_{\alpha}^{\check{n} p}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-(\partial_l g_{\alpha p \check{n}}) g_{\alpha}^{\check{n} q} - g_{\alpha p \check{n}} \partial_l g_{\alpha}^{\check{n} q} + (\partial_p g_{\alpha q \check{n}}) g_{\alpha}^{\check{n} l} + g_{\alpha q \check{n}} \partial_p g_{\alpha}^{\check{n} l} + (\partial_q g_{\alpha l \check{n}}) g_{\alpha}^{\check{n} p} + g_{\alpha l \check{n}} \partial_q g_{\alpha}^{\check{n} p} \right], \quad \check{\sim} \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (7.4.8)$$

Учитывая (7.1.15), из последнего соотношения получим искомое выражение. Однако с целью сокращения письма не для всех компонент переноса подставим выражения по (7.1.15), а лишь для тех, которые стоят под операции дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha p q, l} &= \frac{1}{2} \left\{ -\left\{ \partial_l g_{\alpha p \check{n}} + \partial_l [x^3 (g_{\alpha p \check{n}}^+ - g_{\alpha p \check{n}}^-)] \right\} g_{\alpha}^{\check{n} q} - g_{\alpha p \check{n}} \partial_l [x^3 (g_{\alpha}^{\check{n} q} - g_{\alpha}^{\check{n} q})] + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_p g_{\alpha q \check{n}} + \partial_p [x^3 (g_{\alpha q \check{n}}^+ - g_{\alpha q \check{n}}^-)] \right\} g_{\alpha}^{\check{n} l} + g_{\alpha q \check{n}} \partial_p [x^3 (g_{\alpha}^{\check{n} l} - g_{\alpha}^{\check{n} l})] \right\} + \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_q g_{\alpha l \check{n}} + \partial_q [x^3 (g_{\alpha l \check{n}}^+ - g_{\alpha l \check{n}}^-)] \right\} g_{\alpha}^{\check{n} p} + g_{\alpha l \check{n}} \partial_q [x^3 (g_{\alpha}^{\check{n} p} - g_{\alpha}^{\check{n} p})] \right\}, \quad \check{\sim} \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (7.4.9)$$

Видно, что в связи с громоздкостью (7.4.9) предпочтительно пользоваться (7.4.7). Заметим, что в силу первого равенства первого соотношения (7.4.7) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}} &= \Gamma'_{\alpha \check{q} \check{p}, \check{l}} = g_{\alpha \check{q}}^{\check{3}} \Gamma_{\alpha \check{3} \check{p}, \check{l}} + \Gamma_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}} = g_{\alpha \check{p}}^{\check{3}} \Gamma_{\alpha \check{3} \check{q}, \check{l}} + \Gamma_{\alpha \check{q} \check{p}, \check{l}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(g_{\alpha \check{p}}^{\check{3}} \Gamma_{\alpha \check{3} \check{q}, \check{l}} + g_{\alpha \check{q}}^{\check{3}} \Gamma_{\alpha \check{3} \check{p}, \check{l}} + \Gamma_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}} + \Gamma_{\alpha \check{q} \check{p}, \check{l}} \right), \quad \check{\sim} \in \{-, +\}, \\ \Gamma_{\alpha p q, l} \Big|_{\check{\sim} = -}^{x^3=0} &= \Gamma'_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}}, \quad \Gamma_{\alpha p q, l} \Big|_{\check{\sim} = +}^{x^3=1} = \Gamma'_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}}.\end{aligned}$$

Отсюда в свою очередь заключаем, что

$$\Gamma'_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}} \neq \Gamma_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}}, \quad \Gamma'_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}} = \Gamma_{\alpha \check{p} \check{q}, \check{l}}, \quad \check{\sim} \in \{-, +\}.$$

7.5 Системы уравнений движения в моментах многослойных тонких тел с одним малым размером

Чтобы получить какое-нибудь соотношение (систему уравнений, ОС, граничные и начальные условия) в моментах многослойных тонких тел при рассматриваемой параметризации области тонкого тела достаточно в соответствующем соотношении однослойного тонкого тела коренные буквы величин снабдить снизу индексом α , который обозначает номер слоя α и придать этому индексу значения от 1 до K , где K — количество слоев. Следовательно, для корректной постановки задач к уравнениям движения и граничным и начальным условиям в моментах, нужно добавить межслойные контактные условия. Ниже, пользуясь этим правилом, выпишем некоторые системы уравнений в моментах многослойных тонких тел, а также рассмотрим межслойные контактные условия при различных условиях связи соседних поверхностей слоев.

7.5.1 Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно систем полиномов Чебышева многослойных тонких тел с одним малым размером

Ограничимся получением систем уравнений движения приближений $(0, N)$ и $(1, N)$ в моментах. Пользуясь указанным выше правилом, искомые системы уравнений на основании (3.3.84) и (3.3.85) представляются соответственно в виде

$$\left\{ \nabla_I \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{I}} - g_{\alpha p}^3 \left[k \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}_\alpha^{(p)\bar{I}} - \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{I}} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2(k+1) \sum_{p=k}^N \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \mathbf{P}_\alpha^{(p)\bar{3}} \right\} + \rho_\alpha^{(k)} \mathbf{F}_\alpha = \rho_\alpha \partial_t^2 \mathbf{u}_\alpha, \quad (7.5.1)$$

$$\left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \mathbf{C}_\alpha^2 \otimes \mathbf{P}_\alpha^{(k)} + \rho_\alpha^{(k)} \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_\alpha, \quad k = \overline{0, N}, \quad \alpha = \overline{0, K};$$

$$\left\{ \nabla_I \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{I}} + \frac{1}{4} (g_{\alpha I}^{\bar{J}} - g_{\alpha I}^{\bar{J}}) \nabla_J \left(\mathbf{P}_\alpha^{(k-1)\bar{I}} + 2\mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{I}} + \mathbf{P}_\alpha^{(k+1)\bar{I}} \right) - \right. \\ \left. - g_{\alpha I}^3 \left\{ g_{\alpha J}^{\bar{I}} \left[k \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{J}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}_\alpha^{(p)\bar{J}} - \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{J}} \right) \right] + \frac{1}{4} (g_{\alpha J}^{\bar{I}} - g_{\alpha J}^{\bar{I}}) \left[(k-1) \mathbf{P}_\alpha^{(k-1)\bar{J}} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 4(k+2) \mathbf{P}_\alpha^{(k)\bar{J}} - (k+3) \mathbf{P}_\alpha^{(k+1)\bar{J}} + 8(k+1) \left(\sum_{p=k}^N \mathbf{P}_\alpha^{(p)\bar{J}} \right) \right] \right\} + \right. \\ \left. + 2(k+1) \left[\sum_{p=k}^N (1 - (-1)^{k+p}) \mathbf{P}_\alpha^{(p)\bar{3}} \right] \right\} + \rho_\alpha^{(k)} \mathbf{F}_\alpha = \rho_\alpha \partial_t^2 \mathbf{u}_\alpha, \quad (7.5.2)$$

$$\left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \mathbf{C}_\alpha^2 \otimes \mathbf{P}_\alpha^{(k)} + \rho_\alpha^{(k)} \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_\alpha, \quad k = \overline{0, N}, \quad \alpha = \overline{0, K}.$$

7.5.2 Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно систем полиномов Лежандра многослойных тонких тел с одним малым размером

В этом случае ограничимся выводом только систем уравнений движения приближений $(0, N)$ и $(1, N)$ в моментах с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях, так как системы уравнений без учета граничных условий на лицевых

поверхностях, которые можно вывести из (3.3.89) и (3.3.90) соответственно, будут иметь аналогичный (7.5.1) и (7.5.2) вид. Итак, в силу (3.3.91) и (3.3.92) искомые уравнения представляются в форме

$$\left\{ \nabla_I \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} - g_{\alpha I}^{\bar{3}} \left[k \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}_\alpha^{(p)-} \right] - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}_\alpha^{(p)-} + \right. \\ \left. + (2k+1) \left[\sqrt{g_{\alpha}^{\bar{3}\bar{3}}^{++(+)} \mathbf{P}_\alpha} + (-1)^k \sqrt{g_{\alpha}^{\bar{3}\bar{3}}^{--(-)} \mathbf{P}_\alpha} \right] \right\} + \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(k)} = \rho_\alpha \partial_t^2 \mathbf{u}_\alpha^{(k)}, \quad (7.5.3)$$

$$\left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{P}_{\alpha}^{\bar{2}} + \rho_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha}^{(k)} = \mathbf{J}_{\alpha} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(k)}, \quad k = \overline{0, N}, \quad \alpha = \overline{0, K};$$

$$\left\{ \nabla_I \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} + \frac{1}{2} (g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}}) \left(\frac{k}{2k-1} \nabla_P \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} + \nabla_P \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} + \frac{k+1}{2k+3} \nabla_P \mathbf{P}_\alpha^{(k+1)-} \right) - \right. \\ \left. - (2k+1) \sum_{p=0}^k [1 - (-1)^{k+p}] \mathbf{P}_\alpha^{(p)-} - g_{\alpha P}^{\bar{3}} \left[g_{\alpha M}^{\bar{P}} \left[k \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}_\alpha^{(p)-} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + (g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}}) \left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)} \mathbf{P}_\alpha^{(k-1)-} + k \mathbf{P}_\alpha^{(k)-} - \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \mathbf{P}_\alpha^{(k+1)-} - (2k+1) \sum_{p=0}^k \mathbf{P}_\alpha^{(p)-} \right] \right] + \right. \\ \left. + (2k+1) \left[\sqrt{g_{\alpha}^{\bar{3}\bar{3}}^{++(+)} \mathbf{P}_\alpha} + (-1)^k \sqrt{g_{\alpha}^{\bar{3}\bar{3}}^{--(-)} \mathbf{P}_\alpha} \right] \right\} + \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(k)} = \rho_\alpha \partial_t^2 \mathbf{u}_\alpha^{(k)}, \\ \left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{2}} \otimes \mathbf{P}_{\alpha}^{\bar{2}} + \rho_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha}^{(k)} = \mathbf{J}_{\alpha} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(k)}, \quad k = \overline{0, N}, \quad \alpha = \overline{0, K}.$$

Следует заметить, что $\mathbf{P}_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{\mu}_\alpha^{(+)})$ и $\mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(\boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)})$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$) являются векторами напряжения (моментного напряжения) взаимодействия между слоями α и $\alpha+1$, действующими на поверхностях $\bar{S}_\alpha^{(+)}$ и $\bar{S}_{\alpha+1}^{(-)}$ соответственно, а $\mathbf{P}_1^{(+)}(\boldsymbol{\mu}_1^{(+)})$ и $\mathbf{P}_K^{(-)}(\boldsymbol{\mu}_K^{(-)})$ – заданными векторами напряжения (моментного напряжения) на лицевых поверхностях $\bar{S}_1^{(+)}$ и $\bar{S}_K^{(-)}$ соответственно.

Заметим также, что системы уравнений притока тепла $(0, N)$ и $(1, N)$ приближений многослойных тонких тел получаются совершенно аналогично (7.5.1) – (7.5.4). Поэтому с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Однако, в дальнейшем их будем считать известными.

7.5.3 Системы уравнений в моментах вектора перемещений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева многослойных тонких тел с одним малым размером

В данном случае получим системы уравнений нулевого и первого приближений в моментах вектора перемещений. Система уравнений нулевого приближения получится указанным выше правилом из (3.3.67). В самом деле, будем иметь

$$\mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{I}\bar{J}} \cdot \nabla_I \nabla_J \mathbf{u}_\alpha^{(k)} + (\mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{3}\bar{I}} + \mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{I}\bar{3}}) \cdot \nabla_I \mathbf{u}_\alpha^{(k)} + \mathbf{C}_{\alpha}^{\bar{3}\bar{3}} \cdot \mathbf{u}_\alpha^{(k)} - \\ - (\mathbf{b}_{\alpha}^{\bar{I}} \nabla_I \vartheta_\alpha^{(k)} + \mathbf{b}_{\alpha}^{\bar{3}} \vartheta_\alpha^{(k)}) + \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(k)} = \rho_\alpha \partial_t^2 \mathbf{u}_\alpha^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha = \overline{0, K}. \quad (7.5.5)$$

Учитывая формулы моментов k -го порядка первых (2.2.7), (2.7.14) и вторых производных (2.2.22), (2.7.20) вектора (компонент вектора, скалярной функции) относительно

этих систем полиномов (см. также (2.7.23), (2.8.28), (2.8.29)), из (7.5.5) получим иско-
мые системы уравнений нулевого приближения в моментах. С целью сокращения письма
выписывать их не будем.

Аналогично (7.5.5) систему уравнений первого приближения можно вывести указан-
ным выше правилом из (3.3.69). Нетрудно видеть, что получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}_{\alpha}^{\bar{M}\cdot\bar{N}} \cdot \left\{ g_{\alpha M \alpha N}^{\bar{P}} g_{\alpha M \alpha N}^{\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)} + \left[B_{(1\alpha)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}(x^3 \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)}) + B_{(2\alpha)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} \nabla_P \nabla_Q \mathbf{M}((x^3)^2 \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)}) \right] \right\} + \\ & + \left(\mathbb{C}_{\alpha}^{\bar{3}\cdot\bar{M}} + \mathbb{C}_{\alpha}^{\bar{M}\cdot\bar{3}} \right) \cdot \left[g_{\alpha M}^{\bar{P}} \nabla_P \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)'} + \left(g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}} \right) \nabla_P \mathbf{M}'(x^3 \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)}) \right] + \mathbb{C}_{\alpha}^{\bar{3}\cdot\bar{3}} \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)''} + \\ & - \mathbf{b}_{\alpha}^{\bar{M}} \left[g_{\alpha M}^{\bar{P}} \nabla_P \vartheta_{\alpha}^{(k)} + \left(g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}} \right) \nabla_P \mathbf{M}(x^3 \vartheta_{\alpha}^{(k)}) \right] - \mathbf{b}_{\alpha}^{\bar{3}} \vartheta_{\alpha}^{(k)'} + \rho_{\alpha}^{\bar{\mathbf{F}}} = \rho_{\alpha} \partial_t^2 \mathbf{u}_{\alpha}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha = \bar{0}, \bar{K}, \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{(1\alpha)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} &= \left(g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}} \right) g_{\alpha N}^{\bar{Q}} + g_{\alpha M}^{\bar{P}} \left(g_{\alpha N}^{\bar{Q}} - g_{\alpha N}^{\bar{Q}} \right), & B_{(2\alpha)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} &= A_{(2\alpha)M}^{\bar{P}} g_{\alpha N}^{\bar{Q}} + A_{(1\alpha)M}^{\bar{P}} A_{(1\alpha)N}^{\bar{Q}} + g_{\alpha M}^{\bar{P}} A_{(2\alpha)N}^{\bar{Q}}, \\ A_{(1\alpha)M}^{\bar{P}} &= g_{\alpha M}^{\bar{P}} - g_{\alpha M}^{\bar{P}}, & A_{(2\alpha)M}^{\bar{P}} &= \left(g_{\alpha N}^{\bar{P}} - g_{\alpha N}^{\bar{P}} \right) \left(g_{\alpha M}^{\bar{N}} - g_{\alpha M}^{\bar{N}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (2.2.23), (2.2.28), первые два соотношения (3.3.20) и (3.3.21)
из (3.3.69) получим различные представления уравнений движения первого приближе-
ния в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра. Со-
вершенно аналогично на основании (2.7.38) при $s = 1$ и $s = 2$, (2.7.15), (2.7.21) и (2.7.40)
при $s = 1$ из (3.3.69) можно получить искомые уравнения движения в моментах вектора
перемещений относительно системы полиномов Чебышева второго рода. Не представляет
труда выводить также уравнения движения первого приближения в моментах вектора
перемещений относительно системы полиномов Чебышева первого рода. С целью сокра-
щения письма выписать упомянутых в этом абзаце уравнений в моментах не будем.

Следует заметить, что для замыкания систем (7.5.1) – (7.5.4) необходимо к ним приба-
вить системы уравнений притока тепла, ОС, граничные, начальные условия физических
и тепловых содержаний в моментах соответствующих приближений, а также межслой-
ные контактные условия в зависимости от характера связей соседних (контактирующих)
слоев. Следовательно, для замыкания систем (7.5.5) и (7.5.6) надо к ним добавить все
указанные в предыдущем предложении соотношения за исключением ОС. Конечно, вы-
писать упомянутые выше недостающие соотношения не представляет труда. В связи с
чем кроме межслойных контактных условий выписать их не будем.

7.5.4 Межслойные контактные условия

При исследовании напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций
и композитных сред предполагается, как правило, что составляющие слои (элементы,
фазы) работают совместно, без проскальзывания. Очевидно, такая модель не охватыва-
ет разнообразия способов соединений, используемых в технике, не учитывает наличия
межфазных дефектов, появляющихся в несовершенной связи контактирующих фаз. Де-
фекты такого типа часто оказываются неизбежными ввиду особенностей технологиче-
ского характера [40, 184, 360].

Итак, деформирование многослойных тонких тел может происходить без нарушения
или с нарушением полного контакта слоев за счет отрыва друг от друга в нормаль-
ном или касательном направлениях. Между слоями могут возникать области контакта
и области, свободные от контакта. При этом границы этих областей могут меняться в

процессе деформирования. Слои могут скользить друг относительно друга. Скольжение может сопровождаться трением и т.д. Все эти явления на лицевых поверхностях слоев в значительной степени могут влиять на механическое поведение тонкого тела, его напряженно-деформированное состояние. Следовательно, учет этих явлений при изучении напряженно-деформированного состояния многослойных тонких тел необходим. Использование лицевых поверхностей в качестве базовых при параметризации области многослойного тонкого тела позволяет легко учесть эти явления, чем при других параметризациях.

При рассмотрении явлений, происходящих на лицевых поверхностях слоев первостепенным является вопрос о моделировании поверхности раздела. В данном направлении наметились два подхода. Первый — физический, связанный с учетом тонких адгезионных прослоек посредством обобщенных условий спая контактирующих элементов. Впервые такой подход предложен для задач теплопроводности в работе [349]. В дальнейшем он был обобщен на задачи механики [353]. Второй — феноменологический основан на постулировании существования априори зон разрыва перемещений.

С целью изучения этих вопросов предположим, что многослойная тонкая конструкция, состоит из K слоев. Обозначим через $S_{\alpha}^{(+)}$ и $S_{\alpha}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K}$) внешнюю и внутреннюю поверхности слоя α ($\alpha = \overline{1, K}$) соответственно и рассмотрим несколько с точки зрения практики важных случаев взаимоотношения соседних поверхностей $S_{\alpha}^{(+)}$ и $S_{\alpha+1}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$).

7.5.5 Условия спаянности (полного, идеального контакта)

В этом случае неизвестными являются силы и моменты взаимодействия между слоями α и $\alpha + 1$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$). Эти силы и моменты, конечно, равны по величине и противоположно направлены. Итак, дополнительно появляются шесть неизвестных функций. Однако, в рассматриваемом случае имеем и шесть дополнительных условий, выражающих непрерывность векторов перемещений и вращения точек спаянных поверхностей. Другими словами, векторы перемещений и вращений точек контактирующих поверхностей равны соответственно.

Обозначая силы и моменты взаимодействия контактирующих поверхностей $S_{\alpha}^{(+)}$ и $S_{\alpha+1}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$) через $\mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}$, $\boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(+)}$ и $\mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}$, $\boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$) соответственно, а векторы перемещений и вращений точек этих поверхностей через $\mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)}$ и $\mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$), условия полного контакта в моментной теории многослойных тонких тел можно представить в виде

$$\mathbf{P}_{\alpha}^{(+)} = -\mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(+)} = -\boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} = \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} = \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}. \quad (7.5.7)$$

Пренебрегая в (7.5.7) характеристиками моментной теории (вторым и четвертым соотношениями), получим условия идеального контакта для классической теории (первое и третье соотношения).

7.5.6 Условия при относительном перемещении точек контактирующих поверхностей слоев

Как было сказано выше, в процессе деформирования многослойной конструкции возможны относительные перемещения точек поверхностей $S_{\alpha}^{(+)}$ и $S_{\alpha+1}^{(-)}$ с одинаковыми гауссовыми

координатами (x^1, x^2) . Рассмотрим различные варианты. Прежде всего заметим, что существуют ограниченные предельные интенсивности сил сцепления α и $\alpha+1$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$) слоев в нормальном и касательном направлениях. Обозначим нормальную и касательную составляющие предельной силы, с которой слой α действует на слой $\alpha+1$ через

$$\mathbf{P}_{\alpha+1(n)}^{*(-)} = P_{\alpha+1(n)}^{*(-)}(x^1, x^2) \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \mathbf{P}_{\alpha+1(s)}^{*(-)} = P_{\alpha+1(s)}^{*(-)}(x^1, x^2, \mathbf{s}_{\alpha+1}^{(-)}) \mathbf{s}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \alpha = \overline{1, K-1} \quad (7.5.8)$$

соответственно. Здесь, конечно, $\mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)}$ и $\mathbf{s}_{\alpha+1}^{(-)}$ — единичные векторы внешней нормали и касательной к поверхности $S_{\alpha+1}^{(-)}$. Заметим, что во втором равенстве (7.5.8) предусмотрена возможность зависимости предельной касательной силы, препятствующей взаимному проскальзыванию слоев, от направления в касательной плоскости (анизотропия предельной касательной силы).

7.5.6.1 Условия при относительном перемещений точек идеальных (гладких) контактирующих поверхностей слоев

В этом случае в процессе деформирования многослойного тонкого тела может происходить свободное скольжение слоев друг относительно друга. Принятая параметризация и в рассматриваемом случае оставляет все соотношения теории тонких тел справедливыми, изменяются только искомые и заданные функции. При спаянности слоев, очевидно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) + \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2), & \mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) + \mathbf{u}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2), & \alpha &= \overline{1, K}, \\ \mathbf{r}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}^{(+)}(x^1, x^2), & \mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}^{(-)}(x^1, x^2) \left(\mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} = \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)} \right), & \alpha &= \overline{1, K-1}, \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

где $\mathbf{r}_{\alpha}^{(+)}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(+)})$ и $\mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}(\overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(-)})$ — радиусы-векторы точек поверхностей $S_{\alpha}^{(+)}$ ($\overset{\circ}{S}_{\alpha}^{(+)}$) и $S_{\alpha}^{(-)}$ ($\overset{\circ}{S}_{\alpha}^{(-)}$) соответственно в деформированном (недеформированном) состоянии многослойного тонкого тела. Нетрудно заметить, что в данном случае (при проскальзывании абсолютно гладких контактирующих поверхностей) вместо (7.5.9) будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) + \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2), & \mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) + \mathbf{u}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2), & \alpha &= \overline{1, K}, \\ \mathbf{r}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}^{(+)}(x^1, x^2), & \mathbf{r}_{\alpha}^{(-)}(x^1, x^2) &\neq \overset{\circ}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}^{(-)}(x^1, x^2) \left(\mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2) \neq \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}(x^1, x^2) \right), \\ \mathbf{v}_{\alpha}(x^1, x^2) &= \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}^{(-)}(x^1, x^2) - \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(x^1, x^2), & \alpha &= \overline{1, K-1}, \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

Очевидно, $\mathbf{v}_{\alpha}(x^1, x^2)$ — вектор относительного перемещения соответствующих точек контактирующих поверхностей $S_{\alpha}^{(+)}$ и $S_{\alpha}^{(-)}$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$), являющийся неизвестным в рассматриваемом случае.

Отсутствие трения между слоями позволяет написать следующие дополнительные соотношения

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}^{(-)}(n) &= \overset{\circ}{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)}(n) (v_{\alpha}^{(n)} = 0), & \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(s) &= 0, & \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(s) &= 0, & \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(n) &= -\mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(n), \\ \alpha &= \overline{1, K-1}, & x' &\in S_{\alpha}^{(+)0} \subset S_{\alpha}^{(+)}, \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

где $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(s)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(s)}$) и $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(n)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(n)}$) — касательная и нормальная составляющие вектора напряжения (интенсивности силы взаимодействия) $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(s)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(s)}$), т.е.

$$\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(s)} + \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(n)}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} = \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(s)} + \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(n)}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}.$$

Нетрудно усмотреть, что на основании (7.5.11) будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{u}_{\alpha+1}^{(n)} = \overset{(+)}{u}_{\alpha}^{(n)} (v_{\alpha}^{(n)} = 0), \quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1} = 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = 0, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in S_{\alpha}^0 \subset S_{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

Соотношения (7.5.12) в рассматриваемом случае замыкают систему уравнений классической теории многослойных тонких тел. В случае микрополярной теории многослойных тонких тел равенства (7.5.12) следует заменить следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{u}_{\alpha+1}^{(n)} = \overset{(+)}{u}_{\alpha}^{(n)}, \quad \overset{(-)}{\varphi}_{\alpha+1}^{(n)} = \overset{(+)}{\varphi}_{\alpha}^{(n)}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1} = 0, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \varphi_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \varphi_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1} (\varphi_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} = 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} (\varphi_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = 0, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} (\varphi_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1} (\varphi_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in S_{\alpha}^0 \subset S_{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

В данном случае наряду с вектором относительного перемещения вводится в рассмотрение вектор относительного вращения $\boldsymbol{\psi} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}$ соответствующих точек контактирующих поверхностей. $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}^{(n)}$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(n)}$ — нормальные составляющие векторов $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$ соответственно. Заметим, что соотношения (7.5.13) написаны с учетом того, что каждый слой конструкций обладает центром симметрии. Если это не так, то их надо заменить другими соотношениями в зависимости от рассматриваемых определяющих соотношений. Например, если в качестве ОС рассматриваются (3.2.47), то вместо (7.5.13) будем иметь

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{u}_{\alpha+1}^{(n)} = \overset{(+)}{u}_{\alpha}^{(n)}, \quad \overset{(-)}{\varphi}_{\alpha+1}^{(n)} = \overset{(+)}{\varphi}_{\alpha}^{(n)}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1} = 0, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \varphi_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} (u_{\alpha}, \varphi_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1} (u_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}, \\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1} (\varphi_{\alpha+1}, u_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} = 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} (\varphi_{\alpha}, u_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = 0, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} (\varphi_{\alpha}, u_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1} (\varphi_{\alpha+1}, u_{\alpha+1}, \vartheta_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in S_{\alpha}^0 \subset S_{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

Заметим также, что контактные условия следует дополнить условиями теплового сохранения на контактирующих поверхностях, что не представляет труда. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

7.5.6.2 Условия при относительном перемещений точек шероховатых контактирующих поверхностей слоев

В рассматриваемом случае в процессе деформирования многослойного тонкого тела может происходить скольжение с трением слоев друг относительно друга. До тех пор пока величина касательной составляющей силы взаимодействия $\mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(s)$ ($\mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(s)$) (силы трения) между лицевыми поверхностями не достигнет предельного (максимально возможного) своего значения $|\mathbf{P}_{\alpha}^{*}|$ ($|\mathbf{P}_{\alpha+1}^{*}|$), относительного проскальзывания не будет, а значит

$$\mathbf{v}_{\alpha}(x^1, x^2) = 0, \quad \alpha = \overline{1, K-1}. \quad (7.5.15)$$

При достижении силы трения предельного значения начинается скольжение и вместо приведенных выше соотношений надо иметь другие. Прежде всего заметим, что для классической теории многослойных тонких тел вместо (7.5.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}(n) &= \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(n), \quad \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(\mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha+1}^{(-)} = P_{\alpha+1}^{*}{}^{(-)}, \quad \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha}^{(+)} = P_{\alpha}^{*}{}^{(s)}, \\ \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} &= \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(\mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in S_{\alpha}^{(+)} \subset S_{\alpha}^{(+)} \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

а в случае микрополярной теории многослойных тонких тел, слои которых не обладают центром симметрии, вместо (7.5.14) полагаем, что верны соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}(n) &= \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)}(n), \quad \varphi_{\alpha+1}^{(-)}(n) = \varphi_{\alpha}^{(+)}(n), \quad \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(\mathbf{u}, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha+1}^{(-)} = P_{\alpha+1}^{*}{}^{(-)}, \\ \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha}^{(+)} &= P_{\alpha}^{*}{}^{(s)}, \quad \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{u}, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} = \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}(\mathbf{u}, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)}, \\ \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{\mu}_{\alpha+1}^{(-)}(\varphi, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} &= \mu_{\alpha+1}^{*}{}^{(-)}, \quad \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{\mu}_{\alpha}^{(+)}(\varphi, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} = \mu_{\alpha}^{*}{}^{(n)}, \\ \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{\mu}_{\alpha}^{(+)}(\varphi, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha}^{(+)} &= \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{\mu}_{\alpha+1}^{(-)}(\varphi, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \mathbf{s}_{\alpha}^{(+)}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in S_{\alpha}^{(+)} \subset S_{\alpha}^{(+)} \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

Здесь, конечно, $\mu_{\alpha}^{*}{}^{(n)} = \mu_{\alpha}^{*} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^{(+)}$ ($\mu_{\alpha+1}^{*}{}^{(-)} = \mu_{\alpha+1}^{*} \cdot \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)}$), где μ_{α}^{*} ($\mu_{\alpha+1}^{*}$) — интенсивность предельного момента. Следовательно, в соотношениях (7.5.16) и (7.5.17) $P_{\alpha}^{*}{}^{(s)}$, $P_{\alpha+1}^{*}{}^{(s)}$, $\mu_{\alpha}^{*}{}^{(n)}$ и $\mu_{\alpha+1}^{*}{}^{(n)}$ являются неизвестными величинами, определяемыми из некоторых априорных

зависимостей — условий проскальзывания с трением, которые, вообще говоря, должны зависеть от геометрических и физико-механических свойств контактирующих тел.

В классическом случае можно предположить, что имеем соотношение

$$\mathbf{L}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, [T], \mathbf{P}^{(l)*}, \dots) = 0, \quad (7.5.18)$$

где \mathbf{v}_s и $\dot{\mathbf{v}}_s$ — касательные составляющие векторов относительного перемещения и относительной скорости, $[T]$ — перепад температуры, $\mathbf{P}^{(l)*}$ — предельный вектор напряжения на площадке с нормалью \mathbf{l} , многоточие обозначает зависимость еще от каких-либо параметров. На основании (7.5.18) можно принять, что верна обобщенная модель трения Кулона

$$\mathbf{P}_{(s)}^{*} = \mathbf{f}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}_{(n)}^{*}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s. \quad (7.5.19)$$

учитывающая анизотропию трения. Здесь $\mathbf{P}_{(s)}^*$ и $\mathbf{P}_{(n)}^*$ — предельные касательная и нормальная составляющие вектора напряжения $\mathbf{P}^{(l)*}$. Тензор второго ранга $\underline{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}_{(n)}^*)$ называется тензором коэффициентов трения. Очевидно, в изотропном случае $\underline{\mathbf{f}} = f\mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичный тензор второго ранга. Представляя (7.5.19) для контактирующих поверхностей многослойного тонкого тела, получим недостающие искомые соотношения.

На основании аналогичных рассуждений в случае микрополярной теории можно утверждать, что имеют место априорные соотношения

$$\mathbf{L}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \mathbf{P}^{(l)*}, \dots) = 0, \quad \mathbf{M}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \boldsymbol{\mu}^{(l)*}, \dots) = 0, \quad (7.5.20)$$

где $\boldsymbol{\psi}_n$ и $\dot{\boldsymbol{\psi}}_n$ — нормальные составляющие векторов относительного внутреннего вращения и относительной внутренней скорости вращения соседних слоев, $\boldsymbol{\mu}^{(l)*}$ — предельный вектор моментного напряжения на площадке с нормалью \mathbf{l} , остальные параметры те же самые, что в (7.5.18).

Исходя из (7.5.20), для микрополярной теории аналогично (7.5.19) можно предполагать справедливость следующих соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(s)}^* &= \underline{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}_{(n)}^*) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s + \underline{\mathbf{h}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}_{(n)}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, \\ \boldsymbol{\mu}_{(n)}^* &= \underline{\mathbf{g}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}_{(s)}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n + \underline{\mathbf{l}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}_{(s)}^*) \cdot \dot{\mathbf{v}}_n, \end{aligned} \quad (7.5.21)$$

учитывающих анизотропию трения. Здесь $\underline{\mathbf{f}}$, $\underline{\mathbf{h}}$, $\underline{\mathbf{g}}$ и $\underline{\mathbf{l}}$ — тензоры второго ранга, называемые тензорами коэффициентов трения. Следовательно, в случае изотропного трения будем иметь $\underline{\mathbf{f}} = f\mathbf{E}$, $\underline{\mathbf{h}} = h\mathbf{E}$, $\underline{\mathbf{g}} = g\mathbf{E}$ и $\underline{\mathbf{l}} = l\mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичный тензор второго ранга. Следует заметить, что коэффициенты трения определяются с помощью экспериментов и даются в таблицах. В этом направлении для микрополярной теории автору мало что известно, а для классической теории можно смотреть, например, работы [43, 182, 183]. Представляя (7.5.21) для контактирующих поверхностей многослойного тонкого тела, получим недостающие искомые соотношения в случае микрополярной теории.

7.5.6.3 Условия при частичном отслаивании контактирующих поверхностей слоев

В этом случае для классической теории многослойных тонких тел будем иметь условия

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(x^1, x^2) &= \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_\alpha(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{P}}_\alpha(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) = 0, \\ (x^1, x^2) &\subset \overset{(+)}{S}_\alpha^0 \subset \overset{(+)}{S}_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \end{aligned} \quad (7.5.22)$$

а для микрополярной теории многослойных тонких тел условия

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha(x^1, x^2) &= \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_\alpha(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\mathbf{P}}_\alpha(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) = 0, \\ \boldsymbol{\psi}_\alpha(x^1, x^2) &= \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}(x^1, x^2) = 0, \\ (x^1, x^2) &\subset \overset{(+)}{S}_\alpha^0 \subset \overset{(+)}{S}_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, K-1}. \end{aligned} \quad (7.5.23)$$

Заметим, что если $\overset{(+)}{S}_\alpha^0 = \overset{(+)}{S}_\alpha$, то имеет место полное отслаивание контактирующих слоев. Возможны и другие условия, накладываемые на деформированное и силовое состояния лицевых поверхностей многослойных тонких тел: контакт с твердыми или упругими телами, принудительное перемещение точек и т.п. Во всех случаях

введением соответствующей базовой поверхности основные соотношения теории тонких тел с использованием нескольких базовых поверхностей остаются в силе. Следует заметить, что автор перед изложением вопросов, касающихся условий на контактирующих поверхностях многослойных тонких тел, ознакомился со следующими работами [43, 47–50, 137, 176, 181–183, 198–200, 326, 327, 329, 349–353, 387].

Следовательно, совершенно аналогично изложенному выше на основании [283, 296] и [285] можно построить микрополярные теории многослойных тонких тел с двумя малыми размерами и плоских областей с одним малым размером соответственно (остается выписать только соответствующие соотношения). С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Однако, отметим, что материал этой главы изложен также в [304].

Глава 8

Вариационные принципы микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов

8.1 О некоторых вариационных принципах в трехмерной микрополярной теории деформируемого твердого тела

Рассмотрены вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно, а также обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории и из них получены соответствующие вариационные принципы для микрополярных теорий однослойных и многослойных тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева.

8.1.1 Некоторые определения и интегральные соотношения

Прежде чем сформулировать эти вариационные принципы аналогично классической теории [336] введем определения и получим некие интегральные тождества.

Определение 8.1.1. Кинематической системой называются произвольные непрерывно дифференцируемые векторные поля \mathbf{u} (вектор перемещений) и $\boldsymbol{\varphi}$ (вектор вращений), а статической системой — произвольные тензорные поля $\underline{\mathbf{P}}$ (тензор напряжений) и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ (тензор моментных напряжений) (необязательно удовлетворяющие условиям совместности).

Определение 8.1.2. Кинематически допустимой называется кинематическая система, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (8.1.1)$$

а в случае динамической задачи и начальным условиям

$$\mathbf{u}|_{t=t_0} = \mathbf{f}_1, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=t_0} = \mathbf{f}_2, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{t=t_0} = \mathbf{g}_1, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{t=t_0} = \mathbf{g}_2. \quad (8.1.2)$$

Определение 8.1.3. Статически допустимой называется статическая система, удовлетворяющая уравнениям равновесия (движения в случае динамической задачи)

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = 0 \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = 0 \left(\underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}, \quad (8.1.3)$$

и статическим граничным условиям

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_0. \quad (8.1.4)$$

Определение 8.1.4. Действительной кинематической системой \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ и действительной статической системой $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ называются соответственно векторы перемещений и вращений и тензоры напряжений и моментных напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия (8.1.3) (движения в случае динамической задачи), кинематическим соотношениям

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (8.1.5)$$

определяющим соотношениям

$$\underline{\mathbf{P}} = \check{\mathbf{F}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \check{\mathbf{G}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}) \quad (8.1.6)$$

или в случае потенциальности операторов $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ определяющим соотношениям следующего вида

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \quad (8.1.7)$$

кинематическим (8.1.1) и статическим (8.1.4) граничным условиям (и начальным условиям (8.1.2) в случае динамической задачи).

Здесь $\check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}})$ — оператор (потенциал) деформации и изгиба-кручения и если он существует, то определяющие соотношения задаются с помощью формул (8.1.7).

Заметим, что при неизотермических процессах вместо $\check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}})$ рассматривается свободная энергия $\check{F}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \vartheta) = \check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}) - HT$, где H — энтропия, T — температура, а $\vartheta = T - T_0$ — перепад температуры. О свободной энергии речь пойдет ниже.

Получим теперь некие интегральные тождества. С этой целью умножим первое из уравнений движения (8.1.3) на некоторый вектор \mathbf{w} , а второе — на вектор $\boldsymbol{\psi}$. Затем интегрируем полученные соотношения по объему V , применяя при этом формулу

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{a}) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{a} + \underline{\mathbf{Q}} \overset{2}{\otimes} \nabla \mathbf{a}, \quad \forall \underline{\mathbf{Q}}, \mathbf{a} \quad (8.1.8)$$

и теорему Остроградского–Гаусса. Тогда в результате найдем следующие интегральные тождества:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} dV &= \int_V \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{w} dV - \int_V \underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \nabla \mathbf{w} dV, \\ \int_V \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\psi} dV &= \int_V \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\psi} dV - \int_V (\underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \nabla \boldsymbol{\psi} - \underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV. \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

Складывая почленно соотношения (8.1.9), получим

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV &= \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{P}_{(n)} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma - \\ &- \int_V [\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \nabla \boldsymbol{\psi}] dV. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Полагая, что $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}$, из (8.1.10) получим теорему живых сил (ТЖС) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dV &= \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \\ &+ \int_{\Sigma} (\mathbf{P}_{(n)} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma - \int_V (\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \dot{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) dV, \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

где $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\omega}$.

Вводя обозначения:

$$E = \int_V \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dV \quad (8.1.12)$$

для кинетической энергии, $\delta A^{(e)} = \delta A_1^{(e)} + \delta A_2^{(e)}$ — для изменения работы внешних сил и моментов, состоящей из сумм изменений работ внешних массовых сил и моментов

$$\delta A_1^{(e)} = \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} + \rho \mathbf{m} \cdot d\boldsymbol{\varphi}) dV \quad (8.1.13)$$

и внешних поверхностных сил и моментов

$$\delta A_2^{(e)} = \int_{\Sigma} (\mathbf{P}_{(n)} \cdot d\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot d\boldsymbol{\varphi}) d\Sigma, \quad (8.1.14)$$

а также

$$\delta A^{(i)} = - \int_V (\underline{\mathbf{P}} \otimes d\boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes d\boldsymbol{\varkappa}) dV \quad (8.1.15)$$

для изменения работы внутренних сил и моментов, ТСЖ (8.1.10) можно записать в краткой форме

$$dE = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)} \quad (8.1.16)$$

Теперь допустим, что $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$. Тогда, если используем граничные условия (8.1.1) и (8.1.4), из (8.1.10) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV &= \int_V \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\Sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}_0 + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0) d\Sigma - \int_V (\underline{\mathbf{P}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \boldsymbol{\varkappa}) dV. \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Далее предположим, что массовые и поверхностные силы и моменты, фигурирующие в (8.1.17) обладают потенциалом (или не зависят от векторов перемещений и вращений). Тогда первые два слагаемых в правой части (8.1.17) представляют собой работу внешних сил и моментов на перемещении \mathbf{u} и вращении $\boldsymbol{\varphi}$

$$A^{(e)} \equiv A_1^{(e)} + A_2^{(e)}, \quad A_1^{(e)} \equiv \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV, \quad A_2^{(e)} \equiv \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\Sigma. \quad (8.1.18)$$

Третье слагаемое называется работой поверхностных сил и моментов на заданных перемещении \mathbf{u}_0 и вращении $\boldsymbol{\varphi}_0$

$$A_{\Sigma_1}^{(i)} \equiv \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}_0 + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0) d\Sigma. \quad (8.1.19)$$

Последнее слагаемое в правой части (8.1.17) представляет собой работу внутренних сил и моментов

$$A^{(i)} \equiv - \int_V (\underline{\mathbf{P}} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \boldsymbol{\varkappa}) dV, \quad (8.1.20)$$

а интеграл в левой части — работа сил Д'Аламбера (или инерционных сил и моментов)

$$A_E \equiv \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) dV. \quad (8.1.21)$$

Теперь допустим, что векторы \mathbf{w} и $\boldsymbol{\varphi}$, фигурирующие в (8.1.10), удовлетворяют условиям

$$\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0. \quad (8.1.22)$$

В частности, \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ могут быть равными нулю. Тогда нетрудно видеть, что соотношение (8.1.10) с учетом (8.1.4) и (8.1.22) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})] dV = \\ = \int_V [\rho(\mathbf{F} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{w} + (\rho\mathbf{m} - \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\psi}] dV + \\ + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}_0 + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.23)$$

Отсюда без учета инерциальных членов получаем

$$\begin{aligned} \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})] dV = \int_V (\rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \rho\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \\ + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}_0 + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

а если при этом кинематические граничные условия представляются в виде

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad (8.1.25)$$

т.е. $\mathbf{u}_0 = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$, то из (8.1.24) имеем

$$\begin{aligned} \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})] dV = \\ = \int_V (\rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \rho\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.26)$$

Заметим, что в соотношениях (8.1.23), (8.1.24) и (8.1.26), конечно, $\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}$, $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi}) = \nabla \boldsymbol{\psi}$.

Предположим, что операторы $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ потенциальные, т.е. существует потенциал деформации $\check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}})$, посредством которого тензоры напряжений и моментных напряжений определяются формулами (8.1.7). Тогда, пользуясь определением дифференциала оператора и функциональной производной [336], легко видеть, что будем иметь

$$\begin{aligned} D\check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}), \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\varphi}), \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi})) \equiv D\check{W}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \\ = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi}). \end{aligned} \quad (8.1.27)$$

Определяя оператор потенциальной энергии тензоров деформаций и изгиба-кручения $\check{\Pi}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}})$ по формуле

$$\check{\Pi}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}), \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\varphi})) \equiv \int_V \check{W}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}), \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\varphi})) dV, \quad (8.1.28)$$

соотношение (8.1.26) в силу (8.1.27) и (8.1.28) можно представить в краткой форме

$$D\check{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - A^{(e)}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0. \quad (8.1.29)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае из (8.1.23) (с учетом инерциальных членов) вместо (8.1.29) будем иметь

$$D\check{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - A^{(e)}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + A_E(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0. \quad (8.1.30)$$

Заметим, что в формулах (8.1.29) и (8.1.30) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{(e)}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V (\rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \rho\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma, \\ A_E(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) &= \int_V (\rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV. \end{aligned} \quad (8.1.31)$$

Учитывая (8.1.5) и (8.1.6), из уравнений (8.1.3) получим уравнения равновесия и движения, представленные в векторах перемещений и вращений, которые символически запишем следующим образом:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \varphi) + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \varphi) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \varphi) + \rho \mathbf{m} = 0, \quad (8.1.32)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \varphi) + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}, \varphi) + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \varphi) + \rho \mathbf{m} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (8.1.33)$$

Видно, что с каждой задачей (8.1.32), (8.1.25) и (8.1.4) связано равенство (8.1.26) или (8.1.29) для произвольных дифференцируемых векторных полей \mathbf{w} и $\boldsymbol{\psi}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0. \quad (8.1.34)$$

Следует заметить, что в уравнения (8.1.32) входят вторые производные по координатам векторов \mathbf{u} и φ , поэтому решение задачи (8.1.32), (8.1.25) и (8.1.4) должно быть по крайней мере дважды дифференцируемым. Следовательно, можно отказаться от этого требования и понимать решение задачи (8.1.32), (8.1.25) и (8.1.4) в обобщенном смысле. В этой связи целесообразно ввести определение.

Определение 8.1.5. Векторные поля \mathbf{u} и φ называются обобщенными решениями задачи (8.1.32), (8.1.25) и (8.1.4), если для всяких дифференцируемых векторов \mathbf{w} и $\boldsymbol{\psi}$, удовлетворяющих условиям (8.1.34) справедливо тождество (8.1.26) или (8.1.29).

Заметим, что от входных данных требуется только условие существования интегралов в правой части (8.1.26). Заметим также, что обобщенное решение будет классическим, если векторные поля \mathbf{u} и φ являются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Нетрудно показать, что в случае потенциальных операторов $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ изменение работы внутренних сил и моментов (8.1.15) является полным дифференциалом и работа внутренних сил и моментов в силу (8.1.28) выражается формулой

$$A^{(i)} = -\check{\Pi} = -\int_V \check{W} dV \quad (8.1.35)$$

Кроме того, легко видеть, что в случае потенциальных операторов $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ и потенциальности массовых и поверхностных сил и моментов ($\mathbf{F} = \partial\chi_1/\partial\mathbf{u}$, $\mathbf{m} = \partial\chi_2/\partial\varphi$, $\mathbf{P}_{(n)} = \partial\chi_3/\partial\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\mu}_{(n)} = \partial\chi_4/\partial\varphi$) ТЖС представляется в виде

$$dE = dA^{(e)} + dA^{(i)},$$

откуда в свою очередь следует, что

$$\check{L} = E - A^{(e)} + \check{\Pi} = const. \quad (8.1.36)$$

Оператор \check{L} называется лагранжианом системы, а системы, для которых он имеет постоянное значение, — консервативными.

Учитывая, что изменение сил Д'Аламбера, которое получается из (8.1.21), если \mathbf{u} и φ заменить на $d\mathbf{u}$ и $d\varphi$, совпадает с изменением кинетической энергии (8.1.12)

$$dA_E = dE = \int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot d\varphi) dV,$$

операторы $\check{\mathbf{F}}$ и $\check{\mathbf{G}}$ являются потенциальными, при этом $\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa})$ — однородный оператор степени m , из (8.1.17) следует так называемая теорема о работе:

$$A_E = A^{(e)} - m\check{\Pi} + A_{\Sigma_1}^{(i)}. \quad (8.1.37)$$

Если силы и моменты инерции отсутствуют, кинематические граничные условия нулевые (8.1.25) и оператор $\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa})$ квадратичный, то из (8.1.37) следует теорема Клапейрона

$$A^{(e)} = 2\check{\Pi} = 2 \int_V \check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) dV.$$

Теперь рассмотрим статическую (квазистатическую) задачу (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.25) и (8.1.4). Построим лагранжиан для этой задачи:

$$\check{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \check{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - A^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}), \quad (8.1.38)$$

где первое слагаемое в правой части (8.1.38) определяется формулой (8.1.28), а второе – первой формулой (8.1.31), если в ней \mathbf{w} и $\boldsymbol{\psi}$ заменить на \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ соответственно.

8.1.2 Вариационный принцип Лагранжа (теорема Лагранжа)

Теорема. Из всех кинематически допустимых систем действительная отличается тем, что для нее и только для нее лагранжиан имеет стационарное значение, т.е.

$$D\check{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (8.1.39)$$

или, учитывая определение дифференциала оператора и (8.1.7), равенство (8.1.39) можно представить в виде

$$\int_V (\underline{\mathbf{P}} \otimes \delta\underline{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \delta\underline{\varkappa}) dV = \int_V (\rho \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} + \rho \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) d\Sigma, \quad (8.1.40)$$

где считаются справедливыми соотношения

$$\delta\underline{\gamma} = \nabla \delta\mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}, \quad \delta\underline{\varkappa} = \nabla \delta\boldsymbol{\varphi}. \quad (8.1.41)$$

Под $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}$ можно понимать разность между двумя кинематически допустимыми системами ($\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, $\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1$).

Доказательство. Необходимость. Полагая $\rho\dot{\mathbf{v}} = 0$, $\underline{\mathbf{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $\mathbf{w} = \delta\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\psi} = \delta\boldsymbol{\varphi}$, из (8.1.10) сразу следует необходимость теоремы, т.е. (8.1.39) или (8.1.40).

Достаточность. Учитывая (8.1.41), (8.1.8) и используя теорему Остроградского-Гаусса, в силу (8.1.25) из (8.1.40) получим

$$\begin{aligned} \int_V [(\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}] dV = \\ = \int_{\Sigma_2} [(\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}] d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.42)$$

В силу произвольности $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}$ из (8.1.42) следует (8.1.3) и (8.1.4).

Таким образом, при формулировке вариационного принципа Лагранжа требуем выполнения кинематических соотношений (8.1.5) и кинематических граничных условий (8.1.25), а из условия стационарности (8.1.39) лагранжиана (8.1.38) следуют уравнения равновесия (8.1.3) и статические граничные условия (8.1.4).

Теперь прежде чем сформулировать вариационный принцип Кастильяно, введем понятие обобщенного преобразования Лежандра для операторов и приведем условия совместности в микрополярной теории. С этой целью вспомним, что обычное преобразование Лежандра дифференцируемой функции $f(x)$, где

$$df = X dx, \quad X = \frac{df}{dx}$$

ставит в соответствие функцию $F(X)$, такую что

$$dF = x dX, \quad x = \frac{dF}{dX}.$$

При этом, как нетрудно показать, справедливо тождество

$$f(x) + F(X) - xX = const \quad (8.1.43)$$

Аналогично можно ввести понятие преобразования Лежандра для функций многих переменных. В самом деле, если функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставится в соответствие функция $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^n X_k dx_k, \quad X_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, n}, \\ dF &= \sum_{k=1}^n x_k dX_k, \quad x_k = \frac{\partial F}{\partial X_k}, \quad k = \overline{1, n}. \\ d(f + F) &= \sum_{k=1}^n (X_k dx_k + x_k dX_k) = \sum_{k=1}^n d(X_k x_k) \Rightarrow d(f + F - \sum_{k=1}^n X_k x_k) = 0 \Rightarrow \\ f(\mathbf{x}) + F(\mathbf{X}) - \sum_{k=1}^n X_k x_k &= const, \quad X_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_k = \frac{\partial F}{\partial X_k}. \end{aligned}$$

Тогда аналогично (8.1.43) будем иметь тождество

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(X_1, X_2, \dots, X_n) - \sum_{k=1}^n x_k X_k = const. \quad (8.1.44)$$

Обобщение преобразования Лежандра на операторы заключается в замене обычной производной функциональной. Пусть задан скалярный оператор $\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa})$, где

$$D\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}, \delta\underline{\gamma}, \delta\underline{\varkappa}) = \underline{\mathfrak{P}} \otimes \delta\underline{\gamma} + \underline{\mu} \otimes \delta\underline{\varkappa}, \quad \underline{\mathfrak{P}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\gamma}}, \quad \underline{\mu} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\varkappa}}.$$

Тогда преобразование Лежандра оператору $\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa})$, т.е. потенциалу тензоров деформаций и изгиба-кручения ставит в соответствие оператор $\check{w}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu})$, называемый потенциалом напряжений и моментных напряжений, такой, что

$$D\check{w}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}, \delta\underline{\mathfrak{P}}, \delta\underline{\mu}) = \underline{\gamma} \otimes \delta\underline{\mathfrak{P}} + \underline{\varkappa} \otimes \delta\underline{\mu}, \quad \underline{\gamma} = \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\mathfrak{P}}}, \quad \underline{\varkappa} = \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\mu}}. \quad (8.1.45)$$

При этом подобно (8.1.44) справедливо тождество

$$\check{W}(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) + \check{w}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}) - \underline{\mathfrak{P}} \otimes \underline{\gamma} - \underline{\mu} \otimes \underline{\varkappa} = const. \quad (8.1.46)$$

Заметим, что если $\check{W}(0, 0) = 0$ и $\check{w}(0, 0) = 0$, то константа в правой части (8.1.46) равна нулю.

Таким образом, преобразование Лежандра ставит в соответствие потенциалу деформации и изгиба-кручения потенциал напряжений и моментных напряжений. Очевидно, аналогично оператору потенциальной энергии тензоров деформаций и изгиба-кручения (8.1.28) можно ввести и оператор потенциальной энергии тензоров напряжений и моментных напряжений $\check{\pi}$, т.е.

$$\check{\pi} = \int_V \check{w} dV, \quad D\check{\pi}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}, \delta\underline{\mathfrak{P}}, \delta\underline{\mu}) = \int_V (\underline{\gamma} \otimes \delta\underline{\mathfrak{P}} + \underline{\varkappa} \otimes \delta\underline{\mu}) dV. \quad (8.1.47)$$

Следует заметить, что второе и третье соотношение (8.1.45) предполагают разрешимость соотношений (8.1.6) в виде

$$\underline{\gamma} = \check{\mathfrak{J}}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}), \quad \underline{\varkappa} = \check{\mathfrak{H}}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}) \quad (8.1.48)$$

и, кроме того, потенциальность операторов $\check{\mathfrak{J}}$ и $\check{\mathfrak{H}}$, т.е.

$$\underline{\gamma} = \check{\mathfrak{J}}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}) = \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\mathfrak{P}}}, \quad \underline{\varkappa} = \check{\mathfrak{H}}(\underline{\mathfrak{P}}, \underline{\mu}) = \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\mu}}. \quad (8.1.49)$$

8.1.3 Об условиях совместности в линейной микрополярной теории

Эти условия для односвязной области, состоящие из 18 уравнений и которые впервые, по-видимому, были получены в [22, 185] (см. также [307, 460, 513] и [292, 297, 298]), можно представить в виде

$$\check{\eta}(\underline{\boldsymbol{x}}) \equiv \underline{\mathbb{C}} \otimes \nabla \underline{\boldsymbol{x}} = 0, \quad \check{\mathbb{H}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{x}}) \equiv \underline{\mathbb{C}} \otimes \nabla \underline{\boldsymbol{\gamma}} + I_1(\underline{\boldsymbol{x}})\underline{\mathbb{E}} - \underline{\boldsymbol{x}}^T = 0, \quad (8.1.50)$$

где $\underline{\mathbb{C}}$ – дискриминантный тензор.

Учитывая (8.1.48) (или (8.1.49)), условия совместности деформации и изгиба-кручения (8.1.50) символически можно представить следующим образом:

$$\check{\eta}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) = 0, \quad \check{\mathbb{H}}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) = 0, \quad (8.1.51)$$

которые называются условиями (уравнениями) совместности в напряжениях и моментных напряжениях. Очевидно, число таких уравнений 18.

8.1.4 Статическая (квазистатическая) задача в микрополярной МДТТ в напряжениях и моментных напряжениях

Эта задача заключается в решении уравнений равновесия (8.1.3) и уравнений совместности (8.1.51) при удовлетворении граничным условиям (8.1.1) и (8.1.4).

Следует заметить, что задачи в перемещениях и вращениях представляются соотношениями (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.1) и (8.1.4) (или (8.1.32), (8.1.1) и (8.1.4)), а задача в напряжениях и моментных напряжениях – соотношениями (8.1.3), (8.1.51), (8.1.1) и (8.1.4). Заметим также, что, интегрируя (8.1.46) по объему V и учитывая (8.1.28), первое равенство (8.1.47), а также формулу

$$\int_V (\underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \underline{\boldsymbol{x}}) dV = A^{(e)} + A_{\Sigma_1}^{(i)},$$

которая получается из (8.1.17) при учете $\rho \dot{\mathbf{v}} = 0$, $\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} = 0$ и обозначений (8.1.18) и (8.1.19), будем иметь

$$\check{\mathbb{P}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{x}}) - A^{(e)} = -\check{\pi}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) + A_{\Sigma_1}^{(i)} + const. \quad (8.1.52)$$

Построим теперь для задачи (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.1) и (8.1.4) так называемый кастильяниан

$$\check{K} = -\check{\pi}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) + A_{\Sigma_1}^{(i)}, \quad (8.1.53)$$

где, конечно, слагаемые в правой части выражаются первой формулой (8.1.47) и (8.1.19) соответственно.

8.1.5 Вариационный принцип Кастильяно (теорема Кастильяно)

Теорема. Из всех статически допустимых систем действительная статическая система выделяется тем, что для нее и только для нее кастильяниан (8.1.53) имеет стационарное значение, т.е.

$$D\check{K}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \delta \underline{\mathbf{P}}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}) = 0, \quad (8.1.54)$$

или, учитывая определение дифференциала оператора и формулу (8.1.6) будем иметь

$$\int_V (\underline{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \delta \underline{\mathbf{P}} + \underline{\boldsymbol{x}} \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}) dV = \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u}_0 + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0) d\Sigma. \quad (8.1.55)$$

Под $\delta\mathbf{P}$ и $\delta\boldsymbol{\mu}$ можно понимать разность двух статически допустимых систем.

Доказательство. Необходимость. Полагая

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = 0, \quad \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{P} = \delta\mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\mu} = \delta\boldsymbol{\mu}$$

и учитывая, что $\delta\mathbf{P}$ и $\delta\boldsymbol{\mu}$ — разность двух статически допустимых систем, из (8.1.10) следует необходимость теоремы, т.е. (8.1.54) или (8.1.55).

Достаточность. Для того, чтобы показать достаточность теоремы следует учесть, что кастильяниан обладает условным экстремумом, ибо помимо (8.1.54) должны выполняться еще уравнения равновесия (8.1.3) и граничные условия (8.1.4). В этой связи введем систему функций $\mathbf{a}^{(V)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\chi}^{(V)}(\mathbf{x})$, $x \in V$ и $\mathbf{a}^{(\Sigma)}(\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\chi}^{(\Sigma)}(\mathbf{y})$, $y \in \Sigma_2$ (обобщенные множители Лагранжа) и построим оператор

$$\begin{aligned} \check{I} \equiv \check{K} - \int_V [(\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho\mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}^{(V)} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{P} + \rho\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\chi}^{(V)}] dV + \\ + \int_{\Sigma_2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{a}^{(\Sigma)} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \boldsymbol{\chi}^{(\Sigma)}] d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.56)$$

Следует заметить, что применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, вариации $\delta\mathbf{P}$ и $\delta\boldsymbol{\mu}$ можно считать совершенно произвольными, т.е. не подчиненными условиям

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{P} = 0, \quad \nabla \cdot \delta\boldsymbol{\mu} + \mathbf{C} \otimes \delta\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{P}|_{\Sigma_2} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \delta\boldsymbol{\mu}|_{\Sigma_2} = 0.$$

Используя определение дифференциала оператора, формулу (8.1.8) и теорему Остроградского-Гаусса, из (8.1.56) получим

$$\begin{aligned} D\check{I}(\mathbf{P}, \boldsymbol{\mu}, \delta\mathbf{P}, \delta\boldsymbol{\mu}) = \int_V \{[\boldsymbol{\gamma} - (\nabla\mathbf{a}^{(V)} - \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi}^{(V)})] \otimes \delta\mathbf{P} + (\boldsymbol{\varkappa} - \nabla\boldsymbol{\chi}^{(V)}) \otimes \delta\boldsymbol{\mu}\} dV - \\ - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot [\delta\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a}^{(V)} - \mathbf{u}_0) + \delta\boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\chi}^{(V)} - \boldsymbol{\varphi}_0)] d\Sigma - \\ - \int_{\Sigma_2} \mathbf{n} \cdot [\delta\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a}^{(V)} - \mathbf{a}^{(\Sigma)}) + \delta\boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{\chi}^{(V)} - \boldsymbol{\chi}^{(\Sigma)})] d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\delta\mathbf{P}$ и $\delta\boldsymbol{\mu}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} = \nabla\mathbf{a}^{(V)} - \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi}^{(V)}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \nabla\boldsymbol{\chi}^{(V)}, \\ \mathbf{a}^{(V)}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\chi}^{(V)}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{a}^{(V)}|_{\Sigma_2} = \mathbf{a}^{(\Sigma)}, \quad \boldsymbol{\chi}^{(V)}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\chi}^{(\Sigma)}. \end{aligned} \quad (8.1.57)$$

Таким образом, в силу последних двух соотношений (8.1.57) существует единственная система функций (множителей Лагранжа) $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(V)}$, $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}^{(V)}$, удовлетворяющая кинематическим соотношениям (первые два соотношения (8.1.57)) и кинематическим граничным условиям (третье и четвертое соотношение (8.1.57)). Зная $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ и интегрируя систему уравнений, состоящую из первых двух соотношений (8.1.57), получим выражения для $\mathbf{a}^{(V)}$ и $\boldsymbol{\chi}^{(V)}$. Однако для интегрирования этой системы необходимо выполнение условий совместности деформации и изгиба-кручения (8.1.50), которые с помощью определяющих соотношений (8.1.49) можно записать в напряжениях и моментных напряжениях (8.1.51). Следовательно, векторы $\mathbf{a}^{(V)}$ и $\boldsymbol{\chi}^{(V)}$ имеют смысл векторов перемещений и вращений соответственно, а третье и четвертое соотношения (8.1.57) определяют кинематические граничные условия.

Таким образом, при формулировке вариационного принципа Кастильяно (8.1.53), (8.1.54) требуется выполнение уравнений равновесия (8.1.3), определяющих соотношений (8.1.49) и статических граничных условий (8.1.4), а из условия стационарности (8.1.54) следуют уравнения совместности в напряжениях и моментных напряжениях (8.1.51) и кинематические граничные условия (8.1.1).

8.1.6 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера

В данном случае подобно трехмерной классической теории [336] рассмотрим оператор:

$$\begin{aligned} \check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) = & \iiint_V [\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) - \underline{\mathbf{P}} \otimes (\boldsymbol{\gamma} - \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - \\ & - \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \nabla \boldsymbol{\varphi}) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}] dV - \iint_{\Sigma_1} [\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \\ & + \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)] d\Sigma - \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.58)$$

Тогда обобщенный вариационный принцип Рейсснера можно сформулировать следующим образом: Из всех кинематических, статических систем и систем, описываемых тензорами $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$, действительная система (система действительных кинематической и статической систем) выделяется тем, что для нее оператор (8.1.58) имеет стационарное значение, т.е.

$$D\check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varphi}, \delta \boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\varkappa}, \delta \underline{\mathbf{P}}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}) = 0. \quad (8.1.59)$$

В самом деле, пользуясь определением дифференциала оператора [336] и теоремой Остроградского-Гаусса, в силу (8.1.5) будем иметь

$$\begin{aligned} D\check{R} = & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{P}} \right) \otimes \delta \boldsymbol{\gamma} + \left(\frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\mu}} \right) \otimes \delta \boldsymbol{\varkappa} - (\boldsymbol{\gamma} - \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \otimes \delta \underline{\mathbf{P}} - (\boldsymbol{\varkappa} - \nabla \boldsymbol{\varphi}) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} - \right. \\ & \left. - (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right] dV - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \\ & + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)] d\Sigma - \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Sigma = 0. \end{aligned} \quad (8.1.60)$$

Отсюда, учитывая произвольность $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\varphi}$, $\delta \boldsymbol{\gamma}$, $\delta \boldsymbol{\varkappa}$, $\delta \underline{\mathbf{P}}$, и $\delta \underline{\boldsymbol{\mu}}$, получим уравнения равновесия (8.1.3), кинематические соотношения (8.1.5), определяющие соотношения (8.1.7) и кинематические (8.1.1) и статические (8.1.4) граничные условия.

Используя соотношение (8.1.46), легко показать, что (8.1.58) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) = & \iiint_V [\underline{\mathbf{P}} \otimes (\nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes \nabla \boldsymbol{\varphi} - \check{w}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}] dV - \\ & - \iint_{\Sigma_1} [\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)] d\Sigma - \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.1.61)$$

В дальнейшем операторы (8.1.58) и (8.1.61) назовем обобщенными операторами Рейсснера для микрополярной среды.

На основании оператора Рейсснера (8.1.61) вариационный принцип можно сформулировать следующим образом: Из всех кинематических и статических систем, действительная выделяется тем, что для нее оператор (8.1.61) имеет стационарное значение, т.е.

$$D\check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varphi}, \delta \underline{\mathbf{P}}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}) = 0.$$

В самом деле, пользуясь определением дифференциала оператора [336] и теоремой Остроградского-Гаусса, из (8.1.61) аналогично (8.1.60) получим

$$\begin{aligned} D\check{R} = & \iiint_V \left[\left(\boldsymbol{\gamma} - \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\mathbf{P}}} \right) \otimes \delta \underline{\mathbf{P}} + \left(\boldsymbol{\varkappa} - \frac{\partial \check{w}}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} \right) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} - (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \right] dV - \\ & - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)] d\Sigma - \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Sigma = 0. \end{aligned} \quad (8.1.62)$$

Видно, что, учитывая произвольность $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\varphi}$, $\delta \underline{\mathbf{P}}$ и $\delta \underline{\boldsymbol{\mu}}$, из (8.1.62) получим уравнения равновесия (8.1.3), обратные определяющие соотношения (8.1.49), кинематические (8.1.1) и статические (8.1.4) граничные условия.

Следует заметить, что при соблюдении некоторых условий стационарная точка лагранжиана (кастильяниана) является точкой минимума (максимума). С целью доказательства этих предложений выведем аналогичные приведенным в [336] тождества. В этой связи докажем следующую теорему.

Теорема 8.1.1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$ функция*

$$f(\xi) \equiv \check{\mathbb{P}}[\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \xi(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \equiv \check{\mathbb{P}}[\underline{\gamma}_1 + \xi(\underline{\gamma}_2 - \underline{\gamma}_1), \underline{\boldsymbol{x}}_1 + \xi(\underline{\boldsymbol{x}}_2 - \underline{\boldsymbol{x}}_1)], \quad (8.1.63)$$

где $\check{\mathbb{P}} = \iiint_V \check{W} dV$ — потенциальная энергия деформации и изгиба-кручения, на этом отрезке допускает представление

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \quad (8.1.64)$$

то имеет место тождество

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{P}}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) &= \check{\mathbb{P}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) + \iiint_V \{ \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) \otimes^2 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \\ &+ \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) \otimes^2 [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \} dV + \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \right. \\ &\boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes^4 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \\ &+ \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] + \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^T [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \right. \\ &\boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes^4 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] + \\ &\left. + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} \otimes^4 [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.1.65)$$

Здесь выражение $[\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)]$ — аргумент той величины, рядом с которой оно написано, $(\partial \underline{\boldsymbol{\mu}} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}})^T$ обозначает транспонированный с $(\partial \underline{\boldsymbol{\mu}} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}})$ тензор.

Доказательство. Легко проверить, что на основании (8.1.63) имеем

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \int_V \{ \underline{\mathbf{P}} \otimes^2 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes^2 [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \} dV, \\ f''(\xi) &= \int_V \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes^4 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} + \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^T \right] \otimes^4 \right. \\ &\left. \otimes^4 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \right\} dV \end{aligned} \quad (8.1.66)$$

Заметим, что в формулах (8.1.66) $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, $\partial \underline{\mathbf{P}} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}$, $\partial \underline{\mathbf{P}} / \partial \underline{\boldsymbol{x}}$, $\partial \underline{\boldsymbol{\mu}} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\partial \underline{\boldsymbol{\mu}} / \partial \underline{\boldsymbol{x}}$ имеют аргумент $[\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \xi(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)]$, который с целью сокращения письма опущен. Учитывая (8.1.63) и (8.1.66) при указанных в (8.1.64) значениях ξ , получим ((8.1.65), чем и доказывается теорема.

Следствие. Если \mathbf{u}_1 и $\boldsymbol{\varphi}_1$ — действительная кинематическая система, а \mathbf{u}_2 и $\boldsymbol{\varphi}_2$ — кинематически допустимая система, то из доказанной теоремы (8.1.65) следует тождество

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{P}}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) &= \check{\mathbb{P}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) + A^{(e)}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes^4 \right. \\ &\otimes^4 [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \\ &+ \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] + \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^{T_4} \otimes [\mathbf{u}_1 + \eta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \right. \\ &\boldsymbol{\varphi}_1 + \eta(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \left. \right] [\underline{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] + \\ &\left. + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} \otimes^4 [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] [\underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.1.67)$$

Теорема 8.1.2. Если определяющие соотношения (8.1.7) таковы, что для любых двух тензоров второго ранга $\underline{\mathbf{h}}$ и $\underline{\mathbf{l}}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes (\underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{h}}) + \left[\frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varkappa}}} + \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^T \right] \otimes (\underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{l}}) + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \otimes (\underline{\mathbf{l}} \otimes \underline{\mathbf{l}}) \geq \\ \geq a \underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{h}} + 2b \underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{l}} + c \underline{\mathbf{l}} \otimes \underline{\mathbf{l}}, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0, \end{aligned} \quad (8.1.68)$$

то стационарная точка (8.1.39) лагранжиана (8.1.38) является точкой минимума и обобщенное решение статической (квазистатической) задачи (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.1) и (8.1.4) единственно.

Вводя тензорный столбец $\underline{\mathbb{X}}$, тензорно-блочную матрицу $\underline{\mathbb{M}}$ и матрицу G

$$\underline{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{h}} \\ \underline{\mathbf{l}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\mathbb{X}}^T = (\underline{\mathbf{h}}, \underline{\mathbf{l}})), \quad \underline{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} & \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \\ \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}} & \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (8.1.69)$$

соотношение (8.1.68) можно записать в виде

$$\underline{\mathbb{X}}^T \otimes \underline{\mathbb{M}} \otimes \underline{\mathbb{X}} = (\underline{\mathbb{X}}^T G) \otimes \underline{\mathbb{X}}. \quad (8.1.70)$$

Следует заметить, что последние два неравенства в (8.1.68) — необходимые и достаточные условия для положительной определенности матрицы G , а первое соотношение (8.1.68) или (8.1.70) — необходимое и достаточное условие для положительной определенности тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$ (см. (8.1.69)). В линейной микрополярной теории тензорно-блочная матрица $\underline{\mathbb{M}}$ обычно — положительно-определенная симметричная матрица и, следовательно, имеет 18 положительных собственных значений и полную систему собственных тензорных столбцов, состоящую из 18 тензорных столбцов. Подробно задача на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга и их некоторые применения в механике изложены в [301, 302]. Здесь на этих вопросах останавливаться не будем.

Доказательство. Полагая в тождестве (8.1.67) $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\psi}$ (любая кинематически допустимая система), а $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}$ (решение задачи (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.1) и (8.1.4) (действительная кинематическая система)), в силу (8.1.68), правая часть которого при указанных условиях — положительно-определенная квадратичная форма, получим

$$\begin{aligned} \check{L}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \equiv \check{\Pi}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - A^{(e)}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \geq \check{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - A^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + \\ + \frac{1}{2} \int_V [a \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w} - \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w} - \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) + 2b \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w} - \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) + \\ + c \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}) \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi})] dV \geq \check{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - A^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \check{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned} \quad (8.1.71)$$

Неравенством (8.1.71) доказано, что стационарная точка лагранжиана является точкой минимума. Теперь докажем единственность обобщенного решения. Предположим противное. Пусть существуют два решения $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1$ и $\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2$. Тогда из (8.1.24), следует, что эти решения удовлетворяют тождеству

$$\int_V \{ [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + [\underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) \} dV. \quad (8.1.72)$$

Далее, учитывая равенство

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) &= \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \{ \underline{\mathbf{P}}[\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \xi(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \} d\xi = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} [\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \xi(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\mathbf{P}}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} [\mathbf{u}_1 + \xi(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\varphi}_1 + \xi(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)] \otimes [\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_1)] \right\} d\xi \end{aligned} \quad (8.1.73)$$

и равенство, которое получается из (8.1.73), если $\underline{\mathbf{P}}$ заменить на $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, а также, полагая, что $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1$, из (8.1.72) в силу (8.1.68) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_V [a \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)\|^2 + 2b \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1) \otimes \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1) + \\ + c \|\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1)\|^2] dV \leq 0. \end{aligned} \quad (8.1.74)$$

На основании (8.1.74) заключаем, что

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1), \quad \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_2) = \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\varphi}_1).$$

Отсюда, очевидно, получаем

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (8.1.75)$$

где \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\varphi}_0$ — два произвольных постоянных вектора.

Наконец, учитывая кинематические граничные условия (8.1.1), из (8.1.75) получим $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ и $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_1$, т.е. единственность обобщенного решения задачи (8.1.3), (8.1.5), (8.1.7), (8.1.1) и (8.1.4) доказана.

Следует заметить, что если имеем только статические граничные условия, то решение задачи микрополярной МДТТ единственно с точностью до жесткого движения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{u}_0 = \text{const}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \text{const}.$$

Если закрепить какую-нибудь точку \mathbf{x}_0 , т.е. допустить, что $\mathbf{u} = 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = 0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, то можно исключить жесткое движение. Заметим также, что при статических граничных условиях о разрешимости задачи микрополярной МДТТ можно говорить лишь в том случае, когда «система самоуравновешена», т.е. для всего тела выполняются постулаты об изменении количества движения и момента количества движения, которые, очевидно, для случая равновесия можно записать в виде

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}_0 d\Sigma = 0, \quad \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{m}) dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{r}' \times \mathbf{P}_0 + \boldsymbol{\mu}_0) d\Sigma = 0.$$

Кроме того, из единственности решения задачи следует, что точка минимума Лагранжиана является единственной.

Легко доказать, что аналогично (8.1.65) и (8.1.67) справедливы теорема и следствие.

Теорема 8.1.3. *Если дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$ функция*

$$f(\xi) = \tilde{\pi}[\underline{\mathbf{P}}_1 + \xi(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \xi(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)],$$

где $\tilde{\pi}$ — потенциальная энергия напряжений и моментных напряжений (8.1.47), на этом отрезке допускает представление (8.1.64), то имеет место тождество

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}_2, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2) &= \tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}_1, \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) + \iiint_V [\gamma(\underline{\mathbf{P}}_1, \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) \otimes^2 (\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1) + \boldsymbol{\kappa}(\underline{\mathbf{P}}_1, \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) \otimes^2 (\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] dV + \\ &+ \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\mathbf{P}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \otimes^4 (\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1)(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1) + \right. \\ &+ \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\mathbf{P}}} \right)^T [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \right] \otimes^4 (\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1)(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) + \\ &+ \left. \left. \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \otimes^4 (\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.1.76)$$

Следствие. Если $\underline{\mathbf{P}}_1$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_1$ — действительная статическая система, а $\underline{\mathbf{P}}_2$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_2$ — статически допустимая система, то из (8.1.76) следует тождество

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}_2, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2) &= \tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}_1, \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) + A_{\Sigma_1}^i(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\mathbf{P}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \otimes^4 (\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1)(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1) + \right. \\ &+ \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\mathbf{P}}} \right)^T [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \right] \otimes^4 (\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1)(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) + \\ &+ \left. \left. \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} [\underline{\mathbf{P}}_1 + \eta(\underline{\mathbf{P}}_2 - \underline{\mathbf{P}}_1), \underline{\boldsymbol{\mu}}_1 + \eta(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)] \otimes^4 (\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1)(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1) \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.1.77)$$

Теорема (8.1.76) и следствие (8.1.77) доказываются совершенно аналогично (8.1.65) и (8.1.67).

Теорема 8.1.4. Если ОС (8.1.49) таковы, что для любых тензоров второго ранга $\underline{\mathbf{h}}$ и $\underline{\mathbf{l}}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\mathbf{P}}} \otimes^4 (\underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{h}}) + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\mathbf{P}}} \right)^T \right] \otimes^4 (\underline{\mathbf{h}} \otimes \underline{\mathbf{l}}) + \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \underline{\boldsymbol{\mu}}} \otimes^4 (\underline{\mathbf{l}} \otimes \underline{\mathbf{l}}) &\geq \\ &\geq k \underline{\mathbf{h}} \otimes^2 \underline{\mathbf{h}} + 2m \underline{\mathbf{h}} \otimes^2 \underline{\mathbf{l}} + n \underline{\mathbf{l}} \otimes^2 \underline{\mathbf{l}}, \quad k > 0, \quad kn - m^2 > 0, \end{aligned} \quad (8.1.78)$$

то стационарная точка (8.1.54) кастильяниана (8.1.53) является точкой максимума.

Доказательство. Принимая в тождестве (8.1.77) $\underline{\mathbf{P}}_2 = \underline{\mathbf{Q}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_2 = \underline{\boldsymbol{\tau}}$ (любая статически допустимая система), а $\underline{\mathbf{P}}_1 = \underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}_1 = \underline{\boldsymbol{\mu}}$ (действительная статическая система), на основании (8.1.78) получим

$$\begin{aligned} \check{K}(\underline{\mathbf{Q}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) &\equiv -\tilde{\pi}(\underline{\mathbf{Q}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) + A_{\Sigma_1}^{(i)}(\underline{\mathbf{Q}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \leq -\tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) + A_{\Sigma_1}^{(i)}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) - \\ &- \frac{1}{2} \int_V (k \|\underline{\mathbf{Q}}\|^2 + 2m \underline{\mathbf{Q}} \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\tau}} + n \|\underline{\boldsymbol{\tau}}\|^2) dV \leq -\tilde{\pi}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) + A_{\Sigma_1}^{(i)}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) \equiv \check{K}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}), \end{aligned} \quad (8.1.79)$$

что требовалось доказать.

Следует заметить, что (8.1.78) можно аналогично (8.1.70) записать с помощью тензорно-блочной матрицы и представить ее в каноническом виде. Однако с целью сокращения письма на этом останавливаться не будем.

Теорема 8.1.5. В положении равновесия, характеризующемся векторами перемещений \mathbf{u}^* и вращения $\boldsymbol{\varphi}^*$ и тензорами напряжений $\underline{\mathbf{P}}^*$ и моментных напряжений $\underline{\boldsymbol{\mu}}^*$, лагранжиан совпадает с кастильянианом

$$\check{L}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\varphi}^*) = \check{K}(\underline{\mathbf{P}}^*, \underline{\boldsymbol{\mu}}^*), \quad (8.1.80)$$

а для любых \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varphi}$, $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ справедливы неравенства

$$\check{K}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) \leq \check{K}(\underline{\mathbf{P}}^*, \underline{\boldsymbol{\mu}}^*) = \check{L}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\varphi}^*) \leq \check{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}). \quad (8.1.81)$$

Доказательство. Равенство (8.1.80) следует из (8.1.52), записывая его для положении равновесия, а из (8.1.80) и предыдущих теорем следуют неравенства (8.1.81).

Неравенства (8.1.81) являются мощным источником для получения так называемых двухсторонних оценок.

Следует заметить, что, пользуясь принципом Д'Аламбера и заменяя $\rho\mathbf{F}$ и $\rho\mathbf{m}$ на $\rho\mathbf{F} - \rho\partial_t^2\mathbf{u}$ и $\rho\mathbf{m} - \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}$ соответственно, вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно и Рейсснера можно сформулировать для случая, когда учитываются силы и моменты инерции. Кроме того, легко видеть, что лагранжиан является частным случаем оператора (8.1.58), если считать заранее справедливыми кинематические соотношения (8.1.5) и ОС (8.1.7), а кастильяниан в силу преобразования

$$\int_V (\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\times} \boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\times} \boldsymbol{\varkappa}) dV = - \int_V [\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\times} \underline{\mathbf{P}}) \cdot \boldsymbol{\varphi}] dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\Sigma$$

является частным случаем оператора (8.1.61), если выполняются уравнения равновесия (8.1.3) и статические граничные условия (8.1.4).

Заметим также, что, заменяя в (8.1.10) \mathbf{w} и $\boldsymbol{\psi}$ на $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}$ соответственно, получим принцип виртуальных работ в виде

$$\begin{aligned} \int_V [\underline{\mathbf{P}} \overset{2}{\otimes} \delta\boldsymbol{\gamma} + \underline{\boldsymbol{\mu}} \overset{2}{\otimes} \delta\boldsymbol{\varkappa}] dV = \int_V [\rho(\mathbf{F} - \partial_t^2\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\rho\mathbf{m} - \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}] dV + \\ + \int_{\Sigma} (\mathbf{P}_{(n)} \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (8.1.82)$$

где $\delta\boldsymbol{\gamma} = \nabla\delta\mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}$, $\delta\boldsymbol{\varkappa} = \nabla\delta\boldsymbol{\varphi}$, а $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}$ — произвольные виртуальные перемещение и вращение. Следовательно, левая часть (8.1.82) — виртуальная работа внутренних сил и моментов, а правая часть виртуальная работа внешних сил и моментов, а также инерционных сил и моментов.

8.2 О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории однослойных тонких тел

Имея приведенные выше вариационные принципы для трехмерной микрополярной теории, не представляет труда сформулировать соответствующие вариационные принципы для микрополярной теории тонких тел. Ниже с целью сокращения письма на основании лишь обобщенного вариационного принципа типа Рейсснера рассмотрим способ получения соответствующих принципов для теорий однослойных и многослойных тонких тел с одним малым размером при новой параметризации их областей, так как при необходимости другие принципы могут быть выведены совершенно аналогично как при новой, так и при других рассмотренных выше параметризациях областей этих тонких тел, а также тонких тел с двумя малыми размерами.

8.2.1 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером при новой параметризации области тела

Сохраняя принятые выше обозначения, рассмотрим трехмерную тонкую область V с одним малым размером, ограниченную двумя лицевыми поверхностями $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ и линейчатой боковой поверхностью Σ (см. рис. 1.1 в первой главе). Тогда для тонкой области обобщенный оператор типа Рейсснера (8.1.58) представится в виде

$$\begin{aligned}
 \check{R}(\mathbf{u}, \varphi, \gamma, \boldsymbol{\varkappa}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\varphi}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\varphi}, \underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}) = & \iiint_V [\check{W}(\gamma, \boldsymbol{\varkappa}) - \\
 & - \underline{\mathbf{P}} \otimes (\gamma - \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi) - \underline{\boldsymbol{\mu}} \otimes (\boldsymbol{\varkappa} - \nabla \varphi) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{m} \cdot \varphi] dV - \\
 & - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{m} \cdot [\underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\varphi - \varphi_0)] d\Sigma - \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \varphi) d\Sigma - \\
 & - \iint_{S_1^{(-)}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)] dS - \iint_{S_2^{(-)}} (\mathbf{P}_0 \cdot \underline{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \underline{\varphi}) dS - \\
 & - \iint_{S_1^{(+)}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)] dS - \iint_{S_2^{(+)}} (\mathbf{P}_0 \cdot \underline{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \underline{\varphi}) dS,
 \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \quad S^{(-)} = S_1^{(-)} \cup S_2^{(-)}, \quad S_1^{(-)} \cap S_2^{(-)} = \emptyset, \\
 S^{(+)} &= S_1^{(+)} \cup S_2^{(+)}, \quad S_1^{(+)} \cap S_2^{(+)} = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Из (8.2.1) аналогично (8.1.60) легко получить искомый принцип в форме

$$\begin{aligned}
 D\check{R} = & \iiint_V [(\frac{\partial \check{W}}{\partial \gamma} - \underline{\mathbf{P}}) \otimes \delta \gamma + (\frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}) \otimes \delta \boldsymbol{\varkappa} - (\gamma - \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \varphi) \otimes \delta \underline{\mathbf{P}} - \\
 & - (\boldsymbol{\varkappa} - \nabla \varphi) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} - (\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m}) \cdot \delta \varphi] dV - \\
 & - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{m} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\varphi - \varphi_0)] d\Sigma - \\
 & - \iint_{\Sigma_2} [(\mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{m} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta \varphi] d\Sigma - \\
 & - \iint_{S_1^{(-)}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)] dS - \\
 & - \iint_{S_2^{(-)}} [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta \underline{\varphi}] dS - \\
 & - \iint_{S_1^{(+)}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)] dS - \\
 & - \iint_{S_2^{(+)}} [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}_0) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \delta \underline{\varphi}] dS = 0.
 \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Отсюда, учитывая произвольность $\delta \mathbf{u}$, $\delta \varphi$, $\delta \gamma$, $\delta \boldsymbol{\varkappa}$, $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, $\delta \underline{\mathbf{u}}$, $\delta \underline{\varphi}$, $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, $\delta \underline{\mathbf{u}}$, $\delta \underline{\varphi}$, $\underline{\mathbf{P}}$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, получим уравнения равновесия, кинематические соотношения, кинематические и статические граничные условия, т.е. трехмерную постановку задачи для тонких тел с одним малым размером. Учитывая представления градиента и дивергенции при рассматриваемой параметризации (необязательно при новой), конечно, эту постановку задачи можно

записать при используемой параметризации. Следовательно, вначале (8.2.2) можно было записать при рассматриваемой параметризации, а затем из полученного соотношения выводить постановку задачи. Так как вверху были приведены постановки задач, то здесь на этом останавливаться не будем.

Далее представим принцип (8.2.2) при новой параметризации области тонкого тела в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева.

8.2.2 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером в моментах при новой параметризации области тела

Прежде чем сформулировать вариационный принцип Рейсснера для теории тонких тел, вспомним некоторые соотношения [235], связывающие входящие в (8.2.1) и (8.2.2) геометрические характеристики при новой параметризации области тонкого тела. Эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dx^1 dx^2 dx^3 &= \frac{dV}{\sqrt{g}} = \frac{dS dx^3}{\sqrt{g g^{33}}} = \frac{dS dx^3}{\sqrt{g^{(-)} g^{\bar{3}\bar{3}}}} = \frac{dS dx^3}{\sqrt{g^{(+)} g^{\dagger\dagger\dagger}}}, \\ \frac{d\Sigma m_I}{\sqrt{g}} &= \frac{d\Sigma m_{-I}^{(-)}}{\sqrt{g^{(-)}}} = \frac{d\Sigma m_{+I}^{(+)}}{\sqrt{g^{(+)}}} = \frac{ds dx^3 m_I}{\sqrt{g g^{33}}} = \frac{d s dx^3 m_{-I}^{(-)}}{\sqrt{g^{(-)} g^{\bar{3}\bar{3}}}} = \frac{d s dx^3 m_{+I}^{(+)}}{\sqrt{g^{(+)} g^{\dagger\dagger\dagger}}}. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Заметим, что некоторые получаемые из (8.2.3) формулы были выведены выше (см. (3.5.28) – (3.5.33)).

Представим теперь (8.2.2) в моментах относительно системы полиномов Лежандра. В этой связи разложим каждый множитель подынтегральных выражений объемного интеграла и интегралов по боковой грани в ряд по системе полиномов Лежандра и преобразуем интегралы, входящие в правую часть (8.2.2). Видно, что из интегралов, входящих в правую часть (8.2.2), большого внимания заслуживают преобразования интегралов вида

$$\iiint_V \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} dV, \quad \iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b} d\Sigma, \quad (8.2.4)$$

а остальные интегралы можно легко преобразовать. Итак, преобразуем первый интеграл из (8.2.4). Учитывая $dV = \overset{(-)}{\vartheta} h dS dx^3$, вытекающее из первой строки (8.2.3), получим

$$\iiint_V \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} dV = \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \left(\int_0^1 \overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} \right) dS. \quad (8.2.5)$$

В силу соотношения

$$\underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{(k)}{\underline{\mathbf{Q}}}^2 \otimes \overset{(m)}{\underline{\mathbf{a}}}^* P_k^*(x^3) P_m^*(x^3), \quad \underline{\mathbf{a}}^* = \overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{a}}$$

и ортогональности системы полиномов Лежандра будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \overset{(-)}{\vartheta} \underline{\mathbf{a}} dx^3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{(k)}{\underline{\mathbf{Q}}}^2 \otimes \overset{(m)}{\underline{\mathbf{a}}}^* \int_0^1 P_k^*(x^3) P_m^*(x^3) dx^3 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overset{(k)}{\underline{\mathbf{Q}}}^2 \otimes \overset{(m)}{\underline{\mathbf{a}}}^* \frac{1}{\sqrt{(2k+1)(2m+1)}} \delta_{km} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \overset{(k)}{\underline{\mathbf{Q}}}^2 \otimes \overset{(m)}{\underline{\mathbf{a}}}^*, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int_0^1 \underline{\mathbf{Q}} \otimes \vartheta \underline{\mathbf{a}} dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \underline{\mathbf{Q}}^{(k)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(k)*} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \underline{\mathbf{Q}}^{*(k)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(k)}, \quad (8.2.6)$$

где $\underline{\mathbf{Q}}^{*(k)} = \vartheta \underline{\mathbf{Q}}^{(k)}$, $\underline{\mathbf{a}}^{(k)*} = \vartheta \underline{\mathbf{a}}^{(k)}$, а $P_k^*(x^3)$ — смещенный полином Лежандра k -ой степени. Учитывая (8.2.6), из (8.2.5) найдем

$$\iint_V \underline{\mathbf{Q}} \otimes \underline{\mathbf{a}} dV = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \iint_{(-)S} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{(k)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(k)*} dS = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \iint_{(-)S} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{*(k)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(k)} dS. \quad (8.2.7)$$

Следует заметить, что то или иное представление объемного интеграла (8.2.7) выбирается в зависимости от представления системы уравнений движения (равновесия), которое в свою очередь определяет представления ОС и статических граничных условий при рассматриваемой параметризации области тела.

Нетрудно видеть, что в силу соотношения второй строки (8.2.3) имеем равенства

$$\frac{d\Sigma \mathbf{m}}{\sqrt{g}} = \frac{d\Sigma \underline{\mathbf{m}}_{-I}^{(-)}}{\sqrt{g^{(-)}}} = \frac{ds dx^3 \mathbf{m}}{\sqrt{g g^{33}}} = \frac{d^{\bar{s}} dx^3 \underline{\mathbf{m}}_{-I}^{(-)}}{\sqrt{g^{\bar{s}} g^{\bar{s}33}}},$$

с учетом которых второй интеграл (8.2.4) приводится к виду

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b} d\Sigma = \int_{(-)L} h(x') \underline{\mathbf{m}}_{-I}^{(-)}(x') \left(\int_0^1 \vartheta \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b} dx^3 \right) d^{\bar{s}}, \quad (8.2.8)$$

Очевидно, аналогично (8.2.6) находим

$$\int_0^1 \vartheta \underline{\mathbf{Q}}^I \cdot \mathbf{b} dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{Q}}^I) \cdot \mathbf{b}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\mathbf{Q}}^I) \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}^* = \vartheta \mathbf{b}. \quad (8.2.9)$$

Учитывая (8.2.9), интеграл (8.2.8) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b} d\Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{(-)L} h(x') \underline{\mathbf{m}}_{-I}^{(-)}(x') \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{Q}}^I) \cdot \mathbf{b}^* d^{\bar{s}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{(-)L} h(x') \underline{\mathbf{m}}_{-I}^{(-)}(x') \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\mathbf{Q}}^I) \cdot \mathbf{b} d^{\bar{s}}. \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

Далее легко усмотреть, что

$$\iint_{\Sigma} \underline{\mathbf{P}}_0 \cdot \mathbf{u} d\Sigma = \iint_{(-)\Sigma} (d\Sigma/d\Sigma) \underline{\mathbf{P}}_0 \cdot \mathbf{u} d\Sigma = \int_{(-)L} h(x') \left(\int_0^1 \vartheta a(x', x^3) \underline{\mathbf{P}}_0 \cdot \mathbf{u} dx^3 \right) d^{\bar{s}}, \quad (8.2.11)$$

где введено обозначение $a(x', x^3) = (d\Sigma/d\Sigma) \vartheta^{-1}$ и, кроме того, учтена вытекающая из второй строки (8.2.3) формула $d\Sigma = h(x') d^{\bar{s}} dx^3$.

В силу (8.2.8) и (8.2.11) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{m} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}}_0) \cdot \mathbf{u} d\Sigma &= \int_{(-)L} h(x') \left(\int_0^1 \vartheta \underline{\mathbf{T}}_{(1)} \cdot \mathbf{u} dx^3 \right) d^{\bar{s}}, \\ \iint_{\Sigma} (\mathbf{m} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Sigma &= \int_{(-)L} h(x') \left(\int_0^1 \vartheta \underline{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx^3 \right) d^{\bar{s}}, \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{T}_{(1)} = \overset{(-)}{m}_I \mathbf{P}^I - a(x', x^3) \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{T}_{(2)} = \overset{(-)}{m}_I \boldsymbol{\mu}^I - a(x', x^3) \boldsymbol{\mu}_0. \quad (8.2.13)$$

Учитывая (8.2.6), из (8.2.12) получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{u} d\Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L}} h(x') \mathbf{T}_{(1)}^{(k)} \cdot \mathbf{u}^* d\overset{(-)}{s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L}} h(x') \mathbf{T}_{(1)}^{*(k)} \cdot \mathbf{u} d\overset{(-)}{s}, \\ \iint_{\Sigma} (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L}} h(x') \mathbf{T}_{(2)}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\varphi}^* d\overset{(-)}{s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L}} h(x') \mathbf{T}_{(2)}^{*(k)} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\overset{(-)}{s}, \\ \mathbf{u}^* &= \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{u}, \quad \mathbf{T}_{(1)}^* = \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{T}_{(1)}, \quad \boldsymbol{\varphi}^* = \overset{(-)}{\vartheta} \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{T}_{(2)}^* = \overset{(-)}{\vartheta} \mathbf{T}_{(2)}. \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

Далее в силу формул $f^{(-)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}$, $f^{(+)} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}$ (см. (2.2.3)) поверхностные интегралы в правой части (8.2.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \iint_{\overset{(-)}{S}_1} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(-)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(-)}{\mathbf{u}} - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_0) d\overset{(-)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \iint_{\overset{(-)}{S}_1} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(-)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(-)}{\mathbf{u}} - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_0) d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(-)}{S}_2} (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} - \overset{(-)}{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \overset{(-)}{\mathbf{u}} d\overset{(-)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \iint_{\overset{(-)}{S}_2} (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{P}} - \overset{(-)}{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \overset{(-)}{\mathbf{u}} d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(+)}{S}_1} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(+)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(+)}{\mathbf{u}} - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_0) d\overset{(+)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\overset{(-)}{S}'_1} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(+)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(+)}{\mathbf{u}} - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_0) \overset{(+)}{\eta} d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(+)}{S}_2} (\overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} - \overset{(+)}{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \overset{(+)}{\mathbf{u}} d\overset{(+)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\overset{(+)}{S}''_2} (\overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{P}} - \overset{(+)}{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \overset{(+)}{\mathbf{u}} \overset{(+)}{\eta} d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(-)}{S}_1} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_0) d\overset{(-)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \iint_{\overset{(-)}{S}_1} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_0) d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(-)}{S}_2} (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} - \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}} d\overset{(-)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \iint_{\overset{(-)}{S}_2} (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} - \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}} d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(+)}{S}_1} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_0) d\overset{(+)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\overset{(-)}{S}'_1} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_0) \overset{(+)}{\eta} d\overset{(-)}{S}, \\ \iint_{\overset{(+)}{S}_2} (\overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}} d\overset{(+)}{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\overset{(-)}{S}''_2} (\overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}} \overset{(+)}{\eta} d\overset{(-)}{S}, \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

где учтена формула

$$d\overset{(+)}{S} = \overset{(+)}{\eta} d\overset{(-)}{S} \quad (\overset{(-)}{\eta} = \sqrt{gg^{33}/(g^3 g^{33})} = \overset{(-)}{\vartheta} \sqrt{g^{33}/g^{33}}, \quad \overset{(+)}{\eta} = \overset{(-)}{\eta} \Big|_{x^3=1}),$$

которая получается из первой строки (8.2.3).

Следует заметить, что части $\overset{(-)}{S}'_1$, $\overset{(-)}{S}''_2$ поверхности $\overset{(-)}{S}$, вообще говоря, могут не иметь общих точек с частями $\overset{(-)}{S}_1$, $\overset{(-)}{S}_2$.

Вводя обозначения

$$\mathbf{S}_{(1)} = \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F}, \quad \mathbf{S}_{(2)} = \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} \quad (8.2.16)$$

и учитывая (8.2.7), (8.2.10), (8.2.13), (8.2.14) и (8.2.15), обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера (8.2.2) в моментах представится следующим образом:

$$\begin{aligned} D\check{R} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left\{ \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \left\{ [\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}}) - \underline{\mathbf{P}}] \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\gamma}} + [\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\boldsymbol{\varkappa}}}) - \underline{\boldsymbol{\mu}}] \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \right. \right. \\ & - [\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{M}}(\nabla \mathbf{u}) + \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}] \otimes \delta \underline{\mathbf{P}} - [\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\mathbf{M}}(\nabla \boldsymbol{\varphi})] \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{S}_{(1)} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{S}_{(2)} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}} \Big\} dS - \\ & - \int_{\overset{(-)}{L_1}} h(x') \overset{(-)}{m}_I [\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \delta \mathbf{P}^I) \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \delta \boldsymbol{\mu}^I) \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_0)] d\overset{(-)}{s} - \\ & - \int_{\overset{(-)}{L_2}} h(x') (\underline{\mathbf{T}}_{(1)}^* \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{T}}_{(2)}^* \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}) d\overset{(-)}{s} - \\ & - (-1)^k (2k+1) \left\{ \iint_{\overset{(-)}{S_1}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_0)] d\overset{(-)}{S} - \right. \\ & - \iint_{\overset{(-)}{S_2}} [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}] \Big\} d\overset{(-)}{S} - \\ & - (2k+1) \left\{ \iint_{\overset{(+)}{S_1}} \underline{\mathbf{n}} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_0)] d\overset{(+)}{S} - \right. \\ & \left. \left. - \iint_{\overset{(+)}{S_2}} [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}}_0) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_0) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}] \Big\} d\overset{(+)}{S} = 0, \right. \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

где, как и выше, введены следующие обозначения:

$$\underline{\mathbf{P}}^* = \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\mathbf{P}}), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}^* = \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\boldsymbol{\mu}}), \quad \mathbf{S}_{(I)}^* = \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{S}_{(I)}), \quad \mathbf{T}_{(I)}^* = \underline{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{T}_{(I)}). \quad (8.2.18)$$

Заметим, что последние два интеграла в (8.2.17) можно было заменить, например, аналогично последним двум интегралам в (8.2.15), однако этого делать не стали. При желании это сделать не трудно. Хотя, в этом нет нужды. И при дальнейшем изложении поступим аналогичным образом.

Легко усмотреть, что в силу произвольности $\delta \underline{\boldsymbol{\gamma}}$, $\delta \underline{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\delta \underline{\mathbf{u}}$, $\delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}$, $\delta \underline{\mathbf{P}}^*$, $\delta \underline{\boldsymbol{\mu}}^*$ из (8.2.17) получим уравнения равновесия, кинематические и статические граничные условия на контуре базовой поверхности и лицевых поверхностях. Очевидно, число получаемых из (8.2.17) соотношений, кроме кинематических и статических граничных условий на лицевых поверхностях, бесконечно. Применяя изложенные выше методы редукции, бесконечную систему всегда можно привести к конечной.

Следует заметить, что если в (8.2.17) величины $\underline{\mathbf{P}}^*$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}^*$, $\mathbf{S}_{(I)}^*$, $\mathbf{T}_{(I)}^*$, $\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \delta \mathbf{P}^I)$ и $\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \delta \boldsymbol{\mu}^I)$, заменить на $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, $\mathbf{S}_{(I)}$, $\mathbf{T}_{(I)}$, $\underline{\mathbf{M}}(\delta \mathbf{P}^I)$ и $\underline{\mathbf{M}}(\delta \boldsymbol{\mu}^I)$, а $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$, $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}$, $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\boldsymbol{\varphi}}$, $\underline{\mathbf{M}}(\nabla \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{M}}(\nabla \boldsymbol{\varphi})$ — на $\underline{\boldsymbol{\gamma}}^*$, $\underline{\boldsymbol{\varkappa}}^*$, $\underline{\mathbf{u}}^*$, $\underline{\boldsymbol{\varphi}}^*$, $\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \nabla \mathbf{u})$ и $\underline{\mathbf{M}}(\vartheta \nabla \boldsymbol{\varphi})$ соответственно, то получим другую форму представления обобщенного вариационного принципа типа Рейсснера. С целью сокращения письма выписывать его не будем.

Следует отметить также, что можно было обобщенный принцип Рейсснера (8.2.1) представить в моментах, а затем получить (8.2.17). В самом деле, поступая так же, как

при выводе (8.2.17), в силу (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.15) из (8.2.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \check{R}(\overset{(0)}{\mathbf{u}}, \dots, \overset{(n)}{\mathbf{u}}, \dots, \overset{(0)}{\boldsymbol{\varphi}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\varphi}}, \dots, \overset{(0)}{\boldsymbol{\gamma}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\gamma}}, \dots, \overset{(0)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \dots, \overset{(0)}{\mathbf{P}}, \dots, \overset{(n)}{\mathbf{P}}, \dots, \overset{(0)}{\boldsymbol{\mu}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\mu}}, \dots) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \check{R}_k(\overset{(k)}{\mathbf{u}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \overset{(k)}{\mathbf{P}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}), \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \check{R}_k(\overset{(k)}{\mathbf{u}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \overset{(k)}{\mathbf{P}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{1}{2k+1} \left\{ \iint_{S_{(-)}} h(x') \{ W_k(\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}) - \overset{(k)}{\mathbf{P}} \otimes [\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}} - \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \mathbf{u}) + \overset{(k)}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}] - \right. \\ \left. - \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}} \otimes [\overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}} - \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \boldsymbol{\varphi})] - \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\rho \mathbf{F}) \cdot \overset{(k)}{\mathbf{u}} - \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\rho \mathbf{m}) \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}} \} dS - \right. \\ \left. - \int_{L_1^{(-)}} h(x') m_I^{(-)} [\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{P}^I) \cdot (\overset{(k)}{\mathbf{u}} - \overset{(k)}{\mathbf{u}}_0) + \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \boldsymbol{\mu}^I) \cdot (\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_0)] dS - \right. \\ \left. - \int_{L_2^{(-)}} h(x') (\overset{(k)}{\mathbf{P}}_{(0)}^* \cdot \overset{(k)}{\mathbf{u}} + \overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}_{(0)}^* \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}) dS - \right. \\ \left. - (-1)^k (2k+1) \left\{ \iint_{S_1^{(-)}} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{(-)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(-)}{\mathbf{u}} - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_0) + \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_0)] dS - \iint_{S_2^{(-)}} (\overset{(-)}{\mathbf{P}}_0 \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}} + \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_0 \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}) dS \right\} - \right. \\ \left. - (2k+1) \left\{ \iint_{S_1^{(+)}} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot [\overset{(+)}{\mathbf{P}} \cdot (\overset{(+)}{\mathbf{u}} - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_0) + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_0)] dS - \iint_{S_2^{(+)}} (\overset{(+)}{\mathbf{P}}_0 \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}} + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_0 \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}) dS \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (8.2.20)$$

называемое общим членом ряда обобщенного оператора Рейсснера.

Следует заметить, что $W_k(\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}})$ является общим членом ряда

$$\overset{(0)}{W}^*(\overset{(0)}{\boldsymbol{\gamma}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\gamma}}, \dots, \overset{(0)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \dots, \overset{(n)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \dots) = \int_0^1 \vartheta \check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) dx^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} W_k(\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}). \quad (8.2.21)$$

Заметим также, что при конкретных случаях оператор деформации и изгиба-кручения \check{W} (8.2.21) можно представить в аналогичном (8.2.6) виде (например, в случае линейной микрополярной теории упругости \check{W} является квадратичной формой относительно $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$). На рассмотрении частных случаев представления \check{W} останавливаться не будем.

Видно, что обобщенный оператор Рейсснера (8.2.19) и (8.2.21) зависят от бесконечно многих переменных $\overset{(k)}{\mathbf{u}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \overset{(k)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}, k = \overline{0, \infty}$, на что указывают многоточия в аргументах этих операторов (\check{R}_k зависит только от $\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}, \overset{(k)}{\mathbf{P}}$ и $\overset{(k)}{\boldsymbol{\mu}}$, а W_k — от $\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}$, однако сами $\overset{(k)}{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varkappa}}$ зависят от бесконечно многих переменных $\overset{(k)}{\mathbf{u}}, \overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}, k = \overline{0, \infty}$, так как $\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \mathbf{u})$ и $\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \boldsymbol{\varphi})$ содержат бесконечно много слагаемых).

Для того, чтобы получить искомый принцип из (8.2.19) надо вывести вспомогательное тождество. С этой целью, интегрируя (8.1.8) по объему V и применяя теорему Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\iiint_V \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \otimes \overset{(k)}{\nabla} a dV = \iint_S \overset{(k)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot a dS - \iiint_V \overset{(k)}{\nabla} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot a dV. \quad (8.2.22)$$

Применяя (8.2.22) к тонкому телу с объемом V и границей $S = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, где S и S — лицевые

поверхности, а Σ — боковая грань и полагая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{n}|_{\Sigma} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{n}|_{x^3=0} = \overset{(-)}{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n}|_{x^3=1} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{Q}|_{x^3=0} = \overset{(-)}{\mathbf{Q}}, \\ \mathbf{Q}|_{x^3=1} = \overset{(+)}{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{a}|_{x^3=0} = \overset{(-)}{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a}|_{x^3=1} = \overset{(+)}{\mathbf{a}}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{Q} \otimes \nabla \mathbf{a} dV = \iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} dS + \iint_{\overset{(-)}{S}} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{a}} dS + \\ + \iint_{\overset{(+)}{S}} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{a}} dS - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} dV. \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

В силу (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.15) из (8.2.23) с помощью простых преобразований искомое тождество представится в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \overset{(k)}{\mathbf{Q}}^* \otimes \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \mathbf{a}) dS = \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L_1}} h(x') \overset{(k)}{m}_I \overset{(-)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(k)}{\mathbf{a}} dS + \\ + \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L_2}} h(x') \overset{(k)}{m}_I \overset{(-)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(k)}{\mathbf{a}} dS + (-1)^k \left[\iint_{\overset{(-)}{S_1}} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{a}} dS + \iint_{\overset{(-)}{S_2}} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{a}} dS \right] + \\ + \iint_{\overset{(+)}{S_1}} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{a}} dS + \iint_{\overset{(+)}{S_2}} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{a}} dS - \frac{1}{2k+1} \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \nabla \cdot \mathbf{Q}) \cdot \overset{(k)}{\mathbf{a}} dS, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

где $L = \overset{(-)}{L_1} \cup \overset{(-)}{L_2}$ ($\overset{(-)}{L_1} \cap \overset{(-)}{L_2} = \emptyset$) — граница (контур) базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$.

Если теперь в (8.2.24) \mathbf{Q} и \mathbf{a} сперва заменить на \mathbf{P} и $\delta \mathbf{u}$, а затем на $\underline{\mu}$ и $\delta \varphi$ соответственно и сложить полученные тождества почленно, то с учетом

$$\delta \mathbf{u}|_{\overset{(-)}{L_1}} = 0, \quad \delta \varphi|_{\overset{(-)}{L_1}} = 0, \quad \delta \mathbf{u}|_{\overset{(-)}{S_1}} = 0, \quad \delta \varphi|_{\overset{(-)}{S_1}} = 0, \quad \delta \mathbf{u}|_{\overset{(+)}{S_1}} = 0, \quad \delta \varphi|_{\overset{(+)}{S_1}} = 0$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \left[\overset{(k)}{\mathbf{P}}^* \otimes \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \delta \mathbf{u}) + \overset{(k)}{\underline{\mu}}^* \otimes \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\nabla \delta \varphi) \right] dS = \\ = \frac{1}{2k+1} \int_{\overset{(-)}{L_2}} h(x') \overset{(k)}{m}_I \left[\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{P}^I) \cdot \delta \mathbf{u} + \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \underline{\mu}^I) \cdot \delta \varphi \right] dS + \\ + \iint_{\overset{(-)}{S_2}} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \left(\overset{(k)}{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{u} + \overset{(k)}{\underline{\mu}} \cdot \delta \varphi \right) dS + \iint_{\overset{(+)}{S_2}} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \left(\overset{(k)}{\mathbf{P}} \cdot \delta \mathbf{u} + \overset{(k)}{\underline{\mu}} \cdot \delta \varphi \right) dS + \\ - \frac{1}{2k+1} \iint_{\overset{(-)}{S}} h(x') \left[\overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \nabla \cdot \mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{u} + \overset{(k)}{\mathbf{M}}(\vartheta \nabla \cdot \underline{\mu}) \cdot \delta \varphi \right] dS, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

В силу определения дифференциала оператора и (8.2.25), а также формул

$$\begin{aligned} DW_k^*(\underline{\gamma}, \underline{\mathbf{x}}, \delta \underline{\gamma}, \delta \underline{\mathbf{x}}) = \frac{\partial W_k^*}{\partial \underline{\gamma}^{(k)}} \otimes \delta \underline{\gamma} + \frac{\partial W_k^*}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{(k)}} \otimes \delta \underline{\mathbf{x}}, \\ \overset{(k)}{\underline{\mathbf{P}}}^* = \frac{\partial W_k^*}{\partial \underline{\gamma}^{(k)}} = \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(\vartheta \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\gamma}} \right), \quad \overset{(k)}{\underline{\mu}}^* = \frac{\partial W_k^*}{\partial \underline{\mathbf{x}}^{(k)}} = \overset{(k)}{\mathbf{M}} \left(\vartheta \frac{\partial \check{W}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right) \end{aligned}$$

из (8.2.19) получим (8.2.17).

Следует заметить, что не доставляет труда аналогично (8.2.17) сформулировать вариационные принципы Лагранжа (8.1.40), Кастильяно (8.1.55) и Рейсснера (8.1.62) или аналогично (8.2.19) и (8.2.20) представить лагранжиан (8.1.38), кастильяниан (8.1.53) и обобщенный оператор Рейсснера (8.1.61), а затем из них получить соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел.

Заметим также, что, пользуясь принципом Д'Аламбера и заменяя объемные силу $\rho\mathbf{F}$ и момент $\rho\mathbf{m}$ на $\rho\mathbf{F} - \rho\partial_t^2\mathbf{u}$ и $\rho\mathbf{m} - \mathbf{J} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}$ соответственно, не представляет труда сформулировать приведенные выше вариационные принципы и в том случае, когда учитываются сила и момент инерции.

В заключении отметим, что сформулированные вариационные принципы (или операторы Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера), как было сказано выше, представляются в виде рядов и содержат бесконечно много переменных $\mathbf{u}^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}$, $k = \overline{0, \infty}$. Поэтому ими пользоваться на практике не целесообразно. В этой связи следует редуцировать их к конечным рядам, которые будут содержать конечное число переменных. Существуют различные методы редукции [68], из которых остановимся только на одном (упрощенном методе редукции). Этот метод редукции заключается в следующем: фиксируем некоторое неотрицательное целое число N и считаем, что все моменты $\mathbf{u}^{(k)} = 0$ и $\boldsymbol{\varphi}^{(k)} = 0$, если $k > N$. В таком случае, конечно, векторы перемещений \mathbf{u} и вращений $\boldsymbol{\varphi}$ представляются в виде

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^{(k)}(x') P_k(x^3), \quad \boldsymbol{\varphi}_N = \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(x') P_k(x^3). \quad (8.2.26)$$

Следовательно, и для тензоров деформаций и изгиба-кручения, а также для тензоров напряжений и моментных напряжений в силу (8.2.26) будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\gamma}}_N &= \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(k)}(x') P_k(x^3), & \underline{\boldsymbol{\varkappa}}_N &= \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\varkappa}}^{(k)}(x') P_k(x^3), \\ \underline{\mathbf{P}}_N &= \sum_{k=0}^N \underline{\mathbf{P}}^{(k)}(x') P_k(x^3), & \underline{\boldsymbol{\mu}}_N &= \sum_{k=0}^N \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(x') P_k(x^3), \end{aligned}$$

которые содержат только моменты $\mathbf{u}^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}$, если $k = \overline{0, N}$.

Тогда, например, вместо (8.2.19) будем иметь

$$\check{R}(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N) \equiv \check{R}(\mathbf{u}^{(0)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(N)}) = \sum_{k=0}^N \check{R}_k(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\varphi}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}^{(k)}, \boldsymbol{\varkappa}^{(k)}, \underline{\mathbf{P}}^{(k)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}), \quad (8.2.27)$$

называемый оператором типа Рейсснера приближения порядка N .

Следует заметить, что на основании (8.2.27) вариационный принцип типа Рейсснера приближения порядка N представится в виде

$$\begin{aligned} D\check{R}(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N) &\equiv D\check{R}(\mathbf{u}^{(0)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(N)}) \equiv \\ &\equiv D\check{R}(\mathbf{u}^{(0)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}, \boldsymbol{\varphi}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\varphi}^{(N)}, \boldsymbol{\gamma}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\gamma}^{(N)}, \boldsymbol{\varkappa}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\varkappa}^{(N)}, \underline{\mathbf{P}}^{(0)}, \dots, \underline{\mathbf{P}}^{(N)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}, \dots, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(N)}) = \\ &= \sum_{k=0}^N D\check{R}_k(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\varphi}^{(k)}, \boldsymbol{\gamma}^{(k)}, \boldsymbol{\varkappa}^{(k)}, \underline{\mathbf{P}}^{(k)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}). \end{aligned} \quad (8.2.28)$$

Заметим также, что если $f(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} f P_k^*(x^3)$, то имеет место следующие равномерные оценки [65, 68]:

$$|f^{(k)}| \leq C k^{-3/2}, \quad |R_{N+1}| \leq C k^{-1/2}, \quad k \geq 1, \quad (8.2.29)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от k , а $R_{N+1}(x', x^3) = \sum_{k=N+1}^{\infty} f P_k^*(x^3)$.

Учитывая (8.2.29), аналогично классическому случаю [65] нетрудно доказать, что

$$|\check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) - \check{R}_N(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)| = O(1/\sqrt{N}). \quad (8.2.30)$$

Итак, оператор Рейсснера $\check{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})$ приближаются операторами вида $\check{R}_N(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)$. Поэтому при достаточно больших N вариационный принцип (8.2.17) в силу (8.2.30) можно заменить на (8.2.28). В случае классической теории упругих оболочек для функционала энергии аналогичное (8.2.30) соотношение, приведенное в [65] имеет вид $(U(\mathbf{u}) - U_N(\mathbf{u}_N) = O(1/\sqrt{N}))$.

Из изложенного выше видно, что при формулировке вариационных принципов для теории тонких тел в моментах относительно системы полиномов Лежандра основную роль играют соотношения (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.15). Следовательно, при применении и других систем полиномов (например, систем полиномов Чебышева первого и второго рода) аналогичные (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.15) соотношения будут играть основную роль для изложения вариационных принципов в моментах относительно рассматриваемых систем полиномов. В этой связи, не останавливаясь на подробном изложении материала при применении систем полиномов Чебышева, ограничимся выводом аналогичных (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.15) соотношений для этих систем полиномов.

В первую очередь заметим, что в силу рекуррентной формулы для системы смещенных полиномов Чебышева второго рода $U_{n+1}'(t) = 4(n+1)U_n^*(t) + U_{n-1}'(t)$ или из определения этой системы полиномов имеем

$$U_n^*(t) = \frac{1}{4(n+1)}[U_{n+1}'(t) - U_{n-1}'(t)] = \frac{1}{2(n+1)}T_{n+1}'.$$

Отсюда, очевидно, получим

$$\int_0^1 U_n^*(t) dt = \frac{1}{2(n+1)}[1 + (-1)^n], \quad \int_0^1 \hat{U}_n^*(t) dt = \frac{\hat{U}_0^*}{2(n+1)}[1 + (-1)^n], \quad (8.2.31)$$

где $\|U_n^*\|^{-1} = \hat{U}_0^* = 2/\sqrt{\pi}$.

Далее, учитывая (см. (2.6.7) при $s = 0$ и подходящем выборе индексов m и n)

$$\hat{U}_{n-p}^*(t)\hat{U}_p^*(t) = \hat{U}_0^*(t) \sum_{s=0}^p \hat{U}_{n-2p+2s}^*(t),$$

на основании второго соотношения (8.2.31) найдем

$$A_{np} \equiv \int_0^1 \hat{U}_{n-p}^*(t)\hat{U}_p^*(t) dt = \hat{U}_0^{*2} \left[\sum_{s=0}^p \frac{1}{2(n-2p+2s+1)} \right] [1 + (-1)^n]. \quad (8.2.32)$$

Совершенно аналогично (8.2.32) с помощью рекуррентного соотношения (см. (2.6.7))

$$2^{2s} t^s \hat{U}_m^*(t) \hat{U}_n^*(t) = \hat{U}_0^*(t) \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q \hat{U}_{n-m-s+2p+q}^*(t)$$

и второй формулы (8.2.31) находим

$$A_{mn}^s = \int_0^1 2^{2s} t^s \hat{U}_m^*(t) \hat{U}_n^*(t) dt = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{2s} \frac{\hat{U}_0^{*2}}{2(n-m-s+2p+q+1)} C_{2s}^q [1 + (-1)^{n-m-s+q}]. \quad (8.2.33)$$

В случае системы смещенных полиномов Чебышева первого рода, используя рекуррентное соотношение (см. третью формулу (2.3.20))

$$4(n^2 - 1)T_n^*(t) = (n-1)T_{n+1}'(t) - (n+1)T_{n-1}'(t), \quad n \geq 1,$$

будем иметь

$$\int_0^1 T_n^*(t) dt = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \frac{1}{2(n^2 - 1)} [(-1)^{n+1} - 1], & n \neq 1, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (8.2.34)$$

В силу рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} 2T_m^*(t)T_n^*(t) &= T_{n-m}^*(t) + T_{n+m}^*(t), \quad m \geq n, \\ 2^{2s}t^s T_n^*(t) &= \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p T_{n+p-s}^*(t), \quad n - s \geq 0 \end{aligned} \quad (8.2.35)$$

нетрудно доказать, что имеет место формула

$$2^{2s}t^s T_m^*(t)T_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} \frac{1}{2} C_{2s}^p [T_{n-m+p-s}^*(t) + T_{n+m+p-s}^*(t)]. \quad (8.2.36)$$

Применяя (8.2.34), из первой формулы (8.2.35) получим

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \int_0^1 T_m^*(t)T_n^*(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 [T_{n-m}^*(t) + T_{n+m}^*(t)] dt = \\ &= \begin{cases} 0, & n = m + 1, \\ \frac{n^2 + m^2 - 1}{2[(n-m)^2 - 1][(n+m)^2 - 1]} [(-1)^{n+m+1} - 1], & n \neq m + 1, \quad n \geq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2.37)$$

Аналогично (8.2.37) в силу (8.2.34) находим

$$\begin{aligned} B_{mn}^{sp} &= \frac{1}{2} \int_0^1 [T_{n-m+p-s}^*(t) + T_{n+m+p-s}^*(t)] dt = \\ &= \begin{cases} 0, & n - m = 1 + s - p, \quad n - m \geq 0, \quad s \geq 0 \quad (p = \overline{0, 2s}); \\ \frac{n^2 + m^2 - 1 - (2n - s + p)(s - p)}{2[(n - m + p - s)^2 - 1][(n + m + p - s)^2 - 1]} [(-1)^{n+m+p-s+1} - 1], \\ n - m + p - s \neq 1, \quad n \geq m, \quad s \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2.38)$$

Учитывая (8.2.38), из (8.2.36) будем иметь

$$B_{mn}^s = \int_0^1 2^{2s}t^s T_m^*(t)T_n^*(t) dt = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p B_{mn}^{sp}. \quad (8.2.39)$$

Заметим, что $A_{mn} = A_{mn}^0$, $B_{mn} = B_{mn}^0 = B_{mn}^{00}$.

Имея выведенные выше соотношения, получаемые с использованием систем полиномов Чебышева, нетрудно получить аналогичные (8.2.7) и (8.2.10) формулы в случае применения этих систем полиномов. В самом деле, на основании (8.2.32) аналогичное (8.2.7) равенство в случае применения системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода представляется в виде

$$\iiint_V \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} dV = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} A_{2kp} \iint_{\underline{S}} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{(2k-p)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(p)*} dS = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} A_{2kp} \iint_{\underline{S}} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{*(2k-p)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(p)} dS, \quad (8.2.40)$$

а при применении системы полиномов Чебышева первого рода в силу (8.2.37) будем иметь

$$\begin{aligned} \iiint_V \underline{\mathbf{Q}}^2 \otimes \underline{\mathbf{a}} dV &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k (B_{k-pp} - B_{k-pp} \delta_{pk-p+1}) \iint_{\underline{S}} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{(2k-p)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(p)*} dS = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k (B_{k-pp} - B_{k-pp} \delta_{pk-p+1}) \iint_{\underline{S}} h(x') \underline{\mathbf{Q}}^{*(2k-p)} \otimes \underline{\mathbf{a}}^{(p)} dS, \end{aligned} \quad (8.2.41)$$

Нетрудно показать, что подобное (8.2.10) соотношение при использовании системы ортонормированных полиномов Чебышева второго рода представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} d\Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} A_{2kp} \int_{L^{(-)}} h(x') \overset{(-)}{m}_I(x') \overset{(2k-p)}{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(p)}{\mathbf{b}}^* d\overset{(-)}{s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} A_{2kp} \int_{L^{(-)}} h(x') \overset{(-)}{m}_I(x') \overset{(2k-p)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(p)}{\mathbf{b}} d\overset{(-)}{s}, \end{aligned} \quad (8.2.42)$$

а в случае применения системы полиномов Чебышева первого рода получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} d\Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k (B_{k-pp} - B_{k-pp} \delta_{pk-p+1}) \int_{L^{(-)}} h(x') \overset{(-)}{m}_I(x') \overset{(k-p)}{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(p)}{\mathbf{b}}^* d\overset{(-)}{s} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k (B_{k-pp} - B_{k-pp} \delta_{pk-p+1}) \int_{L^{(-)}} h(x') \overset{(-)}{m}_I(x') \overset{(k-p)}{\mathbf{M}}(\vartheta \mathbf{Q}^I) \cdot \overset{(p)}{\mathbf{b}} d\overset{(-)}{s}. \end{aligned} \quad (8.2.43)$$

Заметим, что в более общем случае следует использовать формулы (8.2.33) и (8.2.39).

Далее если учтем значения на концах сегмента $[0,1]$ $\hat{U}_k^*(0) = (-1)^k(2/\sqrt{\pi})(k+1)$ и $\hat{U}_k^*(1) = (2/\sqrt{\pi})(k+1)$ и в правых частях (8.2.15) после знака суммы поместить коэффициент $(2/\sqrt{\pi})(k+1)$ и полагать, что моменты рассматриваются относительно этой системы полиномов, то получим аналогичные (8.2.15) соотношения при применении системы ортонормированных смещенных полиномов Чебышева второго рода.

Так как $T_k^*(0) = (-1)^k$ и $T_k^*(1) = 1$, то при использовании системы смещенных полиномов Чебышева первого рода соотношения (8.2.15) останутся теми же, при условии, что моменты следует рассматривать относительно только-что упомянутой выше системы полиномов.

Таким образом, в виде (8.2.40) – (8.2.43) и соотношений, о выводах которых было сказано в предыдущем абзаце, получены все обещанные выше соотношения. Остаются только выписать вариационные принципы при применении этих систем полиномов. Их с целью сокращения письма выписывать не будем. Следует отметить, что при необходимости совершенно аналогично можно получить вариационные принципы в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева и при других, отличных от новой, параметризациях области тонкого тела. На этих вопросах также с целью сокращения письма останавливаться не будем.

8.3 О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории многослойных тонких тел

Рассматривая новую [252, 255, 282, 294, 295, 304] (или какую-нибудь) параметризацию многослойных тонких тел и имея вариационные принципы для однослойных тонких тел с одним малым размером, а также межслойные контактные условия при различных контактных условиях соседних слоев, не представляет труда выводить вариационные принципы и для многослойных тонких тел. В самом деле, чтобы получить какой-нибудь вариационный принцип, например, при новой параметризации области многослойного тонкого тела достаточно в соответствующем вариационном принципе однослойного тонкого тела корневые буквы величин снабдить снизу индексом α , придать этому индексу значения от 1 до K , где K — число слоев, а затем просуммировать почленно полученные соотношения, учитывая при этом межслойные контактные условия, а также граничные условия на боковых гранях слоев и лицевых поверхностях. Ниже получены обобщенные вариационные

принципы типа Рейсснера для микрополярной теории многослойных тонких тел с одним малым размером как при полном контакте слоев, так и при наличии зон ослабленной адгезии (ослабленного контакта).

8.3.1 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тонких тел с одним малым размером при полном контакте слоев

Рассмотрим многослойную трехмерную тонкую область, состоящую из K слоев, параметризация которой осуществляется так же, как в работах [252, 255, 282, 294, 295], т.е. применяется новая параметризация. Пусть слои пронумерованы по возрастанию, т.е. если, например, α ($1 < \alpha < K$) — номер какого-нибудь слоя, то номером предыдущего слоя будет $\alpha - 1$, а номером последующего — $\alpha + 1$. Считаем, что каждый слой имеет две лицевые поверхности. Лицевую поверхность слоя α ($2 < \alpha < K - 1$) находящуюся со стороны предыдущего слоя $\alpha - 1$, назовем внутренней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(-)}{S}_\alpha$, а лицевую поверхность слоя α , находящуюся со стороны последующего слоя $\alpha + 1$, назовем внешней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(+)}{S}_\alpha$. Заметим, что при $\alpha = 1$ ($\alpha = K$) внутренняя (внешняя) базовая поверхность обозначается через $\overset{(-)}{S}_1$ ($\overset{(+)}{S}_K$).

Поверхности $\overset{(-)}{S}_1$ и $\overset{(+)}{S}_K$ называются еще лицевыми поверхностями многослойного тонкого тела. Считаем, что лицевые поверхности каждого слоя — регулярные поверхности и в случае ограниченного незамкнутого слоя его боковая поверхность является линейчатой поверхностью.

Итак, рассматривая новую параметризацию области многослойного тонкого тела и учитывая сказанное в начале этого раздела, в силу (8.2.1) обобщенный оператор типа Рейсснера при полном контакте (совершенной или идеальной адгезии) слоев можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \check{R} &= \sum_{\alpha=1}^K \check{R}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha, \boldsymbol{\kappa}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha, \boldsymbol{\mu}_\alpha, \mathbf{T}_\alpha, \boldsymbol{\mu}_\alpha, \overset{(-)}{\mathbf{u}}_\alpha, \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \overset{(-)}{\mathbf{P}}_\alpha, \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha, \overset{(+)}{\mathbf{u}}_\alpha, \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha, \overset{(+)}{\mathbf{P}}_\alpha, \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha) = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^K \iiint_V [\check{W}_\alpha(\boldsymbol{\gamma}_\alpha, \boldsymbol{\kappa}_\alpha) - \overset{(-)}{\mathbf{P}}_\alpha \otimes (\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \overset{(-)}{\mathbf{C}}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varphi}_\alpha) - \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \otimes (\boldsymbol{\kappa}_\alpha - \nabla_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\alpha) - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{m}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varphi}_\alpha] dV_\alpha - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^K \left\{ \iint_{\overset{(-)}{\Sigma}_1} \mathbf{m}_\alpha \cdot [\overset{(-)}{\mathbf{P}}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_{\alpha 0}) + \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\varphi}_\alpha - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha 0})] d\Sigma_1 + \iint_{\overset{(+)}{\Sigma}_2} (\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha 0} \cdot \mathbf{u}_\alpha + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha 0} \cdot \boldsymbol{\varphi}_\alpha) d\Sigma_2 \right\} - \\
 &- \iint_{\overset{(-)}{S}_1} \overset{(-)}{\mathbf{n}}_1 \cdot [\overset{(-)}{\mathbf{P}}_1 \cdot (\overset{(-)}{\mathbf{u}}_1 - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{1 0}) + \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot (\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_1 - \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{1 0})] dS_1 - \iint_{\overset{(-)}{S}_2} (\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{1 0} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{u}}_1 + \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{1 0} \cdot \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_1) dS_2 - \\
 &- \iint_{\overset{(+)}{S}_1} \overset{(+)}{\mathbf{n}}_K \cdot [\overset{(+)}{\mathbf{P}}_K \cdot (\overset{(+)}{\mathbf{u}}_K - \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{K 0}) + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_K \cdot (\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_K - \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{K 0})] dS_1 - \iint_{\overset{(+)}{S}_2} (\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{K 0} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{u}}_K + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{K 0} \cdot \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_K) dS_2 - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{\overset{(+)}{S}_\alpha} [\overset{(+)}{\mathbf{T}}_\alpha \cdot (\overset{(+)}{\mathbf{u}}_\alpha - \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}) + \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot (\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha - \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1})] dS_\alpha.
 \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Здесь $\overset{(+)}{S}_\alpha = \overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ — поверхность контакта слоев α и $\alpha + 1$ ($\alpha = \overline{1, K-1}$), $\mathbf{T}_\alpha = \overset{(+)}{\mathbf{T}}_\alpha = -\overset{(-)}{\mathbf{T}}_{\alpha+1}$ — вектор межслойных (контактных) сил, а $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = -\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}$ — вектор межслойных моментов.

Следует отметить, что внутри каждого объема V_α , $\alpha = \overline{1, K}$ варьируются векторы перемещений и вращений, тензоры деформаций и изгиба-кручения, а также тензоры напряжений и моментных напряжений, на Σ_1 , $\alpha = \overline{1, K}$, $\overset{(-)}{S}_1$ и $\overset{(+)}{S}_K$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, на Σ_2 , $\alpha = \overline{1, K}$, $\overset{(-)}{S}_2$ и $\overset{(+)}{S}_2$ — векторы перемещений и вращений, а на $\overset{(-)}{S}_\alpha$ — векторы контактных перемещений и вращений, а также векторы контактных сил и моментов.

Далее аналогично теории однослойных тонких тел введем определения:

Определение 8.3.1. Кинематической системой называются произвольные непрерывно дифференцируемые векторные поля \mathbf{u}_α (вектор перемещений слоя α) и $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$ (вектор вращения слоя α), $\alpha = \overline{1, K}$, а статической системой — произвольные тензорные поля $\overset{\sim}{\mathbf{P}}_\alpha$ (тензор напряжений слоя α) и $\overset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha$ (тензор моментных напряжений слоя α), $\alpha = \overline{1, K}$ (необязательно удовлетворяющие условиям совместности).

Определение 8.3.2. Кинематически допустимой называется кинематическая система, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям

$$\mathbf{u}_\alpha|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_\alpha^0, \quad \boldsymbol{\varphi}_\alpha|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_\alpha^0, \quad (8.3.2)$$

а в случае динамической задачи и начальным условиям

$$\mathbf{u}_\alpha|_{t=t_0} = \mathbf{f}_\alpha^1, \quad \boldsymbol{\varphi}_\alpha|_{t=t_0} = \mathbf{g}_\alpha^1, \quad \dot{\mathbf{u}}_\alpha|_{t=t_0} = \mathbf{f}_\alpha^2, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha|_{t=t_0} = \mathbf{g}_\alpha^2, \quad \alpha = \overline{1, K}. \quad (8.3.3)$$

Определение 8.3.3. Статически допустимой называется статическая система, удовлетворяющая уравнениям равновесия (движения в случае динамической задачи)

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \cdot \overset{\sim}{\mathbf{P}}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha &= 0 \quad (\rho_\alpha d\mathbf{v}_\alpha/dt), \\ \nabla_\alpha \cdot \overset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha + \overset{\sim}{\mathbf{C}}_\alpha \otimes \overset{\sim}{\mathbf{P}}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{m}_\alpha &= 0 \quad (\mathbf{J}_\alpha \cdot d\boldsymbol{\omega}_\alpha/dt), \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha = d\boldsymbol{\varphi}_\alpha/dt, \quad \alpha = \overline{1, K} \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

и статическим граничным условиям

$$\mathbf{n}_\alpha \cdot \overset{\sim}{\mathbf{P}}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha^0, \quad \mathbf{n}_\alpha \cdot \overset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha = \boldsymbol{\mu}_\alpha^0, \quad \alpha = \overline{1, K}. \quad (8.3.5)$$

Определение 8.3.4. Действительной кинематической и статической системой в случае многослойного тонкого тела называется совокупность векторов перемещений и вращения (\mathbf{u}_α и $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, K}$) и тензоров напряжений и моментных напряжений ($\overset{\sim}{\mathbf{P}}_\alpha$ и $\overset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, K}$) всех

слоев многослойного тонкого тела, удовлетворяющая уравнениям равновесия [движения] (8.3.4), кинематическим соотношениям

$$\overset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha = \nabla_\alpha \mathbf{u}_\alpha - \overset{\sim}{\mathbf{C}}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varphi}_\alpha, \quad \overset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}_\alpha = \nabla_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, K}, \quad (8.3.6)$$

определяющим соотношениям

$$\underline{\mathbf{P}}_{\alpha} = \check{\underline{F}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}), \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \check{\underline{G}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}), \quad \alpha = \overline{1, K} \quad (8.3.7)$$

или при потенциальности операторов $\check{\underline{F}}_{\alpha}$ и $\check{\underline{G}}_{\alpha}$, $\alpha = \overline{1, K}$ определяющим соотношениям в виде

$$\underline{\mathbf{P}}_{\alpha} = \partial \check{\underline{W}}_{\alpha} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = \partial \check{\underline{W}}_{\alpha} / \partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, K}, \quad (8.3.8)$$

кинематическим (8.3.2) и статическим (8.3.5) граничным условиям [и начальным условиям (8.3.3)], а также межслойным контактными условиям и граничным условиям на лицевых поверхностях.

Здесь $\check{\underline{W}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha})$ — оператор деформации и изгиба-кручения слоя α и если он существует, то ОС задаются с помощью формул (8.3.8). Заметим, что при неизотермических процессах вместо $\check{\underline{W}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha})$ рассматривается свободная энергия $\check{\underline{F}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}, \vartheta) = \check{\underline{W}}_{\alpha}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}) - H_{\alpha} T_{\alpha}$, где H_{α} — энтропия, T_{α} — температура, $\vartheta = T_{\alpha} - T_0$ — перепад температуры слоя α .

Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера для многослойного тонкого тела можно сформулировать в виде: из всех кинематических и статических систем и систем, описываемых тензорами $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}$ и $\underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}$, $\alpha = \overline{1, K}$, действительная выделяется тем, что для нее оператор (8.3.1) имеет стационарное значение, т.е.

$$D\check{R} = \sum_{\alpha=1}^K D\check{R}_{\alpha}(\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{T}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(+)}, \quad (8.3.9)$$

$$\delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}, \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}, \delta \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}, \delta \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \delta \underline{\mathbf{T}}_{\alpha}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(-)}, \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(-)}, \delta \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(-)}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(-)}, \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)}, \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)}, \delta \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(+)}, \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(+)} = 0.$$

В самом деле, пользуясь определением дифференциала оператора [336] и теоремой Остроградского-Гаусса, в силу (8.3.1) и (8.3.6) аналогично (8.2.1) соотношение (8.3.9) представится в следующей форме:

$$D\check{R} = \sum_{\alpha=1}^K D\check{R}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^K \iiint_{V_{\alpha}} [(\partial \check{\underline{W}}_{\alpha} / \partial \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha} - \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha} + (\partial \check{\underline{W}}_{\alpha} / \partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha} - (\nabla_{\alpha} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \underline{\mathbf{F}}) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha} -$$

$$- (\nabla_{\alpha} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} + \underline{\mathbf{C}}_{\alpha} \otimes \underline{\mathbf{P}}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \underline{\mathbf{m}}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} - (\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \underline{\mathbf{u}}_{\alpha} + \underline{\mathbf{C}}_{\alpha} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}) \otimes \delta \underline{\mathbf{P}}_{\alpha} - (\underline{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}) \otimes \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}] dV_{\alpha} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^K \left\{ \iint_{\Sigma_1} \underline{\mathbf{m}}_{\alpha} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}}_{\alpha} \cdot (\underline{\mathbf{u}}_{\alpha} - \underline{\mathbf{u}}_{\alpha 0}) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha 0})] d\Sigma_1 - \iint_{\Sigma_2} [(\underline{\mathbf{m}}_{\alpha} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\alpha} - \underline{\mathbf{P}}_{\alpha 0}) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha} + (\underline{\mathbf{m}}_{\alpha} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha 0}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}] d\Sigma_2 \right\} -$$

$$- \iint_{\check{S}_1^{(-)}} \underline{\mathbf{n}}_1^{(-)} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}}_1^{(-)} \cdot (\underline{\mathbf{u}}_1^{(-)} - \underline{\mathbf{u}}_1^{(-)0}) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_1^{(-)} \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}}_1^{(-)} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_1^{(-)0})] d\check{S}_1^{(-)} + \quad (8.3.10)$$

$$+ \iint_{\check{S}_2^{(-)}} [(\underline{\mathbf{n}}_1^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_1^{(-)} - \underline{\mathbf{P}}_1^{(-)0}) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_1^{(-)} + (\underline{\mathbf{n}}_1^{(-)} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_1^{(-)} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_1^{(-)0}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_1^{(-)}] d\check{S}_2^{(-)} - \iint_{\check{S}_1^{(+)}} \underline{\mathbf{n}}_K^{(+)} \cdot [\delta \underline{\mathbf{P}}_K^{(+)} \cdot (\underline{\mathbf{u}}_K^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_K^{(+)}0) + \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_K^{(+)} \cdot (\underline{\boldsymbol{\varphi}}_K^{(+)} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_K^{(+)}0)] d\check{S}_1^{(+)}$$

$$+ \iint_{\check{S}_2^{(+)}} [(\underline{\mathbf{n}}_K^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_K^{(+)} - \underline{\mathbf{P}}_K^{(+)}0) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_K^{(+)} + (\underline{\mathbf{n}}_K^{(+)} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_K^{(+)} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_K^{(+)}0) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_K^{(+)}] d\check{S}_2^{(+)} - \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^{+}} [(\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \underline{\mathbf{T}}_{\alpha} + (\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}] dS_{\alpha} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^{+}} [(\underline{\mathbf{n}}_{\alpha}^{(+)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\mathbf{T}}_{\alpha}) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)} + (\underline{\mathbf{n}}_{\alpha}^{(+)} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(+)}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)} + (\underline{\mathbf{n}}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\alpha+1}^{(-)} + \underline{\mathbf{T}}_{\alpha}) \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}_{\alpha+1}^{(-)} + (\underline{\mathbf{n}}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}^{(-)} + \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(-)}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}^{(-)}] dS_{\alpha} = 0.$$

Нетрудно заметить, что в силу произвольности вариаций $\delta \mathbf{u}_\alpha$, $\delta \varphi_\alpha$, $\delta \gamma_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha$, $\delta \mathbf{P}_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\mu}_\alpha$, $\delta \mathbf{T}_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\mu}_\alpha$, $\delta \mathbf{u}_\alpha^{(-)}$, $\delta \varphi_\alpha^{(-)}$, $\delta \mathbf{P}_\alpha^{(-)}$, $\delta \boldsymbol{\mu}_\alpha^{(-)}$, $\delta \mathbf{u}_\alpha^{(+)}$, $\delta \varphi_\alpha^{(+)}$, $\delta \mathbf{P}_\alpha^{(+)}$ и $\delta \boldsymbol{\mu}_\alpha^{(+)}$, $\alpha = \overline{1, K}$, из (8.3.10) следуют уравнения равновесия (8.3.4), определяющие соотношения (8.3.8), кинематические соотношения (8.3.6), кинематические (8.3.2) и статические (8.3.5) граничные условия на боковой грани, а также кинематические и статические граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{(-)} = \mathbf{u}_1^0, \quad \varphi_1^{(-)} = \varphi_1^0 \quad \text{на} \quad S_1^-, \quad \mathbf{n}_1^{(-)} \cdot \mathbf{P}_1^{(-)} = \mathbf{P}_1^0, \quad \mathbf{n}_1^{(-)} \cdot \boldsymbol{\mu}_1^{(-)} = \boldsymbol{\mu}_1^0 \quad \text{на} \quad S_2^-, \\ \mathbf{u}_K^{(+)} = \mathbf{u}_K^0, \quad \varphi_K^{(+)} = \varphi_K^0 \quad \text{на} \quad S_1^+, \quad \mathbf{n}_K^{(+)} \cdot \mathbf{P}_K^{(+)} = \mathbf{P}_K^0, \quad \mathbf{n}_K^{(+)} \cdot \boldsymbol{\mu}_K^{(+)} = \boldsymbol{\mu}_K^0 \quad \text{на} \quad S_2^+ \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

на лицевых поверхностях и условия на межслойных границах (условия идеального контакта)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha^{(+)} = \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \varphi_\alpha^{(+)} = \varphi_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha^{(+)} \cdot \mathbf{P}_\alpha^{(+)} = - \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)}, \\ \boldsymbol{\mu}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha^{(+)} \cdot \boldsymbol{\mu}_\alpha^{(+)} = - \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)} \quad \text{на} \quad S_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, K-1}. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

Заметим, что, применяя соотношение (8.1.46) (преобразование Лежандра), аналогично (8.1.61) можно получить двойственный оператору (8.3.1) обобщенный оператор типа Рейсснера, а затем из него вывести двойственный принципу (8.3.10) обобщенный принцип типа Рейсснера. На основании изложенного выше рассматривать эти вопросы, а также сформулировать другие вариационные принципы не представляет труда. В этой связи, а также с целью сокращения письма на них останавливаться не будем.

8.3.2 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тонких тел с одним малым размером при наличии областей ослабленной адгезии

Прежде чем сформулировать этот принцип, рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся многослойных тонких тел при наличии областей (зон) ослабленной адгезии. Вообще говоря, если на некоторых частях межслойных границ при деформировании многослойного тонкого тела происходит нарушение полного (идеального) контакта, то говорят, что имеем дело с многослойным тонким телом с ослабленной адгезии (имеющим области ослабленной адгезии). При наличии областей ослабленной адгезии на межфазных границах в многослойном тонком теле первостепенным является вопрос о моделировании поверхности раздела (межфазной границы). В данном направлении наметились два подхода [327]. Первый — физический подход связан с учетом определенных свойств межфазных адгезионных слоев. Впервые такой подход предложен для задач теплопроводности в работе [349]. В дальнейшем он был обобщен на задачи механики [353]. Второй — феноменологический подход основан на представлении межфазной границы поверхностью нулевой толщины, разделяющей объемные компоненты (фазы, слои) и постулировании существования скачков (разрыва) векторов перемещений и вращения, а также векторов напряжения и моментного напряжения в зонах ослабленной адгезии. Для этих подходов рассматриваются следующие модели: а) модель типа скачка (в случае описания межфазной границы поверхностью нулевой толщины); б) модель плавного перехода (наличие межфазных слоев между взаимодействующими слоями); в) модель приведенных межфазных характеристик.

В случае первых двух моделей основными параметрами являются векторы взаимных перемещений и вращений смежных (соседних) слоев (фаз). При классической теории, конечно, рассматривается только векторы взаимных перемещений смежных фаз. Третья модель характеризуется введением некоторых коэффициентов, отражающих влияние ослабленной адгезии и названных коэффициентами полноты межфазного контакта. Ниже более подробно рассмотрим модель типа скачка.

8.3.2.1 Модель типа скачка. Векторы межфазных (межслойных) перемещений и вращений. Векторы обобщенных межфазных сил и моментов

При наличии областей ослабленной адгезии, как было сделано выше, целесообразно ввести векторы межфазных (относительных) перемещений и вращений, т.е. $\mathbf{v}_\alpha(x')$ и $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x')$ соответственно, где $x' \in S_\alpha \subset S$, S_α — область ослабленной адгезии, $\alpha = \overline{1, K-1}$, а K — число слоев. Однако для полного описания этой модели наряду с векторами взаимных перемещений и вращений нужно рассматривать соответствующие этим векторам параметры состояния — векторы межфазных (вообще говоря, диссипативных) сил \mathbf{P}_α и моментов \mathbf{Q}_α ($\alpha = \overline{1, K-1}$) в областях ослабленной адгезии. Далее с целью сокращения письма индекс под векторами межфазных перемещений, вращений, сил, моментов и величинами, относящимися к этому подразделу, опускаем, так как все получаемые ниже соотношения будут справедливыми и при сохранении индекса α .

Из физических соображений сумма работ межфазных сил \mathbf{P} и моментов \mathbf{Q} на соответствующих векторах взаимных перемещений $\mathbf{v}(x')$ и вращений $\boldsymbol{\psi}(x')$ смежных фаз должна быть неотрицательной, т.е.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\psi} \geq 0 \quad (8.3.13)$$

для любых векторов \mathbf{v} и $\boldsymbol{\psi}$, при условии, что хотя бы один из них отличен от нуля.

Заметим, что если рассматривается нестационарный процесс, то вместо \mathbf{v} и $\boldsymbol{\psi}$ следует писать $\dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v}$ и $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \partial_t \boldsymbol{\psi}$ соответственно.

Из (8.3.13) следует, что векторы межфазных сил \mathbf{P} и моментов \mathbf{Q} должны быть функциями векторов взаимных перемещений $\mathbf{v}(x')$ и вращений $\boldsymbol{\psi}(x')$ смежных фаз, а также некоторых других параметров: температуры, контактного давления, коэффициента трения и т.п., т.е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \dots), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \dots), \quad (8.3.14)$$

где многоточие обозначает зависимость от других параметров. В случае потенциальности векторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} существует диссипативный потенциал (оператор) $\check{\chi}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})$ векторов взаимных перемещений $\mathbf{v}(x')$ и вращений $\boldsymbol{\psi}(x')$ смежных фаз, с помощью которого \mathbf{P} и \mathbf{Q} определяются формулами

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \check{\chi}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \check{\chi}}{\partial \boldsymbol{\psi}}. \quad (8.3.15)$$

Из (8.3.15) следует, что условия в областях ослабленной адгезии основываются на построении или выборе диссипативного оператора $\check{\chi}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})$, выражающий механизм взаимодействия в этих областях.

Рассмотрим некоторые возможные частные случаи задания оператора $\check{\chi}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})$, соответствующие различным условиям взаимодействия фаз. В этой связи разлагая $\check{\chi}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{v} = 0$ и $\boldsymbol{\psi} = 0$ и пренебрегая членами, содержащими \mathbf{v}

и ψ выше второй степени, с учетом $\check{\chi}(0, 0) = 0$ получим

$$\begin{aligned} \check{\chi}(\mathbf{v}, \psi) &= \left(\frac{\partial \check{\chi}}{\partial \mathbf{v}} \right)_0 \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \check{\chi}}{\partial \psi} \right)_0 \cdot \psi + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \mathbf{v}^2} \right)_0^2 \otimes \mathbf{v}\mathbf{v} + \left[\left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \mathbf{v} \partial \psi} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \psi \partial \mathbf{v}} \right)_0^T \right]^2 \otimes \mathbf{v}\psi + \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \psi^2} \right)_0^2 \otimes \psi\psi \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \check{\chi}}{\partial \mathbf{v}} \right)_0, \quad \mathbf{b} = \left(\frac{\partial \check{\chi}}{\partial \psi} \right)_0, \quad \underline{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \mathbf{v}^2} \right)_0, \quad 2\underline{\mathbf{g}} = \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \mathbf{v} \partial \psi} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \psi \partial \mathbf{v}} \right)_0^T, \quad \underline{\mathbf{h}} = \left(\frac{\partial^2 \check{\chi}}{\partial \psi^2} \right)_0,$$

будем иметь

$$\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \psi + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{f}} \otimes \mathbf{v}\mathbf{v} + 2\underline{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{v}\psi + \underline{\mathbf{h}} \otimes \psi\psi). \quad (8.3.16)$$

1. Если $\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi) = 0$, то смежные фазы не взаимодействуют, что соответствует полному отсутствию сцепления. В этом случае параметрами, характеризующими ослабленность межфазного контакта, являются векторы взаимных перемещений $\mathbf{v}(x')$ и вращений $\psi(x')$ смежных фаз.

2. Если $\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi)$ — линейная функция относительно $\mathbf{v}(x')$ и $\psi(x')$, то из (8.3.16) имеем

$$\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \psi. \quad (8.3.17)$$

В этом случае появляются новые параметры \mathbf{a} и \mathbf{b} ослабленной адгезии. В частном случае, когда $\mathbf{a} = a_s \mathbf{s}$ и $\mathbf{b} = b_n \mathbf{n}$, где \mathbf{s} и \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали к межфазной поверхности, a_s и b_n — коэффициенты, характеризующие уровень сцепления в областях ослабленной адгезии. Заметим, что в силу (8.3.17) из (8.3.15) находим $\mathbf{P} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{b}$.

3. Если $\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi)$ — однородная квадратичная форма относительно $\mathbf{v}(x')$ и $\psi(x')$, то из (8.3.16) получим

$$\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{f}} \otimes \mathbf{v}\mathbf{v} + 2\underline{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{v}\psi + \underline{\mathbf{h}} \otimes \psi\psi). \quad (8.3.18)$$

Учитывая (8.3.18), из (8.3.15) будем иметь

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \underline{\mathbf{g}} \cdot \psi, \quad \mathbf{Q} = \underline{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} + \underline{\mathbf{h}} \cdot \psi. \quad (8.3.19)$$

Здесь $\underline{\mathbf{f}}$, $\underline{\mathbf{g}}$, $\underline{\mathbf{h}}$ — симметричные тензоры второго ранга, называемые тензорами коэффициентов трения. Они могут зависеть от координат x^1, x^2 , перепада температуры, нормального составляющего предельного вектора напряжения и других параметров. Очевидно, формулы (8.3.19) учитывают неоднородность и анизотропию трения. Следовательно, в случае изотропного трения $\underline{\mathbf{f}}$, $\underline{\mathbf{g}}$, $\underline{\mathbf{h}}$ являются шаровыми тензорами.

Заметим, что можно рассматривать и другие случаи представления $\check{\chi}(\mathbf{v}, \psi)$, на которых с целью сокращения письма останавливаться не будем. Заметим также, что в случае многослойного тонкого тела, например, вместо (8.3.16) будем иметь

$$\check{\chi} = \sum_{\alpha=1}^K \check{\chi}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, \psi_{\alpha}), \quad \check{\chi}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, \psi_{\alpha}) = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha} \cdot \psi_{\alpha} + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{f}}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha} + 2\underline{\mathbf{g}}_{\alpha} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}\psi_{\alpha} + \underline{\mathbf{h}}_{\alpha} \otimes \psi_{\alpha}\psi_{\alpha}). \quad (8.3.20)$$

Следовательно, аналогично (8.3.20) можно представить и другие приведенные выше соотношения. Однако, на них с целью сокращения письма останавливаться не будем.

Вернемся теперь вариационному принципу при наличии областей ослабленной адгезии и сформулируем его. Нетрудно усмотреть, что в рассматриваемом случае аналогично (8.3.1) обобщенный оператор (функционал) типа Рейсснера будет иметь форму

$$\check{R}^* = \sum_{\alpha=1}^K \check{R}_{\alpha}^*(\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\alpha}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{T}}_{\alpha}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{Q}}_{\alpha}, \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(-)}, \underline{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^{(+)}, \underline{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(+)}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\alpha=1}^K \iiint_{V_{\alpha}} [\check{W}_{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}, \boldsymbol{\varkappa}_{\alpha}) - \mathbf{P}_{\alpha} \otimes (\boldsymbol{\gamma}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{C}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) - \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \otimes (\boldsymbol{\varkappa}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) - \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}] dV_{\alpha} - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^K \left\{ \iint_{\Sigma_{\alpha 1}^{(-)}} \mathbf{m}_{\alpha} \cdot [\mathbf{P}_{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha 0}) + \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\alpha} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha 0})] d\Sigma_{\alpha 1} + \iint_{\Sigma_{\alpha 2}^{(-)}} (\mathbf{P}_{\alpha 0} \cdot \mathbf{u}_{\alpha} + \boldsymbol{\mu}_{\alpha 0} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) d\Sigma_{\alpha 2} \right\} - \\
 &- \iint_{S_1^{(-)}} \mathbf{n}_1^{(-)} \cdot [\mathbf{P}_1^{(-)} \cdot (\mathbf{u}_1^{(-)} - \mathbf{u}_{10}^{(-)}) + \boldsymbol{\mu}_1^{(-)} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^{(-)} - \boldsymbol{\varphi}_{10}^{(-)})] dS_1^{(-)} - \iint_{S_2^{(-)}} (\mathbf{P}_{10}^{(-)} \cdot \mathbf{u}_1^{(-)} + \boldsymbol{\mu}_{10}^{(-)} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1^{(-)}) dS_2^{(-)} - \\
 &- \iint_{S_1^{(+)}} \mathbf{n}_K^{(+)} \cdot [\mathbf{P}_K^{(+)} \cdot (\mathbf{u}_K^{(+)} - \mathbf{u}_{K0}^{(+)}) + \boldsymbol{\mu}_K^{(+)} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_K^{(+)} - \boldsymbol{\varphi}_{K0}^{(+)})] dS_1^{(+)} - \iint_{S_2^{(+)}} (\mathbf{P}_{K0}^{(+)} \cdot \mathbf{u}_K^{(+)} + \boldsymbol{\mu}_{K0}^{(+)} \cdot \boldsymbol{\varphi}_K^{(+)}) dS_2^{(+)} - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^{(i)}} [\mathbf{T}_{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} - \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}) + \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)})] dS_{\alpha}^{(i)} + \\
 &+ \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^0} [\check{\chi}_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, \boldsymbol{\psi}_{\alpha}) - \mathbf{P}_{\alpha} \cdot (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} + \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}) - \mathbf{Q}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\psi}_{\alpha} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} + \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)})] dS_{\alpha}^0,
 \end{aligned} \tag{8.3.21}$$

где $S_{\alpha} = S_{\alpha}^0 \cup S_{\alpha}^{(i)}$, $S_{\alpha}^0 \cap S_{\alpha}^{(i)} = \emptyset$, $\alpha = \overline{1, K-1}$, S_{α}^0 — область ослабленной адгезии, а $S_{\alpha}^{(i)}$ — область совершенной адгезии (идеального контакта).

Условие стационарности оператора (8.3.21) аналогично (8.3.10) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 D\check{R}^* &= \sum_{\alpha=1}^K \iiint_{V_{\alpha}} [(\partial \check{W}_{\alpha} / \partial \boldsymbol{\gamma}_{\alpha} - \mathbf{P}_{\alpha}) \otimes \delta \boldsymbol{\gamma}_{\alpha} + (\partial \check{W}_{\alpha} / \partial \boldsymbol{\varkappa}_{\alpha} - \boldsymbol{\mu}_{\alpha}) \otimes \delta \boldsymbol{\varkappa}_{\alpha} - (\nabla_{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha} - \\
 &- (\nabla_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha} + \mathbf{C}_{\alpha} \otimes \mathbf{P}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha} - (\boldsymbol{\gamma}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{C}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) \otimes \delta \mathbf{P}_{\alpha} - (\boldsymbol{\varkappa}_{\alpha} - \nabla_{\alpha} \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}) \otimes \delta \boldsymbol{\mu}_{\alpha}] dV_{\alpha} - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^K \left\{ \iint_{\Sigma_{\alpha 1}^{(-)}} \mathbf{m}_{\alpha} \cdot [\delta \mathbf{P}_{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha 0}) + \delta \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{\alpha} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha 0})] d\Sigma_{\alpha 1} - \iint_{\Sigma_{\alpha 2}^{(-)}} [(\mathbf{m}_{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\alpha} - \mathbf{P}_{\alpha 0}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha} + (\mathbf{m}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha} - \boldsymbol{\mu}_{\alpha 0}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}] d\Sigma_{\alpha 2} \right\} - \\
 &- \iint_{S_1^{(-)}} \mathbf{n}_1^{(-)} \cdot [\delta \mathbf{P}_1^{(-)} \cdot (\mathbf{u}_1^{(-)} - \mathbf{u}_{10}^{(-)}) + \delta \boldsymbol{\mu}_1^{(-)} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1^{(-)} - \boldsymbol{\varphi}_{10}^{(-)})] dS_1^{(-)} + \iint_{S_2^{(-)}} [(\mathbf{n}_1^{(-)} \cdot \mathbf{P}_1^{(-)} - \mathbf{P}_{10}^{(-)}) \cdot \delta \mathbf{u}_1^{(-)} + (\mathbf{n}_1^{(-)} \cdot \boldsymbol{\mu}_1^{(-)} - \boldsymbol{\mu}_{10}^{(-)}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_1^{(-)}] dS_2^{(-)} - \\
 &- \iint_{S_1^{(+)}} \mathbf{n}_K^{(+)} \cdot [\delta \mathbf{P}_K^{(+)} \cdot (\mathbf{u}_K^{(+)} - \mathbf{u}_{K0}^{(+)}) + \delta \boldsymbol{\mu}_K^{(+)} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_K^{(+)} - \boldsymbol{\varphi}_{K0}^{(+)})] dS_1^{(+)} + \\
 &+ \iint_{S_2^{(+)}} [(\mathbf{n}_K^{(+)} \cdot \mathbf{P}_K^{(+)} - \mathbf{P}_{K0}^{(+)}) \cdot \delta \mathbf{u}_K^{(+)} + (\mathbf{n}_K^{(+)} \cdot \boldsymbol{\mu}_K^{(+)} - \boldsymbol{\mu}_{K0}^{(+)}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_K^{(+)}] dS_2^{(+)} - \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^{(i)}} [(\mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} - \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \mathbf{T}_{\alpha} + (\boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \boldsymbol{\mu}_{\alpha}] dS_{\alpha}^{(i)} + \\
 &+ \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^{(i)}} [(\mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)} - \mathbf{T}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} + (\mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(+)} - \boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(+)}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} + (\mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)} + \mathbf{T}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)} + (\mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)} + \boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(-)}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}] dS_{\alpha}^{(i)} - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^0} [(\partial \check{\chi}_{\alpha} / \partial \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{P}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{v}_{\alpha} + (\partial \check{\chi}_{\alpha} / \partial \boldsymbol{\psi}_{\alpha} - \mathbf{Q}_{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\psi}_{\alpha} + (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} + \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \mathbf{P}_{\alpha} + (\boldsymbol{\psi}_{\alpha} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} + \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta \mathbf{Q}_{\alpha}] dS_{\alpha}^0 + \\
 &+ \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{S_{\alpha}^0} [(\mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}^{(+)} + \mathbf{P}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha}^{(+)} + (\mathbf{n}_{\alpha}^{(+)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha}^{(+)} + \mathbf{Q}_{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha}^{(+)} + (\mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \mathbf{P}_{\alpha+1}^{(-)} - \mathbf{P}_{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)} + (\mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\alpha+1}^{(-)} - \mathbf{Q}_{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}] dS_{\alpha}^0 = 0.
 \end{aligned} \tag{8.3.22}$$

Заметим, как и при получении (8.3.10), так и при выводе (8.3.22), было использовано соотношение

$$\begin{aligned} \iiint_V (\tilde{\mathbf{P}}_\alpha \otimes \nabla_\alpha \delta \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \otimes \nabla_\alpha \delta \varphi) dV &= \iint_{\Sigma_2} \mathbf{m}_\alpha \cdot (\tilde{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot \delta \varphi) d\Sigma + \iint_{S_\alpha^{(-)}} \mathbf{n}_\alpha \cdot (\tilde{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot \delta \varphi) dS_\alpha^{(-)} + \\ &+ \iint_{S_\alpha^{(+)}} \mathbf{n}_\alpha \cdot (\tilde{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot \delta \varphi) dS_\alpha^{(+)} - \iiint_V (\nabla_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha \cdot \delta \varphi) dV, \end{aligned}$$

получаемое аналогично (8.2.23). Здесь считаем, что $S_\alpha^{(+)} = S_\alpha^{(-)} = S_\alpha^0 \cup S_\alpha^{(i)}$, $\alpha = \overline{1, K-1}$. Если $S_\alpha^0 = \emptyset$, $\alpha = \overline{1, K-1}$, то из (8.3.21) получим (8.3.1), а из (8.3.22) вытекает (8.3.10).

Легко усмотреть, что в силу произвольности вариаций $\delta \mathbf{u}_\alpha$, $\delta \varphi_\alpha$, $\delta \gamma_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\chi}_\alpha$, $\delta \tilde{\mathbf{P}}_\alpha$, $\delta \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha$, $\delta \mathbf{u}_\alpha^{(-)}$, $\delta \varphi_\alpha^{(-)}$, $\delta \tilde{\mathbf{P}}_\alpha^{(-)}$, $\delta \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha^{(-)}$, $\delta \mathbf{u}_\alpha^{(+)}$, $\delta \varphi_\alpha^{(+)}$, $\delta \tilde{\mathbf{P}}_\alpha^{(+)}$ и $\delta \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha^{(+)}$, $\alpha = \overline{1, K}$, а также $\delta \mathbf{T}_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\mu}_\alpha$, $\delta \mathbf{v}_\alpha$, $\delta \boldsymbol{\psi}_\alpha$, $\delta \mathbf{P}_\alpha$, $\delta \mathbf{Q}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, K-1}$ из (8.3.22) получим уравнения равновесия (8.3.4), определяющие соотношения (8.3.8), кинематические соотношения (8.3.6), кинематические (8.3.2) и статические (8.3.5) граничные условия на боковой грани, кинематические и статические граничные условия на лицевых поверхностях (8.3.11), условия идеального контакта в областях $(S_\alpha^{(i)}, \alpha = \overline{1, K-1})$ совершенной адгезии (8.3.12) и условия в областях ослабленной адгезии $(S_\alpha^0, \alpha = \overline{1, K-1})$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\alpha &= \partial \tilde{\chi}_\alpha / \partial \mathbf{v}_\alpha, \quad \mathbf{Q}_\alpha = \partial \tilde{\chi}_\alpha / \partial \boldsymbol{\psi}_\alpha, \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha^{(+)} - \mathbf{u}_{\alpha+1}^{(-)}, \quad \boldsymbol{\psi}_\alpha = \boldsymbol{\varphi}_\alpha^{(+)} - \boldsymbol{\varphi}_{\alpha+1}^{(-)}, \\ \mathbf{P}_\alpha &= -\mathbf{n}_\alpha^{(+)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\alpha^{(+)} = \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\alpha^{(-)}, \quad \mathbf{Q}_\alpha = -\mathbf{n}_\alpha^{(+)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha^{(+)} = \mathbf{n}_{\alpha+1}^{(-)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_\alpha^{(-)}. \end{aligned}$$

8.3.3 Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в теории многослойных тонких тел в моментах относительно систем ортогональных полиномов при наличии областей ослабленной адгезии

Имея обобщенный оператор типа Рейсснера (8.3.21) или обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера (8.3.22), не представляет труда получить обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в моментах относительно систем ортогональных полиномов при наличии областей ослабленной адгезии. В самом деле, учитывая (8.2.7), (8.2.10), (8.2.13), (8.2.14), (8.2.15) и (8.2.16), совершенно аналогично (8.2.17) из (8.3.22) получим обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в моментах, например, от-

носителем системы полиномов Лежандра в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 D\check{R}^* = & \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k+1} \left[\sum_{\alpha=1}^K \iint_{\check{S}_{\alpha}^{(-)}} h_{\alpha}(x') \{ [\underline{\mathbf{M}}(\partial\check{W}_{\alpha}/\partial\check{\boldsymbol{\gamma}}) - \underline{\mathbf{P}}_{\alpha}^*] \otimes^2 \delta\check{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha}^{(k)} + [\underline{\mathbf{M}}(\partial\check{W}_{\alpha}/\partial\check{\boldsymbol{\mu}}) - \underline{\check{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}^*] \otimes^2 \delta\check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^{(k)} - \right. \right. \\
 & - \underline{S}_{\alpha(1)}^* \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(k)} - \underline{S}_{\alpha(2)}^* \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(k)} - [\check{\boldsymbol{\gamma}}_{\alpha} - \underline{\mathbf{M}}(\nabla_{\alpha}\mathbf{u}) + \underline{\mathbf{C}}_{\alpha} \cdot \check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}] \otimes^2 \delta\check{\mathbf{P}}_{\alpha}^* - [\check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} - \underline{\mathbf{M}}(\nabla_{\alpha}\boldsymbol{\varphi})] \otimes^2 \delta\check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^* \} d\check{S}_{\alpha}^{(-)} - \\
 & - \sum_{\alpha=1}^K \left\{ \int_{\check{L}_{\alpha}^{(-)}} h_{\alpha}(x') \check{m}_{\alpha}^{(-)} [\underline{\mathbf{M}}(\vartheta\delta\check{\mathbf{P}}_{\alpha}^I) \cdot (\check{\mathbf{u}}_{\alpha} - \check{\mathbf{u}}_{\alpha 0}) + \underline{\mathbf{M}}(\vartheta\delta\check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^I) \cdot (\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} - \check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha 0})] d\check{S}_{\alpha}^{(-)} - \right. \\
 & - \iint_{\check{L}_{\alpha}^{(-)}} h_{\alpha}(x') (\underline{\mathbf{T}}_{\alpha(1)}^* \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(k)} - \underline{\mathbf{T}}_{\alpha(2)}^* \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(k)}) d\check{S}_{\alpha}^{(-)} \left. \right\} - (-1)^k \left\{ \iint_{\check{S}_1^{(-)}} \check{\mathbf{n}}_1 \cdot [\delta\check{\underline{\mathbf{P}}}_1 \cdot (\check{\mathbf{u}}_1 - \check{\mathbf{u}}_{10}) + \delta\check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_1 \cdot (\check{\boldsymbol{\varphi}}_1 - \check{\boldsymbol{\varphi}}_{10})] d\check{S}_1^{(-)} + \right. \\
 & + \iint_{\check{S}_2^{(-)}} [(\check{\mathbf{n}}_1 \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_1 - \check{\mathbf{P}}_{10}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_1 + (\check{\mathbf{n}}_1 \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_1 - \check{\boldsymbol{\mu}}_{10}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_1] d\check{S}_2^{(-)} \left. \right\} - \iint_{\check{S}_1^{(+)}} \check{\mathbf{n}}_K \cdot [\delta\check{\underline{\mathbf{P}}}_K \cdot (\check{\mathbf{u}}_K - \check{\mathbf{u}}_{K0}) + \delta\check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_K \cdot (\check{\boldsymbol{\varphi}}_K - \check{\boldsymbol{\varphi}}_{K0})] d\check{S}_1^{(+)} + \\
 & + \iint_{\check{S}_2^{(+)}} [(\check{\mathbf{n}}_K \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_K - \check{\mathbf{P}}_{K0}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_K + (\check{\mathbf{n}}_K \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_K - \check{\boldsymbol{\mu}}_{K0}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_K] d\check{S}_2^{(+)} + \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{\check{S}_{\alpha}^{(+)}} \{ (\check{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha} - \check{\mathbf{T}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha} + \\
 & + (\check{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha} - \check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} + (-1)^k [(\check{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha+1} + \check{\mathbf{T}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha+1} + (\check{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1} + \check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}] \} d\check{S}_{\alpha}^{(+)} + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{\check{S}_{\alpha}^{(0)}} \{ (\check{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha} + \check{\mathbf{P}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha} + (\check{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha} + \check{\mathbf{Q}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} + (-1)^k [(\check{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha+1} - \check{\mathbf{P}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\mathbf{u}}_{\alpha+1} + \\
 & + (\check{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1} - \check{\mathbf{Q}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}] \} d\check{S}_{\alpha}^{(0)} \left. \right\} - \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{\check{S}_{\alpha}^{(i)}} [(\check{\mathbf{u}}_{\alpha} - \check{\mathbf{u}}_{\alpha+1}) \cdot \delta\check{\mathbf{T}}_{\alpha} + (\check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} - \check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}] d\check{S}_{\alpha}^{(i)} - \\
 & - \sum_{\alpha=1}^{K-1} \iint_{\check{S}_{\alpha}^{(0)}} [(\partial\check{\chi}_{\alpha}/\partial\check{\mathbf{v}}_{\alpha} - \check{\mathbf{P}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\mathbf{v}}_{\alpha} + (\partial\check{\chi}_{\alpha}/\partial\check{\boldsymbol{\psi}}_{\alpha} - \check{\mathbf{Q}}_{\alpha}) \cdot \delta\check{\boldsymbol{\psi}}_{\alpha} + (\check{\mathbf{v}}_{\alpha} - \check{\mathbf{u}}_{\alpha}^{(+)} + \check{\mathbf{u}}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta\check{\mathbf{P}}_{\alpha} + (\check{\boldsymbol{\psi}}_{\alpha} - \check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^{(+)} + \check{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}^{(-)}) \cdot \delta\check{\mathbf{Q}}_{\alpha}] d\check{S}_{\alpha}^{(0)} = 0.
 \end{aligned} \tag{8.3.23}$$

Здесь аналогично (8.2.13) и (8.2.16) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \check{\mathbf{T}}_1 &= \check{m}_{\alpha I}^{(-)} \check{\mathbf{P}}_{\alpha}^I - a_{\alpha}(x', x^3) \check{\mathbf{P}}_{\alpha 0}, & \check{\mathbf{T}}_2 &= \check{m}_{\alpha I}^{(-)} \check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}^I - a_{\alpha}(x', x^3) \check{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha 0}, & \check{\mathbf{T}}_{\alpha}^* &= \vartheta \check{\mathbf{T}}_{\alpha}^I, & \check{\mathbf{S}}_{\alpha}^* &= \vartheta \check{\mathbf{S}}_{\alpha}^I, \\
 \check{\mathbf{S}}_1 &= \nabla_{\alpha} \cdot \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \check{\mathbf{F}}_{\alpha}, & \check{\mathbf{S}}_2 &= \nabla_{\alpha} \cdot \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha} + \check{\underline{\mathbf{C}}}_{\alpha} \otimes^2 \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \check{\mathbf{m}}_{\alpha}, & \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha}^* &= \vartheta \check{\underline{\mathbf{P}}}_{\alpha}^{(-)}, & \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}^* &= \vartheta \check{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}^{(-)}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если $\check{\mathbf{S}}_0 = \emptyset$, $\alpha = \overline{1, K-1}$, то из (8.3.23) следует обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в моментах относительно системы полиномов Лежандра для теории многослойных тонких тел при идеальном контакте слоев и новой параметризации области тела. Заметим также, что, имея (8.3.23) нетрудно получить из него двойственный ему вариационный принцип, а также другие вариационные принципы (Лагранжа, Кастильяно) при выполнении характерных для этих принципов условий. В этой связи на рассмотрении этих частных случаев останавливаться не будем. Однако, отметим, что вопросы этой главы изложены также в [304].

Глава 9

Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и пластин. Сравнения различных теорий. Некоторые задачи

Исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены соответствующие уравнения микрополярных теорий оболочек и пластин.

9.1 К параметризации области оболочки

Рассматривается классическая параметризация [67, 68, 209] области оболочки. Применяются обозначения, использованные в работе [264] и обычные правила тензорного анализа [67, 91, 128, 130, 209, 335]. В качестве базовой рассматривается регулярная поверхность S , относительно которой область оболочки расположена несимметрично [68]. В таком случае радиус-вектор произвольной точки оболочки можно задать соотношением

$$\hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3, t) = \mathbf{r}(x^1, x^2, t) + x^3 \mathbf{n}(x^1, x^2, t), \quad -\overset{(-)}{h}(x^1, x^2, t) \leq x^3 \leq \overset{(+)}{h}(x^1, x^2, t), \quad (9.1.1)$$

где $\mathbf{r}(x^1, x^2, t)$ — радиус-вектор точки базовой поверхности S , которая не является срединной поверхностью; $\mathbf{n}(x^1, x^2, t)$ — единичный вектор нормали к базовой поверхности S ; x^1, x^2 — гауссовы координаты на S ; x^3 — поперечная координата, $h(x^1, x^2, t) = \overset{(-)}{h}(x^1, x^2, t) + \overset{(+)}{h}(x^1, x^2, t)$ представляет толщину оболочки в точке $(x^1, x^2) \in S$. В дальнейшем будем предполагать, что $\overset{(-)}{h}(x^1, x^2, t)$ и $\overset{(+)}{h}(x^1, x^2, t)$ — кусочно-гладкие неотрицательные функции координат x^1, x^2 .

При $x^3 = -\overset{(-)}{h}(x^1, x^2, t)$ первое соотношение (9.1.1) определяет поверхность, которую обозначим через $\overset{(-)}{S}$ и назовем внутренней поверхностью оболочки, а поверхность, определяемую тем же соотношением при $x^3 = \overset{(+)}{h}(x^1, x^2, t)$ и обозначаемую через $\overset{(+)}{S}$, назовем внешней поверхностью. Поверхности $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ еще называются лицевыми поверхностями оболочки. Введем обозначения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) = \hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2, -\overset{(-)}{h}, t), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) = \hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2, \overset{(+)}{h}, t),$$

тогда векторные уравнения поверхностей $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ соответственно представятся в виде

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{r}(x^1, x^2, t) - \overset{(-)}{h}(x^1, x^2, t) \mathbf{n}(x^1, x^2, t), \\ \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{r}(x^1, x^2, t) + \overset{(+)}{h}(x^1, x^2, t) \mathbf{n}(x^1, x^2, t). \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

В дальнейшем будут рассмотрены граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях. Для этого необходимо определить единичные векторы нормалей в точках лицевых поверхностей. Найдем выражения векторов ковариантных базисов на этих поверхностях. Пусть $\mathbf{r}_I^- = \partial_I \mathbf{r}^{(-)} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(-)}}{\partial x^I}$, $\mathbf{r}_I^+ = \partial_I \mathbf{r}^{(+)} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(+)}}{\partial x^I}$, тогда из (9.1.2) следуют соотношения для векторов ковариантных базисов внутренней $S^{(-)}$ и внешней $S^{(+)}$ поверхностей

$$\mathbf{r}_I^- = (g_I^J + h b_I^J) \mathbf{r}_J - \partial_I h \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_I^+ = (g_I^J - h b_I^J) \mathbf{r}_J + \partial_I h \mathbf{n}. \quad (9.1.3)$$

При написании (9.1.3) были учтены формулы Вейнгартена $\mathbf{n}_I = -b_I^J \mathbf{r}_J$; b_I^J — компоненты второго тензора \mathbf{b} поверхности S . Легко показать, что компоненты переноса единичного тензора второго ранга $g_I^J = \mathbf{r}_I \cdot \mathbf{r}^J$ и $g_J^I = \mathbf{r}^I \cdot \mathbf{r}_J$, где $\mathbf{r}_I = \partial_I \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}^I = \sqrt{\hat{g}^{-1}} \epsilon^{IJ} \mathbf{r}_J \times \mathbf{n}$, представляются в виде [264]

$$g_I^J = g_I^J - x^3 b_I^J, \quad g_J^I = \hat{\vartheta}^{-1} A_J^I = \hat{\vartheta}^{-1} [(1 - 2Hx^3)g_J^I + x^3 b_J^I], \quad (9.1.4)$$

$$A_J^I = \epsilon^{IK} \epsilon_{KL} g_K^L = (1 - 2Hx^3)g_J^I + x^3 b_J^I, \quad \hat{\vartheta} = \sqrt{\hat{g}g^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^L = 1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2. \quad (9.1.5)$$

Здесь $\sqrt{\hat{g}} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$, $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$, $H = 2^{-1} I_1(\mathbf{b}) = 2^{-1}(k_1 + k_2)$ — средняя кривизна, а $K = \det(\mathbf{b}) = k_1 k_2$ — гауссова кривизна базовой поверхности S , k_1 и k_2 — главные кривизны базовой поверхности, ϵ^{IJ} и ϵ_{KL} — символы Леви-Чивиты. В силу первого соотношения (9.1.4) имеем

$$g_I^J = g_I^J \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = g_I^J + h b_I^J, \quad g_I^J = g_I^J \Big|_{x^3=h}^{(+)} = g_I^J - h b_I^J. \quad (9.1.6)$$

Далее, вводя обозначения $g_I^3 = -\partial_I h$, $g_3^I = \partial_I h$, и учитывая (9.1.6), запишем соотношения (9.1.3) в краткой форме:

$$\mathbf{r}_I^- = g_I^k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_I^+ = g_+^k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{n}. \quad (9.1.7)$$

Теперь нетрудно найти выражения для единичных векторов нормалей $\mathbf{n}^{(-)}$ и $\mathbf{n}^{(+)}$ к поверхностям $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$, которые определяются формулами

$$\mathbf{n}^{(-)} = -(\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-) (|\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-|)^{-1}, \quad \mathbf{n}^{(+)} = (\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+) (|\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+|)^{-1}. \quad (9.1.8)$$

Действительно, на основании (9.1.7) векторное произведение в числителях (9.1.8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^- &= \sqrt{g} (\epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^3 g_J^K \mathbf{r}^L + \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^L \mathbf{n}), \\ \mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+ &= \sqrt{g} (\epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_+^3 g_+^K \mathbf{r}^L + \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_+^K g_+^L \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

Из второго соотношения (9.1.4) и формулы (9.1.5) находим

$$\begin{aligned} g_L^{\bar{I}} &= g_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \hat{\vartheta}^{-1} A_L^{\bar{I}}, \quad g_L^{\dagger I} = g_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \hat{\vartheta}^{-1} A_L^{\dagger I}, \\ A_L^{\bar{I}} &= A_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \epsilon^{IJ} \epsilon_{LK} g_J^K, \quad A_L^{\dagger I} = A_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \epsilon^{IJ} \epsilon_{LK} g_+^K, \\ \hat{\vartheta}^{-1} &= \hat{\vartheta} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^K g_J^L, \quad \hat{\vartheta}^{-1} = \hat{\vartheta} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_+^K g_+^L. \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

Учитывая (9.1.10), из (9.1.9) получаем

$$\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^- = \sqrt{g^{(-)}}(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \mathbf{r}^J), \quad \sqrt{g^{(-)}} = \sqrt{g^{(-)} \vartheta}, \quad \mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+ = \sqrt{g^{(+)}}(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\dagger} \mathbf{r}^J), \quad \sqrt{g^{(+)}} = \sqrt{g^{(+)} \vartheta}, \quad (9.1.11)$$

откуда будем иметь

$$|\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-| = \sqrt{g^{(-)}} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL}}, \quad |\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+| = \sqrt{g^{(+)}} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL}}. \quad (9.1.12)$$

В силу (9.1.11) и (9.1.12) из (9.1.8) получаем окончательные выражения для $\mathbf{n}^{(-)}$, $\mathbf{n}^{(+)}$:

$$\mathbf{n}^{(-)} = -(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \mathbf{r}^J)(1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL})^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{n}^{(+)} = (\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\dagger} \mathbf{r}^J)(1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL})^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.1.13)$$

Заметим, что подобные формулы были получены в [68].

9.2 Уравнения микрополярной теории оболочек

Эти уравнения можно получать разными способами, например из общих постулатов механики или из трехмерных уравнений. Воспользуемся вторым способом аналогично тому, как это делается в [68] в случае классической теории, с тем отличием, что в рассматриваемом случае толщина не постоянна и базовая поверхность не совпадает с срединной (см. также [67]).

Как известно [18, 196, 307, 453, 460], трехмерные уравнения движения микрополярного деформируемого твердого тела, отнесенные к актуальной конфигурации, представляются в виде

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \rho \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}, \quad (9.2.1)$$

а уравнения движения отнесенные к отсчетной конфигурации можно записать в форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{F} = \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} + \overset{\circ}{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{m} = \overset{\circ}{\rho} \overset{\circ}{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}. \quad (9.2.2)$$

Здесь $\underline{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор моментных напряжений, $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} = \sqrt{g g^{-1}} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \underline{\mathbf{P}}$ и $\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \sqrt{g g^{-1}} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, отнесенные к отсчетной конфигурации, $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$, $\sqrt{g^{\circ}} = (\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_3$, $\overset{\circ}{\nabla}$ и ∇ — операторы Гамильтона в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно, ρ — плотность тела, \mathbf{F} — массовая сила, \mathbf{m} — массовый момент, \mathbf{u} — вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор внутреннего вращения, $\underline{\mathbf{J}}$ — внутренний тензор инерции, $\underline{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга. Следует заметить, что величины, помеченные сверху кружком, относятся к отсчетной конфигурации.

Видно, что уравнения (9.2.1) и (9.2.2) имеют одинаковый вид, поэтому ниже в основном с целью сокращения письма рассмотрим уравнения актуальной конфигурации (9.2.1), а соотношения, получаемые из (9.2.2), при необходимости выпишем по аналогии или оговорим способ их получения. Нетрудно заметить, что векторные уравнения (9.2.1) при рассматриваемой выше параметризации можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \hat{\nu} \hat{\mathbf{P}}^I) + \partial_3 (\hat{\nu} \hat{\mathbf{P}}^3) + \hat{\rho} \hat{\nu} \hat{\mathbf{F}} &= \hat{\rho} \hat{\nu} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \hat{\nu} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I) + \partial_3 (\hat{\nu} \hat{\boldsymbol{\mu}}^3) + \hat{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \hat{\nu} \hat{\underline{\mathbf{P}}} + \hat{\rho} \hat{\nu} \hat{\mathbf{m}} &= \hat{\nu} \hat{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

где $\partial_m = \partial/\partial x^m$, а "шапка" над величинами и индексами означает, что они рассмотрены в произвольной точке области тонкого тела (оболочки), т.е. при произвольном значении поперечной координаты x^3 из ее промежутка изменения.

Интегрируя уравнения (9.2.3) от $-h(x^1, x^2)$ до $h(x^1, x^2)$ и учитывая формулу

$$\int_{-h}^{(+)} \partial_I \mathbf{A}^{\hat{K}} dx^3 = \partial_I \int_{-h}^{(+)} \mathbf{A}^{\hat{K}} dx^3 - \mathbf{A}^{(+)\dagger} \partial_I h - \mathbf{A}^{(-)\bar{K}} \partial_I h, \quad (9.2.4)$$

после простых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{T}^I) + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{N}^I) + \mathbf{C} \otimes \mathbf{T}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t), \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I dx^3, \quad \mathbf{p}(x^1, x^2, t) = \int_{-h}^{(+)} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{F}} dx^3, \quad \mathbf{a}(x^1, x^2, t) = \int_{-h}^{(+)} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} dx^3, \\ \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{p}(x^1, x^2, t) + \vartheta (\mathbf{P}^3 - g_+^3 g_J^{+(\dagger)} \mathbf{P}^J) - \vartheta (\mathbf{P}^3 - g_-^3 g_J^{(-)\bar{K}} \mathbf{P}^J), \\ \mathbf{N}^I &= \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I dx^3, \quad \mathbf{f}(x^1, x^2, t) = \int_{-h}^{(+)} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} dx^3, \quad \mathbf{c}(x^1, x^2, t) = \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2}, \\ \mathbf{T}_* &= \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}} dx^3, \quad \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) = \mathbf{f}(x^1, x^2, t) + \vartheta (\boldsymbol{\mu}^3 - g_+^3 g_J^{+(\dagger)} \boldsymbol{\mu}^J) - \vartheta (\boldsymbol{\mu}^3 - g_-^3 g_J^{(-)\bar{K}} \boldsymbol{\mu}^J). \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Умножая обе части первого уравнения (9.2.3) слева векторно на $x^3 \mathbf{n}$ и учитывая равенства

$$x^3 \mathbf{n} = \mathbf{r}_I - \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_p \times \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^p = \hat{\mathbf{C}} \otimes \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}},$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{n} \times (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I x^3)) + \mathbf{r}_I \times (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I) - \\ - \hat{\mathbf{C}} \otimes \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{n} \times \partial_3 (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^3 x^3) + \mathbf{n} \times (\hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{F}} x^3) = \mathbf{n} \times (\hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} x^3). \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Далее, интегрируя уравнение (9.2.7) от $-h$ до h , в силу формулы (9.2.4) получим еще одно искомое векторное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{M}^I) + \mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I - \mathbf{C} \otimes \mathbf{T}_* + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) = \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \quad (9.2.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^I &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3, \quad \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+)} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} x^3 dx^3, \quad \mathbf{q} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+)} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{F}} x^3 dx^3, \\ \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{q}(x^1, x^2, t) + \mathbf{n} \times \left[\frac{1}{h} \vartheta (\mathbf{P}^3 - g_+^3 g_J^{+(\dagger)} \mathbf{P}^J) - \frac{1}{h} \vartheta (\mathbf{P}^3 - g_-^3 g_J^{(-)\bar{K}} \mathbf{P}^J) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (9.2.5) и (9.2.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla_I^0 \mathbf{T}^I + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \nabla_I^0 \mathbf{M}^I + \mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \\ \nabla_I^0 \mathbf{N}^I + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t),\end{aligned}\tag{9.2.10}$$

где ∇_I^0 — поверхностный оператор ковариантного дифференцирования.

Уравнения (9.2.10) являются искомыми векторными уравнениями микрополярной теории оболочек. Они получены без использования каких-либо гипотез. Следует отметить, что первые два векторных уравнения (9.2.10) представляют уравнения классической теории оболочек.

Вводя в рассмотрение поверхностный набла оператор Гамильтона $\nabla^0 = \mathbf{r}^I \partial_I$, а также учитывая

$$\mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* = \mathbf{r}_I \times (\mathbf{T}^I - \mathbf{T}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{T}_*^3,$$

векторные уравнения микрополярной теории оболочек (9.2.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{T}} + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{M}} + \mathbf{r}_I \times (\mathbf{T}^I - \mathbf{T}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{T}_*^3 + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \\ \nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t),\end{aligned}\tag{9.2.11}$$

где тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$ и тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$ имеют представления

$$\underline{\mathbf{T}} = \mathbf{r}_K \mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_l, \quad \underline{\mathbf{M}} = \mathbf{r}_K \mathbf{M}^K = M^{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \underline{\mathbf{N}} = \mathbf{r}_K \mathbf{N}^K = N^{Kl} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_l.\tag{9.2.12}$$

Следует заметить, что $\underline{\mathbf{T}}$ и $\underline{\mathbf{M}}$ — тензоры усилий и силовых моментных усилий, которые совпадают с классическими аналогами, а $\underline{\mathbf{N}}$ — тензор моментных усилий, который определяется посредством тензора моментных напряжений. Заметим также, что $\mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{r}_l$, $\mathbf{M}^K = M^{KL} \mathbf{r}_L$ и $\mathbf{N}^K = N^{Kl} \mathbf{r}_l$ называются контравариантными составляющими тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий соответственно.

Таким образом, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек имеем три основных тензора (они находятся под дифференциальными операторами в уравнениях и участвуют в граничных условиях): тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$ и тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$. В дальнейшем тензоры $\underline{\mathbf{M}}$ и $\underline{\mathbf{N}}$ будем называть коротко еще тензорами моментов микрополярной теории оболочек.

9.2.1 Уравнения микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

Учитывая

$$\nabla_I^0 \mathbf{T}^I = (\nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3}) \mathbf{r}_J + (\nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ}) \mathbf{n}, \quad \nabla_I^0 \mathbf{M}^I = \nabla_I^0 M^{IJ} \mathbf{r}_J + b_{IJ} M^{IJ} \mathbf{n},\tag{9.2.13}$$

а также аналогичную первой формуле (9.2.13) формулу для $\nabla_I^0 \mathbf{N}^I$, уравнения микрополярной теории оболочек (9.2.10) или (9.2.11) в контравариантных компонентах тензоров

усилий и моментных усилий можно представить в форме

$$\begin{aligned}
 \nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, \\
 \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\
 \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{:I}^J (T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\
 b_{IJ} M^{IJ} + C_{IJ} (T^{IJ} - T_*^{IJ}) &= 0, \\
 \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{:I}^J (T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
 \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3,
 \end{aligned} \tag{9.2.14}$$

где

$$C_{IJ} = C_{IJ3} = (\mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J) \cdot \mathbf{n}, \quad \nabla_I^0 T^{IJ} = \partial_I T^{IJ} + T^{KJ} \Gamma_{KI}^I + T^{IK} \Gamma_{KI}^J, \quad \nabla_I^0 T^{I3} = \partial_I T^{I3} + T^{K3} \Gamma_{KI}^I,$$

выражения для $\nabla_I^0 N^{IJ}$ и $\nabla_I^0 M^{IJ}$ аналогичны выражению для $\nabla_I^0 T^{IJ}$, а $\nabla_I^0 M^{I3}$ имеет такое же выражение, что $\nabla_I^0 T^{I3}$, Γ_{KL}^I — поверхностные символы Кристоффеля второго рода.

Легко видеть, что число уравнений в системе (9.2.14) равно 9, среди которых — одно недифференциальное уравнение. Нетрудно доказать, что шестое недифференциальное уравнение из (9.2.14) является тождеством. Таким образом, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек в общем случае имеем 8 уравнений в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
 \nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, \\
 \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\
 \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{:I}^J (T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\
 \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{:I}^J (T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
 \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3.
 \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

9.2.2 Уравнения микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

В случае оболочек класса TS (тонких и пологих) принимаются следующие основные допущения [68]:

$$1 - k_1 x^3 \approx 1, \quad 1 - k_2 x^3 \approx 1, \quad \hat{\vartheta} \approx 1, \quad g_J^I \approx g_J^I, \tag{9.2.16}$$

в силу которых $\mathbf{T}^I = \mathbf{T}_*^I$, а также формулы (9.2.6) и (9.2.9) получают соответствующий вид, которых с целью сокращения письма выписывать не будем. Учитывая сказанное выше, из (9.2.15) получим следующие уравнения для микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
 \nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, \\
 \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\
 \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{:I}^J T_*^{3I} + Y^J &= b^J, \\
 \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{:I}^J (T^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
 \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T^{IJ} + Z^3 &= c^3.
 \end{aligned} \tag{9.2.17}$$

9.2.3 Уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

В этом случае в качестве базовой поверхности можно рассматривать плоскость, т.е. $b_{IJ} = 0$ и, следовательно, условия (9.2.16) в точности выполняются. Поэтому из (9.2.17)

будем иметь следующие уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
 \nabla_I^0 T^{IJ} + X^J &= a^J, \\
 \nabla_I^0 T^{I3} + X^3 &= a^3, \\
 \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{I*}^J T_*^{3I} + Y^J &= b^J, \\
 \nabla_I^0 N^{IJ} + C_{I*}^J (T^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
 \nabla_I^0 N^{I3} + C_{IJ} T^{IJ} + Z^3 &= c^3.
 \end{aligned} \tag{9.2.18}$$

Следует заметить, что из полученных выше уравнений соответствующие уравнения для отсчетной конфигурации получаются, если входящие в них величины пометать сверху кружком так, как это сделано в (9.2.2). В этой связи с целью сокращения письма выписывать их не будем. Однако, следует отметить, что выбор типа параметризации (классическая, новая, при произвольной базовой поверхности и др.) области тонкого тела зависит от выбора исходной конфигурации. Другими словами, если в качестве исходной выбрана отсчетная конфигурация, то параметризация (из перечисленных выше) области тонкого тела можно выбрать произвольно, а параметризация актуальной конфигурации уже определяется деформацией тела и наоборот, если в качестве исходной выбрана актуальная конфигурация, то параметризация области тонкого тела можно выбрать произвольно, а параметризация отсчетной конфигурации уже определяется деформацией тела [251, 257].

Отметим также, что \mathbf{X} и \mathbf{Y} в уравнениях (9.2.11) выражаются через неизвестные $\overset{(-)}{\mathbf{P}}^m$ и $\overset{(+)}{\mathbf{P}}^n$, а \mathbf{Z} через неизвестные $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}^m$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}^n$ (см. соответствующие формулы (9.2.6) и (9.2.9)). Для их отыскания аналогично классическому случаю [68, 272] воспользуемся граничными условиями физического содержания

$$\begin{aligned}
 \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\underline{\mathbf{P}}} &= \overset{(-)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t), & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\underline{\mathbf{P}}} &= \overset{(+)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t), \\
 \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(-)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t), & \overset{(+)}{\mathbf{n}} \cdot \overset{(+)}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t),
 \end{aligned} \tag{9.2.19}$$

где $\overset{(-)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t)$ и $\overset{(+)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t)$ — заданные векторы напряжения внешних сил, а $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t)$ и $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t)$ — заданные векторы моментного напряжения внешних моментов на внутренней $\overset{(-)}{S}$ и внешней $\overset{(+)}{S}$ поверхностях соответственно. В силу (9.1.13) из (9.2.19) получаем

$$\begin{aligned}
 \overset{(-)}{\mathbf{P}}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{(-)}} \overset{(-)}{\mathbf{P}}^J &= -\sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(-)}} g_K^{\bar{(-)}} g_L^{\bar{(-)}} g^{KL} \overset{(-)}{\mathbf{P}}}, & \overset{(+)}{\mathbf{P}}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{(+)}} \overset{(+)}{\mathbf{P}}^J &= \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(+)}} g_K^{\bar{(+)}} g_L^{\bar{(+)}} g^{KL} \overset{(+)}{\mathbf{P}}}, \\
 \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{(-)}} \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}^J &= -\sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(-)}} g_K^{\bar{(-)}} g_L^{\bar{(-)}} g^{KL} \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}}, & \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{(+)}} \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}^J &= \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(+)}} g_K^{\bar{(+)}} g_L^{\bar{(+)}} g^{KL} \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}}.
 \end{aligned} \tag{9.2.20}$$

Учитывая (9.2.20), из соответствующих соотношений (9.2.6) и (9.2.9) находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{p}(x^1, x^2, t) + \overset{(-)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(-)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t) + \overset{(+)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(+)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t), \\
 \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{q}(x^1, x^2, t) + \overset{(-)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(-)}{h} \overset{(-)}{\mathbf{n}} \times \overset{(-)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t) + \overset{(+)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(+)}{h} \overset{(+)}{\mathbf{n}} \times \overset{(+)}{\mathbf{P}}(x^1, x^2, t), \\
 \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{f}(x^1, x^2, t) + \overset{(-)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t) + \overset{(+)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}(x^1, x^2, t).
 \end{aligned} \tag{9.2.21}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\overset{(-)}{C}(x^1, x^2, t) = \overset{(-)}{\vartheta} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(-)}} g_K^{\bar{(-)}} g_L^{\bar{(-)}} g^{KL}}, \quad \overset{(+)}{C}(x^1, x^2, t) = \overset{(+)}{\vartheta} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{(+)}} g_K^{\bar{(+)}} g_L^{\bar{(+)}} g^{KL}}.$$

Уравнения (9.2.11), в которых \mathbf{X} и \mathbf{Y} определяются с помощью (9.2.21), представляют уравнения микрополярной теории оболочек в актуальной конфигурации с учетом заданных объемных нагрузок и нагрузок на лицевых поверхностях. Аналогично приведенным выше уравнениям можно получить и уравнения в отсчетной конфигурации.

9.3 Вектор усилия и векторы моментных усилий. О граничных условиях микрополярной теории оболочек

Основная гипотеза теории оболочек заключается в том, что вместо точечного нахождения непрерывных полей векторов напряжения и моментного напряжения в оболочке на поперечных площадках определяют их главные векторы (непрерывных полей векторов напряжения и моментного напряжения) и главный момент поля вектора напряжения. Таким образом, предполагается, что оболочка представляет в достаточной мере жесткую механическую систему, поэтому если на всякой поперечной площадке систему действующих на нее непрерывно распределенных сил и моментов заменить статически эквивалентной силой и парой (момент этой пары — сумма главного момента распределенных сил и результирующего момента распределенных моментов), то этим существенно не исказится картина напряженно-деформированного состояния оболочки.

Пусть $\hat{\mathbf{l}}$ — орт тангенциальной нормали дуги $d\hat{s}$ координатной поверхности $\hat{S}: x^3 = \text{const}$. Обозначим через Σ_l линейчатую поверхность, образованную нормальными к S (базовой поверхности), проходящими через $d\hat{s}$. Соответствующую $d\hat{s}$ на базовой поверхности S дугу обозначим ds , а орт тангенциальной нормали к ней через \mathbf{l} . Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} d\hat{\Sigma}_l \hat{\mathbf{l}} &= d\hat{\Sigma}_l = \mathbf{r}_f \times dx^I \mathbf{n} dx^3 = \sqrt{g} \epsilon_{IJK} \mathbf{r}^I dx^J dx^K, & d\Sigma_l \mathbf{l} &= d\Sigma_l = \sqrt{g} \epsilon_{IJK} \mathbf{r}^I dx^J dx^K, \\ d\hat{\Sigma}_l &= |d\hat{\Sigma}_l| = |d\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}| dx^3 = d\hat{s} dx^3, & d\Sigma_l &= ds dx^3. \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

Умножая обе части первого равенства (9.3.1) на \mathbf{r}_K скалярно, а второго равенства на \mathbf{r}_K , получим

$$d\hat{\Sigma}_l \hat{l}_I = \sqrt{g} \epsilon_{IJK} dx^J dx^K, \quad d\Sigma_l l_I = \sqrt{g} \epsilon_{IJK} dx^J dx^K. \quad (9.3.2)$$

На основании последних двух формул (9.3.1) и (9.3.2) находим

$$\frac{d\hat{\Sigma}_l \hat{l}_I}{d\Sigma_l l_I} = \frac{d\hat{s} \hat{l}_I}{ds l_I} = \sqrt{g g^{-1}} = \hat{\nu} = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3). \quad (9.3.3)$$

Пусть $\hat{\mathbf{P}}_{(\hat{l})}$ и $\hat{\mathbf{N}}_{(\hat{l})}$ — векторы напряжения и моментного напряжения, действующие на площадку $d\hat{\Sigma}_l = d\hat{s} dx^3$ с нормалью $\hat{\mathbf{l}}$ в некоторой точке $(x^1, x^2, x^3) \in d\hat{\Sigma}_l$. Тогда имеем

$$\hat{\mathbf{P}}_{(\hat{l})} = \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \hat{l}_I \hat{\mathbf{P}}^I, \quad \mathbf{P}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{P} = l_I \mathbf{P}^I, \quad \hat{\mathbf{N}}_{(\hat{l})} = \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{l}_I \hat{\mathbf{N}}^I, \quad \mathbf{N}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{N} = l_I \mathbf{N}^I, \quad (9.3.4)$$

где, конечно, $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{N}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений в точке (x^1, x^2, x^3) , а $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}|_{x^3=0}$ и $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{N}}|_{x^3=0}$.

Введем главный вектор (усилие) и главный момент распределенных сил напряжений, а также главный (результирующий) момент распределенных пар, действующих на Σ_l :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+h)} \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{l})} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{l})} d\hat{\Sigma}_l, \\ \mathbf{M}_{(l)} ds &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{l})} x^3 d\hat{\Sigma}_l, \quad \mathbf{N}_{(l)} ds = \int_{-h}^{(+h)} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{(\hat{l})} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{(\hat{l})} d\hat{\Sigma}_l. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Тогда в силу соответствующих обозначений (9.2.6) и (9.2.9), а также с учетом (9.3.3) и (9.3.4) из (9.3.5) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+)} \hat{l}_I \hat{\mathbf{P}}^I d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} l_I \hat{\mathbf{P}}^I ds dx^3 = ds l_I \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = ds l_I \mathbf{T}^I = ds \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{M}_{(l)} ds &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+)} \hat{l}_I \hat{\mathbf{P}}^I x^3 d\hat{s} dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} l_I \hat{\mathbf{P}}^I x^3 ds dx^3 = l_I \mathbf{M}^I ds = ds \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{M}}, \\ \mathbf{N}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+)} \hat{l}_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+)} \hat{\vartheta} l_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I ds dx^3 = ds l_I \mathbf{N}^I = ds \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{N}}.\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, имеем аналогичные (9.3.4) формулы

$$\mathbf{T}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{T}} = l_I \mathbf{T}^I, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{M}} = l_I \mathbf{M}^I, \quad \mathbf{N}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{N}} = l_I \mathbf{N}^I. \quad (9.3.6)$$

Векторы $\mathbf{T}_{(l)}$, $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ коротко назовем векторами усилия, силового моментного усилия и моментного усилия, а тензоры $\underline{\mathbf{T}}$, $\underline{\mathbf{M}}$ и $\underline{\mathbf{N}}$ тензорами усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий соответственно. Легко видеть, что компоненты тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий имеют вид

$$T^{Ik} = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{P}^{Ik} dx^3, \quad M^{IL} = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I C_{K^{\cdot}L} \hat{P}^{JK} x^3 dx^3, \quad N^{Ik} = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{\mu}^{Ik} dx^3. \quad (9.3.7)$$

Из (9.3.7) видно, что тензор усилий имеет шесть компонент, тензор силовых моментных усилий четыре, а тензор моментных усилий шесть.

Учитывая, что в линиях кривизны имеем соотношения

$$\hat{\vartheta} = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3), \quad g_\alpha^\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad g_1^{\hat{1}} = (1 - k_1 x^3)^{-1}, \quad g_2^{\hat{1}} = (1 - k_2 x^3)^{-1},$$

контравариантные составляющие тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий в линиях кривизны представляются в форме ¹

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^\alpha &= T^{\alpha k} \mathbf{r}_k = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] \hat{\mathbf{P}}^\alpha dx^3, \\ \mathbf{M}^\alpha &= M^{\alpha J} \mathbf{r}_J = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] C_{K^{\cdot}L} \hat{P}^{\alpha K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L, \\ \mathbf{N}^\alpha &= N^{\alpha k} \mathbf{r}_k = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] \hat{\boldsymbol{\mu}}^\alpha dx^3, \quad \langle \alpha = 1, 2 \rangle.\end{aligned}$$

Очевидно, вектор усилия (усилие) $\mathbf{T}_{(l)}$ и векторы силового моментного усилия $\mathbf{M}_{(l)}$ и моментного усилия $\mathbf{N}_{(l)}$ (или короче моменты) представляют векторы, рассчитанные на единицу длины. Пусть \mathbf{s} — орт касательной дуги ds . Предположим, что орты \mathbf{l} , \mathbf{s} , \mathbf{n} составляют триэдр правой ориентации т.е. $\mathbf{n} \times \mathbf{l} = \mathbf{s}$, $\mathbf{l} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}$, $\mathbf{s} \times \mathbf{n} = \mathbf{l}$. Тогда усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ и моменты $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ можно представить в виде

$$\mathbf{T}_{(l)} = T_{(ll)} \mathbf{l} + T_{(ls)} \mathbf{s} + T_{(ln)} \mathbf{n}, \quad \mathbf{M}_{(l)} = M_{(ll)} \mathbf{l} + M_{(ls)} \mathbf{s}, \quad \mathbf{N}_{(l)} = N_{(ll)} \mathbf{l} + N_{(ls)} \mathbf{s} + N_{(ln)} \mathbf{n}. \quad (9.3.8)$$

¹Запись $\langle \alpha = 1, 2 \rangle$ означает, что нет суммирования по α .

Из (9.3.8) видно, что усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ имеет три компоненты: $T_{(ll)}$ — нормальное усилие, $T_{(ls)}$ — касательное усилие и $T_{(ln)}$ — поперечное касательное усилие, которое еще называется перерезывающей силой. Силовой момент $\mathbf{M}_{(l)}$ имеет две компоненты: $M_{(ll)}$ — силовой крутящий момент, $M_{(ls)}$ — силовой изгибающий момент. Момент $\mathbf{N}_{(l)}$ имеет три компоненты: $N_{(ll)}$ — крутящий момент, $N_{(ls)}$ — изгибающий момент, $N_{(ln)}$ — поперечный крутящий момент.

Таким образом, непрерывно распределенные на поперечной площадке Σ_l с нормалью \mathbf{l} (\mathbf{l} — тангенциальная нормаль к дуги ds базовой поверхности) система сил напряжений и система пар (моментов) статически эквивалентны совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и моментов $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$. При построениях теории оболочек принимают допущение, что задание совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и моментов $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ на каждой поперечной площадке Σ_l , как уже отмечалось выше, с вполне достаточной точностью дает картину распределения сил напряжений и пар (моментов) в оболочке. Поэтому основной задачей теории оболочек считается определение усилия сил напряжений, моментов сил напряжений и пар, действующих на поперечных площадках. Эти величины имеют важный механический смысл. Если мы нагружаем боковые поверхности оболочки поверхностными силами и парами (моментами), то практически мы прилагаем к отдельным участкам поверхности статически эквивалентные им суммарные силы и моменты (главные векторы) — усилия и моменты. Поэтому, естественно, вместо непрерывного распределения напряжений и пар отыскать соответствующие им усилия и моменты. Другими словами, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек в каждой фиксированной точке (x^1, x^2) базовой поверхности S и для всякого касательного орта \mathbf{l} в этой точке следует определить восемь величин: $T_{(ll)}$ — нормальное усилие, $T_{(ls)}$ — касательное усилие и $T_{(ln)}$ — поперечное касательное усилие (перерезывающую силу), $M_{(ll)}$ — силовой крутящий момент, $M_{(ls)}$ — силовой изгибающий момент, $N_{(ll)}$ — крутящий момент, $N_{(ls)}$ — изгибающий момент, $N_{(ln)}$ — поперечный крутящий момент. Следовательно, граничные условия на контуре Γ базовой поверхности S в силу формул (9.3.8) представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{(l)} = T_{(ll)}\mathbf{l} + T_{(ls)}\mathbf{s} + T_{(ln)}\mathbf{n} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{(l)} = M_{(ll)}\mathbf{l} + M_{(ls)}\mathbf{s} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{N}_{(l)} = N_{(ll)}\mathbf{l} + N_{(ls)}\mathbf{s} + N_{(ln)}\mathbf{n} = \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

где \mathbf{l} — тангенциальная нормаль к контуру Γ базовой поверхности S , а \mathbf{f} , \mathbf{g} и \mathbf{h} выражаются через заданные на контуре Γ функции.

Из сказанного выше видно, что по уравнениям рассматриваемой микрополярной теории оболочек (пластин) можно определить не более восьми неизвестных функций, так как в общем случае имеем восемь независимых уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов (см. уравнения (9.2.15) – (9.2.18)) и восемь граничных условий (9.3.9). Для замыкания, например, системы уравнений (9.2.15) с граничными условиями (9.3.9) следует конкретизировать среду и рассматривать соответствующие определяющие соотношения, содержащие не более восьми неизвестных функций. Другими словами, для математически корректной постановки краевых задач в микрополярной теории оболочек (пластин) число неизвестных функций не должно больше восьми (максимальное число неизвестных функций зависит от числа уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов). Следовательно, для решения этой проблемы аналогично классическому случаю можно сформулировать подходящие кинематические или статические гипотезы, или и те и другие [18, 371–375, 458, 460] таким образом, что число неизвестных функций в определяющих соотношениях не превосходило восьми. Хотя, используя метод классических ортогональных полиномов (или какой-нибудь аналитический метод), можно обойтись без гипотез и построить такие теории тонких тел (а не оболочек), в которых число системы уравнений и, следовательно, число неизвестных функций могут быть значительно больше восьми (см. III и IV главы), что вполне естественно при нынешнем развитии вычислительной техники.

9.4 Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек

Уравнения микрополярной теории оболочек (9.2.10) и (9.2.15) были получены без учета моментов второго порядка. Здесь получим уравнения микрополярной теории оболочек с учетом моментов второго порядка. С этой целью, умножая обе части второго уравнения (9.2.3) слева векторно на $x^3 \mathbf{n}$ и учитывая равенства

$$x^3 \mathbf{n} = \mathbf{r}_I - \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_p \times \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^p = \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}, \quad \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}^{I3} - \hat{P}^{3I}) \mathbf{r}_I,$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{n} \times (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3)) + \mathbf{r}_I \times (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I) - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{n} \times \partial_3 (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^3 x^3) + \\ + x^3 \hat{\vartheta} (\hat{P}^{I3} - \hat{P}^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{n} \times (\hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} x^3) = \mathbf{n} \times (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2} x^3). \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

Далее, интегрируя уравнение (9.4.1) от $-\frac{(-)}{h}$ до $\frac{(+)}{h}$, в силу формулы (9.2.4) будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{R}^I) + \mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{N}_* + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t), \quad (9.4.2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^I &= \mathbf{n} \times \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 dx^3, \quad \mathbf{N}_* = \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{I3} x^3 dx^3, \quad M_*^{I3} = \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\vartheta} \hat{P}^{I3} x^3 dx^3 \\ M_*^{3I} &= \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\vartheta} \hat{P}^{3I} x^3 dx^3, \quad \mathbf{d} = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2} x^3) dx^3, \\ \mathbf{H}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{n} \times \left[\frac{(+)(+)}{h} \hat{\vartheta} (\hat{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_+^3 g_J^+ \hat{\boldsymbol{\mu}}^J) - \frac{(-)(-)}{h} \hat{\vartheta} (\hat{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_-^3 g_J^- \hat{\boldsymbol{\mu}}^J) + \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} x^3 dx^3 \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (9.4.2) можно записать в виде

$$\nabla_I^0 \mathbf{R}^I + \mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{N}_* + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t). \quad (9.4.3)$$

Учитывая

$$\mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{N}_* = \mathbf{r}_I \times (\mathbf{N}^I - \mathbf{N}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N}_*^3,$$

уравнение (9.4.3) можно представить в форме

$$\nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{R}} + \mathbf{r}_I \times (\mathbf{N}^I - \mathbf{N}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N}_*^3 + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t), \quad (9.4.4)$$

где $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{r}_K \mathbf{R}^K = R^{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L$ назовем тензором моментов второго порядка.

Уравнения (9.2.11) вместе с уравнением (9.4.4) составляют векторные уравнения расширенной микрополярной теории оболочек.

Следует заметить, что в расширенной микрополярной теории оболочек аналогично второй формуле (9.3.5) надо вводить в рассмотрение момент (моментное усилие) второго порядка $\mathbf{R}_{(l)}$, определяемый формулой

$$\mathbf{R}_{(l)} ds = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{l}_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 d\hat{s} dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{(-)}{h}}^{\frac{(+)}{h}} \hat{\vartheta} l_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 d\hat{s} dx^3 = l_I \mathbf{R}^I ds = ds l \cdot \underline{\mathbf{R}} \quad (\mathbf{R}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{R}}),$$

который, конечно, рассчитан на единицу длины. Тогда, естественно, к граничным условиям (9.3.9) надо добавить еще следующее граничное условие:

$$\mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{(l)} = R_{(ll)}\mathbf{l} + R_{(ls)}\mathbf{s} = \mathbf{t}, \quad (9.4.5)$$

где $R_{(ll)}$ — крутящий момент второго порядка, $R_{(ls)}$ — изгибающий момент второго порядка, а \mathbf{t} определяется с помощью заданной функции.

Таким образом, в расширенной микрополярной теории оболочек имеем четыре основных тензора (они находятся под дифференциальными операторами в уравнениях и участвуют в граничных условиях): тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$, тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$ и тензор моментных усилий второго порядка $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{r}_I \mathbf{R}^I = R^{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J$. В дальнейшем тензоры $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{N}}$ и $\underline{\mathbf{R}}$ будем называть коротко тензорами моментов расширенной микрополярной теории оболочек.

Нетрудно заметить, что вектор \mathbf{H} в (9.4.4) аналогично (9.2.21) можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \hat{\rho} \hat{\nu} \hat{\mathbf{m}} x^3 dx^3 + C^{(-)}(x^1, x^2, t) h^{(-)} \mathbf{n} \times \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(-)}(x^1, x^2, t) + C^{(+)}(x^1, x^2, t) h^{(+)} \mathbf{n} \times \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(+)} \quad (9.4.6)$$

Легко усмотреть, что (9.4.4) в компонентах можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_I^0 R^{IJ} + C_I^J (N^{I3} - N_*^{I3} + N_*^{3I}) + M_*^{I3} - M_*^{3I} + H^J &= d^J, \\ b_{IJ} R^{IJ} + C_{IJ} (N^{IJ} - N_*^{IJ}) &= 0, \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

где последнее недифференциальное уравнение аналогично шестому недифференциальному уравнению (9.2.14) является тождеством.

9.4.1 Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

Если к системе уравнений (9.2.15) добавить первое соотношение (9.4.7), то получим искомые уравнения в виде

$$\begin{aligned} \nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, \\ \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\ \nabla_I^0 M^{IJ} + C_I^J (T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\ \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_I^J (T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\ \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3, \\ \nabla_I^0 R^{IJ} + C_I^J (N^{I3} - N_*^{I3} + N_*^{3I}) + M_*^{I3} - M_*^{3I} + H^J &= d^J. \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

На основании (9.4.8) аналогично (9.2.17) и (9.2.18) при необходимости легко получить уравнения расширенных микрополярных теорий оболочек класса TS и призматических оболочек. Поэтому с целью сокращения письма выписывать их не будем.

Из (9.4.8) видно, что в расширенной микрополярной теории оболочек (пластин) в общем случае имеем 10 уравнений в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов и 10 граничных условий (см. (9.3.9) и (9.4.5)). Поэтому в этой теории оболочек (пластин) в общем случае можно определить не более десяти неизвестных функций. Следовательно, для замыкания системы уравнений (9.4.8) с граничными условиями (9.3.9) и (9.4.5) следует конкретизировать среду и рассматривать соответствующие определяющие соотношения, содержащие не более десяти неизвестных функций. Другими словами,

для математически корректной постановки краевых задач в расширенной микрополярной теории оболочек (пластин) число неизвестных функций не должно больше десяти (максимальное число неизвестных функций зависит от числа уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов). С целью решения этой проблемы, как было сказано выше в случае микрополярной теории оболочек (пластин), аналогично классическому случаю можно сформулировать подходящие кинематические или статические гипотезы, или и те и другие так, что число неизвестных функций не было больше десяти. Хотя, используя метод классических ортогональных полиномов (или какой-нибудь аналитический метод), можно обойтись без гипотез и построить такие теории тонких тел (а не оболочек), в которых число системы уравнений и, следовательно, число неизвестных функций могут быть значительно больше десяти (см. выше III и IV главы, а также [304]), что вполне естественно при нынешнем развитии вычислительной техники.

Ниже в отличие от микрополярной теории оболочек более подробно рассмотрим некоторые вопросы из классической моментной теории оболочек.

9.5 Некоторые вопросы классической моментной теории оболочек

9.5.1 Усилия и моменты. Тензор усилий и тензор моментов

В классической теории оболочек принимается гипотеза о том, что вместо точечного определения непрерывного поля напряжений в оболочке достаточно определить их результирующие и пары. Так как предполагается, что оболочка представляет в достаточной мере жесткую механическую систему, то, если на всякой поперечной площадке систему действующих на нее непрерывно распределенных сил заменить статически эквивалентной силой и парой, этим существенно не исказится картина напряженно-деформированного состояния оболочки.

Пусть $\hat{\mathbf{l}}$ — орт тангенциальной нормали дуги $d\hat{s}$ координатной поверхности \hat{S} : $x^3 = \text{const}$. Обозначим через Σ_l линейчатую поверхность, образованную нормальными к S (базовой поверхности), проходящими через $d\hat{s}$. Соответствующую $d\hat{s}$ на базовой поверхности S дугу обозначим ds , а орт тангенциальной нормали к ней через \mathbf{l} . Тогда, нетрудно заметить, что имеют место формулы (9.3.1) – (9.3.3).

Пусть $\hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})}$ — вектор напряжения, действующий на площадку $d\hat{\Sigma}_{\hat{i}} = d\hat{s}dx^3$ с нормалью $\hat{\mathbf{l}}$ в некоторой точке $(x^1, x^2, x^3) \in d\hat{\Sigma}_{\hat{i}}$. Тогда имеем (см. первые две формулы (9.3.4))

$$\hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} = \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \hat{l}_{\hat{i}} \hat{\mathbf{P}}^{\hat{i}}, \quad \mathbf{P}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{P} = l_I \mathbf{P}^I, \quad (9.5.1)$$

где, конечно, $\hat{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений в точке (x^1, x^2, x^3) , а $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}|_{x^3=0}$.

Введем в рассмотрение усилие и момент сил напряжений

$$\mathbf{T}_{(l)} ds = \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} d\hat{\Sigma}_{\hat{i}}, \quad \mathbf{M}_{(l)} ds = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} x^3 d\hat{s} dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} x^3 d\hat{\Sigma}_{\hat{i}}. \quad (9.5.2)$$

действующих на Σ_l , а также тензор усилий \mathbf{T} и тензор моментных усилий \mathbf{M} , для которых аналогично (9.5.1) имеют место формулы (см. первые две формулы (9.3.5) и (9.3.6))

$$\mathbf{T}_{(l)} ds = \mathbf{l} \cdot \mathbf{T} = l_I \mathbf{T}^I, \quad \mathbf{M}_{(l)} ds = \mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = l_I \mathbf{M}^I. \quad (9.5.3)$$

Нетрудно видеть, что в силу (9.3.3), (9.5.1) и (9.5.3) из (9.5.2) имеем

$$l_I \mathbf{T}^I ds = \int_{-h}^h \hat{l}_{\hat{i}} \hat{\mathbf{P}}^{\hat{i}} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} l_I \hat{\mathbf{P}}^{\hat{i}} ds dx^3, \quad l_I \mathbf{M}^I ds = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{l}_{\hat{i}} \hat{\mathbf{P}}^{\hat{i}} x^3 d\hat{s} dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\vartheta} l_I \hat{\mathbf{P}}^{\hat{i}} x^3 ds dx^3.$$

Отсюда, очевидно, находим

$$\mathbf{T}^I = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{\mathbf{P}}^I dx^3, \quad \mathbf{M}^I = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3, \quad (9.5.4)$$

где \mathbf{T}^I и \mathbf{M}^I называются контравариантными составляющими тензоров усилий и моментных усилий. Заметим, что

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{P}}^J = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_K \hat{P}^{JK} = C_{KLR} \hat{P}^{JK} = C_{K \cdot L} \mathbf{r}_L \hat{P}^{JK}.$$

Учитывая последнее равенство, второе соотношение (9.5.4) можно представить в виде

$$\mathbf{M}^I = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I C_{K \cdot L} \hat{P}^{JK} \mathbf{r}_L x^3 dx^3. \quad (9.5.5)$$

Из первой формулы (9.5.4) и (9.5.5) видно, что тензор усилий и тензор моментных усилий представляются в виде

$$\underline{\mathbf{T}} = \mathbf{r}_I \mathbf{T}^I = T^{Ik} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_k, \quad \underline{\mathbf{M}} = \mathbf{r}_I \mathbf{M}^I = M^{IK} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K, \quad (9.5.6)$$

где в силу первой формулы (9.5.4) и (9.5.5) компоненты тензоров усилий и моментных усилий имеют вид

$$T^{Ik} = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{P}^{Ik} dx^3, \quad M^{IL} = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I C_{K \cdot L} \hat{P}^{JK} x^3 dx^3. \quad (9.5.7)$$

Из (9.5.7) видно, что тензор усилий имеет шесть компонент, а тензор моментных усилий четыре.

Теперь с целью сокращения письма

$$\mathbf{T}^I = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I \hat{\mathbf{P}}^I dx^3, \quad \mathbf{M}^I = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_J^I C_{K \cdot L} \hat{P}^{JK} \mathbf{r}_L x^3 dx^3 \quad (9.5.8)$$

представим в линиях кривизны. В этом случае имеем

$$\hat{\vartheta} = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3), \quad g_\alpha^\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad g_1^1 = (1 - k_1 x^3)^{-1}, \quad g_2^2 = (1 - k_2 x^3)^{-1}, \quad (9.5.9)$$

поэтому формулы (9.5.8) представятся в виде

$$\mathbf{T}^\alpha = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_\alpha^{\hat{\alpha}} \hat{\mathbf{P}}^\alpha dx^3, \quad \mathbf{M}^\alpha = \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_\alpha^{\hat{\alpha}} C_{K \cdot L} \hat{P}^{\alpha K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L. \quad (9.5.10)$$

В силу (9.5.9) из формулы (9.5.10), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^1 &= \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_1^1 \hat{\mathbf{P}}^1 dx^3 = \int_{-h}^h (1 - k_2 x^3) \hat{\mathbf{P}}^1 dx^3, & \mathbf{T}^2 &= \int_{-h}^h \hat{\vartheta} g_2^2 \hat{\mathbf{P}}^2 dx^3 = \int_{-h}^h (1 - k_1 x^3) \hat{\mathbf{P}}^2 dx^3, \\ \mathbf{M}^1 &= \int_{-h}^h (1 - k_2 x^3) C_{K \cdot L} \hat{P}^{1K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L, & \mathbf{M}^2 &= \int_{-h}^h (1 - k_1 x^3) C_{K \cdot L} \hat{P}^{2K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L. \end{aligned}$$

Таким образом, в линиях кривизны \mathbf{T}^α и \mathbf{M}^α имеют выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\alpha &= T^{\alpha k} \mathbf{r}_k = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] \hat{\mathbf{P}}^\alpha dx^3, \\ \mathbf{M}^\alpha &= M^{\alpha J} \mathbf{r}_J = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] C_{K \cdot L} \hat{P}^{\alpha K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L. \end{aligned} \quad (9.5.11)$$

Очевидно, усилие (вектор усилия) $\mathbf{T}_{(l)}$ и момент (вектор моментного усилия) $\mathbf{M}_{(l)}$ представляют векторы, рассчитанные на единицу длины. Пусть \mathbf{s} — орт касательной дуги ds . Предположим, что орты \mathbf{l} , \mathbf{s} , \mathbf{n} составляют триэдр правой ориентации, т.е.

$$\mathbf{n} \times \mathbf{l} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{l} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \mathbf{l}.$$

Тогда усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ и момент $\mathbf{M}_{(l)}$ можно представить в виде

$$\mathbf{T}_{(l)} = T_{(ll)}\mathbf{l} + T_{(ls)}\mathbf{s} + T_{(ln)}\mathbf{n}, \quad (9.5.12)$$

$$\mathbf{M}_{(l)} = M_{(ll)}\mathbf{l} + M_{(ls)}\mathbf{s}. \quad (9.5.13)$$

Таким образом, усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ имеет три компоненты: $T_{(ll)}$ — нормальное усилие, $T_{(ls)}$ — касательное усилие и $T_{(ln)}$ — поперечное касательное усилие, которое еще называется перерезывающей силой. Момент $\mathbf{M}_{(l)}$ имеет две компоненты: $M_{(ll)}$ — крутящий момент, $M_{(ls)}$ — изгибающий момент.

Непрерывно распределенная на поперечной площадке Σ_l с нормалью \mathbf{l} (\mathbf{l} — тангенциальная нормаль к дуги ds серединной поверхности) система сил напряжений статически эквивалентна совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и момента $\mathbf{M}_{(l)}$. В классических построениях теории оболочек принимают допущение, что задание совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и момента $\mathbf{M}_{(l)}$ на каждой поперечной площадке Σ_l , как уже отмечалось выше, с вполне достаточной точностью дает картину распределения напряжений в оболочке. Поэтому основной задачей классической теории оболочек считается определение усилий и моментов сил напряжений, действующих на поперечных площадках. Эти величины имеют важный механический смысл. Если мы нагружаем боковые поверхности оболочки поверхностными силами, то практически мы прилагаем к отдельным участкам поверхности статически эквивалентные им суммарные силы — усилия и моменты. Поэтому, естественно, вместо непрерывного распределения напряжений отыскивать их результирующие и моменты.

Далее сравним теорию приближения порядка $N = 1$ с классической моментной теорией. В этом случае тензор напряжений представляется в виде

$$\hat{\mathbf{P}} \approx \underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(0)} + \frac{x^3}{h} \underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(1)} \quad (9.5.14)$$

и, следовательно, относительно компонент тензоров $\underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(0)}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(1)}$ имеем в отличие от классической теории (см. ниже (9.5.76)) шесть уравнений и шесть граничных условий (выписывать их не будем, см. III и IV главы, а также постановки задачи), с помощью которых можно определить не более шести неизвестных функций.

Далее в первую очередь найдем выражения для $\mathbf{P}_{(l)}$ — вектора напряжения на площадке Σ_l через $\mathbf{T}_{(l)}$, $\mathbf{M}_{(l)}$, $\underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(0)}$ и $\underset{\sim}{\mathbf{P}}^{(1)}$. Нетрудно заметить, что в силу (9.3.3) и (9.5.1) из (9.5.2) имеем

$$\mathbf{T}_{(l)} = \int_{-h}^h \hat{\nu} l_I \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\nu} l_I g_J^I \hat{\mathbf{P}}^J dx^3, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\nu} l_I \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\nu} l_I g_J^I \hat{\mathbf{P}}^J x^3 dx^3. \quad (9.5.15)$$

Учитывая, что

$$g_J^I = \hat{\nu}^{-1} A_J^I, \quad A_J^I = (1 - 2Hx^3)g_J^I + x^3 b_J^I, \quad 2H = b_J^J, \quad (9.5.16)$$

формулы (9.5.15) можно представить в виде

$$\mathbf{T}_{(l)} = \int_{-h}^h l_I A_J^I \hat{\mathbf{P}}^J dx^3, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h l_I A_J^I \hat{\mathbf{P}}^J x^3 dx^3. \quad (9.5.17)$$

В силу (9.5.14) и второй формулы (9.5.16), из (9.5.17) для $\mathbf{T}_{(l)}$ и $\mathbf{M}_{(l)}$ после простых вычислений получим следующие выражения

$$\mathbf{T}_{(l)} = 2hl_I \mathbf{P}^I + \frac{2}{3}h^2(b_J^I - 2Hg_J^I)l_I \mathbf{P}^J, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \frac{2}{3}h^3(b_J^I - 2Hg_J^I)l_I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^J + \frac{2}{3}h^2l_I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^I. \quad (9.5.18)$$

Учитывая (9.5.3), из (9.5.18) найдем

$$2h\mathbf{P}^I + \frac{2}{3}h^2(b_J^I - 2Hg_J^I)\mathbf{P}^J = \mathbf{T}^I, \quad \frac{2}{3}h^3(b_J^I - 2Hg_J^I)\mathbf{n} \times \mathbf{P}^J + \frac{2}{3}h^2\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I = \mathbf{M}^I. \quad (9.5.19)$$

С целью сокращения письма введем обозначение

$$a_J^I = \frac{2}{3}h^2(b_J^I - 2Hg_J^I). \quad (9.5.20)$$

Тогда в силу (9.5.20) соотношения (9.5.19) можно записать в форме

$$2h\mathbf{P}^I + a_J^I \mathbf{P}^J = \mathbf{T}^I, \quad ha_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^J + \frac{2}{3}h^2\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I = \mathbf{M}^I. \quad (9.5.21)$$

В виде (9.5.21) получили систему уравнений для определения \mathbf{P}^I и \mathbf{P}^J . Найдем их. С этой целью умножим первое уравнение (9.5.21) слева на \mathbf{n} векторно. Очевидно, получим

$$2h\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I + a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^J = \mathbf{n} \times \mathbf{T}^I. \quad (9.5.22)$$

Определим из (9.5.22) выражение $\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I$. Имеем

$$\mathbf{n} \times \mathbf{P}^J = \frac{1}{2h}\mathbf{n} \times \mathbf{T}^J - \frac{1}{2h}a_K^J \mathbf{n} \times \mathbf{P}^K. \quad (9.5.23)$$

Учитывая (9.5.23), из второго уравнения (9.5.21) найдем

$$\left(\frac{2}{3}h^2g_J^I - \frac{1}{2}a_J^I a_K^J\right)\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = \mathbf{M}^I - \frac{1}{2}a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{T}^J. \quad (9.5.24)$$

Теперь уравнение (9.5.22) умножим на $(2/3)h^2$, а во втором уравнений (9.5.21) сперва заменим индексы I, J на J, K соответственно, а затем полученное соотношение умножим на a_J^I с последующим суммированием по J . В результате получим

$$\frac{4}{3}h^3\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I + \frac{2}{3}h^2a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^J = \frac{2}{3}h^2\mathbf{n} \times \mathbf{T}^I, \quad ha_J^I a_K^J \mathbf{n} \times \mathbf{P}^K + \frac{2}{3}h^2a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{P}^J = a_J^I \mathbf{M}^J. \quad (9.5.25)$$

Вычитая из первого уравнения (9.5.25) второе, будем иметь

$$\left(\frac{4}{3}h^3g_K^I - ha_J^I a_K^J\right)\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = \frac{2}{3}h^2\mathbf{n} \times \mathbf{T}^I - a_J^I \mathbf{M}^J. \quad (9.5.26)$$

Запишем (9.5.24) и (9.5.26) в виде

$$\left(\frac{4}{3}h^2g_K^I - a_J^I a_K^J\right)\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = \frac{2}{3}h\mathbf{n} \times \mathbf{T}^I - \frac{1}{h}a_J^I \mathbf{M}^J, \quad \left(\frac{4}{3}h^2g_J^I - a_J^I a_K^J\right)\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = 2\mathbf{M}^I - a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{T}^J. \quad (9.5.27)$$

Первое соотношение (9.5.27) представляет систему уравнений относительно $\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K$, а второе относительно $\mathbf{n} \times \mathbf{P}^K$. Однако мы хотим найти \mathbf{P}^K и \mathbf{P}^K . С этой целью вернемся к

Уравнения микрополярных теорий оболочек и пластин. Сравнения различных теорий. Некоторые задачи уравнениям (9.5.21). Второе уравнение (9.5.21) умножим слева векторно на \mathbf{n} ($\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}$). Нетрудно заметить, что имеем

$$ha_J^I \mathbf{P}^J + \frac{2}{3} h^2 \mathbf{P}^I = ha_J^I \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^J) + \frac{2}{3} h^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) - \mathbf{n} \times \mathbf{M}^I. \quad (9.5.28)$$

Соотношение (9.5.28) вместе с первым соотношением (9.5.21) образуют систему

$$2h \mathbf{P}^I + a_J^I \mathbf{P}^J = \mathbf{T}^I, \quad ha_J^I \mathbf{P}^J + \frac{2}{3} h^2 \mathbf{P}^I = ha_J^I \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^J) + \frac{2}{3} h^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) - \mathbf{n} \times \mathbf{M}^I. \quad (9.5.29)$$

Решим (9.5.29) относительно \mathbf{P}^I и \mathbf{P}^J . Поступим так же, как при получении (9.5.27). В первом уравнении (9.5.29) заменим индексы I и J на J и K соответственно, а затем полученное соотношение поделим на 2 и умножим на a_J^I с последующим суммированием по J . Будем иметь

$$ha_J^I \mathbf{P}^J + \frac{1}{2} a_J^I a_K^J \mathbf{P}^K = \frac{1}{2} a_J^I \mathbf{T}^J. \quad (9.5.30)$$

Вычитая (9.5.30) почленно из второго соотношения (9.5.29), после простых выкладок получим

$$\left(\frac{4}{3} h^2 g_K^I - a_J^I a_K^J\right) \mathbf{P}^K = 2ha_J^I \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^J) + \frac{4}{3} h^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^I - a_J^I \mathbf{T}^J. \quad (9.5.31)$$

Найдя отсюда \mathbf{P}^I , из первого соотношения (9.5.29) найдем \mathbf{P}^J . Нам нужно, вообще говоря, найти \mathbf{P}^I и \mathbf{P}^K для того, чтобы определить \mathbf{P} ($\mathbf{P} = \mathbf{P} + (x^3/h)\mathbf{P}$), а затем $\mathbf{P}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{P}$. Хотя, $\mathbf{P}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{P} = l_I \mathbf{P}^I$, поэтому достаточно находить \mathbf{P}^I и \mathbf{P}^J . Решим системы (9.5.27). С целью сокращения письма введем обозначения

$$\mathbf{b}^I = \frac{2}{3} h \mathbf{n} \times \mathbf{T}^I - \frac{1}{h} a_J^I \mathbf{M}^J, \quad \mathbf{c}^I = 2\mathbf{M}^I - a_J^I \mathbf{n} \times \mathbf{T}^J. \quad (9.5.32)$$

Тогда уравнения (9.5.27) можно записать в виде

$$\left(\frac{4}{3} h^2 g_K^I - a_J^I a_K^J\right) \mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = \mathbf{b}^I, \quad \left(\frac{4}{3} h^2 g_J^I - a_J^I a_K^J\right) \mathbf{n} \times \mathbf{P}^K = \mathbf{c}^I. \quad (9.5.33)$$

Запишем первую систему (9.5.33) в развернутом виде. Имеем

$$\left(\frac{4}{3} h^2 - a_J^1 a_1^J\right) \mathbf{n} \times \mathbf{P}^1 - a_J^1 a_2^J \mathbf{n} \times \mathbf{P}^2 = \mathbf{b}^1, \quad -a_J^2 a_1^J \mathbf{n} \times \mathbf{P}^1 + \left(\frac{4}{3} h^2 - a_J^2 a_2^J\right) \mathbf{n} \times \mathbf{P}^2 = \mathbf{b}^2. \quad (9.5.34)$$

Заметим, что в силу (9.5.20) имеем

$$a_1^1 = -\frac{2}{3} h^2 b_2^2, \quad a_2^2 = -\frac{2}{3} h^2 b_1^1, \quad a_2^1 = \frac{2}{3} h^2 b_2^1, \quad a_1^2 = \frac{2}{3} h^2 b_1^2. \quad (9.5.35)$$

Тогда после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} a_J^1 a_1^J &= \frac{4}{9} h^4 [(b_2^2)^2 + b_1^2 b_2^1], & a_J^1 a_2^J &= -\frac{4}{9} h^4 b_2^1 (b_1^1 + b_2^2), \\ a_J^2 a_2^J &= \frac{4}{9} h^4 [(b_1^1)^2 + b_1^2 b_2^1], & a_J^2 a_1^J &= -\frac{4}{9} h^4 b_1^2 (b_1^1 + b_2^2). \end{aligned} \quad (9.5.36)$$

Легко вычислить главный детерминант системы (9.5.34). В самом деле, после простых вычислений находим

$$\Delta = \frac{16}{9} h^4 \left[1 - \frac{1}{3} h^2 (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{9} h^4 k_1^2 k_2^2\right] = \frac{16}{9} h^4 \left\{1 - \frac{1}{3} h^2 [4I_1^2(\mathbf{b}) - 2\det \mathbf{b}] + \frac{1}{9} h^4 (\det \mathbf{b})^2\right\}. \quad (9.5.37)$$

Нетрудно вычислить и вспомогательные детерминанты. Они имеют выражения

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{4}{3}h^2\left\{1 - \frac{1}{3}h^2[(b_1^1)^2 + b_1^2b_2^1]\right\}\mathbf{b}^1 - \frac{4}{9}h^4b_2^1(b_1^1 + b_2^2)\mathbf{b}^2, \\ \Delta_2 &= -\frac{4}{9}h^4b_1^2(b_1^1 + b_2^2)\mathbf{b}^1 + \frac{4}{3}h^2\left\{1 - \frac{1}{3}h^2[(b_2^2)^2 + b_1^2b_2^1]\right\}\mathbf{b}^2.\end{aligned}\quad (9.5.38)$$

Очевидно, в линиях кривизны (9.5.38) представляются в виде

$$\Delta_1 = \frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)\mathbf{b}^1, \quad \Delta_2 = \frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)\mathbf{b}^2. \quad (9.5.39)$$

Заметим, что (9.5.37) можно еще представить следующим образом:

$$\Delta = \frac{16}{9}h^4\left[1 - \frac{1}{3}h^2(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{9}h^4k_1^2k_2^2\right] = \frac{16}{9}h^4\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right). \quad (9.5.40)$$

На основании (9.5.39) и (9.5.40) решение системы (9.5.33) ((9.5.34)) имеет вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{P}^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)\right]^{-1}\mathbf{b}^1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{P}^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)\right]^{-1}\mathbf{b}^2. \quad (9.5.41)$$

Нетрудно заметить, что решение второй системы (9.5.33) получим из (9.5.41) если \mathbf{b}^I и \mathbf{P}^I заменим на \mathbf{c}^I и \mathbf{P}^I соответственно. т.е. имеем

$$\mathbf{n} \times \mathbf{P}^1 = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)\right]^{-1}\mathbf{c}^1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{P}^2 = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)\right]^{-1}\mathbf{c}^2. \quad (9.5.42)$$

Теперь решим систему (9.5.31). Вводя обозначение

$$\mathbf{d}^I = 2ha_J^I\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^J) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^I - a_J^I\mathbf{T}^J, \quad (9.5.43)$$

систему (9.5.31) можно записать в виде

$$\left(\frac{4}{3}h^2g_K^I - a_J^I a_K^J\right)\mathbf{P}^K = \mathbf{d}^I. \quad (9.5.44)$$

Очевидно, (9.5.44) решается аналогично (9.5.33) и решение, конечно, имеет аналогичный (9.5.41) (9.5.42) вид, т.е. имеем

$$\mathbf{P}^1 = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)\right]^{-1}\mathbf{d}^1, \quad \mathbf{P}^2 = \left[\frac{4}{3}h^2\left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)\right]^{-1}\mathbf{d}^2. \quad (9.5.45)$$

Заметим, что в силу (9.5.35) из (9.5.43) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^1 &= -\frac{4}{3}h^3k_2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^1 + \frac{2}{3}h^2k_2\mathbf{T}^1, \\ \mathbf{d}^2 &= -\frac{4}{3}h^3k_1\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^2 + \frac{2}{3}h^2k_1\mathbf{T}^2.\end{aligned}\quad (9.5.46)$$

Теперь из первого соотношения (9.5.29) найдем \mathbf{P}^I . Очевидно, имеем

$$\mathbf{P}^1 = -\frac{1}{2h}a_1^1\mathbf{P}^1 + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^1 = \frac{1}{3h}k_2\mathbf{P}^1 + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^1, \quad \mathbf{P}^2 = -\frac{1}{2h}a_2^2\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^2 = \frac{1}{3h}k_1\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^2. \quad (9.5.47)$$

Далее по формулам (9.5.45) на основании (9.5.46) найдем выражения для \mathbf{P}^I , а затем по формулам (9.5.47) можно найти выражения для \mathbf{P}^I . Нетрудно заметить, что для \mathbf{P}^I имеем соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^1 &= \left[\frac{4}{3}h^2 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right) \right]^{-1} \left[-\frac{4}{3}h^3k_2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^1 + \frac{2}{3}h^2k_2\mathbf{T}^1 \right], \\ \mathbf{P}^2 &= \left[\frac{4}{3}h^2 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right) \right]^{-1} \left[-\frac{4}{3}h^3k_1\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^2 + \frac{2}{3}h^2k_1\mathbf{T}^2 \right].\end{aligned}\quad (9.5.48)$$

Учитывая (9.5.48), из (9.5.47) для \mathbf{P}^I получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^1 &= \frac{1}{3}hk_2 \left[\frac{4}{3}h^2 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right) \right]^{-1} \left[-\frac{4}{3}h^3k_2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^1 + \frac{2}{3}h^2k_2\mathbf{T}^1 \right] + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^1, \\ \mathbf{P}^2 &= \frac{1}{3}hk_1 \left[\frac{4}{3}h^2 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right) \right]^{-1} \left[-\frac{4}{3}h^3k_1\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \frac{4}{3}h^2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) - 2\mathbf{n} \times \mathbf{M}^2 + \frac{2}{3}h^2k_1\mathbf{T}^2 \right] + \frac{1}{2h}\mathbf{T}^2.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что последние два соотношения и (9.5.48) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^1 &= \frac{1}{3}hk_2 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \left[-hk_2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) \right] + \\ &\quad + \frac{k_2}{2h} \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \frac{1}{2h} \left[1 + \frac{h^2k_2^2}{3} \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \right] \mathbf{T}^1, \\ \mathbf{P}^2 &= \frac{1}{3}hk_1 \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \left[-hk_1\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) \right] + \\ &\quad + \frac{k_1}{2h} \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \frac{1}{2h} \left[1 + \frac{h^2k_1^2}{3} \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \right] \mathbf{T}^2, \\ \mathbf{P}^1 &= \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \left[-hk_2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + \frac{3}{2h^2}\mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \frac{k_2}{2}\mathbf{T}^1 \right], \\ \mathbf{P}^2 &= \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \left[-hk_1\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + \frac{3}{2h^2}\mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \frac{k_1}{2}\mathbf{T}^2 \right].\end{aligned}\quad (9.5.49)$$

Теперь вспомним, что мы хотим найти выражение для вектора напряжения $\mathbf{P}_{(l)}$. Заметим, что в силу (9.5.1) и (9.5.14) для $\mathbf{P}_{(l)}$ имеем соотношение

$$\hat{\mathbf{P}}_{(l)} \approx l_I \mathbf{P}^I + \frac{x^3}{h} l_I \mathbf{P}^I. \quad (9.5.50)$$

Учитывая (9.5.49), из (9.5.50) получим

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{(l)} &\approx \frac{1}{2h} \left\{ \left[1 + (k_2^2h^2 + x^3k_2) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \right] \mathbf{T}^1 l_1 + \left[1 + (k_1^2h^2 + x^3k_1) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \right] \mathbf{T}^2 l_2 \right\} + \\ &\quad + \left(\frac{k_2}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} l_1 \mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \left(\frac{k_1}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} l_2 \mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{3}hk_2 + \frac{x^3}{h} \right) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_2^2\right)^{-1} \left[-hk_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) \right] l_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3}hk_1 + \frac{x^3}{h} \right) \left(1 - \frac{1}{3}h^2k_1^2\right)^{-1} \left[-hk_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) \right] l_2 \right\} \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (9.5.51)$$

Отсюда в свою очередь получаем

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^1 &\approx \frac{1}{2h} \left[1 + (k_2^2 h^2 + x^3 k_2) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_2^2 \right)^{-1} \right] \mathbf{T}^1 + \left(\frac{k_2}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_2^2 \right)^{-1} \mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} h k_2 + \frac{x^3}{h} \right) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_2^2 \right)^{-1} \left[-h k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) \right] \mathbf{n}, \\ \hat{\mathbf{P}}^2 &\approx \frac{1}{2h} \left[1 + (k_1^2 h^2 + x^3 k_1) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_1^2 \right)^{-1} \right] \mathbf{T}^2 + \left(\frac{k_1}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_1^2 \right)^{-1} \mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} h k_1 + \frac{x^3}{h} \right) \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_1^2 \right)^{-1} \left[-h k_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) \right] \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{9.5.52}$$

Нетрудно заметить, что пренебрегая членами, содержащими кривизны в квадрате, из (9.5.51) и (9.5.52) будем иметь

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{(l)} &\approx \frac{1}{2h} \left[(1 + x^3 k_2) \mathbf{T}^1 l_1 + (1 + x^3 k_1) \mathbf{T}^2 l_2 \right] + \left(\frac{k_2}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) l_1 \mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \\ &\quad + \left(\frac{k_1}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) l_2 \mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \left\{ \left(\frac{1}{3} h k_2 + \frac{x^3}{h} \right) \left[-h k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) \right] l_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} h k_1 + \frac{x^3}{h} \right) \left[-h k_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) \right] l_2 \right\} \mathbf{n},\end{aligned}\tag{9.5.53}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^1 &\approx \frac{1}{2h} (1 + x^3 k_2) \mathbf{T}^1 + \left(\frac{k_2}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \mathbf{M}^1 \times \mathbf{n} + \left(\frac{1}{3} h k_2 + \frac{x^3}{h} \right) \left[-h k_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^1) \right] \mathbf{n}, \\ \hat{\mathbf{P}}^2 &\approx \frac{1}{2h} (1 + x^3 k_1) \mathbf{T}^2 + \left(\frac{k_1}{2h} + \frac{3x^3}{2h^3} \right) \mathbf{M}^2 \times \mathbf{n} + \left(\frac{1}{3} h k_1 + \frac{x^3}{h} \right) \left[-h k_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2) \right] \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Если в (9.5.53) пренебрегаем членами, которые в качестве множителя содержат кривизны (для оболочек класса TS $(1 - k_1 x^3 \approx 1, 1 - k_2 x^3 \approx 1)$), то получим

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{(l)} &\approx \frac{1}{2h} \mathbf{T}^I l_I + \frac{3x^3}{2h^3} l_I \mathbf{M}^I \times \mathbf{n} + \frac{x^3}{h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) l_I \mathbf{n} = \frac{1}{2h} \mathbf{T}_{(l)} + \frac{3x^3}{2h^3} \mathbf{M}_{(l)} \times \mathbf{n} + \frac{x^3}{h} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \\ \hat{\mathbf{P}}^I &\approx \frac{1}{2h} \mathbf{T}^I + \frac{3x^3}{2h^3} \mathbf{M}^I \times \mathbf{n} + \frac{x^3}{h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{9.5.54}$$

Легко усмотреть, что в случае оболочек класса TS можно предположить, что $a_J^I \approx 0$ и из (9.5.29) получим следующие уравнения:

$$2h \mathbf{P}^I = \mathbf{T}^I, \quad \frac{2}{3} h^2 \mathbf{P}^I = \frac{2}{3} h^2 \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) - \mathbf{n} \times \mathbf{M}^I.$$

Отсюда, очевидно, имеем

$$\mathbf{P}^I = \frac{1}{2h} \mathbf{T}^I, \quad \mathbf{P}^I = \frac{3}{2h^2} \mathbf{M}^I \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^I) \mathbf{n}.\tag{9.5.55}$$

Умножая каждое соотношение из (9.5.55) на l_I с последующим суммированием по I , получим

$$\mathbf{P}_{(l)} = \frac{1}{2h} \mathbf{T}_{(l)}, \quad \mathbf{P}_{(l)} = \frac{3}{2h^2} \mathbf{M}_{(l)} \times \mathbf{n} + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.\tag{9.5.56}$$

Умножая (9.5.14) скалярно на \mathbf{l} для теории приближения порядка $N = 1$, получим

$$\hat{\mathbf{P}}_{(l)} \approx \mathbf{P}_{(l)} + \frac{x^3}{h} \mathbf{P}_{(l)}.\tag{9.5.57}$$

Очевидно, (9.5.57) можно было написать и на основании соотношения (9.5.50). Учитывая (9.5.56), из (9.5.57) получим первое равенство (9.5.54).

Следует заметить, что в отличие от классического случая в первом соотношении (9.5.54) присутствует последнее слагаемое. Такое приближение близко к реальной картине, особенно для тонких упругих оболочек. Из первого соотношения (9.5.54) следует, что в классической моментной теории величиной $P_{ln}^{(1)} = \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}$ пренебрегают, считая ее нулем. Это означает, что поперечные касательные напряжения, т.е. перерезывающие силы, незначительно изменяются при изменении точки приложения силы в поперечном направлении. В теории приближения порядка $N = 1$ не делаем такого рода допущения и, следовательно, не пренебрегаем силами $P_{ln}^{(1)}$, выражающимися приближенно формулой

$$P_{ln}^{(1)} \approx h(\partial_3 \hat{P}_{(ln)})|_{x^3=0}. \quad (9.5.58)$$

Заметим, что для оболочек класса TS в силу второго соотношения (9.5.16) $A_J^I \approx g_J^I$ и из формул (9.5.17) получаем

$$\mathbf{T}_{(l)} = \int_{-h}^h l_I \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = \int_{-h}^h \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(l)} dx^3, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h l_I \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(l)} x^3 dx^3. \quad (9.5.59)$$

Учитывая (9.5.57), из (9.5.59) найдем

$$\mathbf{T}_{(l)} = \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(l)} dx^3 = 2h \hat{\mathbf{P}}_{(l)}^{(0)}, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{n} \times \int_{-h}^h \hat{\mathbf{P}}_{(l)} x^3 dx^3 = \frac{2h^2}{3} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{P}}_{(l)}^{(1)}. \quad (9.5.60)$$

Так как

$$\hat{\mathbf{P}}_{(l)}^{(k)} = P_{(ll)}^{(k)} \mathbf{l} + P_{(ls)}^{(k)} \mathbf{s} + P_{(ln)}^{(k)} \mathbf{n}, \quad k = 0, 1, \quad (9.5.61)$$

то из (9.5.60) получим

$$T_{(ll)} = 2h P_{(ll)}^{(0)}, \quad T_{(ls)} = 2h P_{(ls)}^{(0)}, \quad T_{(ln)} = 2h P_{(ln)}^{(0)}, \quad M_{(ll)} = -\frac{2h^2}{3} P_{(ll)}^{(1)}, \quad M_{(ls)} = -\frac{2h^2}{3} P_{(ls)}^{(1)}, \quad (9.5.62)$$

где

$$\begin{aligned} P_{(ls)}^{(0)} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \hat{P}_{(ln)}(x^1, x^2, x^3) P_k\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3, & P_{(ll)}^{(k)} &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \hat{P}_{(ll)}(x^1, x^2, x^3) P_k\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3, \\ P_{(ls)}^{(k)} &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \hat{P}_{(ls)}(x^1, x^2, x^3) P_k\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3, & k &= 0, 1. \end{aligned} \quad (9.5.63)$$

Таким образом, определение усилий и моментов сил напряжений равносильно определению трех моментов нулевого порядка (нормальной, касательной и поперечной составляющих вектора напряжения $\hat{\mathbf{P}}_{(l)}$) и двух моментов первого порядка (нормальной и касательной составляющих $\hat{\mathbf{P}}_{(l)}$). Момент первого порядка поперечной составляющей вектора напряжения $\hat{\mathbf{P}}_{(l)}$ не участвует в выражениях для $\mathbf{T}_{(l)}$ и $\mathbf{M}_{(l)}$.

Таким образом, в моментной теории оболочек должны определить в каждой фиксированной точке (x^1, x^2) серединой поверхности S и для всякого тангенциального касательного орта \mathbf{l} в этой точке пять величин: нормальное усилие $T_{(ll)}$, касательное усилие $T_{(ls)}$, поперечное касательное усилие (перерезывающую силу) $T_{(ln)}$, изгибающий момент $M_{(ls)}$ и крутящий момент $M_{(ll)}$, которые действуют на дугу ds , ортогональную орту \mathbf{l} . Определение усилий и моментов, очевидно, равносильно определению пяти моментов $P_{(ll)}^{(0)}$, $P_{(ls)}^{(0)}$, $P_{(ln)}^{(0)}$, $P_{(ls)}^{(1)}$ и $P_{(ll)}^{(1)}$ компонент тензора напряжений. В моментной теории оболочек определение момента первого порядка $P_{(ln)}^{(1)}$ поперечного касательного напряжения

не требуется. Теперь ясно, что вариант теории оболочек, соответствующий приближению порядка $N = 1$, несколько шире классической моментной теории. Кроме тех пяти величин, которые нужно определить в моментной теории на каждой поперечной площадке Σ_l , в теории приближения порядка $N = 1$ определяется вдобавок величина $P_{(ln)}^{(1)}$, выражающая изменение поперечного касательного напряжения в поперечном направлении. Следует заметить, что эта величина, вообще говоря, особенно для тонких оболочек, имеет незначительную величину и пренебрежение ею не может существенно исказить картину напряженно-деформированного состояния оболочки. Но тем не менее ее сохранение в системе уравнений иногда имеет смысл, так как ее наличие позволяет построить непротиворечивую теорию оболочек, основанную на линейном относительно скалярной координаты x^3 приближения. Эти построения отличаются от классической моментной теории оболочек пяти условий – нормального и касательного усилий, перерезывающей силы, изгибающего и крутящего моментов, которые по совокупности статически эквивалентны заданию системы сил напряжений, действующей на соответствующую граничную площадку, еще шестое условие – значение величины $P_{(ln)}^{(1)}$.

9.5.2 Расщепляющая пара сил

Как было сказано выше, рассмотрение силы $P_{(ln)}^{(1)}$ может, вообще говоря, не оказать существенного влияния на деформацию оболочки, но тем не менее ее сохранение в уравнениях, как увидим ниже, позволяет построить непротиворечивую теорию оболочек. Кроме того, в ряде случаев действием силы $P_{(ln)}^{(1)}$ нецелесообразно пренебрегать, ибо она может иногда оказать существенное влияние на деформацию оболочки [68].

Пусть $P_{(ln)}^{(1)} \neq 0$. Тогда, в случае линейного приближения относительно скалярной координаты x^3 , в точках (x^1, x^2, x^3) и $(x^1, x^2, -x^3)$ симметрично расположенных относительно базовой поверхности S , на поперечной площадке Σ_l будут приложены соответственно силы

$$\hat{P}_{(ln)}(x^1, x^2, x^3) = P_{(ln)}^{(0)} + \frac{x^3}{h} P_{(ln)}^{(1)}, \quad \hat{P}_{(ln)}(x^1, x^2, -x^3) = P_{(ln)}^{(0)} - \frac{x^3}{h} P_{(ln)}^{(1)}, \quad (9.5.64)$$

действующие в поперечном направлении. Если оболочка является жесткой в поперечном направлении, т.е. если ее волокна нерастяжимы, то действие всякой пары сил вида (9.5.64) эквивалентно перерезывающей силы $P_{(ln)}^{(0)}$. Если же поперечные волокна оболочки подвергаются растяжениям и сжатиям, то действие пары сил вида (9.5.64), очевидно, будет вызывать удлинение (укорачивание) поперечных волокон, вследствие чего действие этих сил может оказать влияние на деформацию оболочки в поперечном направлении. В некоторых случаях действие сил $(x^3/h)P_{(ln)}^{(1)}$ и $-(x^3/h)P_{(ln)}^{(1)}$, которые можно считать эквивалентным действием пары $(-Q_{(l)}, Q_{(l)})$, где $Q_{(l)}$ представляет равнодействующую сил $(x^3/h)P_{(ln)}^{(1)}$ в промежутке $(0, h)$, т.е.

$$Q_{(l)} = \int_0^h \frac{x^3}{h} P_{(ln)}^{(1)} dx^3 = \frac{1}{2} h P_{(ln)}^{(1)}, \quad (9.5.65)$$

может разорвать некоторые поперечные волокна и вследствие этого в оболочке могут образовываться трещины в продольном направлении. Таким образом, при $P_{(ln)}^{(1)} \neq 0$ на площадке Σ_l будет действовать пара касательных сил $(-Q_{(l)}, Q_{(l)})$, статически эквивалентных нулю, но ее действия иногда могут произвести расщепление оболочки в продольном направлении. В этой связи пару сил $(-Q_{(l)}, Q_{(l)})$ называется расщепляющей парой.

Ниже увидим, что расщепляющая пара сил, как и следовало ожидать, выражается через удлинение (укорочение) поперечных волокон оболочки.

В классической теории оболочек, согласно гипотезе Кирхгофа-Лява, поперечные волокна считаются нерастяжимыми, т.е. их удлинения равны нулю. Поэтому, очевидно, в классической теории этой парой сил пренебрегают. Интуитивно, очевидно, что действие расщепляющей пары сил может иметь значительное влияние лишь для толстых и средней толщины оболочек.

9.5.3 Выражение компонент усилий и моментов через компоненты моментов вектора перемещений

Нетрудно видеть, что из формул (9.5.60) имеем

$$T^I = 2h\mathbf{P}^I, \quad M^I = \frac{2h^2}{3}\mathbf{n} \times \mathbf{P}^I,$$

которые в развернутом виде представляются следующим образом:

$$T^{IJ} = 2hP^{IJ}, \quad T^I \equiv T^{I3} = 2hP^{I3}, \quad M^{IJ} = \frac{2h^2}{3}P^{IK}C_{K\cdot J}^{\cdot J}. \quad (9.5.66)$$

Видно, что для оболочек класса TS ($1 - k_1x^3 \approx 1$, $1 - k_2x^3 \approx 1$) компоненты T^{IJ} симметричны. Так как $\overset{(1)}{P}^{IJ} = \overset{(1)}{P}^{JI}$, то из последнего равенства (9.5.66) следует, что

$$M^I_{\cdot I} = M^1_{\cdot 1} + M^2_{\cdot 2} = 0. \quad (9.5.67)$$

Легко показать, что в случае изотропного материала при $h = const$ в силу закона Гука из формул (9.5.66) получим

$$\begin{aligned} T^{IJ} &= 2h[\lambda(\nabla_K \overset{(0)}{u}^K - 2H\overset{(0)}{u}_3 + \frac{1}{h}\overset{(1)}{u}_3)g^{IJ} + \mu(\nabla^I \overset{(0)}{u}^J + \nabla^J \overset{(0)}{u}^I - 2b^{IJ}\overset{(0)}{u}_3)], \\ T^I &= 2h\mu(\nabla^I \overset{(0)}{u}_3 + b^I_J \overset{(0)}{u}^J + \frac{1}{h}\overset{(1)}{u}^I), \\ M^{IJ} &= \frac{2h^2}{3}[\lambda(\nabla_K \overset{(1)}{u}^K - 2H\overset{(1)}{u}_3)C^{IJ} + \mu C_{K\cdot J}^{\cdot J} \nabla^K \overset{(1)}{u}^I + \mu C_{K\cdot J}^{\cdot J} \nabla^I \overset{(1)}{u}^K - 2\mu C_{K\cdot J}^{\cdot J} b^{IK}\overset{(1)}{u}_3]. \end{aligned} \quad (9.5.68)$$

Легко видеть, что в силу формулы (9.5.65)

$$Q_{(l)} = Q^I l_I = \frac{1}{2}hP^{I3}l_I.$$

Отсюда, очевидно, для расщепляющих сил имеем выражение

$$Q^I = \frac{1}{2}hP^{I3} = h\mu(\nabla^I \overset{(1)}{u}_3 + b^I_J \overset{(0)}{u}^J) \quad (9.5.69)$$

Из формул видно, что компоненты усилий и моментов выражаются через шесть функций $\overset{(0)}{u}_1$, $\overset{(0)}{u}_2$, $\overset{(0)}{u}_3$, $\overset{(1)}{u}_1$, $\overset{(1)}{u}_2$ и $\overset{(1)}{u}_3$.

Следует отметить, что уравнения классической теории оболочек для усилий и моментов не позволяют однозначно определить эти шесть искомых функций с помощью физических краевых условий, т.е. посредством задания граничных условий для нормального и касательного усилий, перерезывающей силы, изгибающего и крутящего моментов. Поэтому необходимо рассмотрение также граничных значений расщепляющей силы $Q_{(l)}$.

Если будем пренебрегать рассмотрением расщепляющих сил и пожелаем определить только поле усилий и моментов, то система из пяти уравнений классической моментной

теории оболочек (которые будут выписаны ниже) будет недостаточна для определения шести функций, которые входят в выражения (9.5.68). Поэтому необходимо из этих выражений исключить одну из этих искомым функций, но так, чтобы полученная система была корректна относительно заданных граничных значений пяти физических краевых условий моментной теории (Нормальных и касательных усилий, перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов).

9.5.4 Гипотеза о жесткости тонкого тела с одним малым размером в поперечном направлении (деформирование без обжатия)

Следуя классической традиции, предположим, что поперечные перемещения тонкого тела не зависят от скалярной координаты x^3 . Это означает, что поперечные волокна не подвергаются удлинению (укорачиваниям). Так как в общем случае компоненты перемещений имеют представления

$$\hat{u}_i(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_i^{(k)}(x^1, x^2) P_k(\omega), \quad \omega = x^3/h, \quad (9.5.70)$$

то удлинение (укорачивание) поперечного волокна в силу (9.5.70) выражается формулой

$$\begin{aligned} v(x^1, x^2, x^3) &= \lim_{\Delta x^3} \frac{\Delta \hat{u}_3}{\Delta x^3} = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x^3} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_3^{(k)}(x^1, x^2) P_k'(\omega) = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \hat{u}_3^{(k+2p+1)}(x^1, x^2)] P_k(\omega). \end{aligned}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае надо принять допущение

$$v(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{h} [(2k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \hat{u}_3^{(k+2p+1)}(x^1, x^2)] P_k(\omega) = 0.$$

Отсюда, учитывая ортогональность системы полиномов Лежандра, получим

$$((2k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \hat{u}_3^{(k+2p+1)}(x^1, x^2) = 0, \quad k = \overline{0, \infty}) \Leftrightarrow (\hat{u}_3 = 0, \quad k = \overline{1, \infty}). \quad (9.5.71)$$

Таким образом, в силу (9.5.71) при жесткости тонкого тела в поперечном направлении имеем

$$\hat{u}_I = \hat{u}_I(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_I^{(k)}(x^1, x^2) P_k(\omega), \quad \omega = x^3/h, \quad \hat{u}_3 = {}^{(0)}\hat{u}_3(x^1, x^2). \quad (9.5.72)$$

Следует заметить, что (9.5.72) выражает кинематическую гипотезу классической теории тонких тел с одним малым размером. Из нее следуют кинематические гипотезы теории оболочек. Например, гипотеза о жесткости тонкого тела в поперечном направлении в линейном приближении на основании (9.5.72) можно сформулировать в виде

$$\hat{u}_I = {}^{(0)}\hat{u}_I(x^1, x^2) + \frac{x^3}{h} {}^{(1)}\hat{u}_I(x^1, x^2), \quad \hat{u}_3 = {}^{(0)}\hat{u}_3(x^1, x^2). \quad (9.5.73)$$

Заметим, что в микрополярной теории оболочек принимаются различные кинематические гипотезы. Например, в [18] принята независимость третьих компонент векторов перемещений и вращений от x^3 , в [458, 460] сделано допущение о независимости третьей компоненты вектора перемещений и вектора вращений от x^3 , а в работах С.О. Саркисяна сформулированы различные кинематические гипотезы о линейном распределении относительно поперечной координаты векторов перемещений и вращений (см. [371–375, др.]).

См. также работы [21, 134, 138, 139, 142, 144, 158, 166, 429–431, 434, 454–456, 479, 480, 483, 498, 512, 528]

Естественно, в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером помимо гипотезы (9.5.72) относительно вектора вращений φ можно принять допущение

$$\hat{\varphi}_I = \hat{\varphi}_I(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{I} \varphi_I(x^1, x^2) P_k(\omega), \quad \omega = x^3/h, \quad \hat{\varphi}_3 = \binom{0}{3} \varphi_3(x^1, x^2). \quad (9.5.74)$$

Хотя, по мнению автора в теориях тонких тел более приемлемым является допущение (9.5.72) и различные его приближения, а, что касается вектора вращений, конечно, относительно него можно высказать различные гипотезы в зависимости от рассматриваемой конкретной задачи. Вообще говоря, гипотезы надо сформулировать таким образом, чтобы они соответствовали реальной картине деформирования тела и что число неизвестных функций не превосходило числа уравнений. Видно, что сформулированные кинематические гипотезы (9.5.72) и (9.5.74) для теории тонких тел с одним малым размером более общие, чем гипотезы приведенные в указанной выше литературе.

Конечно, используя допущения (9.5.72) и (9.5.74), в теориях тонких тел получим более простые уравнения по сравнению с уравнениями, которые получаются без этих допущений.

Итак, при линейном относительно x^3 приближении в случае жесткости оболочки в поперечном направлении выполняется условие $\overset{(1)}{u}_3 = 0$ (см. (9.5.73)). Тогда в силу этого допущения формулы (9.5.68) примут вид

$$\begin{aligned} T^{IJ} &= 2h[\lambda(\nabla_K \overset{(0)}{u}^K - 2H \overset{(0)}{u}_3)g^{IJ} + \mu(\nabla^I \overset{(0)}{u}^J + \nabla^J \overset{(0)}{u}^I - 2b^{IJ} \overset{(0)}{u}_3)], \\ T^I &= 2h\mu(\nabla^I \overset{(0)}{u}_3 + b_J^I \overset{(0)}{u}^J + \frac{1}{h} \overset{(1)}{u}^I), \\ M^{IJ} &= \frac{2h^2}{3}(\lambda \nabla_K \overset{(1)}{u}^K C^{IJ} + \mu C_K^{\cdot J} \nabla^K \overset{(1)}{u}^I + \mu C_K^{\cdot J} \nabla^I \overset{(1)}{u}^K). \end{aligned} \quad (9.5.75)$$

В этих выражениях фигурируют пять искомых функций: три компоненты $\overset{(0)}{u}_1, \overset{(0)}{u}_2, \overset{(0)}{u}_3$ момента нулевого порядка $\overset{(0)}{\mathbf{u}}$ и две касательных компоненты $\overset{(1)}{u}_1$ и $\overset{(1)}{u}_2$ момента первого порядка $\overset{(1)}{\mathbf{u}}$ вектора перемещения \mathbf{u} . Третья компонента момента $\overset{(1)}{\mathbf{u}}$, выражающая удлинение v поперечного волокна, в силу принятой гипотезы равна нулю. Следует заметить, что допущение (9.5.73) является частью гипотезы Кирхгофа-Лява в теории оболочек. Второе допущение Кирхгофа-Лява, утверждающее, что поперечные волокна, не испытывая удлинение, остаются ортогональными деформированной поверхности, не используется.

9.5.5 Система уравнений классической моментной теории оболочек в усилиях и моментах

Эта система уравнений легко выводится из трехмерных уравнений $(1/\sqrt{\hat{g}})\partial_n(\sqrt{\hat{g}}\hat{\mathbf{P}}^{\hat{n}}) + \hat{\Phi} = 0$ (см. также первые шесть уравнения (9.2.14) при $T_*^{I3} = T_*^{3I}$) и имеет вид [68]

$$\begin{aligned} \nabla_J T^{JI} - b_J^I T^J + X^I &= 0, \quad \nabla_I T^I + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 = 0, \\ \nabla_J M^{JI} - C_J^{\cdot I} T^J + Y^I &= 0, \quad b_{IJ} M^{IJ} + C_{IJ} T^{IJ} = 0, \end{aligned} \quad (9.5.76)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= \int_h^h \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} dx^3 \approx \int_h^h \hat{\mathbf{P}}^I dx^3 = 2h \overset{(0)}{\mathbf{P}}^I, \quad \mathbf{X} = \overset{(+)}{\mathbf{P}}^3 \overset{(+)}{\vartheta} - \overset{(-)}{\mathbf{P}}^3 \overset{(-)}{\vartheta} + \int_h^h \hat{\vartheta} \hat{\Phi} dx^3 \approx -\overset{(+)}{\mathbf{P}} - \overset{(-)}{\mathbf{P}} + \int_h^h \hat{\Phi} dx^3, \\ \mathbf{M}^I &= \int_h^h \hat{\vartheta} \hat{P}^{\hat{I}J} x^3 \mathbf{n} \times \mathbf{r}_J dx^3 \approx \int_h^h \hat{P}^{IJ} x^3 \mathbf{n} \times \mathbf{r}_J dx^3 = \frac{2h^2}{3} \overset{(1)}{\mathbf{P}}^{IJ} C_{J \cdot K} \mathbf{r}_K, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = h\mathbf{n} \times (\mathbf{P}^3 \vartheta^{(+)(+)} - \mathbf{P}^3 \vartheta^{(-)(-)}) + \int_h^h \hat{\vartheta} \mathbf{n} \times \hat{\Phi} x^3 dx^3 \approx -h\mathbf{n} \times (\mathbf{P}^{(+)} + \mathbf{P}^{(-)}) + \int_h^h \mathbf{n} \times \hat{\Phi} x^3 dx^3, \quad (9.5.77)$$

$$\mathbf{T}^I = T^{IJ} \mathbf{r}_J + T^I \mathbf{n} \quad (T^I \equiv T^{I3}), \quad \mathbf{M}^I = M^{IJ} \mathbf{r}_J, \quad T^{IJ} = \int_h^h \hat{\vartheta} \hat{P}^{IJ} dx^3 \approx \int_h^h \hat{P}^{IJ} dx^3 = 2h \hat{P}^{IJ},$$

$$T^I = \int_h^h \hat{\vartheta} \hat{P}^{I3} dx^3 \approx \int_h^h \hat{P}^{I3} dx^3 = 2h \hat{P}^{I3}, \quad M^{IJ} = \frac{2h^2}{3} \hat{P}^{IK} C_{KJ}^{(1)}.$$

Нетрудно заметить, что из последней формулы (9.5.77) имеем

$$\hat{P}^{IJ} = \frac{3}{2h^2} M^{IK} C_{KJ}^{(1)}, \quad M_{I\cdot}^I = 0.$$

Легко доказать также, что последнее уравнение в (9.5.76) является тождеством. Итак, в классической теории оболочек имеем пять уравнений, с помощью которых можно определить не более пяти неизвестных функций и пять граничных условий, которые получаются на основании формул (9.5.12) и (9.5.13) и имеют вид

$$\mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{(l)} = T_{(ul)} \mathbf{l} + T_{(ls)} \mathbf{s} + T_{(ln)} \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{(l)} = M_{(ul)} \mathbf{l} + M_{(ls)} \mathbf{s} = \mathbf{g},$$

где \mathbf{f} и \mathbf{g} определяются с помощью заданных функций.

9.5.6 Система уравнений классической моментной теории оболочек относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений

Учитывая (9.5.75), из первых пяти уравнений (9.5.76) получим систему уравнений непосредственно относительно искомых пяти функций $\hat{u}_i^{(0)}$ и $\hat{u}_I^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned} \mu \nabla_I \nabla^I \hat{u}^{(0)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I \hat{u}^{(0)I} + \mu (K g_I^J - b_K^J b_I^K) \hat{u}^{(0)I} - (2\lambda H g^{IJ} + 3\mu b^{IJ}) \nabla_I \hat{u}_3^{(0)} - \\ - 2[\nabla_I (\lambda H g^{IJ} + \mu b^{IJ})] \hat{u}_3^{(0)} - \frac{1}{h} \mu b_I^J \hat{u}^{(1)I} + \hat{\Phi}^J = 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I \hat{u}_3^{(0)} - 2(\lambda H^2 + \mu b_{IJ} b^{IJ}) \hat{u}_3^{(0)} + (2\lambda H g_{IJ} + 3\mu b_{IJ}) \nabla^I \hat{u}^{(0)J} + 2\mu \nabla_I H \hat{u}^{(0)I} + \frac{1}{h} \mu \nabla_I \hat{u}^{(1)I} + \hat{\Phi}_3^{(0)} = 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I \hat{u}^{(1)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I \hat{u}^{(1)I} - \frac{3}{h} \mu b_I^J \hat{u}^{(0)I} - \frac{3}{h} \mu \nabla^J \hat{u}_3^{(0)} - \frac{3}{h^2} \mu \hat{u}^{(1)J} + \hat{\Phi}^J = 0, \end{aligned} \quad (9.5.78)$$

где для объемной нагрузки имеем следующее выражение:

$$\hat{\Phi}^{(k)} = \hat{\Phi} + \frac{2k+1}{2h} [(\mathbf{P}^3 \hat{\vartheta}^{(+)(+)} - \mathbf{P}^I \partial_I \hat{h}^{(+)} + (-1)^{k+1} (\mathbf{P}^3 \hat{\vartheta}^{(-)(-)} - \mathbf{P}^I \partial_I \hat{h}^{(-)})], \quad \hat{\mathbf{P}}^{m(\pm)} = \hat{\mathbf{P}}^m \Big|_{x^3 = \pm \frac{h}{2}}. \quad (9.5.79)$$

При выводе последнего уравнения (9.5.78) было принято приближенное равенство

$$K \mu \hat{u}^{(1)J} - \frac{3}{h^2} \mu \hat{u}^{(1)J} = -\frac{3}{h^2} \mu (1 - \frac{Kh^2}{3}) \hat{u}^{(1)J} \approx -\frac{3}{h^2} \mu \hat{u}^{(1)J}. \quad (9.5.80)$$

Таким образом, система уравнений классической моментной теории оболочек класса TS представляет эллиптическую систему 10-го порядка относительно пяти искомых функций $\hat{u}_1^{(0)}$, $\hat{u}_2^{(0)}$, $\hat{u}_3^{(0)}$, $\hat{u}_1^{(1)}$ и $\hat{u}_2^{(1)}$. Если к этой системе присоединить пять краевых условий в зависимости от типа краевой задачи, получим корректно поставленную соответствующую краевую задачу.

9.5.7 Система уравнений классической моментной теории пластин относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений

В этом случае $b_{IJ} = 0$ и из (9.5.78) будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mu \nabla_I \nabla^I u^{(0)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I u^{(0)I} + \underline{\Phi}^J &= 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I u_3^{(0)} + \frac{1}{h} \mu \nabla_I u^{(1)I} + \underline{\Phi}_3 &= 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I u^{(1)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I u^{(1)I} - \frac{3}{h} \mu \left(\nabla^J u_3^{(0)} + \frac{1}{h} u^{(1)J} \right) + \underline{\Phi}^J &= 0. \end{aligned} \quad (9.5.81)$$

Первые два уравнения (9.5.81) представляют систему уравнений плоской задачи. Эта система не зависит от других уравнений (9.5.81) и поэтому можно исследовать независимо от них. Последние три уравнения системы (9.5.81) зацеплены, так как в каждое уравнение входят три искомые функции $u_3^{(0)}$, $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$. Однако легко исключить из этих уравнений функции $u^{(1)I}$ и получить уравнение для $u_3^{(0)}$. В самом деле, применяя к обеим частям последнего соотношения (9.5.81) оператор ∇_J , а затем подставляя в полученное соотношение выражение для $\nabla_I u^{(0)I}$, определенного из третьего уравнения, получим уравнение для $u_3^{(0)}$ в виде

$$\Delta \Delta u_3^{(0)} - \frac{3}{(\lambda + 2\mu)h^2} \underline{\Phi}_3 + \frac{1}{\mu} \Delta \underline{\Phi}_3 - \frac{1}{(\lambda + 2\mu)h} \nabla_I \underline{\Phi}^I = 0. \quad (9.5.82)$$

Допустим, что оболочка свободна от объемных сил, к внешней лицевой поверхности приложены постоянные нормальные напряжения $\mathbf{P} = \mathbf{P}^3 = -p\mathbf{n}$, где $p = const$, а внутренняя поверхность свободна от напряжений: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^3 = 0$. Тогда в силу (9.5.79) имеем

$$\underline{\Phi} = \frac{1}{2h} p\mathbf{n}, \quad \underline{\Phi} = \frac{3}{2h} p\mathbf{n} \quad (9.5.83)$$

и система уравнений (9.5.81) и (9.5.82) примут вид

$$\begin{aligned} \mu \nabla_I \nabla^I u^{(0)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I u^{(0)I} &= 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I u_3^{(0)} + \frac{1}{h} \mu \nabla_I u^{(1)I} + \frac{1}{2h} p &= 0, \\ \mu \nabla_I \nabla^I u^{(1)J} + (\lambda + \mu) \nabla^J \nabla_I u^{(1)I} - \frac{3}{h} \mu \left(\nabla^J u_3^{(0)} + \frac{1}{h} u^{(1)J} \right) &= 0, \\ \Delta \Delta u_3^{(0)} - \frac{3}{2(\lambda + 2\mu)h^2} p &= 0. \end{aligned} \quad (9.5.84)$$

Систему уравнений (9.5.84) можно интегрировать в явном виде [61], однако на этом останавливаться не будем.

9.5.8 Уравнения мембранной (безмоментной) теории оболочек

Предположим, что в оболочке обращаются в нуль моменты сил напряжений, действующих на поперечные площадки. Тогда $M^{IJ} = 0$ и из системы уравнений (9.5.76) следует, что $T^I = 0$ и $T^{IJ} = T^{JI}$, т.е. матрица T^{IJ} симметрична, а перерезывающие силы равны нулю. В этом случае из системы уравнений (9.5.76) получаем

$$\nabla_J T^{JI} + X^I = 0, \quad b_{IJ} T^{IJ} + X^3 = 0. \quad (9.5.85)$$

Таким образом, задача определения безмоментного напряженного состояния оболочки сводится к отысканию трех функций T^{11} , $T^{12} = T^{21}$ и T^{22} , которые удовлетворяют системе уравнений (9.5.85).

9.6 Задача классической теории упругости в перемещениях

Уравнения движения в перемещениях классической теории упругости в случае линейного однородного изотропного материала можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad (9.6.1)$$

где введено в рассмотрение следующий дифференциальный тензор-оператор:

$$\underline{\mathbf{L}} = \mu \underline{\mathbf{E}} \square_2 + (\lambda + \mu) \nabla \nabla, \quad \square_2 = \Delta - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2. \quad (9.6.2)$$

Обозначим дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений дифференциального тензора-оператора $\underline{\mathbf{L}}$ через $\underline{\mathbf{L}}_*$. Тогда после элементарных вычислений для $\underline{\mathbf{L}}_*$ получим выражение

$$\underline{\mathbf{L}}_* = \mu \square_2 [(\lambda + 2\mu) \underline{\mathbf{E}} \square_1 - (\lambda + \mu) \nabla \nabla], \quad \square_1 = \Delta - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \partial_t^2. \quad (9.6.3)$$

Имея выражения для $\underline{\mathbf{L}}$ и $\underline{\mathbf{L}}_*$, нетрудно доказать, что имеет место соотношение

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{L}}_* = \underline{\mathbf{L}}_* \cdot \underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{E}} \det \underline{\mathbf{L}}, \quad (9.6.4)$$

где определитель $\det \underline{\mathbf{L}}$ дифференциального тензора-оператора $\underline{\mathbf{L}}$ имеет выражение

$$L \equiv |\underline{\mathbf{L}}| \equiv \det \underline{\mathbf{L}} = \mu^2 (\lambda + 2\mu) \square_1 \square_2^2. \quad (9.6.5)$$

Введем в рассмотрение дифференциальный тензор-оператор

$$\underline{\mathbf{N}} = (\lambda + 2\mu) \underline{\mathbf{E}} \square_1 - (\lambda + \mu) \nabla \nabla. \quad (9.6.6)$$

Тогда, очевидно, оператор $\underline{\mathbf{L}}_*$ можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{L}}_* = \mu \underline{\mathbf{N}} \square_2. \quad (9.6.7)$$

В силу (9.6.2) и (9.6.6) нетрудно доказать, что

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{L}} = \mu (\lambda + 2\mu) \underline{\mathbf{E}} \square_1 \square_2. \quad (9.6.8)$$

Применяя оператор $\underline{\mathbf{L}}_*$ (см. (9.6.3) и (9.6.7)) со следующим однократным умножением к (9.6.1) и учитывая (9.6.4) и (9.6.5), получим

$$\square_2 (\square_1 \square_2 \mathbf{u} + \mathbf{G}) = 0, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{\mu (\lambda + 2\mu)} \underline{\mathbf{N}} (\rho \mathbf{F}) = \frac{\rho}{\mu} (\underline{\mathbf{E}} \square_1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \nabla) \cdot \mathbf{F}. \quad (9.6.9)$$

Вектор \mathbf{u} теперь будем искать в виде (представление Галеркина, Яковаке)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} = [(\lambda + 2\mu) \underline{\mathbf{E}} \square_1 - (\lambda + \mu) \nabla \nabla] \cdot \mathbf{v}, \quad (9.6.10)$$

где \mathbf{v} — произвольное векторное поле. Тогда подставляя (9.6.10) в (9.6.1) и учитывая (9.6.8), будем иметь

$$\square_1 \square_2 \mathbf{v} + \frac{\rho}{\mu (\lambda + 2\mu)} \mathbf{F} = 0. \quad (9.6.11)$$

Очевидно, если вектор \mathbf{u} искали бы в виде $\mathbf{u} = \rho / [\mu (\lambda + 2\mu)] \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{w}$, где \mathbf{w} — произвольное векторное поле, то вместо (9.6.11) получили уравнение

$$\square_1 \square_2 \mathbf{w} + \mathbf{F} = 0. \quad (9.6.12)$$

Наконец, применяя \mathbf{N} (см. (9.6.6)) со следующим однократным умножением к (9.6.1) и учитывая (9.6.8), будем иметь

$$\square_1 \square_2 \mathbf{u} + \mathbf{G} = 0. \quad (9.6.13)$$

Таким образом, в виде (9.6.11), (9.6.12) и (9.6.13) получили расщепленные системы уравнений теории упругости линейно-упругого однородного материала в перемещениях. Очевидно, каждое уравнение каждой из этих систем имеет четвертый порядок, а каждая из этих систем имеет XII порядок (Различные представления общего решения уравнений Ляме можно смотреть, например, в [228, 307, 336]).

Видно, что уравнение (9.6.13) по сравнению с уравнениями (9.6.11) и (9.6.12) имеет то преимущество, что граничные условия для уравнения (9.6.13) — граничные условия исходной задачи, в то время как граничные условия для уравнений (9.6.11) и (9.6.12) усложняются в связи с введением дополнительных векторных полей \mathbf{v} и \mathbf{w} .

9.6.1 О граничных условиях в линейной теории упругости. Тензор-оператор напряжения

Граничные условия для линейно-упругого неоднородного анизотропного материала при изотермических процессах можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad \underline{\mathbf{T}} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i C^{ijkl} \nabla_k, \quad (9.6.14)$$

где \mathbf{P} — заданная на границе вектор-функция, а $\underline{\mathbf{T}}$ — тензор-оператор напряжения. В случае изотропного тела с кусочно-гладкой плоской границей после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \lambda \mathbf{n} \nabla + \mu [\underline{\mathbf{E}} \mathbf{n} \cdot \nabla + (\mathbf{n} \nabla)^T], \\ \underline{\mathbf{T}}_* &= \mu \{ -(\lambda + \mu) \mathbf{n} \nabla + 2[(\lambda + \mu) \underline{\mathbf{E}} \mathbf{n} \cdot \nabla - \lambda (\mathbf{n} \nabla)^T] \} \mathbf{n} \cdot \nabla + \lambda \mu [(\mathbf{n} \mathbf{n} - \underline{\mathbf{E}}) \Delta + \nabla \nabla], \\ \det \underline{\mathbf{T}} &= |\underline{\mathbf{T}}| = \mu^2 [2(\lambda + \mu) \mathbf{n} \mathbf{n} \otimes \nabla \nabla - \lambda \Delta] \mathbf{n} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

Здесь $\underline{\mathbf{T}}_*$ — тензор-оператор алгебраических дополнений для $\underline{\mathbf{T}}$, а $\det \underline{\mathbf{T}} = |\underline{\mathbf{T}}|$ — определитель тензора-оператора $\underline{\mathbf{T}}$.

Применяя к (9.6.14) слева тензор-оператор $\underline{\mathbf{T}}_*^T$ (см. соответствующую формулу (9.6.15)) со следующим однократным умножением, в силу равенства $\underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}_*^T = |\underline{\mathbf{T}}| \underline{\mathbf{E}}$ получим

$$|\underline{\mathbf{T}}| \mathbf{u} = \underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot \mathbf{P}. \quad (9.6.16)$$

Таким образом, в виде (9.6.16) получили расщепленные граничные условия физического содержания. Из сказанного выше видно, что как уравнения в перемещениях, так и граничные условия физического содержания теории упругости линейно-упругого однородного тела с кусочно-гладкой плоской границей расщепляются (ниже, когда речь пойдет о расщеплении граничных условий, всегда будем подразумевать, что рассматриваемое тело имеет кусочно-гладкую плоскую границу).

Следует заметить, что, в случае плоской деформации выведенные выше расщепленные уравнения и граничные условия будут сохранять свой вид при условии, что набла-оператор и лапласиан надо считать двумерными. Заметим также, что, учитывая представления набла-оператора и лапласиана при различных параметризациях областей тонких тел, не представляет труда из приведенных выше расщепленных уравнений и граничных условий получить соответствующие расщепленные уравнения и граничные условия для тонких тел. С целью сокращения письма на получении этих соотношений останавливаться не будем. При необходимости в силу сказанного выше их выписать не представляет труда. Ниже выпишем уравнение лишь для призматических тел постоянной толщины.

9.6.2 Статическая (квазистатическая) задача классической теории упругости в перемещениях

В случае статики или квазистатики на основании (9.6.13) и (9.6.16) будем иметь следующие уравнения и граничные условия:

$$\Delta^2 \mathbf{u} + \mathbf{G} = 0, \quad |\underline{\mathbb{T}}| \mathbf{u} = \underline{\mathbb{T}}_*^T \cdot \mathbf{P}. \quad (9.6.17)$$

9.6.3 Статическая (квазистатическая) задача теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и моментах вектора перемещений

Рассмотрим призматическое тело постоянной толщины $2h$. В качестве базовой плоскости возьмем срединную плоскость. Тогда в этом случае $g_M^P = \delta_M^P$, $g_P^3 = 0$, $g^{33} = h^{-2}$ и набла-оператор (4.1.37) и лапласиан (4.1.42) представятся в виде

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \mathbb{F} &= (\mathbf{r}^P \partial_P + \mathbf{r}^3 \partial_3) \mathbb{F} = (\mathbf{r}^P \partial_P + h^{-1} \mathbf{n} \partial_3) \mathbb{F}, \quad -1 \leq x^3 \leq 1 \\ \Delta \mathbb{F} &= \nabla^2 \mathbb{F} = (g^{PQ} \partial_P \partial_Q + g^{33} \partial_3^2) \mathbb{F} = (\bar{\Delta} + h^{-2} \partial_3^2) \mathbb{F}, \quad \bar{\Delta} = g^{PQ} \partial_P \partial_Q. \end{aligned} \quad (9.6.18)$$

Учитывая представление лапласиана (см. (9.6.18)) уравнение для призматических тел (см. (9.6.17)) можно представить в виде

$$(\bar{\Delta}^2 + 2h^{-2} \bar{\Delta} \partial_3^2 + h^{-4} \partial_3^4) \mathbf{u} + \mathbf{G} = 0. \quad (9.6.19)$$

Применяя теперь к уравнению (9.6.19) оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), получим следующие уравнения в моментах вектора перемещений

$$\bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(k)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(k)''} + h^{-4} \mathbf{u}^{(k)IV} + \mathbf{G} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (9.6.20)$$

Следует заметить, что граничные условия физического содержания для системы уравнений (9.6.20) получаются из второго соотношения (9.6.17) после применения к нему оператор моментов k -го порядка соответствующей системы полиномов. В общем случае на граничных условиях останавливаться не будем. Однако, ниже рассмотрим несколько частных случаев. Заметим также, что выведенные выше расщепленные уравнения в случае статической (квазистатической) задачи при отсутствии объемных сил не зависят от свойств материала.

Рассмотрим теперь более внимательно систему уравнений в моментах (9.6.20). Из этой системы, меняя $k = \overline{1, N}$ и пренебрегая моментами, порядок которых больше N , получим систему уравнений приближения порядка N . Придавая N различные значения (начиная с нуля) получим системы уравнений различного приближения для призматических тел постоянной толщины. Из каждой полученной приближенной системы в свою очередь можно получить для входящих в нее моментов вектора перемещений по отдельности уравнения эллиптического типа (высокого порядка). Используя новые методы решения эллиптических уравнений (метод Векуа) [61], для каждого уравнения можно выписать аналитическое решение. Выпишем ниже нескольких первых приближений системы уравнений (9.6.20) при применении полиномов Лежандра и Чебышева второго рода.

9.6.4 Системы уравнений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра

Для получения искомым систем уравнений надо найти аналогичные (2.2.23), (2.2.28) и (2.2.29) соотношения для $\mathbf{u}^{(k)''}$ и $\mathbf{u}^{(k)IV}$ (см. также (2.7.21) и (2.7.33)) при $-1 \leq x^3 \leq 1$.

Учитывая $x^3 = 2t - 1$, $0 \leq t \leq 1$, из (2.2.23), (2.2.28) и (2.2.29) с помощью простых выкладок получим искомые выражения для $\underline{\mathbf{u}}''$ в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}'' &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_3^2 \mathbf{u}(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1) \sum_{p=1}^{\infty} p(2k+2p+1) \underline{\mathbf{u}}^{(k+2p)} = \\ &= \frac{2k+1}{4} \sum_{p=k}^{\infty} (p-k+2)(p+k+3)[1+(-1)^{k+p}] \underline{\mathbf{u}}^{(p+2)} = \\ &= \frac{2k+1}{2} \{[(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-] P_k(1) - [\underline{\mathbf{u}}^{(+)} + (-1)^k \underline{\mathbf{u}}^{(-)}] P_k'(1)\} + \underline{\mathbf{u}}'', \end{aligned} \quad (9.6.21)$$

где $(\partial_3 \mathbf{u})^+ = (\partial_3 \mathbf{u})|_{x^3=1}$, $(\partial_3 \mathbf{u})^- = (\partial_3 \mathbf{u})|_{x^3=-1}$, а

$$\underline{\mathbf{u}}'' = (2k+1)[(2k-1) \underline{\mathbf{u}}^{(k-2)} + 2(2k-3) \underline{\mathbf{u}}^{(k-4)} + 3(2k-5) \underline{\mathbf{u}}^{(k-6)} + 4(2k-7) \underline{\mathbf{u}}^{(k-8)} + \dots]. \quad (9.6.22)$$

Аналогично (9.6.21) и (9.6.22) для $\underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}$ и $\underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(k)IV} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_3^4 \mathbf{u}(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1)[(2k+7)(2k+5)(2k+3) \underline{\mathbf{u}}^{(k+4)} + \\ &+ 4(2k+9)(2k+7)(2k+5) \underline{\mathbf{u}}^{(k+6)} + 10(2k+11)(2k+9)(2k+7) \underline{\mathbf{u}}^{(k+8)} + \\ &+ 20(2k+13)(2k+11)(2k+9) \underline{\mathbf{u}}^{(k+10)} + 35(2k+15)(2k+13)(2k+11) \underline{\mathbf{u}}^{(k+12)} + \dots] = \\ &= (2k+1) \sum_{s=1}^{\infty} C_{s+2}^3 (2k+2s+1)(2k+2s+3)(2k+2s+5) \underline{\mathbf{u}}^{(k+2s+2)} = \\ &= \frac{2k+1}{2} \sum_{s=k}^{\infty} b_{[\frac{s-k+2}{2}]} (k+s+3)(k+s+5)(k+s+7)[1+(-1)^{k+s}] \underline{\mathbf{u}}^{(s+4)}, \\ &= \frac{2k+1}{2} \{[(\partial_3^3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3^3 \mathbf{u})^-] P_k(1) - [(\partial_3^2 \mathbf{u})^+ - (-1)^{k-1} (\partial_3^2 \mathbf{u})^-] P_k'(1) + \\ &+ [(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^{k-2} (\partial_3 \mathbf{u})^-] P_k''(1) - [\underline{\mathbf{u}}^{(+)} + (-1)^k \underline{\mathbf{u}}^{(-)}] P_k'''(1)\} + \underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}, \end{aligned} \quad (9.6.23)$$

где $b_n = C_{n+2}^3$, индекс $[(s-k+2)/2]$ означает целую часть числа $(s-k+2)/2$ (хотя, в этой формуле индекс получается всегда целым, так как при тех значениях s когда индекс нецелое число, соответствующее слагаемое обнуляется. Значит, квадратные скобки можно было опускать. Несмотря на это мы их сохранили, так как в других случаях этот индекс должен иметь указанный в формуле вид), а $\underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(k)IV} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(x', x^3) P_k^{IV}(x^3) dx^3 = (2k+1)[(2k-1)(2k-3)(2k-5) \underline{\mathbf{u}}^{(k-4)} + \\ &+ 4(2k-3)(2k-5)(2k-7) \underline{\mathbf{u}}^{(k-6)} + 10(2k-5)(2k-7)(2k-9) \underline{\mathbf{u}}^{(k-8)} + \\ &+ 20(2k-7)(2k-9)(2k-11) \underline{\mathbf{u}}^{(k-10)} + 35(2k-9)(2k-11)(2k-13) \underline{\mathbf{u}}^{(k-12)} + \dots]. \end{aligned} \quad (9.6.24)$$

Из (9.6.21) и (9.6.23) видно, что $\underline{\mathbf{u}}''$ и $\underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}$ представляются в виде бесконечной суммы моментов вектора перемещений или конечной суммы моментов вектора перемещений и суммы значений вектора перемещений и их частных производных по координате x^3 на лицевых поверхностях, т.е. при $x^3 = -1$ и $x^3 = 1$. Поэтому, учитывая (9.6.21) и (9.6.23), из (9.6.20) получим различные представления системы уравнений призматических тонких тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра. В частности, система уравнений (9.6.20) представляются с помощью кинематических граничных условий на лицевых поверхностях. Следовательно, система уравнений (9.6.20) можно представить и с учетом статических граничных условий на лицевых поверхностях. В самом деле, нетрудно показать, что, исходя из закона Гука или

из граничных условий (9.6.14) для изотропной среды, получим

$$(\partial_3 u_J)^\pm = \frac{\pm 1}{\mu} P_J^{(\pm)} - \partial_J u_3^{(\pm)}, \quad (\partial_3 u_3)^\pm = \frac{1}{\lambda + 2\mu} (\pm P_3^{(\pm)} - \lambda \partial_K u_K^{(\pm)}),$$

а отсюда в свою очередь будем иметь

$$\begin{aligned} (\partial_3 u_J)^+ \pm (-1)^k (\partial_3 u_J)^- &= \frac{1}{\mu} [P_J^{(+)} \pm (-1)^{k+1} P_J^{(-)}] - \partial_J [u_3^{(+)} \pm (-1)^k u_3^{(-)}], \\ (\partial_3 u_3)^+ \pm (-1)^k (\partial_3 u_3)^- &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} [P_3^{(+)} \pm (-1)^{k+1} P_3^{(-)}] - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \partial_K [u_K^{(+)} \pm (-1)^k u_K^{(-)}], \end{aligned} \quad (9.6.25)$$

где $P_k^{(+)}$ и $P_k^{(-)}$ — компоненты заданных напряжений $\mathbf{P}^{(+)}$ и $\mathbf{P}^{(-)}$, а $u_k^{(+)}$ и $u_k^{(-)}$ — компоненты заданных векторов перемещений $\mathbf{u}^{(+)}$ и $\mathbf{u}^{(-)}$ на лицевых поверхностях S^+ и S^- соответственно.

Учитывая (9.6.25) в (9.6.21) и (9.6.23), а выведенные соотношения в (9.6.20), получим искомую систему уравнений с учетом статических и кинематических граничных условий, а также значений частных производных второго и третьего порядков вектора перемещений по координате x^3 на лицевых поверхностях. С целью сокращения письма ее выписывать не будем. Однако, отметим, что значения входящих в (9.6.21) и (9.6.23) выражений из частных производных вектора перемещений по координате x^3 при $x^3 = -1$ и $x^3 = 1$ можно представить через моменты вектора перемещений в виде

$$(\partial_3^s \mathbf{u})^+ \pm (-1)^k (\partial_3^s \mathbf{u})^- = \sum_{n=s}^{\infty} [1 \pm (-1)^{k+n-s}] \mathbf{u} P_n^{(s)}(1), \quad s=0,1,2,3, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (9.6.26)$$

и при составлении системы уравнений приближения порядка N соотношения (9.6.26) заменяем на приближенные равенства

$$(\partial_3^s \mathbf{u})^+ \pm (-1)^k (\partial_3^s \mathbf{u})^- \approx \sum_{n=s}^N [1 \pm (-1)^{k+n-s}] \mathbf{u} P_n^{(s)}(1), \quad s = 0, 1, 2, 3, \quad k = \overline{0, N}. \quad (9.6.27)$$

При этом если хотим, что в уравнениях были отражены граничные условия на лицевых поверхностях, то следует одновременно соответствующим образом использовать соотношения (9.6.25) и (9.6.27). В частности, если на лицевых поверхностях заданы статические граничные условия, то надо использовать (9.6.25) и (9.6.27) при $s = 0, 2, 3$. Если на лицевых поверхностях заданы кинематические граничные условия, то следует использовать соотношения (9.6.27) при $s = 1, 2, 3$. Конечно, можно рассматривать различные варианты задания статических и кинематических граничных условий на лицевых поверхностях. С целью сокращения письма на этих вариантах граничных условий останавливаться не будем. Ниже, применяя упрощенный метод редукции бесконечной системы к конечной, получим системы уравнений нескольких первых приближений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра.

9.6.4.1 Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях

В этом случае из (9.6.21) и (9.6.23) будем иметь следующие приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}'' &\approx \bar{\mathbf{u}}''_{(N)} = \frac{2k+1}{4} \sum_{p=k}^N (p-k+2)(p+k+3)[1+(-1)^{k+p}]^{(p+2)} \bar{\mathbf{u}}, \quad 2 \leq k \leq N-2; \\ \bar{\mathbf{u}}^{IV} &\approx \bar{\mathbf{u}}^{IV}_{(N)} = \frac{2k+1}{2} \sum_{s=k}^N b_{[\frac{s-k+2}{2}]} (k+s+3)(k+s+5)(k+s+7)[1+(-1)^{k+s}]^{(s+4)}, \\ 4 \leq k \leq N-4, \quad b_n &= C_{n+2}^3 = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (9.6.28)$$

Учитывая (9.6.28), из (9.6.20) получим искомую систему уравнений в виде

$$\bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}} + 2h^{-2} \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}''_{(N)} + h^{-4} \bar{\mathbf{u}}^{IV}_{(N)} + \bar{\mathbf{G}} = 0, \quad k = \bar{0}, \bar{N}. \quad (9.6.29)$$

9.6.4.2 Системы уравнений нескольких первых приближений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях

Эти системы уравнений получаем из (9.6.29) при конкретных значениях порядка приближения N .

Система уравнений нулевого приближения. В этом случае $N = 0$ и $k = 0$. Поэтому из (9.6.29) будем иметь

$$\bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{G}} = 0. \quad (9.6.30)$$

Система уравнений приближения порядка $N = 1$. Так как $N = 1$, то $k = 0, 1$ и из (9.6.29) получим

$$\bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{G}}^{(0)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \bar{\mathbf{G}}^{(1)} = 0. \quad (9.6.31)$$

Заметим, что для вектора перемещений имеем представление

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + x^3 \bar{\mathbf{u}}^{(1)}.$$

Система уравнений приближения порядка $N = 2$. Так как $N = 2$, то $k = 0, 1, 2$ и из (9.6.29) будем иметь

$$\bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + 6h^{-2} \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}^{(2)} + \bar{\mathbf{G}}^{(0)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \bar{\mathbf{G}}^{(1)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} + \bar{\mathbf{G}}^{(2)} = 0. \quad (9.6.32)$$

Следовательно, вектор перемещений имеет выражение

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{u}}^{(1)} P_1(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(2)} P_2(x^3).$$

Система уравнений приближения порядка $N = 3$. В этом случае $k = 0, 1, 2, 3$ и из (9.6.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + 6h^{-2} \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}^{(2)} + \bar{\mathbf{G}}^{(0)} &= 0, \quad \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + 30h^{-2} \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}^{(3)} + \bar{\mathbf{G}}^{(1)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} + \bar{\mathbf{G}}^{(2)} &= 0, \quad \bar{\Delta}^2 \bar{\mathbf{u}}^{(3)} + \bar{\mathbf{G}}^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (9.6.33)$$

Следует заметить, что вектор перемещений представляется в виде

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{u}}^{(1)} P_1(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(2)} P_2(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(3)} P_3(x^3).$$

Система уравнений приближения порядка $N = 4$. В этом случае $k = 0, 1, 2, 3, 4$ и из (9.6.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(0)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (3\mathbf{u}^{(2)} + 10\mathbf{u}^{(4)}) + 105h^{-4} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(0)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(1)} + 30h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(3)} + \mathbf{G}^{(1)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(2)} + 70h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(2)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(3)} + \mathbf{G}^{(3)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(4)} = 0. \end{aligned} \quad (9.6.34)$$

Вектор перемещений имеет представление

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} P_1(x^3) + \mathbf{u}^{(2)} P_2(x^3) + \mathbf{u}^{(3)} P_3(x^3) + \mathbf{u}^{(4)} P_4(x^3).$$

Система уравнений приближения порядка $N = 5$. В этом случае $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и из (9.6.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(0)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (3\mathbf{u}^{(2)} + 10\mathbf{u}^{(4)}) + 105h^{-4} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(0)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(1)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (15\mathbf{u}^{(3)} + 42\mathbf{u}^{(5)}) + 945h^{-4} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(1)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(2)} + 70h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(2)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(3)} + 126h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(3)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(4)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(5)} = 0. \end{aligned} \quad (9.6.35)$$

Вектор перемещений имеет выражение

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} P_1(x^3) + \mathbf{u}^{(2)} P_2(x^3) + \mathbf{u}^{(3)} P_3(x^3) + \mathbf{u}^{(4)} P_4(x^3) + \mathbf{u}^{(5)} P_5(x^3).$$

Заметим, что если исходить бы из уравнения $\Delta^2 \mathbf{w} + \mathbf{F} = 0$, которое получается из (9.6.12) при равновесии, получили те же самые уравнения, что выше при условии, что в приведенных выше соотношениях (9.6.30) – (9.6.35) буквы \mathbf{u} и \mathbf{G} надо заменить на \mathbf{w} и \mathbf{F} соответственно.

Заметим также, что система уравнений (9.6.35) расщепляется на две системы уравнений. Первую систему образуют первое, третье и пятое уравнения, а вторую систему второе, четвертое и шестое. Выпишем эти системы по отдельности. Будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(0)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (3\mathbf{u}^{(2)} + 10\mathbf{u}^{(4)}) + 105h^{-4} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(0)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(2)} + 70h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(2)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(4)} = 0; \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(1)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (15\mathbf{u}^{(3)} + 42\mathbf{u}^{(5)}) + 945h^{-4} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(1)} = 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(3)} + 126h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(3)} = 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(5)} = 0. \end{aligned} \quad (9.6.36)$$

Вводя обозначения

$$L = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^2 & 6h^{-2} \bar{\Delta} & 20h^{-2} \bar{\Delta} + 105h^{-4} \\ 0 & \bar{\Delta}^2 & 70h^{-2} \bar{\Delta} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{(0)} \\ \mathbf{G}^{(2)} \\ \mathbf{G}^{(4)} \end{pmatrix},$$

система из первых трех уравнений (9.6.36) можно записать в виде матричного уравнения

$$LU + G = 0. \quad (9.6.37)$$

Нетрудно подсчитать, что матрица алгебраических дополнений L_* и определитель $|L|$ для дифференциальной матрицы L будут иметь вид

$$L_* = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^4 & 0 & 0 \\ 6h^{-2} \bar{\Delta}^3 & \bar{\Delta}^4 & 0 \\ 20h^{-2} \bar{\Delta}^3 + 315h^{-4} \bar{\Delta}^2 & -70h^{-2} \bar{\Delta}^3 & \bar{\Delta}^4 \end{pmatrix}, \quad |L| = \bar{\Delta}^6.$$

Нетрудно видеть, что L_* можно представить в виде

$$L_* = \Delta^2 N, \quad N = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^2 & 0 & 0 \\ 6h^{-2}\bar{\Delta} & \bar{\Delta}^2 & 0 \\ 20h^{-2}\bar{\Delta} + 315h^{-4} & -70h^{-2}\bar{\Delta} & \bar{\Delta}^2 \end{pmatrix}.$$

Применяя к уравнению (9.6.37) слева дифференциальный оператор N^T , в силу равенства $N^T L = E\bar{\Delta}^4$, где E — единичная матрица третьего порядка, получим

$$\bar{\Delta}^4 U + N^T G = 0,$$

а отсюда, очевидно, находим

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^4 \mathbf{u}^{(0)} + \bar{\Delta}^2 G^{(0)} - 6h^{-2}\bar{\Delta} G^{(2)} - (20h^{-2}\bar{\Delta} + 315h^{-4})G^{(4)} &= 0, \\ \bar{\Delta}^3 \mathbf{u}^{(2)} + \bar{\Delta} G^{(2)} - 70h^{-2}G^{(4)} &= 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(4)} + G^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (9.6.38)$$

Из (9.6.38) видно, что относительно $\mathbf{u}^{(0)}$ получили неоднородное уравнение восьмого порядка и его общее решение выражается с помощью четырех аналитических функций, а относительно $\mathbf{u}^{(2)}$ и $\mathbf{u}^{(4)}$ имеем уравнения шестого и четвертого порядка и их общие решения даются с помощью трех и двух аналитических функций соответственно [61]. С целью сокращения письма выписывать общих решений этих уравнений не будем. Важен тот факт, что можно получить аналитические решения. Конечно, совершенно аналогично (9.6.37) можно рассматривать систему, состоящую из второго, четвертого и шестого уравнений (9.6.36) и для нее получить аналитическое решение. С целью сокращения письма на этом также останавливаться не будем. Однако, отметим, что аналитические решения можно получить и для системы уравнений более высокого порядка приближения (см. ниже случай микрополярной теории).

9.6.4.3 Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра с учетом статических граничных условий на лицевых поверхностях

С целью получения этой системы уравнений $\mathbf{u}''_{(N)}^{(k)}$ и $\mathbf{u}^{IV}_{(N)}^{(k)}$ (см. (9.6.21)) аналогично (9.6.28) в силу (9.6.27) представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' &\approx \mathbf{u}''_{(N)}^{(k)} = \frac{2k+1}{2} \left\{ [(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-] - \sum_{n=0}^N [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} P'_n(1) \right\} + \mathbf{u}''_{(N)}, \\ \mathbf{u}^{IV} &\approx \mathbf{u}^{IV}_{(N)}^{(k)} = \frac{2k+1}{2} \left\{ \sum_{n=3}^N [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} P_n^{(3)}(1) - \sum_{n=2}^N [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} P_n^{(2)}(1) P'_k(1) + \right. \\ &\quad \left. + [(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-] P_k''(1) - \sum_{n=0}^N [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} P_n^{(3)}(1) \right\} + \mathbf{u}^{IV}_{(N)}. \end{aligned} \quad (9.6.39)$$

Нетрудно видеть, что на основании (9.6.39) получим

$$\begin{aligned} 2h^{-2}\bar{\Delta} \mathbf{u}''_{(N)}^{(k)} + h^{-4}\mathbf{u}^{IV}_{(N)}^{(k)} &= \\ &= 2h^{-2}\bar{\Delta} \mathbf{u}''_{(N)}^{(k)} + h^{-4}\mathbf{u}^{IV}_{(N)}^{(k)} - \frac{2k+1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^N 2h^{-2} P'_k(1) [1 + (-1)^{k+n}] \bar{\Delta} \mathbf{u} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^1 P_k'''(1) [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} + [P_2''(1) P'_k(1) + P_k'''(1)] [1 + (-1)^k] \mathbf{u}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3}^N [P_n''(1) P'_k(1) - P_k'''(1) - P_n'''(1)] [1 + (-1)^{k+n}] \mathbf{u} \right\} + \\ &\quad + \frac{2k+1}{2} [2h^{-2}\bar{\Delta} + h^{-4} P_k''(1)] [(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-]. \end{aligned} \quad (9.6.40)$$

Из (9.6.25) с учетом (9.6.27) при $s = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 (\partial_3 \mathbf{u})^+ \pm (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-] &= \frac{1}{\mu} [P_J^{(+)} \pm (-1)^{k+1} P_J^{(-)}] \mathbf{e}_J + \frac{1}{\lambda + 2\mu} [P_3^{(+)} \pm (-1)^{k+1} P_3^{(-)}] \mathbf{n} - \\
 &- \sum_{n=0}^N [1 \pm (-1)^{k+n}] \partial_J u_3^{(n)} \mathbf{e}_J - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sum_{n=0}^N [1 \pm (-1)^{k+n}] \partial_L u_L^{(n)} \mathbf{n}.
 \end{aligned} \tag{9.6.41}$$

Учитывая (9.6.41) в (9.6.40), а затем полученное соотношение подставляя в (9.6.29), получим искомую систему уравнений. С целью сокращения письма ее выписывать не будем.

Из (9.6.40) и (9.6.41) видно, что система уравнений с учетом граничных условий на лицевых поверхностях имеет довольно громоздкий вид. Вообще говоря, иметь дело с системой уравнений с учетом граничных условий значительно сложнее, чем с системой уравнений без них. Однако, эту проблему можно немного упростить. В самом деле, в этом случае лучше только $\mathbf{u}''_{(N)}^{(k)}$ (см. первую формулу (9.6.39)) выражать в силу (9.6.41) через граничные условия на лицевых поверхностях, а для $\mathbf{u}_{(N)}^{(k)IV}$ использовать вторую формулу (9.6.28).

9.6.4.4 Система уравнений приближения порядка N статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Чебышева второго рода при новой параметризации

Рассматривается призматическое тело постоянной толщины h . В качестве базовой плоскости принимается внутренняя плоскость S^- . Считаем, что $\mathbf{h} \perp S^-$. Тогда $g_{-M}^P = \delta_M^P$, $g_P^{\bar{3}} = 0$, $g_{-P}^{\bar{3}} = 0$, $g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2}$ и лапласиан (2.9.44) (см. также (2.9.18)) представится в виде

$$\Delta \mathbb{F} = g^{\bar{P}\bar{Q}} \partial_{\bar{P}} \partial_{\bar{Q}} + h^{-2} \partial_3^2 \mathbb{F} = (\bar{\Delta} + h^{-2} \partial_3^2) \mathbb{F}, \quad \bar{\Delta} = g^{\bar{P}\bar{Q}} \partial_{\bar{P}} \partial_{\bar{Q}}. \tag{9.6.42}$$

Из (9.6.21) видно, что представление лапласиана при новой параметризации по форме совпадает с его представлением при классической параметризации (9.6.17). Поэтому искомая система уравнений будет иметь аналогичный (9.6.29) вид

$$\bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(k)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}''_{(N)}^{(k)} + h^{-4} \mathbf{u}_{(N)}^{(k)IV} + \mathbf{G} = 0, \quad k = \overline{0, N}, \tag{9.6.43}$$

где теперь моменты рассматриваются относительно ортонормированной системы полиномов Чебышева второго рода, а $\mathbf{u}''_{(N)}^{(k)}$ и $\mathbf{u}_{(N)}^{(k)IV}$ в силу (2.7.21) и (2.7.33) представятся в форме

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}''_{(N)}^{(k)} &= 2(k+1) \sum_{p=k}^N (p-k+2)(k+p+4) [1 + (-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p+2)}(x'), \quad 2 \leq k \leq N-2; \\
 \mathbf{u}_{(N)}^{(k)IV} &= 2^4(k+1) \sum_{s=k}^N b_{\lfloor \frac{s-k+2}{2} \rfloor} (k+s+4)(k+s+6)(k+s+8) [1 + (-1)^{k+s}] \mathbf{u}^{(s+4)}, \tag{9.6.44} \\
 4 \leq k \leq N-4, \quad b_n &= C_{n+2}^3 = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2), \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Далее на основании (9.6.43) и (9.6.44) нетрудно выписать системы уравнений нескольких первых приближений. С целью сокращения письма выпишем только систему уравнений пятого приближения.

Система уравнений приближения порядка $N = 5$. В этом случае $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и из (9.6.43) с учетом (9.6.44), пренебрегая моментами выше пятого порядка, будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(0)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (32 \mathbf{u}^{(2)} + 96 \mathbf{u}^{(4)}) + 6144h^{-4} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(0)} &= 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(1)} + 2h^{-2} \bar{\Delta} (96 \mathbf{u}^{(3)} + 256 \mathbf{u}^{(5)}) + 30720h^{-4} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(1)} &= 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(2)} + 384h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(2)} &= 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(3)} + 640h^{-2} \bar{\Delta} \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(3)} &= 0, \\ \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{G}^{(4)} &= 0, \quad \bar{\Delta}^2 \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{G}^{(5)} &= 0.\end{aligned}\tag{9.6.45}$$

Вектор перемещений имеет выражение

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} \hat{U}_1^*(x^3) + \mathbf{u}^{(2)} \hat{U}_2^*(x^3) + \mathbf{u}^{(3)} \hat{U}_3^*(x^3) + \mathbf{u}^{(4)} \hat{U}_4^*(x^3) + \mathbf{u}^{(5)} \hat{U}_5^*(x^3).$$

Следует заметить, что из (9.6.45) легко получить систему уравнений меньшего порядка приближения. В самом деле, чтобы получить систему уравнений четвертого порядка приближения, достаточно из (9.6.45) вычеркнуть последнее уравнение и слагаемые, содержащие моменты пятого порядка вектора перемещений. Аналогично получается система уравнений третьего порядка приближения из системы уравнений четвертого порядка приближения и т.д. Вообще говоря, если для любого $N \geq 1$ из системы уравнений приближения порядка N вычеркнуть последнее уравнение и слагаемые, содержащие моменты N -го порядка вектора перемещений, то получим систему уравнений приближения порядка $N - 1$. Это правило остается в силе при применении любой системы полиномов.

Далее отметим, что аналогично (9.6.35) система уравнений (9.6.45) расщепляется на две системы и для каждой из них можно выписать аналитическое решение.

9.7 Задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях

9.7.1 Уравнения движения в векторах перемещений и вращений в трехмерной микрополярной теории упругости

Учитывая ОС линейно-упругого неоднородного анизотропного материала с центром симметрии [196, 307], которые можно записать в виде (см. (3.2.45))

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbf{D}} \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}} \quad (\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}),$$

из уравнений движения в тензорах напряжений и моментных напряжений (3.1.25) после простых преобразований получим

$$\underline{\mathbf{A}}^{(1)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{A}}^{(3)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}^{(4)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = 0,\tag{9.7.1}$$

где для введенных дифференциальных тензоров-операторов $\underline{\mathbf{A}}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}^{(1)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (C^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i C^{ijkl} \nabla_k) - \underline{\mathbf{E}} \rho \partial_t^2, \quad \underline{\mathbf{A}}^{(2)} = -\mathbf{r}_j \mathbf{r}^m C_{mkl} (C^{kl ij} \nabla_i + \nabla_i C^{kl ij}), \\ \underline{\mathbf{A}}^{(3)} &= \mathbf{r}^m \mathbf{r}_j C_{mkl} C^{kl ij} \nabla_i, \quad \underline{\mathbf{A}}^{(4)} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (D^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i D^{ijkl} \nabla_k) - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{J}} \partial_t^2.\end{aligned}$$

Если введем в рассмотрение матричный дифференциальный тензор-оператор и векторы-столбцы

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}^{(1)} & \underline{\mathbf{A}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{A}}^{(3)} & \underline{\mathbf{A}}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{F} \\ \rho \mathbf{m} \end{pmatrix},\tag{9.7.2}$$

то уравнения (9.7.1) можно коротко представить следующим образом:

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{X}} = 0. \quad (9.7.3)$$

В случае однородного изотропного материала уравнения движения векторах перемещений и вращения имеют вид [196, 307, 460]

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha)\Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha)\text{graddiv} \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot} \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{F} &= \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ (\delta + \beta)\Delta \boldsymbol{\varphi} + (\gamma + \delta - \beta)\text{graddiv} \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha \text{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

а дифференциальные тензоры-операторы $\underline{\mathbf{A}}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, представляются в форме

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &\equiv \underline{\mathbf{A}}^{(1)} = \underline{\mathbf{E}}[(\mu + \alpha)\Delta - \rho \partial_t^2] + (\lambda + \mu - \alpha)\nabla \nabla = b \underline{\mathbf{E}} \square_2 + d \nabla \nabla = \underline{\mathbf{E}} Q_2 + d \nabla \nabla, \\ \underline{\mathbf{B}} &\equiv \underline{\mathbf{A}}^{(2)} = \underline{\mathbf{A}}^{(3)} = -2\alpha \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}} &\equiv \underline{\mathbf{A}}^{(4)} = \underline{\mathbf{E}}[(\delta + \beta)\Delta - 4\alpha] - \underline{\mathbf{J}} \partial_t^2 + (\gamma + \delta - \beta)\nabla \nabla = \\ &= g \underline{\mathbf{E}} \square_4 + m \nabla \nabla = \underline{\mathbf{E}} Q_4 + m \nabla \nabla, \quad \text{при} \quad \underline{\mathbf{J}} = J \underline{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \lambda + \mu - \alpha, \quad l = 4\alpha, \quad (b = \mu + \alpha, \quad g = \delta + \beta), \quad m = \gamma + \delta - \beta, \\ Q_2 &= b \square_2 = b \Delta - \rho \partial_t^2, \quad \square_2 = \Delta - \frac{\rho}{b} \partial_t^2, \end{aligned} \quad (9.7.6)$$

$$Q_4 = g \square_4 = g \Delta - l - J \partial_t^2, \quad \square_4 = \Delta - \frac{l}{g} - \frac{J}{g} \partial_t^2.$$

Заметим, что кроме операторов, указанных в (9.7.6), вводятся в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + d \Delta = (b + d)\Delta - \rho \partial_t^2 = (b + d)\square_1, \\ Q_3 &= Q_4 + m \Delta = (g + m)\Delta - l - J \partial_t^2 = (g + m)\square_3, \\ \square_1 &= \Delta - \frac{\rho}{b + d} \partial_t^2, \quad \square_3 = \Delta - \frac{l}{g + m} - \frac{J}{g + m} \partial_t^2. \end{aligned} \quad (9.7.7)$$

Нетрудно видеть, что в случае однородного изотропного материала система уравнений (9.7.1) представится в виде

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad (9.7.8)$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{E}} Q_2 + d \nabla \nabla, \quad \underline{\mathbf{B}} = -2\alpha \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \quad \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{E}} Q_4 + m \nabla \nabla.$$

Легко доказать, что операторы $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$ попарно коммутируют относительно операции однократного умножения, т.е. $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$.

Исходя из (9.7.8), получим уравнения в отдельности относительно векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$. В этой связи применим к первому уравнению (9.7.8) оператор $\underline{\mathbf{B}}$ со следующим однократным умножением, а второму уравнению оператор $\underline{\mathbf{A}}$. В результате находим

$$(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{u} + (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0, \quad (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{u} + (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}} \cdot (\rho \mathbf{m}) = 0. \quad (9.7.9)$$

Учитывая коммутативность операторов $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ относительно однократного умножения и из второго уравнения вычитая первое, получим

$$(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{B}}^2) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}} \cdot (\rho \mathbf{m}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0. \quad (9.7.10)$$

Применим теперь к первому уравнению (9.7.8) оператор $\underline{\mathbf{C}}$ со следующим однократным умножением, а второму уравнению оператор $\underline{\mathbf{B}}$. Очевидно, будем иметь

$$(\underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{u} + (\underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{C}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0, \quad (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{u} + (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{m}) = 0. \quad (9.7.11)$$

Учитывая коммутативность операторов $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{C}}$, а также $\underline{\mathbf{B}}$ и $\underline{\mathbf{C}}$ относительно однократного умножения и из первого уравнения вычитая второе, получим уравнение

$$(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{B}}^2) \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot (\rho \mathbf{F}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{m}) = 0. \quad (9.7.12)$$

Вводя обозначения $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{B}}^2$, уравнения (9.7.10) и (9.7.12), можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot (\rho \mathbf{F}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{m}) = 0, \quad \underline{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}} \cdot (\rho \mathbf{m}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0. \quad (9.7.13)$$

Далее после простых вычислений найдем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} &= \underline{\mathbf{E}} Q_2 Q_4 + (m Q_1 + d Q_4) \nabla \nabla, & \underline{\mathbf{B}}^2 &= -4\alpha^2 (\underline{\mathbf{E}} \Delta - \nabla \nabla), \\ \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\mathbf{E}} (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) + (m Q_1 + d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla, \\ \underline{\mathbf{D}}_* &= (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) [\underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_3 - (m Q_1 + d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla], \\ |\underline{\mathbf{D}}| &= Q_1 Q_3 (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta)^2, & \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{D}}_* &= \underline{\mathbf{D}}_* \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{E}} |\underline{\mathbf{D}}| \quad (\underline{\mathbf{D}}_*^T = \underline{\mathbf{D}}_*), \end{aligned} \quad (9.7.14)$$

где $\underline{\mathbf{D}}_*$ — дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений оператора $\underline{\mathbf{D}}$. Введем в рассмотрение дифференциальный тензор-оператор

$$\underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_3 - (m Q_1 + d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla. \quad (9.7.15)$$

Тогда в силу (9.7.14) и (9.7.15) имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}_* &= (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \underline{\mathbf{N}}, & \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{N}} &= \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_3 (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta), \\ \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{B}} &= -\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = -2\alpha Q_1 Q_3 \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \\ \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{C}} &= \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = Q_3 [\underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_4 - (d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla], \\ \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{A}} &= \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = Q_1 [\underline{\mathbf{E}} Q_2 Q_3 - (m Q_2 - 4\alpha^2) \nabla \nabla]. \end{aligned} \quad (9.7.16)$$

Если решения уравнения (9.7.13) будем искать в виде (аналог представления Галеркина)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (9.7.17)$$

то, учитывая соответствующие соотношения (9.7.14) и (9.7.16), в силу (9.7.15) из уравнений (9.7.13) получим относительно \mathbf{v} и $\boldsymbol{\psi}$ по отдельности следующие уравнения:

$$\begin{aligned} Q_1 Q_3 (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \mathbf{v} + (\underline{\mathbf{E}} Q_4 + m \nabla \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F}) + 2\alpha (\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m}) &= 0, \\ Q_1 Q_3 (Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} + (\underline{\mathbf{E}} Q_2 + d \nabla \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m}) + 2\alpha (\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.18)$$

Применяя теперь тензор-оператор $\underline{\mathbf{N}}$ к уравнениям (9.7.13) со следующим скалярным умножением и учитывая (9.7.16) будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} Q_3 \{ Q_1 [(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \mathbf{u} + 2\alpha (\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m})] + \\ + [\underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_4 - (d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}) \} &= 0, \\ Q_1 \{ Q_3 [(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha (\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F})] + \\ + [\underline{\mathbf{E}} Q_2 Q_3 - (m Q_2 - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}) \} &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.19)$$

Рассмотрим теперь уравнения микрополярной однородной изотропной среды в виде (9.7.3). Обозначая через

$$\underline{\mathbf{M}}_* = \begin{pmatrix} \hat{\underline{\mathbf{A}}} & \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} \\ \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} & \hat{\underline{\mathbf{C}}} \end{pmatrix} \quad (9.7.20)$$

матричный дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений дифференциального оператора $\underline{\mathbf{M}}$ уравнения (9.7.3), после простых, хотя очень громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= Q_3(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)[\underline{\mathbf{E}}Q_1Q_4 - (dQ_4 - 4\alpha^2)\nabla\nabla] (\hat{\mathbf{A}}^T = \hat{\mathbf{A}}), \\ \hat{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}}^{(1)} = \hat{\mathbf{B}}^{(2)} = -2\alpha Q_1Q_3(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla (\hat{\mathbf{B}}^T = -\hat{\mathbf{B}}), \\ \hat{\mathbf{C}} &= Q_1(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)[\underline{\mathbf{E}}Q_2Q_3 - (mQ_2 - 4\alpha^2)\nabla\nabla] (\hat{\mathbf{C}}^T = \hat{\mathbf{C}}).\end{aligned}\quad (9.7.21)$$

Заметим, что выражения для алгебраических дополнений элементов определителя дифференциального матричного оператора однородного уравнения установившихся колебаний микрополярной теории упругости приведены в [196], которые получаются из выражений для компонент дифференциальных тензоров-операторов (9.7.21), если в них вторую производную по времени (∂_t^2) заменить на квадрат частоты колебаний (σ^2).

Введем в рассмотрение матричные дифференциальные тензоры-операторы

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{N}}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & \underline{\mathbf{S}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{S}}^{(1)} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{N}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & \underline{\mathbf{S}}^{(1)} \\ \underline{\mathbf{S}}^{(2)} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \\ \underline{\mathbf{R}} &= \underline{\mathbf{E}}Q_1Q_4 - (dQ_4 - 4\alpha^2)\nabla\nabla, \quad \underline{\mathbf{S}}^{(1)} = Q_3\underline{\mathbf{B}}, \quad \underline{\mathbf{S}}^{(2)} = Q_1\underline{\mathbf{B}}, \\ \underline{\mathbf{B}} &= -2\alpha\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \quad \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{E}}Q_2Q_3 - (mQ_2 - 4\alpha^2)\nabla\nabla.\end{aligned}\quad (9.7.22)$$

Тогда, очевидно,

$$\underline{\mathbf{N}}^{(1)T} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & -\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \\ -\underline{\mathbf{S}}^{(2)} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{N}}^{(2)T} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & -\underline{\mathbf{S}}^{(2)} \\ -\underline{\mathbf{S}}^{(1)} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}.\quad (9.7.23)$$

Если решение уравнения (9.7.3) будем искать в виде (аналог представления Галеркина)

$$\mathbf{U} = \underline{\mathbf{N}}^{(1)T} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix},\quad (9.7.24)$$

то получим следующие уравнения:

$$Q_1(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{v} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad Q_3(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\psi} + \rho\mathbf{m} = 0.\quad (9.7.25)$$

Если к уравнению (9.7.3) слева применить оператор $\underline{\mathbf{N}}^{(2)T}$ с последующим однократным умножением, то будем иметь уравнения

$$\begin{aligned}Q_1[(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{u} + 2\alpha(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho\mathbf{m})] + [\underline{\mathbf{E}}Q_1Q_4 - (dQ_4 - 4\alpha^2)\nabla\nabla] \cdot (\rho\mathbf{F}) &= 0, \\ Q_3[(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\varphi} + 2\alpha(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho\mathbf{F})] + [\underline{\mathbf{E}}Q_2Q_3 - (mQ_2 - 4\alpha^2)\nabla\nabla] \cdot (\rho\mathbf{m}) &= 0.\end{aligned}\quad (9.7.26)$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha = 0$, т.е. для редуцированной среды из первого уравнения (9.7.26) следует классическое уравнение (9.6.13), а второе уравнение имеет аналогичный ему вид. Кроме того, очевидно, верность соотношений (9.7.26) влечет за собой верность (9.7.19).

Отметим, что аналогичные (9.7.25) уравнения были получены Н.Сандру в работе [513]. Подобные же уравнения иным путем, как пишет сам В.Новацкий, были получены и В.Новацким [307]. Хотя, в конечном счете представления векторов перемещений и вращения у Н.Сандру и В.Новацкого одинаковы и они сводятся к (9.7.24). Заслуживает большого внимания работа [23], в которой осуществлено расщепление системы уравнений равновесия для не имеющего центра симметрии изотропного упругого тела без учета массовых нагрузок на две независимые системы уравнений.

Следует отметить, что уравнения (9.7.26) имеют преимущество по сравнению с уравнениями (9.7.25), так как для уравнений (9.7.26) граничными условиями являются граничные условия исходной краевой задачи, в то время как для уравнений (9.7.25) граничные условия имеют более сложные выражения относительно введенных векторных полей \mathbf{v} и $\boldsymbol{\psi}$.

9.7.2 Уравнения движения в векторах перемещений и вращения трехмерной микрополярной теории не обладающих центром симметрии упругих тел

Учитывая ОС для линейно-упругого неоднородного анизотропного не обладающего центром симметрии материала при неизотермических процессах

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\mathbf{d}}\vartheta), & \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\gamma}} - \underline{\mathbf{a}}\vartheta) + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes (\underline{\boldsymbol{\varkappa}} - \underline{\mathbf{d}}\vartheta), \\ \underline{\boldsymbol{\gamma}} &= \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, & \underline{\boldsymbol{\varkappa}} &= \nabla \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

из уравнений движения в тензорах напряжений и моментных напряжений (3.1.25) в случае однородного изотропного материала получим

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - b_* \nabla \vartheta + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \beta_* \nabla \vartheta + \rho \mathbf{m} = 0, \quad \vartheta = T - T_0, \quad (9.7.27)$$

где введены в рассмотрение следующие дифференциальные тензоры-операторы:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{E}}Q_2 + d\nabla\nabla, \quad \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{E}}R_2 + n\nabla\nabla - 2\alpha\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla, \quad \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{E}}Q_4 + m\nabla\nabla - 4p\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla. \quad (9.7.28)$$

Следует заметить, что, вообще говоря, в общем случае в научной литературе (Еринген, Миндлин, Новацкий, Купрадзе, Пальмов, Аэро и др.) для материалов, не обладающих центром симметрии, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ и $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$. Поэтому для изотропных материалов (если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ должен быть изотропным) $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$, т.е. такие микрополярные изотропные материалы, если они существуют, всегда обладают центром симметрии. Однако некоторые авторы (Аэро, Баскаков и др.) допускают, что $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ и для изотропных материалов $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$. Считая $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$, введем в рассмотрение матричный дифференциальный тензор-оператор и векторы-столбцы

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{C}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{F} - b_* \nabla \vartheta \\ \rho \mathbf{m} - \beta_* \nabla \vartheta \end{pmatrix}. \quad (9.7.29)$$

Тогда уравнения (9.7.27) можно коротко представить в следующем виде:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{X}} = 0. \quad (9.7.30)$$

Здесь изотропные тензоры четвертого ранга имеют выражения

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}} &= c_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + c_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + c_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, & \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= a_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + a_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + a_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= d_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + d_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + d_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}. \end{aligned} \quad (9.7.31)$$

Кроме того, введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_* &= a_*(3c_1 + c_2 + c_3) + d_*(3a_1 + a_2 + a_3), & \beta_* &= d_*(3d_1 + d_2 + d_3) + a_*(3a_1 + a_2 + a_3), \\ c_1 &= \lambda, & c_2 &= b = \mu + \lambda, & c_3 &= \mu - \alpha, & d &= c_1 + c_2 = \lambda + \mu - \alpha, \\ (b + d &= c_1 + c_2 + c_3 = \lambda + 2\mu, & c_2 - c_3 &= 2\alpha), & l &= 4\alpha, \\ d_1 &= \gamma, & d_2 &= g = \delta + \beta, & d_3 &= \delta - \beta, & m &= d_1 + d_3 = \gamma + \delta - \beta, \\ (g + m &= d_1 + d_2 + d_3 = \gamma + 2\delta, & d_2 - d_3 &= 2\beta), & & & & (9.7.32) \\ a_1 &= q, & a_2 &= s = r + p, & a_3 &= r - p, & n &= a_1 + a_3 = q + r - p, \\ (s + n &= a_1 + a_2 + a_3 = q + 2r, & a_2 + a_3 &= 2r, & a_2 - a_3 &= 2p), \\ Q_1 &= Q_2 + d\Delta, & Q_2 &= c_2\Delta - \rho\partial_t^2, & Q_3 &= Q_4 + m\Delta, & Q_4 &= d_2\Delta - 4\alpha - J\partial_t^2, \\ R_1 &= R_2 + n\Delta = (q + 2r)\Delta, & R_2 &= a_2\Delta = s\Delta & (R_1 + R_2 &= (2s + n)\Delta). \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что операторы $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}$ попарно коммутируют относительно операции однократного умножения, т.е.

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \quad \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \quad \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}}. \quad (9.7.33)$$

Учитывая (9.7.33), уравнения (9.7.27) без учета температуры можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{C}} \cdot (\rho \mathbf{F}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{m}) &= 0, \quad \underline{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \underline{\mathbf{A}} \cdot (\rho \mathbf{m}) - \underline{\mathbf{B}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0, \\ \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{B}}^2 = \underline{\mathbf{E}}P + Q\nabla\nabla - R\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \quad P = Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta - R_2^2, \\ R &= 4pQ_2, \quad Q = mQ_2 + dQ_4 + [dm - n(2s + n)]\Delta - 4\alpha^2. \end{aligned} \quad (9.7.34)$$

Дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений $\underline{\mathbf{D}}_*$ и определитель $|\underline{\mathbf{D}}|$ дифференциального тензора-оператора $\underline{\mathbf{D}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}_* &= (P + Q\Delta)(\underline{\mathbf{E}}P - R\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) - (PQ - R^2)\nabla\nabla = \underline{\mathbf{E}}X - Y\nabla\nabla - Z\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \\ X &= P(P + Q\Delta), \quad Y = PQ - R^2, \quad Z = R(P + Q\Delta), \\ |\underline{\mathbf{D}}| &= (P + Q\Delta)(P^2 + R^2\Delta) = \\ &= \{Q_1Q_3 - [s^2 + n(2s + n)]\Delta^2\}[(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta - s^2\Delta^2)^2 + 16p^2Q_2^2\Delta]. \end{aligned} \quad (9.7.35)$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{A}} &= \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}}_*^T = \underline{\mathbf{E}}XQ_2 + (dX - YQ_1\Delta)\nabla\nabla + ZQ_2\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \\ \underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{B}} &= \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{D}}_*^T = \underline{\mathbf{E}}(XR_2 + 2\alpha Z\Delta) + \\ &\quad + (nX - 2\alpha Z - YR_1)\nabla\nabla + (ZR_2 - 2\alpha X)\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \\ \underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{C}} &= \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{D}}_*^T = \underline{\mathbf{E}}(XQ_4 + 4pZ\Delta) + \\ &\quad + (mX - 4pZ - YQ_3)\nabla\nabla + (ZQ_4 - 4pX)\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (9.7.36)$$

Применяя к уравнениям (9.7.34) слева оператор $\underline{\mathbf{D}}_*^T$ со следующим однократным умножением, получим следующие расщепленные уравнения:

$$\begin{aligned} |\underline{\mathbf{D}}|\mathbf{u} + (\underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{C}}) \cdot (\rho \mathbf{F}) - (\underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot (\rho \mathbf{m}) &= 0, \\ |\underline{\mathbf{D}}|\boldsymbol{\varphi} + (\underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{C}}) \cdot (\rho \mathbf{m}) - (\underline{\mathbf{D}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot (\rho \mathbf{F}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.37)$$

9.7.3 О граничных условиях в линейной трехмерной микрополярной теории упругости. Тензор-оператор напряжения и моментного напряжения

Граничные условия для линейно-упругого неоднородного анизотропного не обладающего центром симметрии тела при неизотермических процессах можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{P}^{(1)}\vartheta = \mathbf{P}_{(n)}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}^{(4)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{P}^{(2)}\vartheta = \boldsymbol{\mu}_{(n)}, \quad P^{(3)}\vartheta = q_{(n)}, \quad (9.7.38)$$

где введены в рассмотрение следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i C^{ijkl} \nabla_k, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i A^{ijkl} \nabla_k - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{C}}, \\ \underline{\mathbf{T}}^{(3)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i B^{ijkl} \nabla_k, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(4)} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i D^{ijkl} \nabla_k - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{B}} \otimes \underline{\mathbf{C}}, \\ \mathbf{P}^{(1)} &= -\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = -\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}}, \quad P^{(3)} = -\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (9.7.39)$$

Введем в рассмотрение матричный дифференциальный тензор-оператор (тензор-оператор напряжения и моментного напряжения) и матрицы-столбцы

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} & \mathbf{P}^{(1)} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} & \mathbf{P}^{(2)} \\ 0 & 0 & P^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \\ \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(n)} \\ q_{(n)} \end{pmatrix}. \quad (9.7.40)$$

Тогда в силу (9.7.40) граничные условия (9.7.38) можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} & \mathbf{P}^{(1)} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} & \mathbf{P}^{(2)} \\ 0 & 0 & P^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(n)} \\ q_{(n)} \end{pmatrix} \quad (9.7.41)$$

или коротко

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Q}_{(n)}. \quad (9.7.42)$$

Если решается несвязанная задача, то в этом случае целесообразно рассматривать матричный дифференциальный тензор-оператор (оператор напряжения и моментного напряжения) и матрицы-столбцы (векторные столбцы):

$$\underline{\underline{\mathbb{T}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(n)} \end{pmatrix}. \quad (9.7.43)$$

Тогда в этом случае граничные условия можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{(n)} \\ \boldsymbol{\mu}_{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{или коротко} \quad \underline{\underline{\mathbb{T}}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Q}_{(n)}. \quad (9.7.44)$$

В случае не обладающего центром симметрии изотропного материала имеем

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} &= c_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{n} \cdot \nabla + c_1 \mathbf{n}\nabla + c_3 (\mathbf{n}\nabla)^T, \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} &= a_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{n} \cdot \nabla + a_1 \mathbf{n}\nabla + a_3 (\mathbf{n}\nabla)^T - (c_2 - c_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} &= a_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{n} \cdot \nabla + a_1 \mathbf{n}\nabla + a_3 (\mathbf{n}\nabla)^T, \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} &= d_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{n} \cdot \nabla + d_1 \mathbf{n}\nabla + d_3 (\mathbf{n}\nabla)^T - (a_2 - a_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}. \end{aligned} \quad (9.7.45)$$

Введем в рассмотрение также дифференциальный тензор-оператор

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\prime(4)} = d_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{n} \cdot \nabla + d_1 \mathbf{n}\nabla + d_3 (\mathbf{n}\nabla)^T. \quad (9.7.46)$$

Нетрудно заметить, что

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} - (c_2 - c_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\prime(4)} - (a_2 - a_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}. \quad (9.7.47)$$

Будем предполагать, что рассматриваемое тело имеет кусочно-гладкую плоскую границу. Тогда, обозначая $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(1)}$ и $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(1)}|$ ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(3)}$, $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(3)}|$; $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{\prime(4)}$, $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{\prime(4)}|$) дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений и определитель тензора-оператора $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)}$ ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\prime(4)}$),

после простых, хотя громоздких, вычислений получим

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{T}}_*^{(1)} &= [(c_1 + c_2)(c_2 + c_3)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla - c_3(c_1 + c_2)\mathbf{n}\nabla - \\
 &\quad - c_1(c_2 + c_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla + c_1c_3[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\
 |\underline{\mathbf{T}}^{(1)}| &= c_2[(c_1 + c_2)(c_2 + c_3)\mathbf{nnn}\otimes^3\nabla\nabla\nabla - c_1c_3\Delta\mathbf{n}\cdot\nabla] = \\
 &\quad = c_2[(c_1 + c_2)(c_2 + c_3)\mathbf{nn}\otimes^2\nabla\nabla - c_1c_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla, \\
 \underline{\mathbf{T}}_*^{(3)} &= [(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla - a_3(a_1 + a_2)\mathbf{n}\nabla - \\
 &\quad - a_1(a_2 + a_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla + a_1a_3[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\
 |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| &= a_2[(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\mathbf{nn}\otimes^2\nabla\nabla - a_1a_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla, \\
 \underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)} &= [(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla - d_3(d_1 + d_2)\mathbf{n}\nabla - \\
 &\quad - d_1(d_2 + d_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla + d_1d_3[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\
 |\underline{\mathbf{T}}'^{(4)}| &= d_2[(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)\mathbf{nn}\otimes^2\nabla\nabla - d_1d_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla.
 \end{aligned} \tag{9.7.48}$$

Следует заметить, что найти соответствующие дифференциальные тензоры-операторы алгебраических дополнений для $\underline{\mathbf{T}}^{(2)}$ и $\underline{\mathbf{T}}^{(4)}$ из-за наличия в них недифференциальных слагаемых затруднительно.

Отметим, что мы добываемся расщепления граничных условий, т.е. хотим по отдельности для \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ получить граничные условия. С целью сокращения письма рассмотрим случай, когда $a_2 = a_3$, $c_2 = c_3$. Тогда $\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \underline{\mathbf{T}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{T}}^{(4)} = \underline{\mathbf{T}}'^{(4)}$ и граничные условия (9.7.44) можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)}\cdot\mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}_{(n)}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(3)}\cdot\mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}'^{(4)}\cdot\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\mu}_{(n)}. \tag{9.7.49}$$

В рассматриваемом случае легко получить граничные условия по отдельности относительно \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$. В самом деле, применяя к первому соотношению (9.7.49) оператор $|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}$ со следующим однократным умножением, а ко второму $|\underline{\mathbf{T}}^{(1)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}$ и учитывая

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(1)} &= \underline{\mathbf{E}}|\underline{\mathbf{T}}^{(1)}|, \quad \underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(3)} = \underline{\mathbf{E}}|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|, \\
 \underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(4)} = \underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}'^{(4)},
 \end{aligned}$$

а затем из первого полученного соотношения вычитая второе, будем иметь

$$(|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(3)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(1)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)})\cdot\boldsymbol{\varphi} = |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\mathbf{P}_{(n)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(1)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\boldsymbol{\mu}_{(n)}. \tag{9.7.50}$$

Аналогично (9.7.50), применяя к первому соотношению (9.7.49) оператор $|\underline{\mathbf{T}}'^{(4)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}$ со следующим однократным умножением, а ко второму $|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)T}$ и учитывая

$$\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(3)} = \underline{\mathbf{E}}|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|, \quad \underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}'^{(4)} = \underline{\mathbf{E}}|\underline{\mathbf{T}}'^{(4)}|,$$

а затем из первого полученного соотношения вычитая второе, будем иметь

$$(|\underline{\mathbf{T}}'^{(4)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(1)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)T}\cdot\underline{\mathbf{T}}^{(3)})\cdot\mathbf{u} = |\underline{\mathbf{T}}'^{(4)}|\underline{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\mathbf{P}_{(n)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}|\underline{\mathbf{T}}_*'^{(4)T}\cdot\boldsymbol{\mu}_{(n)}. \tag{9.7.51}$$

Соотношения (9.7.50) и (9.7.51) являются искомыми граничными условиями.

Заметим, что граничные условия расщепляются и в более общем случае. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Далее отметим только, что граничные условия сравнительно легко расщепляются в следующих случаях:

1. $c_2 = c_3$, 2. $a_2 = a_3$, 3. $d_2 = d_3$,

$$4. \quad \left(\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(3)} = \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \right) \Leftrightarrow \left(\xi = \frac{c_1}{c_3} = \frac{a_1}{a_3} \right), \quad (9.7.52)$$

$$5. \quad \left(\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}'^{(4)} = \underline{\mathbf{T}}'^{(4)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \right) \Leftrightarrow \left(\eta = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3} \right), \quad (9.7.53)$$

$$6. \quad \left(\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{T}}'^{(4)} = \underline{\mathbf{T}}'^{(4)} \cdot \underline{\mathbf{T}}^{(1)} \right) \Leftrightarrow \left(\zeta = \frac{a_1}{a_3} = \frac{d_1}{d_3} \right), \quad (9.7.54)$$

$$7. \quad \left(\underline{\mathbf{T}}^{(1)}, \underline{\mathbf{T}}^{(3)}, \underline{\mathbf{T}}'^{(4)} \text{ попарно коммутируют} \right) \Leftrightarrow \left(\xi = \frac{c_1}{c_3} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{d_1}{d_3} \right). \quad (9.7.55)$$

8. Для обладающих центром симметрии материалов и в том числе для редуцированных сред. В этом случае для нередуцированных сред $\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = (c_3 - c_2)\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{C}}$ и $\underline{\mathbf{T}}^{(3)} = 0$ и тензор-оператор напряжения и моментного напряжения — дифференциальная треугольная тензорно-блочная матрица и легко расчленим граничные условия. Для редуцированной среды $\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = 0$ ($c_2 = c_3$) и $\underline{\mathbf{T}}^{(3)} = 0$ и тензор-оператор напряжения и моментного напряжения — дифференциальная тензорно-блочно-диагональная матрица и ее легко обрратить и, конечно, легко расчленим граничные условия.

Далее допустим, что одновременно выполняются первое, второе, третье и седьмое условия, т.е.

$$c_2 = c_3, \quad a_2 = a_3, \quad d_2 = d_3, \quad \xi = \frac{c_1}{c_3} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{d_1}{d_3}, \quad (9.7.56)$$

Учитывая (9.7.56), операторы (9.7.45) примут вид

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} &= c_2[\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n} \cdot \nabla + \xi\mathbf{n}\nabla + (\mathbf{n}\nabla)^T], \\ \underline{\mathbf{T}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{T}}^{(3)} = a_2[\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n} \cdot \nabla + \xi\mathbf{n}\nabla + (\mathbf{n}\nabla)^T], \\ \underline{\mathbf{T}}^{(4)} &= d_2[\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n} \cdot \nabla + \xi\mathbf{n}\nabla + (\mathbf{n}\nabla)^T]. \end{aligned} \quad (9.7.57)$$

Вводя обозначение

$$\underline{\mathbf{T}} = (\underline{\mathbf{C}}_{(1)} + \xi\underline{\mathbf{C}}_{(2)} + \underline{\mathbf{C}}_{(3)}) \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\nabla = [\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n} \cdot \nabla + \xi\mathbf{n}\nabla + (\mathbf{n}\nabla)^T], \quad (9.7.58)$$

дифференциальные тензоры-операторы (9.7.57) можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} = c_2\underline{\mathbf{T}}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \underline{\mathbf{T}}^{(3)} = a_2\underline{\mathbf{T}}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(4)} = d_2\underline{\mathbf{T}}, \quad (9.7.59)$$

а граничные условия (9.7.49) в форме

$$c_2\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} + a_2\underline{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}_{(n)}, \quad a_2\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} + d_2\underline{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\mu}_{(n)}. \quad (9.7.60)$$

Нетрудно найти выражения для $\underline{\mathbf{T}}_*$ и $|\underline{\mathbf{T}}|$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}_* &= [2(1 + \xi)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n} \cdot \nabla - (1 + \xi)\mathbf{n}\nabla - 2\xi(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n} \cdot \nabla + \xi[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\ |\underline{\mathbf{T}}| &= [2(1 + \xi)\mathbf{nn} \overset{2}{\otimes} \nabla\nabla - \xi\Delta]\mathbf{n} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (9.7.61)$$

Считая, что $c_2d_2 - a_2^2 \neq 0$ и решая систему уравнений (9.7.60) относительно $\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}$ и $\underline{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$, получим

$$\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} = (c_2d_2 - a_2^2)^{-1}(d_2\mathbf{P}_{(n)} - a_2\boldsymbol{\mu}_{(n)}), \quad \underline{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi} = (c_2d_2 - a_2^2)^{-1}(c_2\boldsymbol{\mu}_{(n)} - a_2\mathbf{P}_{(n)}). \quad (9.7.62)$$

Умножая каждое равенство (9.7.62) слева на $\underline{\mathbf{T}}_*^T$ ($\underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{E}}|\underline{\mathbf{T}}|$) будем иметь

$$\begin{aligned} |\underline{\mathbf{T}}|\mathbf{u} &= (c_2d_2 - a_2^2)^{-1}\underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot (d_2\mathbf{P}_{(n)} - a_2\boldsymbol{\mu}_{(n)}), \\ |\underline{\mathbf{T}}|\boldsymbol{\varphi} &= (c_2d_2 - a_2^2)^{-1}\underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot (c_2\boldsymbol{\mu}_{(n)} - a_2\mathbf{P}_{(n)}). \end{aligned}$$

9.7.4 Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях

С целью сокращения письма рассмотрим материал, обладающий центром симметрии. Тогда в случае статики или квазистатики, например, из (9.7.26) будем иметь уравнения

$$Q_1^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{u} + \mathbf{S}^* = 0, \quad Q_3^*(Q_2^*Q_4^* + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* = 0, \quad (9.7.63)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= 2\alpha Q_1^*(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m}) + [\underline{\mathbf{E}}Q_1^*Q_4^* - (dQ_4^* - 4\alpha^2)\nabla\nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}), \\ \mathbf{H}^* &= 2\alpha Q_3^*(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F}) + [\underline{\mathbf{E}}Q_2^*Q_3^* - (mQ_2^* - 4\alpha^2)\nabla\nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}), \\ Q_1^* &= (b + d)\Delta, \quad Q_2^* = b\Delta, \quad Q_3^* = (g + m)\Delta - l, \quad Q_4^* = g\Delta - l, \\ d &= \lambda + \mu - \alpha, \quad l = 4\alpha, \quad b = \mu + \alpha, \quad m = \gamma + \delta - \beta, \quad g = \delta + \beta. \end{aligned} \quad (9.7.64)$$

Нетрудно заметить, что, учитывая соответствующие обозначения из (9.7.64) уравнения (9.7.63) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\Delta^2[(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta - 4\alpha\mu]\mathbf{u} + \mathbf{S}^* &= 0, \\ \Delta[(\gamma + 2\delta)\Delta - 4\alpha][(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta - 4\alpha\mu]\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.65)$$

Отсюда, осуществляя простые выкладки, получим

$$\begin{aligned} [(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta^3 - 4\alpha\mu(\lambda + 2\mu)\Delta^2]\mathbf{u} + \mathbf{S}^* &= 0, \\ \{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)\Delta^3 - 4\alpha[\mu(\gamma + 2\delta) + (\mu + \alpha)(\delta + \beta)]\Delta^2 + 16\alpha^2\mu\Delta\}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^* &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.66)$$

Легко видеть, что при $\alpha = 0$, т.е. в случае редуцированной среды из (9.7.63) (или из (9.7.65)) получим следующие уравнения:

$$\Delta^2\mathbf{u} + \mathbf{G} = 0, \quad \Delta^2\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H} = 0, \quad (9.7.67)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)}[\underline{\mathbf{E}}(\lambda + 2\mu)\Delta - (\lambda + \mu)\nabla\nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{(\delta + \beta)(\gamma + 2\delta)}[\underline{\mathbf{E}}(\gamma + 2\delta)\Delta - (\gamma + \delta - \beta)\nabla\nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (9.7.68)$$

Следует заметить, что первое из уравнений (9.7.67) — классическое уравнение, а второе уравнение имеет аналогичный вид. Разница — только в коэффициентах. Значит, так как мы можем найти аналитическое решение классического уравнения (см. выше случаи призматических тел), то мы найдем аналитические решения и уравнений (9.7.67) для редуцированной среды, ибо в последнем случае они выписываются по аналогии. С целью сокращения письма на этом останавливаться не будем. Однако, заметим, что при отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала (хотя, и при присутствии объемных нагрузок они не сложно зависят от материальных констант). Этот факт наводит на мысль о том, что эти уравнения можно использовать для идентификации материальных констант редуцированной среды. Для решения этой проблемы, скорее всего, достаточно выписать общие решения этих уравнений, а затем рассматривать подходящие простые краевые задачи. Более того, можно ставить эксперименты над подходящими образцами, сделанными из того или иного материала, удобного с точки зрения экспериментирования.

9.7.5 Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений

Рассмотрим призматическое тело постоянной толщины $2h$. В качестве базовой плоскости, как и выше, возьмем срединную плоскость. Тогда, учитывая представление лапласиана (см. вторую формулу (9.6.18)), для Δ^2 и Δ^3 будем иметь выражения

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \bar{\Delta}^2 + 2h^{-2}\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}\partial_3^4, & \bar{\Delta} &= g^{PQ}\partial_P\partial_Q, \\ \Delta^3 &= \bar{\Delta}^3 + 3h^{-2}\bar{\Delta}^2\partial_3^2 + 3h^{-4}\bar{\Delta}\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6.\end{aligned}$$

В силу последних формул и представления лапласиана (см. вторую формулу (9.6.18)) уравнения (9.7.66) для теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях можно записать в виде

$$\begin{aligned}[\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\mathbf{u} + \mathbf{S}^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6]\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}^{**} &= 0;\end{aligned}\quad (9.7.69)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{**} &= \frac{\mathbf{S}^*}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, & \mathbf{H}^{**} &= \frac{\mathbf{H}^*}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, & A &= -\frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, \\ B &= -\frac{4\alpha[\mu(\gamma + 2\delta) + (\mu + \alpha)(\delta + \beta)]}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}, & C &= \frac{16\alpha^2\mu}{(\gamma + 2\delta)(\mu + \alpha)(\delta + \beta)}.\end{aligned}\quad (9.7.70)$$

Применяя к уравнениям (9.7.69) оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), найдем для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$\begin{aligned}[\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta}]\boldsymbol{\varphi}^{(k)} + h^{-2}[(3\bar{\Delta} + 2B)\bar{\Delta} + C]\boldsymbol{\varphi}^{(k)''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + B)\boldsymbol{\varphi}^{(k)IV} + h^{-6}\boldsymbol{\varphi}^{(k)VI} + \mathbf{H}^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2]\mathbf{u}^{(k)} + h^{-2}(3\bar{\Delta} + 2A)\bar{\Delta}\mathbf{u}^{(k)''} + h^{-4}(3\bar{\Delta} + A)\mathbf{u}^{(k)IV} + h^{-6}\mathbf{u}^{(k)VI} + \mathbf{S}^{**} &= 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}\quad (9.7.71)$$

Имея уравнения (9.7.71), нетрудно получить системы уравнений различного приближения. В самом деле, считая, что моменты в (9.7.71) рассматриваются относительно системы полиномов Лежандра, в силу (9.6.21), (9.6.23) и получаемой на основании (4.2.24) формулы

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(n)VI}(x') &= (2n + 1)[(2n + 11)(2n + 9)(2n + 7)(2n + 5)(2n + 3)\mathbf{u}^{(n+6)} + \\ &+ 6(2n + 13)(2n + 11)(2n + 9)(2n + 7)(2n + 5)\mathbf{u}^{(n+8)} + \\ &+ 21(2n + 15)(2n + 13)(2n + 11)(2n + 9)(2n + 7)\mathbf{u}^{(n+10)} + \\ &+ 56(2n + 17)(2n + 15)(2n + 13)(2n + 11)(2n + 9)\mathbf{u}^{(n+12)} + \\ &+ 126(2n + 19)(2n + 17)(2n + 15)(2n + 13)(2n + 11)\mathbf{u}^{(n+14)} + \dots] = \\ &= (2n + 1)\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+4}^5 (2n + 2k + 1)(2n + 2k + 3)(2n + 2k + 5)(2n + 2k + 7)(2n + 2k + 9)\mathbf{u}^{(n+2k+4)} = \\ &= (2n + 1)\sum_{k=1}^{\infty} C_{k+4}^5 \prod_{s=1}^5 (2n + 2k + 2s - 1)\mathbf{u}^{(n+2k+4)},\end{aligned}\quad (9.7.72)$$

где $n \in \mathbb{N}_0$, будем иметь расщепленную на четыре системы следующую систему уравнений приближения порядка $N = 8$:

$$L_{(\alpha)}\mathbf{U}_{(\alpha)} + \boldsymbol{\Phi}_{(\alpha)} = \mathbf{O}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (9.7.73)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \\ \mathbf{u}^{(6)} \\ \mathbf{u}^{(8)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(5)} \\ \mathbf{u}^{(7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \\ \mathbf{u}^{(6)} \\ \mathbf{u}^{(8)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(5)} \\ \mathbf{u}^{(7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_{(1)} = \mathbf{O}_{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{** (0)} \\ \mathbf{S}^{** (2)} \\ \mathbf{S}^{** (4)} \\ \mathbf{S}^{** (6)} \\ \mathbf{S}^{** (8)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{** (1)} \\ \mathbf{S}^{** (3)} \\ \mathbf{S}^{** (5)} \\ \mathbf{S}^{** (7)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{** (0)} \\ \mathbf{H}^{** (2)} \\ \mathbf{H}^{** (4)} \\ \mathbf{H}^{** (6)} \\ \mathbf{H}^{** (8)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{** (1)} \\ \mathbf{H}^{** (3)} \\ \mathbf{H}^{** (5)} \\ \mathbf{H}^{** (7)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_{(2)} = \mathbf{O}_{(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$L_{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{03}\bar{\Delta}^2 + a_{04}\bar{\Delta} & a_{05}\bar{\Delta}^2 + a_{06}\bar{\Delta} + a_{07} & a_{08}\bar{\Delta}^2 + a_{09}\bar{\Delta} + a_{10} & a_{011}\bar{\Delta}^2 + a_{012}\bar{\Delta} + a_{013} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{26}\bar{\Delta}^2 + a_{27}\bar{\Delta} & a_{28}\bar{\Delta}^2 + a_{29}\bar{\Delta} + a_{210} & a_{211}\bar{\Delta}^2 + a_{212}\bar{\Delta} + a_{213} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{49}\bar{\Delta}^2 + a_{410}\bar{\Delta} & a_{411}\bar{\Delta}^2 + a_{412}\bar{\Delta} + a_{413} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{612}\bar{\Delta}^2 + a_{613}\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix}, \quad (9.7.74)$$

$$\begin{aligned} a_{03} &= 9h^{-2}, \quad a_{04} = 6Ah^{-2}, \quad a_{05} = 30h^{-2}, \quad a_{06} = 20Ah^{-2} + 315h^{-4}, \quad a_{07} = 105Ah^{-4}, \\ a_{08} &= 63h^{-2}, \quad a_{09} = 42Ah^{-2} + 3780h^{-4}, \quad a_{10} = 1260Ah^{-4} + 10395h^{-6}, \quad a_{11} = 108h^{-2}, \\ a_{12} &= 72Ah^{-2} + 20790h^{-4}, \quad a_{13} = 6930Ah^{-4} + 270270h^{-6}, \quad a_{26} = 105h^{-2}, \quad a_{27} = 70Ah^{-2}, \\ a_{28} &= 270h^{-2}, \quad a_{29} = 180Ah^{-2} + 10395h^{-4}, \quad a_{210} = 3465Ah^{-4}, \quad a_{211} = 495h^{-2}, \\ a_{212} &= 330Ah^{-2} + 77220h^{-4}, \quad a_{213} = 25740Ah^{-4} + 675675h^{-6}, \quad a_{49} = 297h^{-2}, \\ a_{410} &= 198Ah^{-2}, \quad a_{411} = 702h^{-2}, \quad a_{412} = 468Ah^{-2} + 57915h^{-4}, \quad a_{413} = 19305Ah^{-4}, \\ a_{612} &= 585h^{-2}, \quad a_{613} = 390Ah^{-2}; \end{aligned}$$

$$L_{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{13}\bar{\Delta}^2 + a_{14}\bar{\Delta} & a_{15}\bar{\Delta}^2 + a_{16}\bar{\Delta} + a_{17} & a_{18}\bar{\Delta}^2 + a_{19}\bar{\Delta} + a_{110} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{36}\bar{\Delta}^2 + a_{37}\bar{\Delta} & a_{38}\bar{\Delta}^2 + a_{39}\bar{\Delta} + a_{310} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 & a_{59}\bar{\Delta}^2 + a_{510}\bar{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (9.7.75)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= 45h^{-2}, \quad a_{14} = 30Ah^{-2}, \quad a_{15} = 126h^{-2}, \quad a_{16} = 84Ah^{-2} + 2835h^{-4}, \quad a_{17} = 945Ah^{-4}, \\ a_{18} &= 243h^{-2}, \quad a_{19} = 162Ah^{-2} + 24948h^{-4}, \quad a_{110} = 8316Ah^{-4} + 135135h^{-6}, \quad a_{36} = 189h^{-2}, \\ a_{37} &= 126Ah^{-2}, \quad a_{38} = 462h^{-2}, \quad a_{39} = 308Ah^{-2} + 27027h^{-4}, \quad a_{310} = 9009Ah^{-4}, \\ a_{59} &= 429h^{-2}, \quad a_{510} = 286Ah^{-2}; \end{aligned}$$

$$L_{(3)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{04}\bar{\Delta}^2 + b_{05}\bar{\Delta} + b_{06} & b_{07}\bar{\Delta}^2 + b_{08}\bar{\Delta} + b_{08} & b_{010}\bar{\Delta}^2 + b_{011}\bar{\Delta} + b_{012} & b_{013}\bar{\Delta}^2 + b_{014}\bar{\Delta} + b_{015} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{27}\bar{\Delta}^2 + b_{28}\bar{\Delta} + b_{29} & b_{210}\bar{\Delta}^2 + b_{211}\bar{\Delta} + b_{212} & b_{213}\bar{\Delta}^2 + b_{214}\bar{\Delta} + b_{215} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{410}\bar{\Delta}^2 + b_{411}\bar{\Delta} + b_{412} & b_{413}\bar{\Delta}^2 + b_{414}\bar{\Delta} + b_{415} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{613}\bar{\Delta}^2 + b_{614}\bar{\Delta} + b_{615} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (9.7.76)$$

$$\begin{aligned}
 b_{04} &= 9h^{-2}, \quad b_{05} = 6Bh^{-2}, \quad b_{06} = 3Ch^{-2}, \quad b_{07} = 30h^{-2}, \quad b_{08} = 20Bh^{-2} + 315h^{-4}, \\
 b_{09} &= 10Ch^{-2} + 105Bh^{-4}, \quad b_{010} = 63h^{-2}, \quad b_{011} = 42Bh^{-2} + 3780h^{-4}, \quad b_{0112} = 21Ch^{-2} + 1260Bh^{-4}, \\
 b_{013} &= 108h^{-2}, \quad b_{014} = 72Bh^{-2} + 20790h^{-4}, \quad b_{015} = 36Ch^{-2} + 6930Bh^{-4} + 270270h^{-6}, \quad b_{27} = 105h^{-2}, \\
 b_{28} &= 70Bh^{-2}, \quad b_{29} = 35Ch^{-2}, \quad b_{210} = 270h^{-2}, \quad b_{211} = 180Bh^{-2} + 10395h^{-4}, \\
 b_{212} &= 90Ch^{-2} + 3465Bh^{-4}, \quad b_{213} = 495h^{-2}, \quad b_{214} = 330Bh^{-2} + 77220h^{-4}, \\
 b_{215} &= 165Ch^{-2} + 25740Bh^{-4} + 675675h^{-6}, \quad b_{410} = 297h^{-2}, \quad b_{411} = 198Bh^{-2}, \quad b_{412} = 99Ch^{-2}, \\
 b_{413} &= 702h^{-2}, \quad b_{414} = 468Bh^{-2} + 57915h^{-4}, \quad b_{415} = 234Ch^{-2} + 19305Bh^{-4}, \\
 b_{613} &= 585h^{-2}, \quad b_{614} = 390Bh^{-2}, \quad b_{615} = 195Ch^{-2};
 \end{aligned}$$

$$L_{(4)} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{14}\bar{\Delta}^2 + b_{15}\bar{\Delta} + b_{16} & b_{17}\bar{\Delta}^2 + b_{18}\bar{\Delta} + b_{19} & b_{110}\bar{\Delta}^2 + b_{111}\bar{\Delta} + b_{112} \\ 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{37}\bar{\Delta}^2 + b_{38}\bar{\Delta} + b_{39} & b_{310}\bar{\Delta}^2 + b_{311}\bar{\Delta} + b_{312} \\ 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} & b_{510}\bar{\Delta}^2 + b_{511}\bar{\Delta} + b_{512} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta} + A)\bar{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (9.7.77)$$

$$\begin{aligned}
 b_{14} &= 45h^{-2}, \quad b_{15} = 30Bh^{-2}, \quad b_{16} = 15Ch^{-2}, \quad b_{17} = 126h^{-2}, \quad b_{18} = 84Bh^{-2} + 2835h^{-4}, \\
 b_{19} &= 42Ch^{-2} + 945Bh^{-4}, \quad b_{110} = 243h^{-2}, \quad b_{111} = 162Bh^{-2} + 24948h^{-4}, \\
 b_{112} &= 81Ch^{-2} + 8316Bh^{-4} + 135135h^{-6}, \quad b_{37} = 189h^{-2}, \quad b_{38} = 126Bh^{-2}, \quad b_{39} = 63Ch^{-2}, \\
 b_{310} &= 462h^{-2}, \quad b_{311} = 308Bh^{-2} + 27027h^{-4}, \quad b_{312} = 154Ch^{-2} + 9009Bh^{-4}, \\
 b_{510} &= 429h^{-2}, \quad b_{511} = 286Bh^{-2}, \quad b_{512} = 143Ch^{-2},
 \end{aligned}$$

а $\mathbf{0}$ — трехкомпонентный нулевой вектор.

Векторы перемещений и вращений имеют выражения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &\approx \bar{\mathbf{u}}^{(0)} + \bar{\mathbf{u}}^{(1)}P_1(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(2)}P_2(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(3)}P_3(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(4)}P_4(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(5)}P_5(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(6)}P_6(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(7)}P_7(x^3) + \bar{\mathbf{u}}^{(8)}P_8(x^3), \\
 \boldsymbol{\varphi} &\approx \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(0)} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}P_1(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}P_2(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(3)}P_3(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(4)}P_4(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(5)}P_5(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(6)}P_6(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(7)}P_7(x^3) + \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(8)}P_8(x^3).
 \end{aligned}$$

Из (9.7.74) — (9.7.77) видно, что $L_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, — верхние треугольные дифференциальные матричные операторы и для их определителей $|L_{(\alpha)}|$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, будем иметь выражения

$$\begin{aligned}
 |L_{(1)}| &= \bar{\Delta}^{10}(\bar{\Delta}^2 + A)^5, \quad |L_{(2)}| = \bar{\Delta}^8(\bar{\Delta}^2 + A)^4, \\
 |L_{(3)}| &= \bar{\Delta}^5(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)^5, \quad |L_{(4)}| = \bar{\Delta}^4(\bar{\Delta}^2 + B\bar{\Delta} + A)^4.
 \end{aligned} \quad (9.7.78)$$

Из (9.7.78) видно, что $|L_{(\alpha)}|$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, отличны от нуля. Поэтому для каждой матрицы $L_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, в силу простых выкладок можно найти их алгебраические дополнения $L_{*(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Тогда, очевидно, будут верны соотношения

$$L_{*(\alpha)}^T L_{(\alpha)} = L_{(\alpha)} L_{*(\alpha)}^T = E_{(\alpha)} |L_{(\alpha)}|, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (9.7.79)$$

где $E_{(1)} = E_{(3)}$ — единичная матрица пятого порядка, а $E_{(2)} = E_{(4)}$ — единичная матрица четвертого порядка.

Применяя оператор $L_{*(\alpha)}^T$ слева к уравнениям (9.7.73) и учитывая (9.7.79), будем иметь следующие расцепленные системы уравнений:

$$|L_{(\alpha)}| \mathbf{U}_{(\alpha)} + L_{*(\alpha)}^T \boldsymbol{\Phi}_{(\alpha)} = \mathbf{O}_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (9.7.80)$$

а отсюда для каждого из моментов $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$ и $\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}$, $k = \overline{0, 8}$, векторов перемещений и вращений по отдельности аналогично (9.6.38) получим уравнение эллиптического типа высокого порядка (уравнения с дифференциальными операторами $|L_{(1)}|$ и $|L_{(3)}|$ имеют 30-ый порядок, а уравнения с дифференциальными операторами $|L_{(2)}|$ и $|L_{(4)}|$ имеют 24-ый

порядок). Если операторы $|L_{(\alpha)}|$ и $L_{*(\alpha)}$ имеют общий множитель, то на него уравнение можно сократить и этим порядок уравнения уменьшить. Для каждого из уравнений (9.7.80), используя метод Векуа [61], можно выписать аналитическое решение. На выписывании аналитических решений останавливаться не будем. При необходимости это сделать несложно.

Следует особо отметить, что к аналитическому решению в зависимости от заданных граничных условий как в классическом, так и в микрополярном случае надо прибавить соответствующее корректирующее слагаемое, обеспечивающее выполнение граничных условий на лицевых поверхностях. Они построены в третьей главе, поэтому здесь на них останавливаться не будем.

9.7.6 Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений при новой параметризации

Пользуясь правилом, описанном в седьмой главе, для получения искомого соотношения многослойного тонкого тела из соответствующего соотношения однослойного тонкого тела при новой параметризации, система уравнений микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины (каждый слой имеет постоянную толщину) в перемещениях и вращениях аналогично (9.7.69) можно представить в виде

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}^3 + (B_s \bar{\Delta} + A_s) \bar{\Delta} + h_s^{-2} [(3\bar{\Delta} + 2B_s) \bar{\Delta} + C_s] \partial_3^2 + h_s^{-4} (3\bar{\Delta} + B_s) \partial_3^4 + h_s^{-6} \partial_3^6] \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}_s^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + A_s \bar{\Delta}^2 + h_s^{-2} (3\bar{\Delta} + 2A_s) \bar{\Delta} \partial_3^2 + h_s^{-4} (3\bar{\Delta} + A_s) \partial_3^4 + h_s^{-6} \partial_3^6] \mathbf{u} + \mathbf{S}_s^{**} &= 0, \quad s = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (9.7.81)$$

где $h_s = \text{const}$ — толщина слоя s ($s = \overline{1, K}$), $\bar{\Delta} = g^{IJ} \partial_I \partial_J$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s^{**} &= \frac{\mathbf{S}_s^*}{(\lambda_s + 2\mu_s)(\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)}, \quad \mathbf{H}_s^{**} = \frac{\mathbf{H}_s^*}{(\gamma_s + 2\delta_s)(\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)}, \quad A_s = -\frac{4\alpha_s \mu_s}{(\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)}, \\ B_s &= -\frac{4\alpha_s [\mu_s(\gamma_s + 2\delta_s) + (\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)]}{(\gamma_s + 2\delta_s)(\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)}, \quad C_s = \frac{16\alpha_s^2 \mu_s}{(\gamma_s + 2\delta_s)(\mu_s + \alpha_s)(\delta_s + \beta_s)}, \quad s = \overline{1, K}. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя к уравнениям (9.7.81) оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева) (или на основании (9.7.71) указанным выше правилом), получим для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}^3 + (B_s \bar{\Delta} + A_s) \bar{\Delta}] \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)} + h_s^{-2} [(3\bar{\Delta} + 2B_s) \bar{\Delta} + C_s] \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)''} + h_s^{-4} (3\bar{\Delta} + B_s) \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)IV} + h_s^{-6} \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)VI} + \mathbf{H}_s^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}^3 + A_s \bar{\Delta}^2] \mathbf{u}_s^{(k)} + h_s^{-2} (3\bar{\Delta} + 2A_s) \bar{\Delta} \mathbf{u}_s^{(k)''} + h_s^{-4} (3\bar{\Delta} + A_s) \mathbf{u}_s^{(k)IV} + h_s^{-6} \mathbf{u}_s^{(k)VI} + \mathbf{S}_s^{**} &= 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad s = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (9.7.82)$$

Наконец, в силу (9.7.80) будут иметь следующие расщепленные системы уравнений:

$$|L_s^{(k)}| \mathbf{U}_s^{(k)} + L_{s*(k)}^T \boldsymbol{\Phi}_s^{(k)} = \mathbf{O}_s^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad s = \overline{1, K}. \quad (9.7.83)$$

В приведенных выше соотношениях s — номер слоя, K — число слоев. Следует отметить, что как в случае однослойного призматического тела, так и в случае многослойного призматического тела для каждого из уравнений (9.7.82), используя метод Векуа [61], можно выписать аналитическое решение. Следовательно, для корректной постановки задач к уравнениям (9.7.82) и (9.7.83) нужно добавить граничные условия в моментах и межслойные контактные условия (см. в седьмой главе). Проблема корректирующего слагаемого и в этом случае решается аналогично сказанному выше. При этом аналитическое решение каждого слоя (кроме первого и последнего) с учетом корректирующих слагаемых можно написать так, что оно удовлетворяло межслойным контактным условиям. Для первого (последнего) слоя аналитическое решение посредством корректирующих слагаемых можно представить так, что оно удовлетворяло граничным условиям на внутренней (внешней) поверхности, а межслойным контактным условиям на внешней (внутренней) поверхности. Следовательно, чем больше порядок приближения, можно полагать, что тем лучше (близко к реальной картине) можно учитывать межслойные контактные условия, что очень важно в теории многослойных конструкций.

9.7.7 Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел с двумя малыми размерами в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений

Рассмотрим призматическое однородное тело с двумя малыми размерами, поперечным сечением которого является прямоугольник со сторонами $2h_1$ и $2h_2$. Используем параметризацию на основе произвольной базовой линии. В качестве базовой линии, возьмем серединную линию (прямую). Нетрудно заметить, что в данном случае будем иметь (см. (5.1.49))

$$\begin{aligned} h_I = \overset{(-)}{h}_I = \overset{(+)}{h}_I = const, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad g_3^I = 0, \quad g_{33} = g_3^3 = \hat{\nu} = 1, \\ g_3^3 = \hat{\nu}^{-1} = 1, \quad g^{11} = h_1^{-2}, \quad g^{22} = h_2^{-2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{33} = 1, \quad N_3 = \partial_3. \end{aligned} \quad (9.7.84)$$

В силу (9.7.84) и (5.2.1) (см. еще (5.2.2)) операторы $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}^2$ и $\hat{\Delta}^3$ будут иметь выражения

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} = \partial_3^2 + \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = g^{PQ} \nabla_P \nabla_Q = h_1^{-2} \partial_1^2 + h_2^{-2} \partial_2^2, \\ \hat{\Delta}^2 = \partial_3^4 + 2\partial_3^2 \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^2, \quad \hat{\Delta}^3 = \partial_3^6 + 3\partial_3^4 \tilde{\Delta} + 3\partial_3^2 \tilde{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^3. \end{aligned} \quad (9.7.85)$$

На основании второй формулы (9.7.85) операторы $\tilde{\Delta}^2$ и $\tilde{\Delta}^3$ можно представить в виде

$$\tilde{\Delta}^2 = h_1^{-4} \partial_1^4 + 2h_1^{-2} h_2^{-2} \partial_1^2 \partial_2^2 + h_2^{-4} \partial_2^4, \quad \tilde{\Delta}^3 = h_1^{-6} \partial_1^6 + 3h_1^{-2} h_2^{-2} (h_1^{-2} \partial_1^2 + h_2^{-2} \partial_2^2) \partial_1^2 \partial_2^2 + h_2^{-6} \partial_2^6. \quad (9.7.86)$$

Если $h = h_1 = h_2$ (сечение — квадрат), то из второй формулы (9.7.85) и (9.7.86) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = h^{-2} (\partial_1^2 + \partial_2^2) = h^{-2} \Delta, \quad \tilde{\Delta}^2 = h^{-4} (\partial_1^4 + 2\partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^4) = h^{-4} \Delta^2, \\ \tilde{\Delta}^3 = h^{-6} [\partial_1^6 + 3(\partial_1^2 + \partial_2^2) \partial_1^2 \partial_2^2 + \partial_2^6] = h^{-6} \Delta^3, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2. \end{aligned} \quad (9.7.87)$$

Запишем теперь уравнения (9.7.66) для рассматриваемого призматического тела с двумя малыми размерами. Нетрудно видеть, что для этого достаточно лапласиан Δ и набла-оператор ∇ , имеющиеся в уравнениях (9.7.66), заменить на $\hat{\Delta}$ и $\hat{\nabla} = \mathbf{r}^3 \partial_3 + \mathbf{r}^P \partial_P$ соответственно. После таких замен будем иметь следующие уравнения:

$$(\hat{\Delta}^3 + A\hat{\Delta}^2)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{S}}^{**} = 0, \quad (\hat{\Delta}^3 + B\hat{\Delta}^2 + C\hat{\Delta})\boldsymbol{\varphi} + \hat{\mathbf{H}}^{**} = 0, \quad (9.7.88)$$

где $A, B, C, \hat{\mathbf{S}}^{**}$ и $\hat{\mathbf{H}}^{**}$ даются формулами (9.7.70). При этом выражения для $\hat{\mathbf{S}}^{**}$ и $\hat{\mathbf{H}}^{**}$ получаются из \mathbf{S}^{**} и \mathbf{H}^{**} , если в \mathbf{S}^* и \mathbf{H}^* (см. (9.7.64)) Δ и ∇ заменить на $\hat{\Delta}$ и $\hat{\nabla}$ соответственно.

Учитывая (9.7.85), уравнения (9.7.88) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [\partial_3^6 + A\partial_3^4 + \partial_3^2(3\partial_3^2 + 2A)\tilde{\Delta} + (3\partial_3^2 + A)\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^3]\mathbf{u} + \hat{\mathbf{S}}^{**} &= 0, \\ \{\partial_3^6 + B\partial_3^4 + [\partial_3^2(3\partial_3^2 + 2B) + C]\tilde{\Delta} + (3\partial_3^2 + B)\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^3\}\boldsymbol{\varphi} + \hat{\mathbf{H}}^{**} &= 0. \end{aligned} \quad (9.7.89)$$

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае для редуцированной среды ($\alpha = 0$) на основании уравнений (9.7.67) получим следующие уравнения:

$$(\partial_3^4 + 2\partial_3^2\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^2)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{G}} = 0, \quad (\partial_3^4 + 2\partial_3^2\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^2)\boldsymbol{\varphi} + \hat{\mathbf{H}} = 0, \quad (9.7.90)$$

где выражения для $\hat{\mathbf{G}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ получаются из выражений для \mathbf{G} и \mathbf{H} (см. (9.7.68)), если в них операторы Δ и ∇ заменить на $\hat{\Delta}$ и $\hat{\nabla}$ соответственно. Следует заметить, что первое из уравнений (9.7.90) — уравнение классической теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами и поперечным сечением в виде прямоугольника. Заметим также, что уравнения (9.7.90), конечно, можно было получить и из (9.7.89) при $\alpha = 0$. Кроме того, видно, что при отсутствии объемных нагрузок уравнения (9.7.90) не зависят от свойств материала.

Теперь не представляет труда получить уравнения для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника, в моментах векторов перемещений и вращений относительно какой-нибудь системы полиномов (Лежандра, Чебышева). В самом деле, нетрудно видеть, что в силу (2.7.26), второй формулы (9.7.85) и (9.7.86) для некоторой тензорной величины $\mathbb{F}(x', x^3)$ аналогично (5.3.8) будем иметь формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\tilde{\Delta}\mathbb{F}) &= h_1^{-2} \mathbb{F}^{(m'',n)} + h_2^{-2} \mathbb{F}^{(m,n'')}, \quad \mathbf{M}(\tilde{\Delta}^2\mathbb{F}) = h_1^{-4} \mathbb{F}^{(m^{IV},n)} + 2h_1^{-2}h_2^{-2} \mathbb{F}^{(m'',n'')} + h_2^{-4} \mathbb{F}^{(m,n^{IV})}, \\ \mathbf{M}(\tilde{\Delta}^3\mathbb{F}) &= h_1^{-6} \mathbb{F}^{(m^{VI},n)} + 3h_1^{-2}h_2^{-2} \left(h_1^{-2} \mathbb{F}^{(m^{IV},n'')} + h_2^{-2} \mathbb{F}^{(m'',n^{IV})} \right) + h_2^{-6} \mathbb{F}^{(m,n^{VI})}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (9.7.91)$$

которые верны для любой системы полиномов (Лежандра, Чебышева).

Применяя к (9.7.89) оператор моментов (m, n) -го порядка какой-нибудь системы полиномов (см. (5.3.1), (5.3.2), (5.3.4)), в силу (9.7.91) получим искомые уравнения в форме

$$\begin{aligned} \partial_3^6 \mathbf{u}^{(m,n)} + A\partial_3^4 \mathbf{u}^{(m,n)} + \partial_3^2(3\partial_3^2 + 2A) \left(h_1^{-2} \mathbf{u}^{(m'',n)} + h_2^{-2} \mathbf{u}^{(m,n'')} \right) + \\ + (3\partial_3^2 + A) \left(h_1^{-4} \mathbf{u}^{(m^{IV},n)} + 2h_1^{-2}h_2^{-2} \mathbf{u}^{(m'',n'')} + h_2^{-4} \mathbf{u}^{(m,n^{IV})} \right) + \\ + h_1^{-6} \mathbf{u}^{(m^{VI},n)} + 3h_1^{-2}h_2^{-2} \left(h_1^{-2} \mathbf{u}^{(m^{IV},n'')} + h_2^{-2} \mathbf{u}^{(m'',n^{IV})} \right) + h_2^{-6} \mathbf{u}^{(m,n^{VI})} + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{S}}^{**}) = 0, \\ \partial_3^6 \boldsymbol{\varphi}^{(m,n)} + B\partial_3^4 \boldsymbol{\varphi}^{(m,n)} + [\partial_3^2(3\partial_3^2 + 2B) + C] \left(h_1^{-2} \boldsymbol{\varphi}^{(m'',n)} + h_2^{-2} \boldsymbol{\varphi}^{(m,n'')} \right) + \\ + (3\partial_3^2 + B) \left(h_1^{-4} \boldsymbol{\varphi}^{(m^{IV},n)} + 2h_1^{-2}h_2^{-2} \boldsymbol{\varphi}^{(m'',n'')} + h_2^{-4} \boldsymbol{\varphi}^{(m,n^{IV})} \right) + \\ + h_1^{-6} \boldsymbol{\varphi}^{(m^{VI},n)} + 3h_1^{-2}h_2^{-2} \left(h_1^{-2} \boldsymbol{\varphi}^{(m^{IV},n'')} + h_2^{-2} \boldsymbol{\varphi}^{(m'',n^{IV})} \right) + h_2^{-6} \boldsymbol{\varphi}^{(m,n^{VI})} + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{H}}^{**}) = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (9.7.92)$$

Совершенно аналогично (9.7.92) в случае редуцированной среды ($\alpha = 0$) на основании (9.7.90) получим следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно любой системы полиномов (Лежандра, Чебышева) для теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами и поперечным сечением в виде прямоуголь-

ника:

$$\begin{aligned} \partial_3^4 \mathbf{u} + 2\partial_3^2 \left(h_1^{-2(m'',n)} \mathbf{u} + h_2^{-2(m,n'')} \right) + h_1^{-4(m^{IV},n)} \mathbf{u} + 2h_1^{-2} h_2^{-2(m'',n'')} \mathbf{u} + h_2^{-4(m,n^{IV})} \mathbf{u} + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{G}}) &= 0, \\ \partial_3^4 \boldsymbol{\varphi} + 2\partial_3^2 \left(h_1^{-2(m'',n)} \boldsymbol{\varphi} + h_2^{-2(m,n'')} \boldsymbol{\varphi} \right) + h_1^{-4(m^{IV},n)} \boldsymbol{\varphi} + 2h_1^{-2} h_2^{-2(m'',n'')} \boldsymbol{\varphi} + h_2^{-4(m,n^{IV})} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{M}(\hat{\mathbf{H}}) &= 0, \\ m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (9.7.93)$$

Заметим, что первое из (9.7.93) — уравнение в моментах вектора перемещений относительно любой системы полиномов (Лежандра, Чебышева) для классической теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами и поперечным сечением в виде прямоугольника.

Для того, чтобы записать системы уравнений (9.7.92) и (9.7.93) в моментах относительно какой-нибудь системы ортогональных полиномов достаточно входящие в них величины $\mathbf{F}^{(m'',n)}$, $\mathbf{F}^{(m,n'')}$, $\mathbf{F}^{(m^{IV},n)}$, $\mathbf{F}^{(m,n^{IV})}$, $\mathbf{F}^{(m'',n'')}$, $\mathbf{F}^{(m^{VI},n)}$, $\mathbf{F}^{(m,n^{VI})}$, $\mathbf{F}^{(m^{IV},n'')}$ и $\mathbf{F}^{(m'',n^{IV})}$, где $\mathbf{F} = \mathbf{u}$ или $\mathbf{F} = \boldsymbol{\varphi}$, выражать с помощью моментов \mathbf{F} относительно рассматриваемой системы полиномов. Ниже выпишем получаемые легко на основании (9.6.21), (9.6.22), (9.6.23) и (9.7.72) выражения для указанных выше величин через моменты \mathbf{F} относительно системы полиномов Лежандра, а также через значения функции \mathbf{F} и их производных при $x^1 = \pm 1$ и $x^2 = \pm 1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(m'',n)} &= \frac{2m+1}{4} \sum_{p=m}^{\infty} (p-m+2)(p+m+3)[1+(-1)^{m+p}]^{(p+2,n)} \mathbf{F} = \\ &= \frac{2m+1}{2} \left[(\partial_1 \mathbf{F} - (-1)^m \partial_1 \mathbf{F}) - (\mathbf{F}^{(+,n)} + (-1)^m \mathbf{F}^{(-,n)}) P'_m(1) \right] + \mathbf{F}^{(m'',n)}, \\ \mathbf{F}^{(m'',n)} &= (2m+1) \sum_{p=0}^{[(m-2)/2]} (p+1)(2m-2p-1) \mathbf{F}^{(m-2p-2,n)}, \end{aligned} \quad (9.7.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(m,n'')} &= \frac{2n+1}{4} \sum_{q=n}^{\infty} (q-n+2)(q+n+3)[1+(-1)^{n+q}]^{(m,q+2)} \mathbf{F} = \\ &= \frac{2n+1}{2} \left[(\partial_2 \mathbf{F} - (-1)^n \partial_2 \mathbf{F}) - (\mathbf{F}^{(m,+)} + (-1)^n \mathbf{F}^{(m,-)}) P'_n(1) \right] + \mathbf{F}^{(m,n'')}, \\ \mathbf{F}^{(m,n'')} &= (2n+1) \sum_{q=0}^{[(n-2)/2]} (q+1)(2n-2q-1) \mathbf{F}^{(m,n-2q-2)}, \end{aligned} \quad (9.7.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(m'',n'')} &= (2m+1)(2n+1) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} pq(2m+2p+1)(2n+2q+1) \mathbf{F}^{(m+2p,n+2q)} = \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \left\{ [(\partial_1 \partial_2 \mathbf{F} - (-1)^n \partial_1 \partial_2 \mathbf{F}) - (-1)^m (\partial_1 \partial_2 \mathbf{F} - (-1)^n \partial_1 \partial_2 \mathbf{F})] - \right. \\ &\quad - [(\partial_1 \mathbf{F} + (-1)^n \partial_1 \mathbf{F}) - (-1)^m (\partial_1 \mathbf{F} + (-1)^n \partial_1 \mathbf{F})] P'_n(1) - \\ &\quad - [(\partial_2 \mathbf{F} + (-1)^m \partial_2 \mathbf{F}) - (-1)^n (\partial_2 \mathbf{F} + (-1)^m \partial_2 \mathbf{F})] P'_m(1) + \\ &\quad \left. + [(\mathbf{F}^{(+,+)} + (-1)^n \mathbf{F}^{(+,-)}) + (-1)^m (\mathbf{F}^{(-,+)} + (-1)^n \mathbf{F}^{(-,-})] P'_m(1) P'_n(1) \right\} + \\ &\quad + \frac{2m+1}{2} \left[(\partial_1 \mathbf{F} - (-1)^m \partial_1 \mathbf{F}) - (\mathbf{F}^{(+,n'')} + (-1)^m \mathbf{F}^{(-,n'')}) P'_m(1) \right] + \\ &\quad + \frac{2n+1}{2} \left[(\partial_2 \mathbf{F} - (-1)^n \partial_2 \mathbf{F}) - (\mathbf{F}^{(m'',+)} + (-1)^n \mathbf{F}^{(m'',-)}) P'_n(1) \right] + \mathbf{F}^{(m'',n'')}, \\ \mathbf{F}^{(m'',n'')} &= (2m+1)(2n+1) \sum_{p=0}^{[m-2]/2} \sum_{q=0}^{[n-2]/2} (p+1)(q+1)(2m-2p-1)(2n-2q-1) \mathbf{F}^{(m-2p-2,n-2q-2)}, \end{aligned} \quad (9.7.96)$$

$$\begin{aligned} {}^{(m,IV,n)}\mathbf{F} &= (2m+1) \sum_{p=1}^{\infty} C_{p+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2m+2p+2s-1) {}^{(m+2p+2,n)}\mathbf{F}, \\ {}^{(m,n^{IV})}\mathbf{F} &= (2n+1) \sum_{q=1}^{\infty} C_{q+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2n+2q+2s-1) {}^{(m,n+2q+2)}\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (9.7.97)$$

$$\begin{aligned} {}^{(m,VI,n)}\mathbf{F} &= (2m+1) \sum_{p=1}^{\infty} C_{p+4}^5 \prod_{s=1}^5 (2m+2p+2s-1) {}^{(m+2p+4,n)}\mathbf{F}, \\ {}^{(m,n^{VI})}\mathbf{F} &= (2n+1) \sum_{q=1}^{\infty} C_{q+4}^5 \prod_{s=1}^5 (2n+2q+2s-1) {}^{(m,n+2q+4)}\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (9.7.98)$$

$$\begin{aligned} {}^{(m,IV,n'')}\mathbf{F} &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} C_{p+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2m+2p+2s-1) \cdot \\ &\quad \cdot (q-n+2)(q+n+3)[1+(-1)^{n+q}] {}^{(m+2p+2,q+2)}\mathbf{F} = \\ &= \frac{2n+1}{2} \left[\left(\partial_2 {}^{(m,IV,+)}\mathbf{F} - (-1)^n \partial_2 {}^{(m,IV,-)}\mathbf{F} \right) - \left({}^{(m,IV,+)}\mathbf{F} + (-1)^n {}^{(m,IV,-)}\mathbf{F} \right) P'_n(1) \right] + {}^{(m,IV,\underline{n}'')}\mathbf{F} = \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{2} \sum_{p=1}^{\infty} C_{p+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2m+2p+2s-1) {}^{(m+2p+2,)}\mathbf{M} \left[\left(\partial_2 {}^{(+)}\mathbf{F} - (-1)^n \partial_2 {}^{(-)}\mathbf{F} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left({}^{(+)}\mathbf{F} + (-1)^n {}^{(-)}\mathbf{F} \right) P'_n(1) \right] + {}^{(m,IV,\underline{n}'')}\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (9.7.99)$$

$${}^{(m,IV,\underline{n}'')}\mathbf{F} = (2m+1)(2n+1) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} C_{p+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2m+2p+2s-1)(q+1)(2n-2q-1) {}^{(m+2p+2,n-2q-2)}\mathbf{F}, \quad (9.7.100)$$

$$\begin{aligned} {}^{(m'',n^{IV})}\mathbf{F} &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (p-m+2)(p+m+3)[1+(-1)^{m+p}] \cdot \\ &\quad \cdot C_{q+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2n+2q+2s-1) {}^{(p+2,n+2q+2)}\mathbf{F} = \\ &= \frac{2m+1}{2} \left[\left(\partial_1 {}^{(+,n^{IV})}\mathbf{F} - (-1)^m \partial_1 {}^{(-,n^{IV})}\mathbf{F} \right) - \left({}^{(+,n^{IV})}\mathbf{F} + (-1)^m {}^{(-,n^{IV})}\mathbf{F} \right) P'_m(1) \right] + {}^{(m'',n^{IV})}\mathbf{F} = \\ &= \frac{(2m+1)(2n+1)}{2} \sum_{q=1}^{\infty} C_{q+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2n+2q+2s-1) {}^{(n+2q+2,)}\mathbf{M} \left[\left(\partial_1 {}^{(+)}\mathbf{F} - (-1)^m \partial_1 {}^{(-)}\mathbf{F} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left({}^{(+)}\mathbf{F} + (-1)^m {}^{(-)}\mathbf{F} \right) P'_m(1) \right] + {}^{(m'',n^{IV})}\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (9.7.101)$$

$${}^{(m'',n^{IV})}\mathbf{F} = (2m+1)(2n+1) \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \sum_{q=1}^{\infty} (p+1)(2m-2p-1) C_{q+2}^3 \prod_{s=1}^3 (2n+2q+2s-1) {}^{(m-2p-2,n+2q+2)}\mathbf{F}. \quad (9.7.102)$$

Учитывая (9.7.94) – (9.7.102), из (9.7.92) получим расщепленную систему уравнений для теории однородных изотропных призматических тонких тел с двумя малыми размерами постоянных толщин, имеющих поперечные сечения в виде прямоугольника, в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра. Следовательно, в силу (9.7.94) – (9.7.97) из (9.7.93) найдем расщепленную систему уравнений для теории редуцированных однородных изотропных призматических тонких тел с двумя малыми размерами постоянных толщин, имеющих поперечные сечения в виде прямоугольника, в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра. При этом уравнения, получаемые из первого уравнения (9.7.93) будут уравнениями для теории классических однородных изотропных призматических тонких тел с двумя малыми размерами постоянных толщин, имеющих поперечные сечения в виде прямоугольника, в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра.

Следует заметить, что (9.7.94) – (9.7.96), (9.7.99) и (9.7.101) представлены как без учета (первые равенства в них), так и с учетом (вторые равенства в них) значений функции

\mathbf{F} и их производных при $x^1 = \pm 1$ и $x^2 = \pm 1$. Следовательно, на основании упомянутых в предыдущем предложении соотношений без учета значений функции \mathbf{F} и их производных при $x^1 = \pm 1$ и $x^2 = \pm 1$ получим искомые уравнения в моментах без учета граничных условий на лицевых поверхностях, а в силу соотношений с их учетом можно вывести искомые уравнения в моментах с учетом граничных условий на лицевых поверхностях. С целью получения систем уравнений в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях ниже выведем некоторые необходимые соотношения.

9.7.8 О граничных условиях физического содержания в теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами

Нетрудно заметить, что граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях в классической теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами в силу (5.3.38) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(\pm)}(x^2, x^3) &= \pm \mathbf{P}_{(1)}^{(\pm)}(x^2, x^3) \quad (P_{1j}^{(\pm)}(x^2, x^3) = \pm P_{(1)j}^{(\pm)}(x^2, x^3)), \\ \mathbf{P}_2^{(\pm)}(x^1, x^3) &= \pm \mathbf{P}_{(2)}^{(\pm)}(x^1, x^3) \quad (P_{2j}^{(\pm)}(x^1, x^3) = \pm P_{(2)j}^{(\pm)}(x^1, x^3)), \end{aligned} \quad (9.7.103)$$

а на торцах можно записать следующим образом:

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{P}_{(\alpha)} = \mathbf{n}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{P}|_{x^3=x_{(\alpha)}^3} = \mathbf{Q}_{(\alpha)}(x^1, x^2), \quad \alpha = 1, 2, \quad (9.7.104)$$

где \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2) — единичный вектор внешней нормали к левому (правому) торцу, $\mathbf{Q}_{(1)}(x^1, x^2)$ ($\mathbf{Q}_{(2)}(x^1, x^2)$) — заданное напряжение, действующее на левый (правый) торец, $(0, 0, x_1^3)$ ($(0, 0, x_2^3)$) — точка пересечения левого (правого) торца с базовой прямой.

Учитывая $\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)$ и $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$, граничные условия на торцах (9.7.104) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(1)3}(x^1, x^2) &= -\mathbf{Q}_{(1)}(x^1, x^2) \quad (P_{(1)3j}(x^1, x^2) = -Q_{(1)j}(x^1, x^2)), \\ \mathbf{P}_{(2)3}(x^1, x^2) &= \mathbf{Q}_{(2)}(x^1, x^2) \quad (P_{(2)3j}(x^1, x^2) = Q_{(2)j}(x^1, x^2)). \end{aligned} \quad (9.7.105)$$

Нетрудно заметить, что в силу симметричности тензора напряжений и граничных условий (9.7.103) в классической теории на граничных линиях (ребрах) лицевых поверхностей должны выполняться условия

$$P_{(1)2}^{+(\pm)}(x^3) = P_{(2)1}^{+(\pm)}(x^3), \quad P_{(1)2}^{-}(\pm)(x^3) = P_{(2)1}^{-}(\pm)(x^3), \quad (9.7.106)$$

а на торцевых ребрах на основании (9.7.105) следующие условия:

$$\begin{aligned} \pm P_{(1)3}^{(\pm)}(x^2, x^3)|_{x^3=x_1^3} &= Q_{(1)1}^{(\pm)}(x^2), \quad \pm P_{(2)3}^{(\pm)}(x^1, x^3)|_{x^3=x_1^3} = Q_{(1)2}^{(\pm)}(x^1), \\ \pm P_{(1)3}^{(\pm)}(x^2, x^3)|_{x^3=x_2^3} &= Q_{(2)1}^{(\pm)}(x^2), \quad \pm P_{(2)3}^{(\pm)}(x^1, x^3)|_{x^3=x_2^3} = Q_{(2)2}^{(\pm)}(x^1). \end{aligned} \quad (9.7.107)$$

Таким образом, с помощью классической теории упругости для тонких тел с двумя малыми размерами и поперечным сечением в виде прямоугольника можно рассматривать те задачи, для которых внешние нагрузки, действующие на тонкое тело, удовлетворяют условиям (9.7.106) и (9.7.107). Другими словами, классическая теория упругости не способна рассматривать задачи для тонких тел с двумя малыми размерами и поперечным сечением в виде прямоугольника при произвольных внешних касательных напряжениях

на лицевых поверхностях и торцах (нормальные напряжения могут быть произвольными).

Легко видеть, что условия, которые имеют место в угловых торцевых точках $A_\alpha(1, 1, x_\alpha^3)$, $B_\alpha(1, -1, x_\alpha^3)$, $C_\alpha(-1, -1, x_\alpha^3)$ и $D_\alpha(-1, 1, x_\alpha^3)$, $\alpha = 1, 2$ (точки при $\alpha = 1$ — угловые точки левого торца, а при $\alpha = 2$ — угловые точки правого торца), выводятся из (9.7.106) и (9.7.107) при $x^3 = x_\alpha^3$, $\alpha = 1, 2$ и определенных значениях x^1 и x^2 (см. указанные выше в круглых скобках координаты этих точек). С целью сокращения письма выписывать их не будем.

Далее на основании закона Гука для изотропного однородного материала и граничных условий (9.7.103) после простых выкладок получим

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{u} &= \left[\frac{\pm 1}{\lambda + 2\mu} P_{(1)1}^{(\pm)} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) \right] \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\pm 1}{\mu} P_{(1)2}^{(\pm)} - \partial_2 u_1 \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\pm 1}{\mu} P_{(1)3}^{(\pm)} - \partial_3 u_1 \right) \mathbf{e}_3, \\ \partial_2 \mathbf{u} &= \left(\frac{\pm 1}{\mu} P_{(2)1}^{(\pm)} - \partial_1 u_2 \right) \mathbf{e}_1 + \left[\frac{\pm 1}{\lambda + 2\mu} P_{(2)2}^{(\pm)} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3) \right] \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\pm 1}{\mu} P_{(2)3}^{(\pm)} - \partial_3 u_2 \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (9.7.108)$$

Следует заметить, что на основании (9.7.108) можно найти выражения для входящих в (9.7.94), (9.7.95), (9.7.96), (9.7.99) и (9.7.101) слагаемых, содержащих значения искомых функций на лицевых поверхностях тонкого тела, с помощью граничных условий на лицевых поверхностях и моменты искомых функций. В таком случае первое уравнение (9.7.93) (уравнение классической теории) можно записать с учетом граничных условий на лицевых поверхностях. Заметим также, что аналогично изложенной выше классической теории можно рассматривать микрополярную теорию, на которой с целью сокращения письма останавливаться не будем. Отметим только, что в отличие от классической теории в микрополярной теории упругости на внешнюю нагрузку дополнительные условия не накладываются.

9.8 Постановки первых краевых задач пятых приближений для классической и микрополярной упругих тонких прямоугольных областей

Постановки этих задач можно получить разными путями из рассмотренных выше постановок первых краевых задач для различных тонких тел. Однако, проще всего их получить из соответствующих постановок первых краевых задач для упругих плоских тонких областей, тонких тел с двумя малыми размерами, тонких тел с одним малым размером при произвольной базовой поверхности (см. соответствующие постановки), а также, вообще говоря, из постановки плоской задачи [160] (см. также [161–164]). Ниже выпишем постановки этих краевых задач в том случае, когда рассматривается упругая тонкая прямоугольная область с одним малым размером ширины $2h$ и длины L (рис. 9.1). Линии $x_1 = h$ и $x_1 = -h$ будем называть лицевыми, а $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ торцевыми линиями.

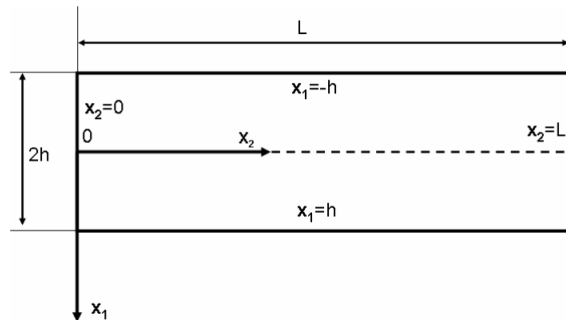


Рис. 9.1: Прямоугольная область

9.8.1 Постановка первой краевой задачи пятого приближения для классической упругой тонкой прямоугольной области

Постановка этой краевой задачи включает в себя: уравнения равновесия в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра пятого приближения для классической среды

$$\begin{aligned}
\mu \partial_2^2 u_1^{(0)} + \frac{\mu}{h} \partial_2 u_2^{(1)} + \frac{\mu}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + \frac{\mu}{h} \partial_2 u_2^{(5)} + \frac{1}{2h} (p_1 - q_1) &= 0, \\
\mu \partial_2^2 u_1^{(1)} - \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} + \frac{3\mu}{h} \partial_2 u_2^{(2)} + \frac{3\mu}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{3}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + u_1^{(3)} + u_1^{(5)}) + \frac{3}{2h} (p_1 + q_1) &= 0, \\
\mu \partial_2^2 u_1^{(2)} - \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(1)} + \frac{5\mu}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + \frac{5\mu}{h} \partial_2 u_2^{(5)} - \frac{15}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(2)} + u_1^{(4)}) + \frac{5}{2h} (p_1 - q_1) &= 0, \\
\mu \partial_2^2 u_1^{(3)} - \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} - \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(2)} + \frac{7\mu}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{7}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + 6u_1^{(3)} + 6u_1^{(5)}) + \frac{7}{2h} (p_1 + q_1) &= 0, \\
\mu \partial_2^2 u_1^{(4)} - \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(1)} - \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + \frac{9\mu}{h} \partial_2 u_2^{(5)} - \frac{9}{h^2} (\lambda + 2\mu) (3u_1^{(2)} + 10u_1^{(4)}) + \frac{9}{2h} (p_1 - q_1) &= 0, \\
\mu \partial_2^2 u_1^{(5)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(2)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{11}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + 6u_1^{(3)} + 15u_1^{(5)}) + \frac{11}{2h} (p_1 + q_1) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(0)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(1)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} + \frac{1}{2h} (p_2 - q_2) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(1)} - \frac{3\mu}{h} \partial_2 u_1^{(0)} + \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(2)} + \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(4)} - \frac{3\mu}{h^2} (u_2^{(1)} + u_2^{(3)} + u_2^{(5)}) + \frac{3}{2h} (p_2 + q_2) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(2)} - \frac{5\mu}{h} \partial_2 u_1^{(1)} + \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} - \frac{15\mu}{h^2} (u_2^{(2)} + u_2^{(4)}) + \frac{5}{2h} (p_2 - q_2) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(3)} - \frac{7\mu}{h} \partial_2 u_1^{(0)} - \frac{7\mu}{h} \partial_2 u_1^{(2)} + \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(4)} - \frac{7\mu}{h^2} (u_2^{(1)} + 6u_2^{(3)} + 6u_2^{(5)}) + \frac{7}{2h} (p_2 + q_2) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(4)} - \frac{9\mu}{h} \partial_2 u_1^{(1)} - \frac{9\mu}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} - \frac{9\mu}{h^2} (3u_2^{(2)} + 10u_2^{(4)}) + \frac{9}{2h} (p_2 - q_2) &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(5)} - \frac{11\mu}{h} \partial_2 u_1^{(0)} - \frac{11\mu}{h} \partial_2 u_1^{(2)} - \frac{11\mu}{h} \partial_2 u_1^{(4)} - \frac{11\mu}{h^2} (u_2^{(1)} + 6u_2^{(3)} + 15u_2^{(5)}) + \frac{11}{2h} (p_2 + q_2) &= 0
\end{aligned} \tag{9.8.1}$$

и граничные условия кинематического содержания на торцах пятого приближения

$$u_I|_{x_2=0} = f_I, \quad u_I|_{x_2=L} = g_I, \quad I = 1, 2, \quad k = \overline{0, 5}. \tag{9.8.2}$$

Здесь $u_I^{(k)}$, $k = \overline{0, 5}$, — моменты компонент вектора перемещений, p_I и q_I — компоненты заданных нагрузок на $x_1 = h$ и $x_1 = -h$ лицевых линиях соответственно, а $f_I^{(k)}$ и $g_I^{(k)}$, $k = \overline{0, 5}$ — моменты компонент заданных на торцах $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ векторов перемещений соответственно.

9.8.2 Постановка первой краевой задачи пятого приближения для микрополярной упругой тонкой прямоугольной области

Постановка этой краевой задачи включает в себя: уравнения равновесия в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра пятого при-

приближения для микрополярной упругой среды

$$\begin{aligned}
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(0)} + \frac{(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(1)} + \frac{(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + \frac{(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(5)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(0)} + \frac{1}{2h} (p_1 - q_1) = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(1)} + \frac{3(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(2)} + \frac{3(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(1)} - \\
 & \quad - \frac{3}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + u_1^{(3)} + u_1^{(5)}) + \frac{3}{2h} (p_1 + q_1) = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(2)} + \frac{5(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + \frac{5(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(5)} - \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(1)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(2)} - \\
 & \quad - \frac{15}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(2)} + u_1^{(4)}) + \frac{5}{2h} (p_1 - q_1) = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(3)} + \frac{7(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(2)} - \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(3)} - \\
 & \quad - \frac{7}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + 6u_1^{(3)} + 6u_1^{(5)}) + \frac{7}{2h} (p_1 + q_1) = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(4)} + \frac{9(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_2^{(5)} - \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(1)} - \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(3)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(4)} - \\
 & \quad - \frac{27}{h^2} (\lambda + 2\mu) u_1^{(2)} - \frac{90}{h^2} (\lambda + 2\mu) u_1^{(4)} + \frac{9}{2h} (p_1 - q_1) = 0, \\
 & (\mu + \alpha) \partial_2^2 u_1^{(5)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(2)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(4)} - \frac{11\lambda}{h} \partial_2 u_2^{(0)} + 2\alpha \partial_2 \varphi^{(5)} - \\
 & \quad - \frac{11}{h^2} (\lambda + 2\mu) (u_1^{(1)} + 6u_1^{(3)} + 15u_1^{(5)}) + \frac{11}{2h} (p_1 + q_1) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(0)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(1)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} + \frac{1}{2h} (p_2 - q_2) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(1)} - \frac{3(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(0)} + \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(2)} + \frac{3\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(4)} - \\
 & \quad - \frac{3}{h^2} (\mu + \alpha) (u_2^{(1)} + u_2^{(3)} + u_2^{(5)}) + \frac{6\alpha}{h} \varphi^{(0)} + \frac{3}{2h} (p_2 + q_2) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(2)} - \frac{5(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(1)} + \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{5\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} - \\
 & \quad - \frac{15}{h^2} (\mu + \alpha) (u_2^{(2)} + u_2^{(4)}) + \frac{10\alpha}{h} \varphi^{(1)} + \frac{5}{2h} (p_2 - q_2) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(3)} - \frac{7(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(2)} - \frac{7(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(4)} + \frac{7\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(0)} - \\
 & \quad - \frac{7}{h^2} (\mu + \alpha) (u_2^{(1)} + 6u_2^{(3)} + 6u_2^{(5)}) + \frac{14\alpha}{h} (\varphi^{(0)} + \varphi^{(2)}) + \frac{7}{2h} (p_2 + q_2) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(4)} - \frac{9(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(1)} - \frac{9(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(3)} + \frac{9\lambda}{h} \partial_2 u_1^{(5)} - \frac{27}{h^2} (\mu + \alpha) u_2^{(2)} - \\
 & \quad - \frac{90}{h^2} (\mu + \alpha) u_2^{(4)} + \frac{18\alpha}{h} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(3)}) + \frac{9}{2h} (p_2 - q_2) = 0, \\
 & (\lambda + 2\mu) \partial_2^2 u_2^{(5)} - \frac{11(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(2)} - \frac{11(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(4)} - \frac{11(\mu - \alpha)}{h} \partial_2 u_1^{(0)} - \\
 & \quad - \frac{11}{h^2} (\mu + \alpha) (u_2^{(1)} + 6u_2^{(3)} + 15u_2^{(5)}) + \frac{22\alpha}{h} (\varphi^{(0)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(4)}) + \frac{11}{2h} (p_2 + q_2) = 0, \\
 & (\delta + \beta) \partial_2^2 \varphi^{(0)} - 2\alpha \partial_2 u_1^{(0)} + \frac{2\alpha}{h} u_2^{(1)} + \frac{2\alpha}{h} u_2^{(3)} + \frac{2\alpha}{h} u_2^{(5)} - 4\alpha \varphi^{(0)} + \frac{1}{2h} (\sigma - \tau) = 0, \\
 & (\delta + \beta) \partial_2^2 \varphi^{(1)} - 2\alpha \partial_2 u_1^{(1)} + \frac{6\alpha}{h} u_2^{(2)} + \frac{6\alpha}{h} u_2^{(4)} - \frac{3(\delta + \beta)}{h^2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(3)} + \varphi^{(5)}) - 4\alpha \varphi^{(1)} + \frac{3}{2h} (\sigma + \tau) = 0,
 \end{aligned} \tag{9.8.3}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta + \beta)\partial_2^2 \overset{(2)}{\varphi} - 2\alpha\partial_2 \overset{(2)}{u_1} + \frac{10\alpha}{h} \overset{(3)}{u_2} + \frac{10\alpha}{h} \overset{(5)}{u_2} - \frac{15(\delta + \beta)}{h^2} (\overset{(2)}{\varphi} + \overset{(4)}{\varphi}) - 4\alpha \overset{(2)}{\varphi} + \frac{5}{2h}(\sigma - \tau) &= 0, \\
 (\delta + \beta)\partial_2^2 \overset{(3)}{\varphi} - 2\alpha\partial_2 \overset{(3)}{u_1} + \frac{14\alpha}{h} \overset{(4)}{u_2} - \frac{7(\delta + \beta)}{h^2} (\overset{(1)}{\varphi} + 6 \overset{(3)}{\varphi} + 6 \overset{(5)}{\varphi}) - 4\alpha \overset{(3)}{\varphi} + \frac{7}{2h}(\sigma + \tau) &= 0, \\
 (\delta + \beta)\partial_2^2 \overset{(4)}{\varphi} - 2\alpha\partial_2 \overset{(4)}{u_1} + \frac{18\alpha}{h} \overset{(5)}{u_2} - \frac{9(\delta + \beta)}{h^2} (3 \overset{(2)}{\varphi} + 10 \overset{(4)}{\varphi}) - 4\alpha \overset{(4)}{\varphi} + \frac{9}{2h}(\sigma - \tau) &= 0, \\
 (\delta + \beta)\partial_2^2 \overset{(5)}{\varphi} - 2\alpha\partial_2 \overset{(5)}{u_1} - \frac{11(\delta + \beta)}{h^2} (\overset{(1)}{\varphi} + 6 \overset{(3)}{\varphi} + 15 \overset{(5)}{\varphi}) - 4\alpha \overset{(5)}{\varphi} + \frac{11}{2h}(\sigma + \tau) &= 0.
 \end{aligned}$$

и граничные условия кинематического содержания на торцах пятого приближения

$$\begin{aligned}
 \overset{(k)}{u}_I|_{x_2=0} &= \overset{(k)}{f}_I, & \overset{(k)}{u}_I|_{x_2=L} &= \overset{(k)}{g}_I, \\
 \overset{(k)}{\varphi}|_{x_2=0} &= \overset{(k)}{\psi}, & \overset{(k)}{\varphi}|_{x_2=L} &= \overset{(k)}{\chi}, & k &= \overline{0, 5}.
 \end{aligned} \tag{9.8.4}$$

Здесь $\overset{(k)}{u}_I$ и $\overset{(k)}{\varphi}$, $k = \overline{0, 5}$, — моменты компонент векторов перемещений и вращений, p_I и q_I — компоненты заданных силовых нагрузок на $x_1 = h$ и $x_1 = -h$ лицевых линиях, σ и τ — заданные моментные нагрузки на $x_1 = h$ и $x_1 = -h$ лицевых линиях, $\overset{(k)}{f}_I$ и $\overset{(k)}{g}_I$, $k = \overline{0, 5}$, — моменты компонент заданных на торцах $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ векторов перемещений, а $\overset{(k)}{\psi}$ и $\overset{(k)}{\chi}$ — моменты заданных на торцах $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ вращений соответственно.

Следует заметить, что из постановок задач (9.8.1), (9.8.2) и (9.8.3), (9.8.4) пятых приближений в моментах нетрудно получить постановки задач меньших приближений. В самом деле, чтобы получить, например, из постановки классической задачи пятого приближения (см. (9.8.1), (9.8.2)) постановку задачи четвертого приближения достаточно из системы уравнений (9.8.1) вычеркнуть шестое и последнее уравнения, а из оставшихся уравнений вычеркнуть слагаемые содержащие моменты пятого порядка неизвестных функций. Также из граничных условий (9.8.2) вычеркнуть те равенства, которые содержат моменты пятого порядка, т.е. k менять от 1 до 4. Аналогично можно получить постановку задачи третьего приближения из постановки задачи четвертого приближения и т.д. Такая же процедура применяется и при получении постановки задачи меньшего приближения из постановки задачи большего приближения в случае микрополярной среды. Таким образом, если имеем постановку задачи пятого приближения в моментах, то можно считать, что имеем постановки задач всех приближений в моментах от нулевого по пятого порядка. Ниже эти постановки задач применяются при численной реализации некоторых простых задач.

9.9 Численная реализация некоторых задач

9.9.1 Задача для равномерно нагруженной с одной стороны двумерной области

Сначала рассмотрим классический случай. В (9.8.1) положим $p_1 = 1000 \text{кГ/см}^2$, $p_2 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $f_I^{(k)} = 0$, $g_I^{(k)} = 0$, $I = 1, 2$, $k = \overline{1, 5}$, т.е. на лицевую линию $x_1 = -h$ действует равномерно распределенная нагрузка (давление), равная 1000кГ/см^2 , а лицевая линия $x_1 = h$ свободна, кроме того, перемещения на торцах равны нулю (рис. 9.2).

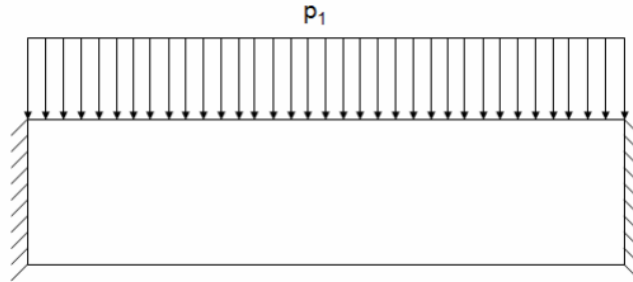


Рис. 9.2: Равномерно нагруженная двумерная область

Пусть $L = 10 \text{см}$ и $h = 1 \text{см}$. Будем считать, что двумерная область стальная. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона стали соответственно равны $E = 210000 \text{кГ/см}^2$ и $\nu = 0,3$. Выразим параметры Ламе через модуль Юнга и коэффициент Пуассона

$$\lambda = -\frac{E\nu}{(2\nu - 1)(\nu + 1)} = 1211538 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(\nu + 1)} = 807692 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

и решим задачи вех шестых приближений, получаемых из (9.8.1), (9.8.2).

На рис. 9.3 изображены "прогибы" средней линии двумерной области $u_1(0, x_2)$, а на рис. 9.4 продольные перемещения $u_2(x_1, 2)$ в сечении $x_2 = 2$ при $N = \overline{0, 5}$.

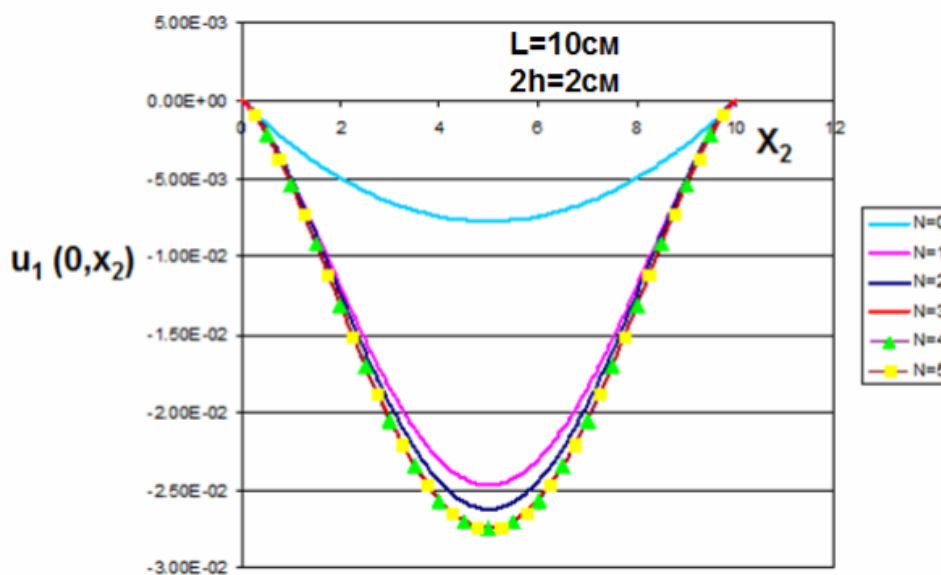


Рис. 9.3: Прогибы средней линии при различных приближениях

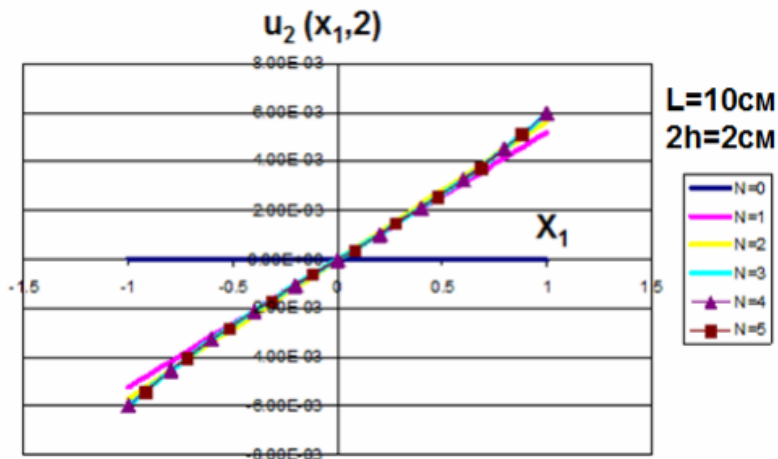


Рис. 9.4: Продольные перемещения при различных приближениях

Из данных рисунков видно, что, начиная с третьего приближения, графики совпадают. Это говорит о достаточно быстрой сходимости рядов Фурье-Лежандра искомых величин.

На рис. 9.5 приводится сравнение решения задачи пятого приближения с решением по теории Бернулли-Эйлера и решением методом конечных элементов (МКЭ) двумерной задачи, когда $2h = 1\text{cm}$ (слева) и $2h = 2\text{cm}$ (справа). Сравняются "прогибы" средней линии. График "прогиба" пятого приближения точно ложится на решение, полученное с помощью МКЭ, а решение по теории Бернулли-Эйлера существенно отличается.

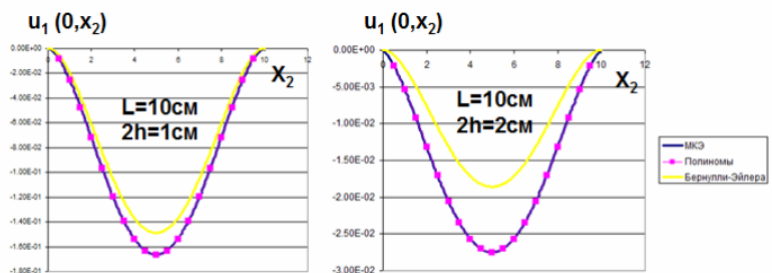


Рис. 9.5: Прогибы средней линии

На следующих трех рисунках (рис. 9.6 – рис. 9.8) отображаются $u_2(x_1, 2)$ — продольные перемещения в сечении $x_2 = 2$, $P_{22}(x_1, 5)$ — нормальные напряжения в сечении $x_2 = 5$, $P_{12}(x_1, 2)$ — касательные напряжения в сечении $x_2 = 2$. Аналогично, наблюдается совпадение решения задачи пятого приближения с решением посредством МКЭ.

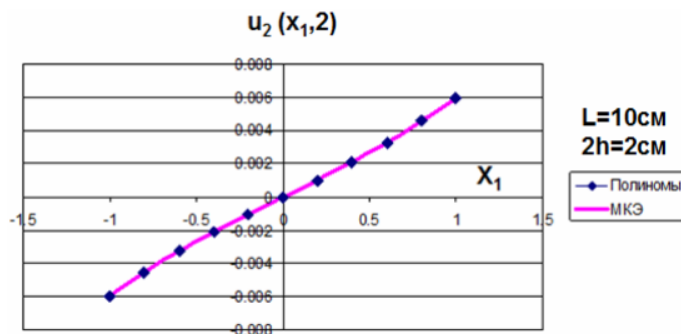


Рис. 9.6: Продольные перемещения

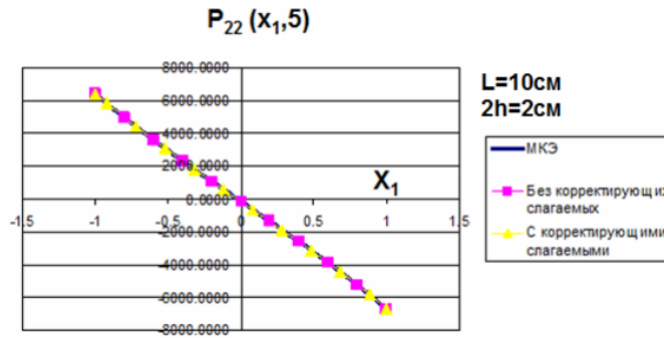


Рис. 9.7: Нормальные напряжения

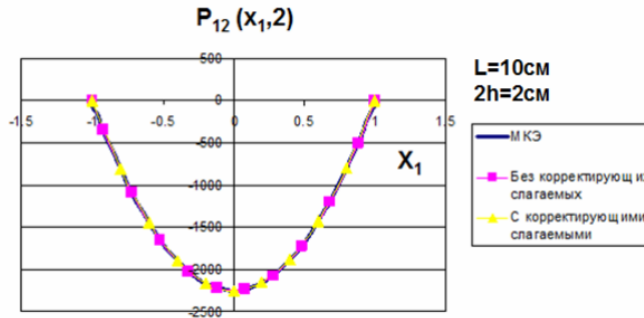


Рис. 9.8: Касательные напряжения

На рис 9.9 приведено сравнение "прогибов" линий $x_1 = h$, $x_1 = 0$ и $x_1 = -h$, когда $2h = 10$ см, т. е. прямоугольная полоса становится квадратом. Как и в предыдущих случаях, решения пятого приближения точно совпадает с решениями МКЭ.

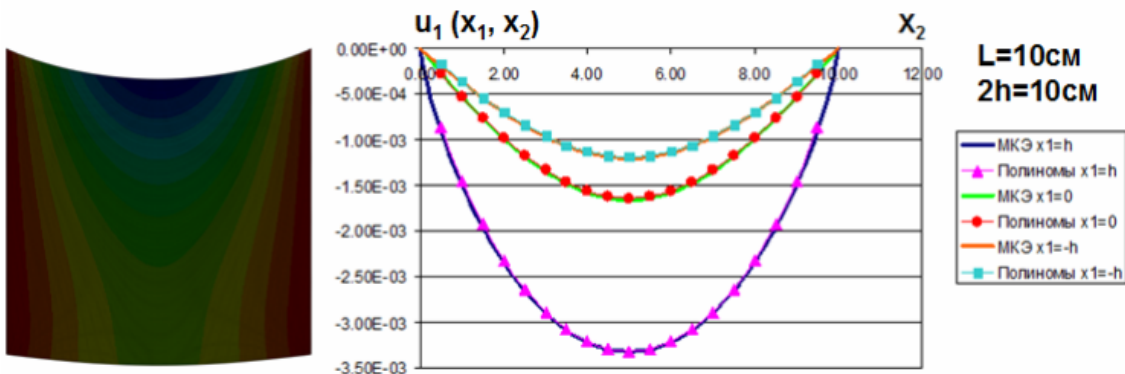


Рис. 9.9: Прогибы различных линий

Теперь рассмотрим микрополярную двумерную область. В (9.8.3) положим $p_1 = 0, 01\text{кГ}/\text{см}^2$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $f_I^{(k)} = 0$, $g_I^{(k)} = 0$, $I = 1, 2$, $k = \overline{1, 5}$, т.е. на лицевую линию $x_1 = -h$ действует равномерно распределенная нагрузка, равная $0.01\text{кГ}/\text{см}^2$, а лицевая линия $x_1 = h$ свободна, кроме того, перемещения и микровращения на торцах равны нулю. Пусть $L = 10$ см и $h = 0, 1$ см, а $E = 300\text{МПа}$, $\nu = 0, 4$, $l_b = 0, 33\text{мм}$, $N^2 = 0, 02$ (значения технических констант для полиуретановой пленки взяты из статьи [477]). Выражая используемые нами материальные константы через технические, получим

$$\lambda = -E\nu/[(2\nu - 1)(\nu + 1)] = 4370\text{кГ}/\text{см}^2, \quad \mu = E/[2(\nu + 1)] = 1093\text{кГ}/\text{см}^2,$$

$$\alpha = -EN^2/[2(\nu N^2 + N^2 - \nu - 1)] = 46\text{кГ}/\text{см}^2, \quad \delta + \beta = 2l_b^2 E/[\nu + 1] = 4, 8\text{кГ}.$$

Решены задачи вех шестых приближений, получаемых из (9.8.3) и (9.8.4).

На рис. 9.10 изображены прогибы средней линии двумерной области $u_1(0, x_2)$, а на рис 9.11 продольные перемещения $u_2(x_1, 2)$ в сечении $x_2 = 2$ при $N = \overline{0, 5}$. Начиная со второго приближения, графики совпадают.

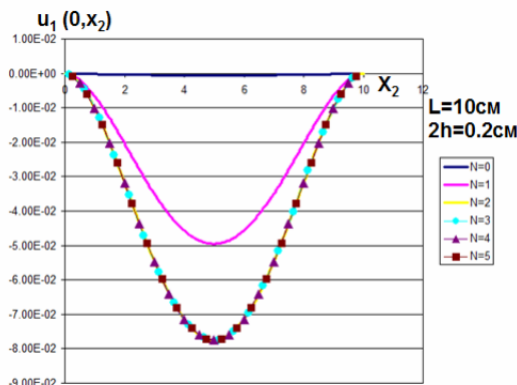


Рис. 9.10: Прогибы средней линии при различных приближениях. Микрополярная среда

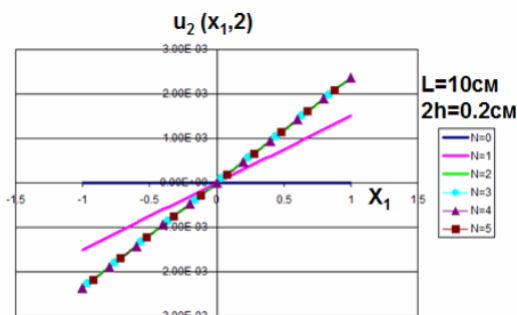


Рис. 9.11: Продольные перемещения при различных приближениях. Микрополярная среда

На рис. 9.12 изображены графики "прогибов"средних линий для решения по классической теории и для решения по микрополярной теории при различных толщинах двумерной области. На левом рисунке изображено решение, когда $2h = 2\text{см}$. На среднем рисунке $2h = 1\text{см}$. При таких толщинах нет существенного отличия между классическим и микрополярным решениями. На правом графике толщина области $2h = 0.2\text{см}$. При таких размерах отличие между микрополярной областью и классической существенно. График, пролегающий выше, соответствует микрополярному случаю, и максимальный прогиб равен $0,078\text{см}$. График, полученный при использовании классического подхода,

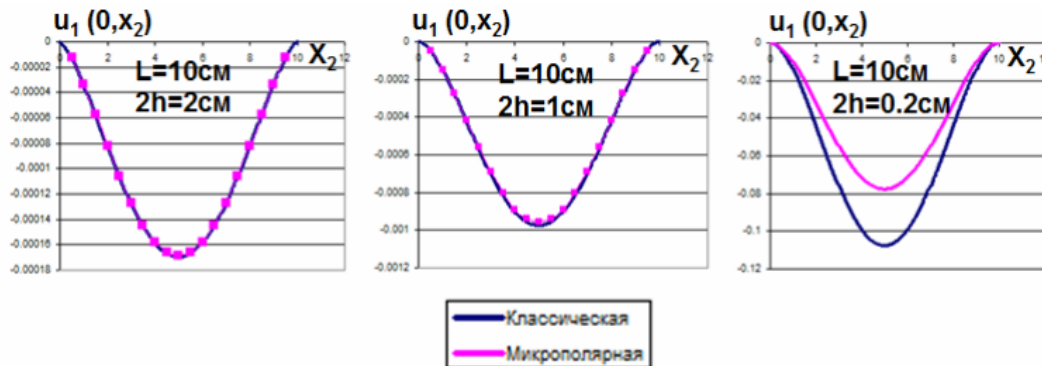


Рис. 9.12: Сравнение классического решения с микрополярным

проходит ниже, и наибольший прогиб равен 0.107см . Можно сделать вывод, что при изгибе тонких тел из некоторых материалов, в том числе из тех, которые представлены в [477], начинают проявляться микрополярные свойства. В рассматриваемом случае разница максимальных прогибов составляет почти 28%.

9.9.2 Задача для равномерно нагруженной с двух сторон двумерной области

Классический случай. В (9.8.1) положим $p_1 = 1000 \text{кГ/см}^2$, $p_2 = 0$, $q_1 = 1000 \text{кГ/см}^2$, $q_2 = 0$, $f_I^{(k)} = 0$, $g_I^{(k)} = 0$, $I = 1, 2$, $k = \overline{0, 5}$, т.е. на лицевые линии $x_1 = h$ и $x_1 = -h$ действуют равномерно распределенные нагрузки, а перемещения на торцах равны нулю (рис. 9.13).

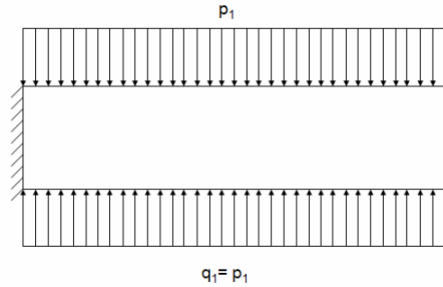


Рис. 9.13: Равномерно нагруженная с двух сторон двумерная область

На рис. 9.14 сравниваются графики прогиба $u_1(h, x_2)$ лицевой линии $x_1 = h$ (полиномы-МКЭ). Они совпадают.

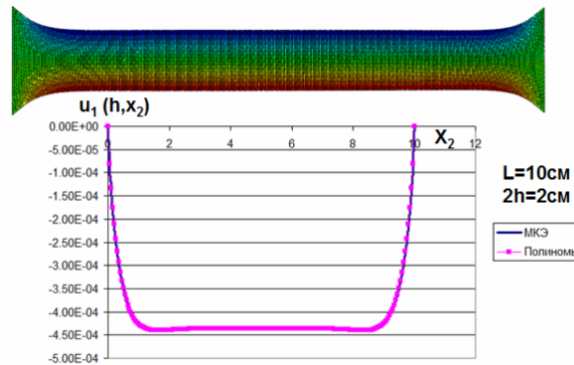


Рис. 9.14: Прогиб лицевой линии

9.9.3 Задача, когда на лицевые линии действуют уравновешенные поперечные сосредоточенные силы

В (9.8.1) положим $p_1 = 3000 \delta(x_2 - L/2)$, $p_2 = 0$, $q_1 = 1500 \delta(x_2 - L/4) + 1500 \delta(x_2 - 3/4L)$, $q_2 = 0$, $f_I^{(k)} = 0$, $g_I^{(k)} = 0$, $I = 1, 2$, $k = \overline{0, 3}$ т.е. на лицевую линию $x_1 = h$ в точке $(x_1, x_2) = (h, L/2)$ действует поперечная сосредоточенная сила 3000кГ/см , а на лицевую линию $x_1 = -h$ в точках $(x_1, x_2) = (-h, L/4)$ и $(x_1, x_2) = (-h, 3/4L)$ действуют поперечные сосредоточенные силы 1500кГ/см (рис. 9.15). Как и в предыдущих примерах, на торцах задается условие равенства нулю перемещений. Здесь $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака.

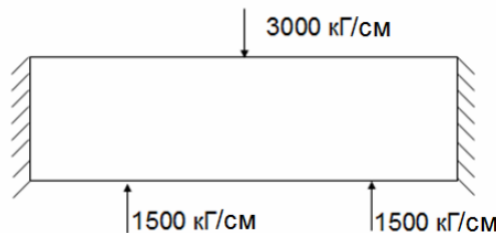


Рис. 9.15: Двумерная область под действием уравновешенных сосредоточенных сил

При решении данной задачи использовалась постановка задачи третьего приближения, получаемая из (9.8.1), (9.8.2). Задача решалась методом Галеркина [148].

На рис. 9.16 представлены поперечные перемещения $u_1(h, x_2)$, $u_1(-h, x_2)$ и $u_1(0, x_2)$ линий $x_1 = h$, $x_1 = -h$ и $x_1 = 0$ соответственно.

На нижнем графике рис. 9.16 решение, полученное при использовании предлагаемой теории, совпадает с решением МКЭ двумерной задачи (изображено поперечное перемещение линии $x_1 = 0$). На двух верхних графиках приводятся поперечные перемещения лицевых линий, которые получены при решении задачи третьего приближения. Установлено, что и на лицевых линиях предлагаемая теория дает тот же ответ, что и МКЭ для двумерной задачи.

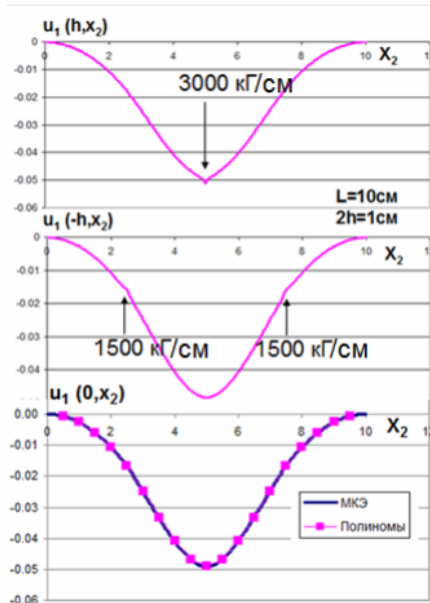


Рис. 9.16: Поперечные перемещения

9.9.4 Задача, когда на лицевые линии действуют сосредоточенные касательные силы

На двумерную область в точках $(x_1, x_2) = (h, L/2)$ и $(x_1, x_2) = (-h, L/2)$ действуют касательные сосредоточенные силы, величина каждой из которых равна 3000 кг/см и имеющие противоположные направления (рис. 9.17).

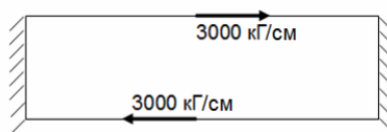


Рис. 9.17: Двумерная область под действием касательных сосредоточенных сил

Рис. 9.18 иллюстрирует совпадение графиков, полученных на основе МКЭ для двумерной задачи и предлагаемой теории на примере поперечного перемещения линии $x_1 = 0$.

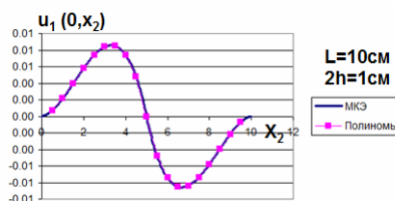


Рис. 9.18: Поперечные перемещения

9.9.5 Задача для двухслойной двумерной области

Рассмотрим двухслойную двумерную область (рис. 9.19). Каждый из слоев имеет толщину $2h = 1\text{см}$ и длину $L = 10\text{см}$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона первого слоя равны $E_1 = 2.1E6 \text{ кГ/см}^2$ и $\nu_1 = 0.3$, а второго слоя $E_2 = 7E6 \text{ кГ/см}^2$ и $\nu_2 = 0.2$ соответственно. На лицевую линию второго слоя действует равномерно распределенная нагрузка 1000кГ/см^2 . Перемещения на торцах равны нулю. Рассматривается случай идеального контакта.

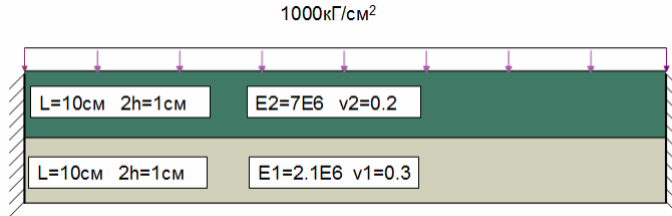


Рис. 9.19: Двухслойная двумерная область

Постановку задачи, например, пятого приближения рассматриваемой двухслойной конструкций можно получить из соответствующей постановки задачи многослойной конструкций, приведенной в седьмой главе или из соответствующей постановки задач для однослойной области описанным в седьмой главе правилом. В частности, искомую постановку задачи для двухслойной конструкций можно получить из (9.8.1) и (9.8.2) если входящие в эту постановку задачи величины снабжать еще индексом (α) , который обозначает номер слоя и придать этому индексу значения от 1 до N , где N — число слоев. В рассматриваемом случае $N = 2$, т.е. $\alpha = 1, 2$. Кроме того, следует добавить межслойные контактные условия в зависимости от типа контакта. Таким образом, величины u_I, p_I, q_I, f_I и $g_I, I = 1, 2$, входящие в (9.8.1) и (9.8.2), следует заменить на $u_{(\alpha)I}, p_{(\alpha)I}, q_{(\alpha)I}, f_{(\alpha)I}$ и $g_{(\alpha)I}, I = 1, 2, \alpha = 1, 2$, где, конечно, $p_{(2)I}$ — компоненты заданной нагрузки на внешней лицевой поверхности, $q_{(1)I}$ — компоненты заданной нагрузки на внутренней лицевой поверхности, а $p_{(1)I}$ и $q_{(2)I}$ — межслойные контактные силы. Очевидно, в рассматриваемом случае условия полного (идеального) контакта можно записать в виде $p_{(1)I} = -q_{(2)I}$ и $u_{(1)I}^{(+)} = u_{(2)I}^{(-)}, I = 1, 2$.

Задача была решена при следующих условиях:

$$p_{(2)1} = 1000 \text{ кГ/см}^2, \quad p_{(2)2} = 0, \quad q_{(1)1} = 0, \quad q_{(1)2} = 0, \quad f_{(\alpha)I}^{(k)} = 0, \quad g_{(\alpha)I}^{(k)} = 0, \quad I, \alpha = 1, 2, \quad k = \overline{0, 5}.$$

На рис. 9.20 изображены поперечные перемещения линии $x_1 = h$ второго слоя, линии контакта и линии $x_1 = -h$ первого слоя. Полученные с помощью полиномами решения совпадают с решениями, полученными МКЭ двумерной задачи.

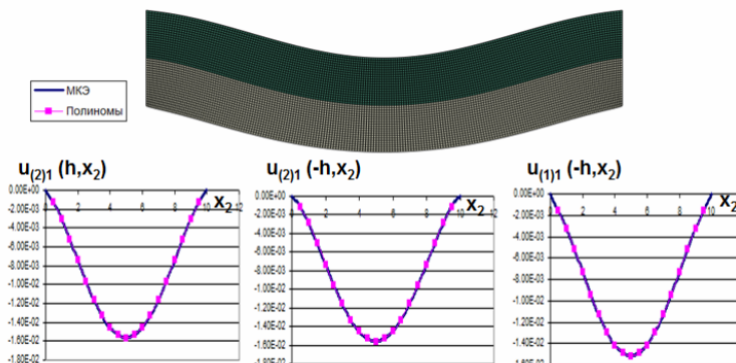


Рис. 9.20: Поперечные перемещения

На рис. 9.21 приводятся графики нормальных и касательных напряжений на линии контакта, полученные при решении задачи с помощью предлагаемой теории. Они нарисованы красным цветом. Кроме того, фиолетовым и синим цветом изображены графики нормальных и касательных напряжений на линиях, которые находятся на расстоянии 0.05 см сверху и снизу от линии контакта. Фиолетовый и синий графики получены путем решения МКЭ двумерной задачи.

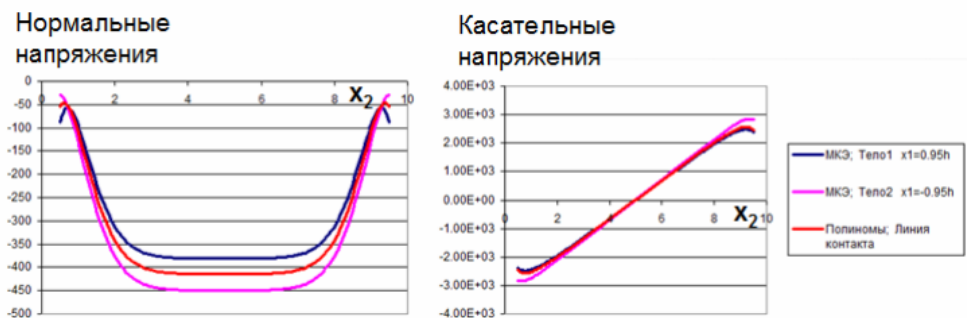


Рис. 9.21: Нормальные и касательные напряжения на линии контакта

Наблюдается хорошая корреляция между решениями предлагаемой теорией и решениями МКЭ. Графики, полученные при решении задачи посредством предлагаемой теории, расположены примерно посередине графиков, полученных путем решения МКЭ двумерной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОНОГРАФИИ СВОДЯТСЯ К СЛЕДУЮЩЕМУ:

1. Предложены различные параметризации областей однослойного и многослойного тонких тел. Создан новый тензорный аппарат для полного описания предложенных параметризаций и введен аппарат дифференциальных операторов для теорий тонких тел. Сформулированы фундаментальные теоремы для областей тонких тел при этих параметризациях;

2. Получены рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева, изменяемые при построении различных вариантов теорий тонких тел;

3. Построена теория моментов относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Получены системы уравнений движения и притока тепла и ОС физического и теплового содержания в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах. При этом получены системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах как для классической (относительно тензора напряжений), так и для микрополярной среды (относительно тензоров напряжений и моментных напряжений);

4. На основании развитого метода ортогональных полиномов (Лежандра и Чебышева) построены новые варианты теорий тонких деформируемых твердых тел (однослойных и многослойных тонких трехмерных тел с одним малым размером и с двумя малыми размерами, а также тонких плоских областей с одним малым размером) при различных параметризациях областей этих тел, среди которых новая параметризация более доступная к экспериментальному изучению;

5. Из вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенных вариационных принципов типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из последних выведены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. При этом для микрополярной теории многослойных тонких тел, как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии, получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера, так как из них легко выводятся остальные (Лагранжа, Кастильяно). Доказаны теоремы о минимуме стационарной точки лагранжиана и максимуме стационарной точки кастильяниана, а также теорема о единственности обобщенного решения краевых задач;

6. Даны постановки связанной и несвязанной динамических задач в моментах для тонких тел. Построены корректирующие слагаемые, позволяющие удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях. По способу В.В.Понятовского найдены различные выражения для компонент тензора напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям. Доказано, что способ В.В.Понятовского эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов;

7. Исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров напряжений и моментных напряжений. Даны постановки задач. Даны сравнения уравнений некоторых теорий. Сформулирована кинематическая гипотеза для теории тонких тел;

8. Найдены обратные тензоры-операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения, позволяющие расцеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному

тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях как для изотропных однородных материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии. В этих случаях получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды (при этом уравнение относительно вектора перемещений совпадает с уравнением классической теории, а уравнение относительно вектора вращений имеет аналогичный вид. Кроме того, при отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала, что наводит на мысль, что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды). Построен также обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды. Выявлены случаи, при которых легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения;

9. Из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения статической (квазистатической) задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае и в перемещениях и вращениях в микрополярном случае. Из последних систем уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных векторных функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с учетом этих условий. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них — система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функций. На основании найденного обратного оператора к оператору любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Используя метод И.Н.Векуа для решения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение;

10. Расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов (Лежандра, Чебышева) получены для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника. Аналогичные уравнения получены и для редуцированной среды, содержащие уравнение классической среды;

11. Выведены расщепленные системы уравнений статической (квазистатической) задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений, из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Для этой системы аналогично однослойному призматическому телу, используя метод И.Н.Векуа, можно выписать аналитическое решение. Аналитическое решение, конечно, можно выписать и для уравнений редуцированной среды;

12. Приведены решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области (полосы) с защемленными краями при различных нагрузках, а также о двуслойной двумерной области с защемленными краями.

Список литературы

1. *Абдуллаев Ф.Х., Хабидуллаев П.К.* Динамика солитонов в неоднородных конденсированных средах. //Ташкент, изд-во "ФАН 1986.
2. *Алексеев А.Е.* Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра// ПМТФ. 1994. Т. 35. №4. С. 137–147.
3. *Алексеев А.Е.* Изгиб трехслойной ортотропной балки// ПМТФ. 1995. Т. 36. №3. С. 158–166.
4. *Алексеев А.Е.* Итерационный метод решения задач деформирования слоистых конструкций с учетом проскальзывания слоев// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 170–174.
5. *Алексеев А.Е., Алехин В.В., Аннин Б.Д.* Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела// ПМТФ. 2001. Т. 42. №6. С. 136–141.
6. *Алексеев А.Е., Аннин Б.Д.* Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения// ПМТФ. 2003. Т. 44. №3. С. 157–163.
7. *Алексеев А.Е., Демешкин А.Г.* Об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите// ПМТФ. 2003. Т. 44. №4. С. 151–158.
8. *Алумяэ Н.А.* Теория упругих оболочек и пластинок// Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. С. 227–266.
9. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
10. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин// Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 65–72.
11. *Альтенбах Х., Жилин П.А.* Общая теория упругих простых оболочек// Успехи механика. 1988. Т. 11. №4. С. 107–147.
12. *Альтенбах Х.* Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций. Обзор// Механика композитных материалов. 1998. №3. С. 333–348.
13. *Амбарцумян С.А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек// Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 5. С. 69–77.
14. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз. 1961. 384 с.
15. *Амбарцумян С.А.* Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек// Механика полимеров. 1970. №5. С. 884–896.
16. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
17. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
18. *Амбарцумян С.А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.
19. *Амосов А.А.* Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит. Дисс. док. физ.-мат. наук/ ТашПИ им. А.Р.Беруни. Ташкент: 1990. 343 с.
20. *Апсельм А.И., Порфирьева Н.Н.* Ориентационно-трансляционные волны в молекулярных кристаллах. // ЖЭТФ. 1949. Т. Л9. №5. С. 438–446.

21. Атоян А. А., Саркисян С. О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. №2. С. 18–33.
22. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц// Физика твердого тела. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
23. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела// Физика твердого тела. 1964. Т. 6. Вып. 9. С. 2689–2699.
24. Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой// Успехи механики. Т. 1. 2002. №3. С. 130–176.
25. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Сильно нелинейная теория формирования наноструктуры вследствие упругих и неупругих деформаций кристаллических тел // МТТ. №5. 2007.
26. Баскаков В.А. Анализ распространения и динамического воздействия ударных волн на деформируемое твердое тело. Дисс. док. физ.-мат. наук. 1991. 395 с.
27. Баскаков В.А., Бестужева Н.П., Кончакова Н.А. Линейная динамическая теория термоупругих сред с микроструктурой. Воронеж. Изд-во ВГТУ. 2001. 162 с.
28. Бадамылина Э.Р., Эстрин Я.И., Кулагина Г.С., Лурье С.А., Соляев Ю.О. Моделирование аномальных механических свойств полиуретана модифицированного углеродными однослойными нанотрубками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010, т. 16, №4. С. 551–562.
29. Беленков Е.А., Ивановская В.В., Ивановский А.Л. Наноалмазы и родственные углеродные наноматериалы. Компьютерное материаловедение. Екатеринбург: УрО РАН. 2008. 169 с.
30. Белов П.А., Лурье С.А. К общей геометрической теории дефектных сред // Физическая мезомеханика. 2007, т. 10, №6. С. 49–61.
31. Белов П.А., Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007, т. 13, №4. С. 519–536.
32. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 833–848
33. Белов П.А., Гордеев А.Е. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами. Учет адгезионных взаимодействий // Композиты и наноструктуры. 2010, №1. С. 40–46.
34. Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю., Островский Л.А. Нелинейные акустоупругие свойства зернистых сред // Акуст. журн. 1993. Т.39. №1. С. 25–32.
35. Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю. Упругие нелинейные свойства зернистых микронеоднородных сред с иерархической структурой // Акуст. журн. 1997. Т.43. №5. С. 594–599.
36. Бердичевский В.Л. Об уравнениях, описывающих поперечные колебания тонких упругих пластин// Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №6. С. 152–155.
37. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды// М.: Наука. 1983. 448 с. Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №6. С. 152–155.
38. Богданов А.Н., Скворцов А.Т. Нелинейные сдвиговые волны в зернистой среде // Акуст. журн. 1992. Т. 38. Вып. 3. С. 408–412.
39. Болотин В.В. О теории армированных тел// Изв. АН СССР. Механика. 1965. №1. С. 74–80.

40. *Болотин В.В.* Влияние технологических факторов на механическую надежность конструкций из композитов // *Механика полимеров.* 1972. №3. С. 529–540.
41. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
42. *Борн М., Хуан К.* Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛ. 1958.
43. *Браун Э.Д., Буше Н.А., Буяновский И.А. и др.* Основы трибологии (трение, износ, смазка) / Под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Центр «Наука и техника». 1995. 778 с.
44. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. Перев. с француз, под ред. П.А. Рязина. М.: ИЛ. 1959.
45. *Бульт М.С., Кожухарь П.А., Рожко В.Ф.* Специальные функции. Кишин. политехн. ин-т им. С.Лазо. Кишинев. 1981. 81 с.
46. *Быков В.Г.* Уединенные сдвиговые волны в зернистой среде // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. №2. С. 169–172.
47. *Ванин Г.А.* К теории волокнистых сред с несовершенствами // *Прикладная механика.* 1977. Т. XIII. №10. С. 14–22.
48. *Ванин Т.А.* Локальные разрушения в волокнистых средах // *Прочность и разрушение композитных материалов.* Рига: 1983. С. 250–258.
49. *Ванин Т.А.* Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. Думка, 1985. 304 с.
50. *Ванин Т.А., Семенюк Н.П.* Устойчивость оболочек из композитных материалов с несовершенствами. Киев: Наук. Думка, 1987. 200 с.
51. *Василенко А.Т., Голуб Г.П., Григоренко Я.М.* Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке // *Прикл. механика.* 1976. Т. 12. №2. С. 40–47.
52. *Василенко А.Т.* К расчету по уточненной модели ортотропных слоистых оболочек переменной толщины // *Прикл. механика.* Т. 8. 1977. №7. С. 28–36.
53. *Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Исследование напряженного состояния неоднородных цилиндрических оболочек // *Прикл. механика.* 1982. Т. 18. №9. С. 23–29.
54. *Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Решение задач о напряженном состоянии анизотропных неоднородных цилиндров // *Прикл. механ.* 1984. Т. 20. №8. С. 11–18.
55. *Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Пространственные эффекты в задачах о деформации цилиндрических оболочек из анизотропных композитов // *Механ. композ. материалов.* 1986. №5. С. 865–869.
56. *Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Исследование пространственных эффектов в задачах о термонапряженном состоянии анизотропных оболочек // *Механ. композ. материалов.* 1989. №3. С. 487–493.
57. *Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* К решению задач об упругом равновесии анизотропного неоднородного полого цилиндра // *Прикл. механика.* 1990. Т. 26. №4. С. 14–20.
58. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме построения неклассических теорий пластин // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. №2. С. 158–167.
59. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме уточнения теории пологих оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. №6. с. 139–146.
60. *Вахненко В.А.* Диагностика свойств структурированной среды длинными нелинейными волнами // *ПМТФ.* 1996. Т. 37. №5. С. 35–42.

61. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ОГИЗ, 1948. 296 с.
62. *Векуа И.Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек// Тр. Тбилис. матем. ин-та им. А.М.Размадзе. Т. XXI. Тбилиси: Изд-во «Мецниереба», 1955. С. 191–259.
63. *Векуа И.Н.* Теория тонких и пологих оболочек переменной толщины (Лекции по спецкурсу "Математическая теория оболочек"). Новосибирск: 1964. 40 с.
64. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины// Тр. Тбилис. матем. ин-та им. А.М.Размадзе. Т. XXX. Тбилиси: Изд-во «Мецниереба», 1965. С. 1–104.
65. *Векуа И.Н.* Вариационные принципы построения теории оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1970. 15 с.
66. *Векуа И.Н.* Об одном направлении построения теории оболочек// В кн. Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 267–290.
67. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
68. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
69. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции/ Под ред. О.А. Олейник и Б.В. Шабата. – 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1988. 512 с.
70. *Вилленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
71. *Волков-Богородский Д. Б., Евтушенко Ю. Г., Zubov В. И., Лурье С. А.* Численно-аналитический учет масштабных эффектов при расчете деформаций наноконструктов с использованием блочного метода мультиполей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006, т. 46, №7. С. 1302–1321.
72. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А.* Решения задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
73. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.В.* Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев// ПМТФ. 1994. Т. 35. №6. С. 129–135.
74. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А.* Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки// ПМТФ. 1999. Т. 40. №2. С. 189–195.
75. *Волчков Ю.М.* Конечные элементы с условиями сопряжения на их гранях// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 175–180.
76. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А.* Уравнения упругого анизотропного слоя// ПМТФ. 2004. Т. 45. №2. С. 188–198.
77. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А.* Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра// ПМТФ. 2007. Т. 48. №3. С. 179–190.
78. *Галлимов К.З.* Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. н. 1950. Вып. 2.

79. Галимов Н.К. О применении полиномов Лежандра к построению уточненной теории трехслойных пластин и оболочек// Исслед. по теории пластин и оболочек. Вып. 10. Казань. Изд-во Казанск. ун-та. 1973. С. 371–385.
80. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1975. 325 с.
81. Галимов К.З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко// Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №4. С. 155–166.
82. Галимов К.З. и др. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во КГУ, 1977. 212 с.
83. Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терезулов И.Г. Основы нелинейной теории оболочек. Казань: «Фэн», 1996. 216 с.
84. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
85. Гольденвейзер А.Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра// ПММ. Отд. техн. наук АН СССР. 1958. Т. 22. С. 657–672.
86. Гольденвейзер А.Л. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью// ПММ. Отд. техн. наук АН СССР. 1959. Т. 23. С. 35–57.
87. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнения теории упругости// ПММ. Отд. техн. наук АН СССР. 1962. Т. 26. № 4. С. 668–686.
88. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
89. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих оболочек, М.: Наука, 1976, 512 с.
90. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек// Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С. 137–182.
91. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. Учеб. для ВУЗ-ов. М.: Наука, 2000. 214 с.
92. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашин В.И. Соппротивление материалов. Учеб. пос. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 544 с.
93. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. Учеб. для ВУЗ-ов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
94. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарпаковский Д.В. Волны в сплошных средах. Учеб. для ВУЗ-ов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
95. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
96. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем// Изв. АН СССР. ОТН. 1957. №1. С. 77–84.
97. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем// Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №1. С. 26–34.
98. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жесткими наполнителями при конечных прогибах// Ж. прикладной механики и технической физики. 1964. №5. С. 109–117.
99. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек// Прикладная механика. 1972. Т. 8. №6. С. 3–17.

100. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники// Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
101. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Осесимметричная деформация анизотропных слоистых оболочек вращения сложной формы// Механика композитных материалов. 1981. №4. С. 637–645.
102. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек// Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. №5. С. 1077–1079.
103. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Вариант нелинейной теории упругих многослойных пологих оболочек// Механика композитных материалов. 1985. №5. С. 853–860.
104. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Теория и численное решение задач статики многослойных армированных оболочек// Механика композитных материалов. 1986. №4. С. 643–650.
105. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках// Проблемы механ. дефор. тв. тела. Калинин: 1986. С. 120–129.
106. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения// Механика композитных материалов. 1988. №4. С. 684–690.
107. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек// Механика композитных материалов. 1988. №2. С. 287–298.
108. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
109. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю. Напряженно-деформированное состояние перекрестно армированного композита при свободном нагреве// Механика композитных материалов. 1989. №3. С. 549–551.
110. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. о пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций// Вычислит. матем. и матем. физика. 1989. Т. 29. №1. С. 151–153.
111. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я., Омельченко М.Н. Об устойчивости конечноэлементного решения задач механики композитных конструкций// Изв. вузов. Машиностроение: 1989. №8. С. 3–6.
112. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Локальное нагружение резинокордных оболочек вращения// Механика композитных материалов. 1991. №4. С. 670–676.
113. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Методы исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных оболочек с приложением к механике пневматических шин// Научно-техн. прогресс в машиностроении. 1993. Вып. 39. М.: Международный центр научной и техн. информации. Институт машиностроения им. А.А.Благонравова РАН. 50 с.
114. Григолюк Э.И., Коган Ф.А., Мамай В.И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями// Изв. РАН МТТ. 1994. №2. С. 6–32.
115. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Статика упругих слоистых оболочек. М.: НИИ Мех. МГУ. 1998.
116. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Анализ основных направлений развития и расчетных моделей анизотропных слоистых оболочек/Механика оболочек и пластин в XXI веке// Межвуз. науч. сб. Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов: Изд-во СГТУ. 1999. С. 3–30.

117. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек/Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций// Сб. науч. ст. Ин-т мех. МГУ. М.: Изд-во МГУ. 2000. С. 56–109.
118. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев: Наукова думка. 1991. 216 с.
119. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках// Прикл. механика. Киев: 1996. Т. 32(42). № 6. С. 3–39.
120. Грин А.Е. Микроструктура материалов и мультиполярная механика сплошных сред // Сб. перев. "Механика". 1966. №5(99). С. 118–122.
121. Гросс Е.Ф. Исследования по оптике и спектроскопии кристаллов жидкостей. Избранные труды. Л.: Наука. 1976. 448 с.
122. Гросс Е., Коршунов А. Вращательные колебания молекул в кристаллической решетке органических веществ и спектры рассеяния // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. №1. С. 53–59. В книге [121] с. 100–105.
123. Гусев А.И., Ремпель А.А. Нанокристаллические материалы. М.: Физматлит. 2001. 224 с.
124. Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева. М.: Едиториал УРСС, 2003, 160 с.
125. Дергилева Л.А. Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.
126. Джанелидзе Г.Ю. Обзор работ по теории изгиба тонких плит, опубликованных в СССР// ПММ. 1948. Т.12. Вып.1. С. 109–128.
127. Джрбашиян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
128. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
129. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 624 с.
130. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В четырех томах. Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
131. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В четырех томах. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 559 с.
132. Драгунов Т.Н., Павлов И.С., Потапов А.И. Ангармонические взаимодействия упругих и ориентационных волн в одномерных кристаллах. // ФТТ. 1997. Т. 39. №1. С. 137–144.
133. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Методы и приложения. М.: Эдиториал. УРСС, т. 1, 1998. 336 с.; т. 2, 1998. 280 с.
134. Дудников В.А., Назаров С.А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. к 2. С. 306–309.
135. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки// Итоги науки и техники. Т. 15. МДТТ. М.: 1983. С. 3–68.
136. Дудченко А.А., Лурье С.А. Наномеханика композиционных материалов: Учебно-методический комплекс. Калуга, Москва: Изд-во "Эйдос"(ИП Кошелев А.Б.), 2011. 225с

137. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
138. Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб: СПбГТУ, 1999. 341 с.
139. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 288 с.
140. Ерофеев В.И., Потанов А.И., Солдатов И.Н. Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией. Монография. Горький. 1986. 224с. Деп. в ВИНТИ 25.07.86. №5440-В86.
141. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 327 с.
142. Жилин П. А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. к 386. С. 29–46.
143. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин// Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 48–64.
144. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
145. Жаворонок С.И., Куприков М.Ю., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Численно-аналитические методы решения задач дифракции акустических волн на абсолютно твердых телах и оболочках. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 192 с.
146. Зайцев В.Ю. Численное моделирование упругих нелинейных свойств зернистых сред с неидеальной упаковкой. // Акуст. журн. 1995. Т. 41. №3. С. 439–445.
147. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Сердобольская О.Ю. Нелинейная акустика кристаллов и некоторые ее приложения // Нелинейная акустика /Ред. В.А.Зверев, Л.А.Островский. Горький. ИПФ АН СССР. 1980. С. 189–219.
148. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975.
149. Зорский В.Г., Роголя Д., Рымаж Ч. Нелокальные континуальные модели дискретных систем // Усп. мех. 1979. Т. 2. Вып. 1. С. 83–108.
150. Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Фирсова А.Д. Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // МТТ. 2005. №4. С. 75–85.
151. Иванов Г.В. Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра// ПМТФ. 1976. №6. С. 126–137.
152. Иванов Г.В. Решения в виде рядов по полиномам Лежандра плоской смешанной задачи для уравнения Пуассона// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
153. Иванов Г.В. Сведение трехмерной задачи для неоднородной упругой оболочки к двумерной задаче/Динамические задачи механики сплошных сред (Динамика сплошной среды XXXIX)// Сб. научных трудов. Новосибирск. 1979. Вып. 39. 170 с.
154. Иванов Г.В. Теория пластин и оболочек: Учеб. пособие.// Новосиб. гос. ун-т 1980. 85 с.
155. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментныс теории в механике твердых деформируемых тел // Сб. Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54–61.
156. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
157. Ильюшин А.А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. №5. С. 6–14.

158. Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979. 216 с.
159. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
160. Кантор М.М. Решение задач теории упругости с помощью полиномов Лежандра. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2011. 147 с.
161. Кантор М.М., Никабадзе М.У. О теории тонких микрополярных тел с двумя малыми размерами// Вестн. Нижегородского у-та им. Н.И. Лобачевского. Материалы X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 г.). Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, №4. Ч. 5. 2011. 1223 с. (С. 454–455.).
162. Кантор М.М. Задача для микрополярной прямоугольной области в пятом приближении// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №5. С. 69–72.
163. Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улукханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами// Изв. РАН. МТТ. 2013. №3. С. 96–110.
164. Kantor M.M., Nikabadze M.U., Ulukhanian A.R. Equations of Motion and Boundary Conditions of Physical Meaning of Micropolar Theory of Thin Bodies with Two Small Cuts// Mech. Solids. 2013, Vol. 48, № 3, pp 317–328.
165. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов// Перевод с немецкого и обзорная статья Р.С.Гутера и П.Л.Ульянова/Под редакцией и с дополнениями Н.Я.Виленкина. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. 508 с.
166. Каюк Я. Ф., Жуковский А. П. К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладн. механика. 1981. Т. XVII. к 10. С. 80–85.
167. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек// ПММ. 1939. Вып. 4.
168. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек// Теория пластин и оболочек/ Труды II Всесоюзной конференций. Киев: Изд-во АН УССР. 1962. С. 249–253.
169. Кильчевская Г.А. О математической постановке обобщенной задачи для гибких оболочек// Теория пластин и оболочек/ Труды II Всесоюзной конференций. Киев: Изд-во АН УССР. 1962.
170. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. I. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. 355 с.
171. Койтер В.Т. Момептные напряжения в теории упругости // Механика: Сб. пер. 1965. №3. С. 89–112.
172. Кондауров В.И. О нелинейных уравнениях динамики упругой микрополярной среды // ПММ. 1984. Т. 48. №3. С. 404–413.
173. Кончакова Н.А. Исследование волновых процессов в термоупругой среде Коссера. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Воронеж: 1998. 170 с.
174. Корнев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Изд-во МФТИ, 1995. 240 с.
175. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Мю: Наука, 1974. 832 с.
176. Коровайчук И.М., Пелех Б. Л. Об одном классе нелинейных контактных задач теории пластин с учетом проскальзывания/ Упругое поведение пластин и оболочек. Саратов: 1981. С. 64–66.

177. *Короткина М.Р.* Замечание о моментных напряжениях в дискретных средах // Вестник МГУ. Сер. Матем. Механ. 1969. №5. С. 103–109.
178. *Короткина М.Р.* Физика твердого тела. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ. 1988. 118 с.
179. *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. М.: Наука. 1972.
180. *Косевич А.М.* Теория кристаллической решетки (физическая механика кристаллов). Харьков: Вища школа. 1988.
181. *Кравчук А.С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения// ПММ. 1980. Т. 44. С. 122–129.
182. *Крагельский И.В., Виноградова И.Э.* Коэффициенты трения. М.: Машигиз. 1962. 220 с.
183. *Крагельский И.В.* Трение и износ. М.: Машиностроение. 1968. 480 с.
184. *Красулин Ю.Л., Шоршоров М.Х.* О механизме образования соединения разнородных материалов в твердом состоянии// Физ. и хим. обработка материалов. 1967. №1. С. 89–94.
185. *Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметрической упругости. Учет "внутреннего" вращения // ФТТ. 1963. Т. 5. Вып. 9. С. 2591–2598.
186. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Изд-во «Высша школа». 1965. 273 с.
187. *Кулеш М.А.* Построение и анализ аналитических решений некоторых двумерных статических задач несимметричной теории упругости. Дисс. канд. физ.-мат. Пермь: 2001. 100 с.
188. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера// ПМТФ. 2005. Т. 46. №4. С. 116–124.
189. *Куликов Г.М.* О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек// Прикладная механика. 1986. Т. 22. №12. С. 66–72.
190. *Куликов Г.М.* Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов// ПМТФ. 1988. № 5. С. 157–162.
191. *Куликов Г.М.* Неосесимметричное нагружение предварительно напряженной армированной оболочки// Механ. композ. материалов. 1990. № 2. С. 312–316.
192. *Куликов Г.М.* Неосесимметричное деформирование тангенциально нагруженных многослойных анизотропных оболочек вращения// Механ. композ. материалов. 1992. № 5. С. 597–602.
193. *Куликов Г.М., Мищенко С.В.* Термосиловое нагружение многослойных анизотропных оболочек// Механ. композ. материалов. 1993. № 2. С. 191–202.
194. *Куликов Г.М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек// Изв. АН СССР. МТТ. 1994. №2. С. 32–42.
195. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416 с.
196. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
197. *Куришин Л.М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек// Расчет пространственных конструкций. Вып. VII. М.: Стройиздат, 1962. С. 163–192.
198. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев 1// Механика композитных материалов. 1981. №5. С. 832–836.

199. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев 2// Механика композитных материалов. 1982. №1. С. 77–84.
200. Лазько В.А., Мачуга О.С. Определение границ межслойных дефектов в слоистых анизотропных пластинах// Механика композитных материалов. 1985. №6. С. 1112–1115.
201. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.,Л.: Физматгиз, 1963. 360 с.
202. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
203. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
204. Лисина С.А. Уравнения динамики нелинейной ориентированной среды // Сб. тр. "Физические технологии в машиноведении". Н.Новгород: Изд-во НГТУ. 1998. С. 9-14.
205. Лисина С.А., Потапов А.И. Нестеренко С.Ф. Нелинейная гранулированная среда с вращением частиц. Одномерная модель // Акустический журнал. 2001. Т. 47. №5. С. 666–674.
206. Лисина С.А. О возникновении квадратичной нелинейности у сдвиговых волн в гранулированной среде // Тез. докл. Всерос. науч.-тех. конф. "Фундаментальные проблемы машиноведения: новые технологии и материалы". Нижний Новгород: ЗАО "Интек-НН". 2006. С. 64.
207. Лисина С.А. Континуальные и структурно-феноменологические модели в механике сред с микроструктурой. Дисс. канд. физ.-мат. Н.Новгород: 2009. 116 с.
208. Лифшиц И.М. О тепловых свойствах цепных и слоистых структур при низких температурах // ЖЭТФ. 1952. Т. 22. №4. С. 475–486.
209. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
210. Лурье К.А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1979. №6. С. 86-93.
211. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: Из-во ВЦ РАН, 2000. 151с.
212. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием"/ Сб. тр. конф. "Современные проблемы механики гетерогенных сред". Изд-во МПРРИМ РАН. 2005. С. 235–268.
213. Лурье С.А., Белов П.А. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами // Математическое моделирование систем и процессов. 2006. №14. С. 114–132.
214. Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О. Адгезионные взаимодействия в механике сплошных сред // Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С. 76-86.
215. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальная модель адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры. 2009, №2. С. 25–43.
216. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестн. ПГТУ, серия Механика, вып. "Математическое моделирование физико-механических процессов". 2010, №1. С. 80-90.

217. *Ляв А.Е.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ. 1935. 674 с.
218. *Лямов В.Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд-во МГУ. 1983. 224 с.
219. *Мак-Коннел А.Джс.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
220. *Маргарян С.В.* Численное моделирование напряженно-деформированного состояния пневматических шин // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ им. М.В.Ломоносова. 2000.
221. *Маневич Л.И., Ряпусов С.В.* Нелинейная плоская динамика молекулы полиэтилена // ФТТ. 1992. Т. 34. Вып. 5. С. 1554–1560.
222. *Медик М.А.* Одномерные теории распространения волн и колебаний в упругих стержнях прямоугольного сечения. Прикладная теория симметричных колебаний упругих стержней прямоугольного и квадратного сечения // Прикладная механика. Изд-во Мир. 1966. №3. С. 11–19.
223. *Меунаргия Т.В.* Развитие метода И.Н.Векуа для задач трехмерной моментной упругости. Изд. Тбил. ун-та. 1987. 79 с.
224. *Меунаргия Т.В.* Краткий обзор основных результатов И.Н.Векуа по теории оболочек. Изд. Тбил. ун-та. 1989. 61 с.
225. *Миндлин Р.Д.* Микроструктура в линейной упругости // Механика: Сб. пер. 1964. №4. Вып. 86. С. 129–160.
226. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
227. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. Пер. с англ. под ред. Дунаева И.М. и Патрона В.З. М.: Мир. 1991. 560 с.
228. *Молодцов И.Н.* Динамические задачи теории упругости. М.: МГУ, 2011. 57 с.
229. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи двумерной теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1978. 182 с.
230. *Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Дискретные и гибридные модели механики разрушения. С.-Петербург: 1995.
231. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
232. *Муштариди Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигиздат, 1957. 431 с.
233. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. С.-П., изд-во "Лань", 1999, 560 с.
234. *Никабадзе М.У.* Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 12.07.88. №5588-В88. 30 с.
235. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 16.11.1988. №8149-В88. 45 с.
236. *Никабадзе М.У.* Деформирование слоистых вязкоупругих оболочек // Тезисы докладов Всесоюз. конф. "Актуальные проблемы прочности в машиностроении". Севастополь: СВВМИУ, 28–29 августа 1989. 1 с.
237. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 04.04.90. №1859-В90. 21 с.
238. *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 16.05.1990. №2676-В90. 12 с.

239. *Никабадзе М.У.* Плоские кроволинейные стержни// Деп. в ВИНТИ АН СССР. 07.08.1990. №4509-В90. 52 с.
240. *Никабадзе М.У.* Моделирование нелинейного деформирования упругих оболочек// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М: МГУ им. М.В.Ломоносова. 1990.
241. *Никабадзе М.У.* Новая кинематическая гипотеза и новые уравнения движения и равновесия теорий оболочек и плоских криволинейных стержней// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1991. №6. С. 54–61.
242. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения новой линейной теории термоупругих оболочек/Актуальные проблемы механики оболочек// Труды международной конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова. Казань: УНИПРЕСС, 9–11 сентября 1998. 278 с. (С. 158–162).
243. *Никабадзе М.У.* Различные представления тензора деформаций Коши-Грина и линейного тензора деформаций и их компонент в новой теории оболочек// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов."Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1998. №6. С. 59–65.
244. *Никабадзе М.У.* Пространственные реперы, связанные с линией и порожденные ими параметризации области трехмерного евклидова пространства// Деп. в ВИНТИ РАН. 12.05.1999. №1518-В99. 25 с.
245. *Никабадзе М.У.* Новая параметризация пространства стержня// Деп. в ВИНТИ РАН. 27.05.1999. №1663-В99. 32 с.
246. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения и уравнения движения и равновесия новой линейной теории термоупругих оболочек класса TS// Thesis of international conference reports "Dynamical systems modelling and stability investigation". Mechanical Systems. Kyiv, May 25–29 1999. S. 1.
247. *Никабадзе М.У.* Определяющие соотношения новой линейной теории термоупругих оболочек класса TS// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1999. №7. С. 52–56.
248. *Никабадзе М.У.* Различные формы записи уравнений движения и граничных условий новой теории оболочек// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 1999. №7. С. 49–51.
249. *Никабадзе М.У.* Новая теория стержней// Тезисы док-ов 16-ой межреспуб. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, вторая половина июня 1999. 1 с.
250. *Никабадзе М.У.* О символах Кристоффеля и втором тензоре поверхности при новой параметризации пространства оболочки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2000. №3. С. 41–45.
251. *Никабадзе М.У.* Некоторые геометрические соотношения теории оболочек с двумя базовыми поверхностями// Изв. РАН. МТТ. 2000. №4. С. 129–139.
252. *Никабадзе М.У.* К параметризации многослойной оболочечной области трехмерного пространства// Сб. науч. тр. "Математическое моделирование систем и процессов". Пермь: Пер. гос. техн. ун-т. 2000. №8. С. 63–68.
253. *Никабадзе М.У.* О единичных тензорах второго и четвертого ранга при новой параметризации пространства оболочки// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 2000. №6. С. 25–28.
254. *Никабадзе М.У.* Уравнения движения и граничные условия теории стержней с несколькими базовыми кривыми// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 2001. №3. С. 35–39.

255. *Никабадзе М.У.* К варианту теории многослойных конструкций// Изв. РАН. МТТ. 2001. №1. С. 143–158.
256. *Никабадзе М.У.* Динамические уравнения теории многослойных оболочечных конструкций при новой кинематической гипотезе// Сб. науч. тр. Упругость и неупругость. Из-во МГУ. 2001. №1. С. 389–395.
257. *Никабадзе М.У.* К градиентам мест в теории оболочек с двумя базовыми поверхностями// Изв. РАН. МТТ. 2001. №4. С. 80–90.
258. *Никабадзе М.У.* Уравнения движения и граничные условия варианта теории многослойных плоских криволинейных стержней// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2002. №6. С. 41–46.
259. *Никабадзе М.У.* Современное состояние многослойных оболочечных конструкций// Деп. в ВИНТИ РАН. 30.12.2002. №2289-В2002. 81 с.
260. *Никабадзе М.У.* Вариант теории пологих оболочек// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 17–27 апреля 2003, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова - М.:Изд-во Моск. ун-та, 2003. 1 с.
261. *Никабадзе М.У.* Варианты теории оболочек с применением разложений по полиномам Лежандра// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 19-28 апреля 2004, Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова - М.:Изд-во Моск. ун-та, 2004. 1 с.
262. *Никабадзе М.У.* Обобщение теоремы Гюйгенса-Штейнера и формулы Бура и некоторые их применения// Извест. РАН. МТТ. 2004. №3. С. 64-73.
263. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для оболочечной области по трехмерным теориям// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.01.2005. №83-В2005. 7 с.
264. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для тонкого деформируемого трехмерного тела// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. №5. С. 43–49.
265. *Никабадзе М.У.* К варианту теории многослойных криволинейных стержней// Изв. РАН. МТТ. 2005. №6. С. 145–156.
266. *Никабадзе М.У.* Вариант системы уравнений теории тонких тел// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2006. №1. С. 30–35.
267. *Никабадзе М.У.* К определяющим соотношениям и граничным условиям в теории тонких тел// Ломоносовские чтения. Тез. док-ов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2006. 1 с.
268. *Никабадзе М.У.* Применение классических ортогональных полиномов для построения теории тонких тел// Тез. док-ов. Междунар. науч. симпоз. по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 95-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (1911–1998). М.: Общеуниверситетский отдел печати МГУ, 2006. 1 с.
269. *Никабадзе М.У.* Применение классических ортогональных полиномов для построения теории тонких тел. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 19–20 января 2006 года). М.: ЛЕНАНД, 2006. 480 с. (С. 218–228).
270. *Никабадзе М.У.* Постановки задач моментной термомеханики деформируемого твердого тонкого тела/Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2007. 1 с.

271. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения нулевого, первого и второго приближений в моментах моментной теории упругого стержня// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2007. 1 с.
272. *Никабадзе М.У.* Уравнения теории оболочек, согласованные с граничными условиями на лицевых поверхностях// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №2. С. 72–76.
273. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы варианта теории тонких тел с применением разложения по системе многочленов Чебышева второго рода// Изв. РАН. МТТ. 2007. №3. С. 73–106.
274. *Никабадзе М.У.* Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №5. С. 56–63.
275. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть I. М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ. 2007. 86 с.
276. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть II. М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ. 2007. 93 с.
277. *Никабадзе М.У.* К теориям тонких тел. Труды международной конференции "Неклассические задачи механики". Том I. Кутаиси. 25–27.10.2007. С. 225–242.
278. *Никабадзе М.У.* К задаче о нахождении у тензора четного ранга собственных значений и собственных тензоров// Изв. РАН. МТТ. 2008. №4. С. 77–94.
279. *Никабадзе М.У.* Различные варианты моментной теории тонких тел с двумя малыми размерами// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2008. 1 с.
280. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Постановки задач в моментах относительно системы полиномов Лежандра в моментной теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2008. 1 с.
281. *Никабадзе М.У.* Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.08.08. №720 – В2008. 287 с.
282. *Никабадзе М.У.* Варианты математической теории многослойных конструкций с несколькими базовыми поверхностями// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.08.08. №721 – В2008. 127 с.
283. *Никабадзе М.У.* Математическое моделирование упругих тонких тел с двумя малыми размерами с применением систем ортогональных полиномов// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.08.08. №722 – В2008. 107 с.
284. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Математическое моделирование упругих тонких тел с одним малым размером с помощью систем ортогональных полиномов// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.08.08. №723 – В2008. 64 с.
285. *Никабадзе М.У.* Применение систем ортогональных полиномов при математическом моделировании упругих плоских тонких тел// Деп. в ВИНТИ РАН. 21.08.08. №724 – В2008. 44 с.
286. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. I// Современная математика и ее приложения. Т. 62 (2009). С. 67–95.
287. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. II// Современная математика и ее приложения. Т. 62 (2009). С. 96–130.

288. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. I// Journal of Mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 668–697.
289. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. II// Journal of Mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 698–733.
290. *Никабадзе М.У.* К построению линейно независимых тензоров// Извест. РАН. МТТ. 2009. №1. С. 17–36.
291. *Никабадзе М.У.* К теории многослойных тонких тел с применением систем ортогональных полиномов// Современные проблемы математики и механики. М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ. 2009. Т. II. Механика. Вып. 2. С. 69–96./ Сб. науч. трудов, посвященный 70 летию академика В.А.Садовниченко, ректора МГУ имени М.В.Ломоносова.
292. *Никабадзе М.У.* К условиям совместности в линейной микрополярной теории//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2010. №5. 48–51.
293. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами при применении системы ортогональных полиномов. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 года). М.: Изд-во Моск. у-та. 2011. 490 с. (С. 418–423).
294. *Никабадзе М.У.* Математическое моделирование деформирования многослойных тонких тел// Современная математика и ее приложения. Т. XX. М.: ВИНТИ, 2011. С. 40–74.
295. *Nikabadze M.U.* Mathematical Modeling of Multilayer Thin Body Deformation// Journal of Mathematical sciences. V. 187, No 3, 2012. P. 300–336.
296. *Никабадзе М.У., Кантор М.М., Улукхьян А.Р.* К математическому моделированию упругих тонких тел и численная реализация некоторых задач о полосе// Деп. в ВИНТИ РАН. 29.04.2011. №204–В2011. 207 с.
297. *Никабадзе М.У.* К условиям совместности и уравнениям движения в микрополярной линейной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. №1. С. 63–66.
298. *Nikabadze M.U.* Compatibility conditions and equations of motion in the linear micropolar theory of elasticity // Moscow Univ. Mech. Bulletin. 2012, Vol. 67, № 1, pp. 18–22. Allerton Press, Inc., 2012.
299. *Никабадзе М.У.* Анизотропия в линейной микрополярной теории упругости/ Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та. Апрель 2012. 1 с.
300. *Никабадзе М.У.* К выводу формул комплексного представления в плоской микрополярной теории упругости// Труды II Международной конференции "Неклассические задачи механики". Кутаиси. 06-08.10. 2012. С. 62–70.
301. *Никабадзе М.У.* Некоторые вопросы тензорного исчисления с приложениями к механике// Деп. в ВИНТИ РАН. 05.08.2013. № 231-В2013. 242 с.
302. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости// Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2014. №1. С. 30–39.
303. *Никабадзе М.У.* Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. I// Деп. в ВИНТИ РАН. 20.05.14. №135 – В2014. 278 с.

304. *Никабадзе М.У.* Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. II // Деп. в ВИНТИ РАН. 20.05.14. №136 – В2014. 218 с.
305. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 304 с.
306. *Николаевский В.Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности // Механика. Новое в зарубежной науке. Т. 33. Вихри и волны. М.: Мир. 1984. С. 266–335.
307. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
308. *Ноздрев В.Ф., Федорищенко Н.В.* Молекулярная акустика. М.: Изд-во Высшая школа 1974. 288 с.
309. *Носатенко П.Я.* Исследование геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек вращения методом конечных элементов. Деп. в ВИНТИ. 11.03.84. 38 с.
310. *Носатенко П.Я., Ширшов Ю.Ю.* Численное исследование пространственного геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния слоистых анизотропных оболочек / 22-е Всесоюз. научное совещание по проблемам прочности двигателей // Тез. докл. М.: 1988. С. 139–141.
311. *Носатенко П.Я.* Реализация МКЭ при пространственном геометрически нелинейном расчете слоистых анизотропных оболочек / Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела // Тез. докл. Ч. 2. Харьков: 1989. С. 56–58.
312. *Носатенко П.Я.* Трехмерные задачи механики анизотропных оболочек вращения // Механ. композ. материалов. 1993. Т. 29. №4. С. 512–520.
313. *Носатенко П.Я.* Численное решение трехмерных задач неосесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 43–51.
314. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
315. *Образцов И.Ф., Лурье С.А., Яновский Ю.Г., Дудченко А.А. и др.* Основы теории межфазного слоя. Механика композиционных материалов и конструкций. Изд. РАН, 2004, т. 10, №3. С. 596–612.
316. *Ониашвили О.Д.* Расчет оболочек и других тонкостенных конструкций // Строительная механика в СССР 1917–1967. М.: Стройиздат, 1969, с. 165–202.
317. *Павлов И.С., Лисина С.А.* Одномерные модели нелинейной динамики микрополярных и гранулированных сред // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Спецвыпуск "Математическое моделирование". Ростов-на-Дону. 2001. С. 132–134.
318. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука. Физматлит. 1976. 328 с.
319. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
320. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117–1120.
321. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
322. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.

323. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* К построению обобщенной теории трансверсально-изотропных оболочек применительно к контактными задачам// В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев: Наук. думка, 1977. С. 27–39.
324. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 156 с.
325. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 216 с.
326. *Пелех Б. Л., Коровайчук И.М.* Об одном классе задач для слоистых композитов при наличии зон проскальзывания на границе раздела фаз// Механика композитных материалов. 1981. №2. С. 342–345.
327. *Пелех Б. Л., Коровайчук И.М.* К механике композитных сред с несовершенными связями на поверхностях раздела фаз// Механика композитных материалов. 1984. №4. С. 606–611.
328. *Пелех Б. Л., Димитриенко И.П., Лазько В.А., Филипенко А.А., Махницкий Р.Н.* О математических основах теории слоистых анизотропных оболочек с учетом структурной неоднородности/ Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них. Киев: Наук. Думка, 1984. С. 50–51 (Тез. док-ов II Всесоюз. науч.-технич. семинара. Львов, сентябрь 1984).
329. *Пелех Б. Л., Цасюк В.В.* Трение на анизотропных поверхностях твердых тел/ Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них. Киев: Наук. Думка, 1984. С. 50–51 (Тез. док-ов II Всесоюз. науч.-технич. семинара. Львов, сентябрь 1984).
330. *Пелех Б. Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988. 280 с.
331. *Пикуль В.В.* К проблеме построения физически корректной теории оболочек// Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 18–25.
332. *Пикуль В.В.* Современное состояние и перспективы развития теории оболочек/ Механика оболочек и пластин в XXI веке// Межвузовый научный сборник. 1999. Саратов. С. 95–111.
333. *Пикуль В.В.* Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития// Изв. РАН. МТТ. 2000. №2. С. 153–168.
334. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
335. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
336. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-ое изд. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
337. *Победря Б.Е.* Модели механики сплошной среды// Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т.3. Вып.1. С. 93–128.
338. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Лекции по теории упругости// Изд-во Эдиториал УРСС. 1999. 208 с.
339. *Победря Б.Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твердого тела// Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского/Под ред. Д.М.Климова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 635–657.
340. *Победря Б.Е.* Модели линейной теории вязкоупругости// Изв. РАН. МТТ. 2003. №3. С. 120–134.
341. *Победря Б.Е.* Варианты моделирования в механике деформируемого тела. Фундаментальные и прикладные вопросы механики. Международная научная конференция. Сб. докладов. Хабаровск. Изд-во ХГТУ. 2003. Т. 1. С. 20–29.

342. Победря Б.Е., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. Задача в моментах тензора напряжений/Ломоносовские чтения// Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. у-та. Апрель 2005. 1 с.
343. Победря Б.Е. Теория термомеханических процессов// Сб. науч. тр.: Упругость и неупругость. Изд-во МГУ, 2006. С. 70–85.
344. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды (курс лекций). Физматлит, 2006. 272 с.
345. Победря Б.Е., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. К теории упругих пластин/ Ломоносовские чтения// Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. у-та. Апрель 2006. 1 с.
346. Победря Б.Е., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. Постановки задач нулевого, первого и второго приближений в моментах моментной теории тонких упругих пластин/ Ломоносовские чтения// Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. у-та. Апрель 2007. 1 с.
347. Победря Б.Е., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. О первой краевой задаче в моментах относительно системы полиномов Лежандра в моментной теории тонких призматических тел с одним малым размером// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Моск. у-та. Апрель 2008. 1 с.
348. Погорелов А.В. Геометрия. М.: Наука, 1983. 288 с.
349. Підстригач Я.С. Умові теплового контакту твердих тіл// Доповіді АН УРСР. №7. С. 872–874.
350. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями// Тепловые напряжения в элементах турбомашин. 1967. Вып. 7. С. 227–233.
351. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах// Физико-химическая механика материалов. 1967. Т. 3. №5. С. 575–583.
352. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек// Прикладная механика. 1967. Т. 3. Вып. 6. С. 8–16.
353. Подстригач Я.С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном упругом включении в сплошной среде// Докл. АН УССР. 1982. №12. С. 30–32.
354. Понятовский В.В. К теории пластин средней толщины// ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 335–341.
355. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок// ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1033–1039.
356. Понятовский В.В. Уравнения теории анизотропных пластинок// Исследования по упругости и пластичности. Сб. 4. Изд-во ЛГУ. 1965. С. 3–28.
357. Понятовский В.В. Уточненная теория трансверсально изотропных пластин// Исследования по упругости и пластичности. Сб. 6. Изд-во ЛГУ. 1967. С. 72–92.
358. Понятовский В.В. Уравнения теории слоистых пластин// Исследования по упругости и пластичности. Сб. 7. Изд-во ЛГУ. 1968. С. 53–62.
359. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
360. Потапов А.И. Контроль качества и прогнозирование надежности конструкций из композиционных материалов. Л.: 1980. 216 с.

361. *Потапов А.И., Родюшкин В.М.* Экспериментальные исследования волн деформации в материалах с микроструктурой // Акуст. журн. 2001. Т.47. №3. С. 407–412.
362. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
363. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
364. *Пул Ч.-мл., Оуэне Ф.* Нанотехнологии, М.: Техносфера. 2006. 336 с.
365. *Рабинович А.Л.* Устойчивость обшивки с наполнителем при сжатии// Тр. ЦАГИ № 595. Бюро новой техники. 1946. 38 с.
366. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988, 712 с.
367. *Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
368. *Савин Г.Н.* Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та. 1965. 159 с.
369. *Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М.* Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой // Прикл. механ. 1970. Т. 6. №7. С. 48–52.
370. *Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М., Веремеенко С.В., Агафьев Г.Г.* Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением частиц // Прикл. механ. 1970. Т.6. №6. С. 37–41.
371. *Саркисян С.О.* Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. №2. С. 84–95.
372. *Саркисян С.О., Варданян С.А.* Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. №3. С. 64–76.
373. *Саркисян С.О.* Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. №1. С. 129–147.
374. *Саркисян С.О.* Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С. 309–319.
375. *Саркисян С.О.* Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. №5. С. 41–54.
376. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
377. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, т. 1, 1983. 528 с.; т. 2, 1983. 560 с.
378. *Селезов И.Т.* Про рівняння руху гнучких пластин// Прикладна Механіка. 1959. Т. 5. Вып. 4. С. 444–448.
379. *Селезов И.Т.* Дослідження поперечних коливань пластини// Прикладна Механіка. 1960. Т. 6. Вып. 3. С. 319–327.
380. *Селезов И.Т.* Про поперечні коливання пластини// Доповіді АН УРСР. 1960. № 9. С. 1190–1193.
381. *Селезов И.Т.* Про гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пласти, і деякі особливості цих рівнянь // Прикладна Механіка. 1961. Т. 7. Вып. 5. С. 538–546.
382. *Селезов И.Т.* Исследование распространения упругих волн в плитах и оболочках// Тр. конфер. по теории пластин и оболочек. 24–29 октября 1960. Казань. 1961. С. 347–352.

383. Селезов И.Т. О волнах в цилиндрической оболочке// Тр. Всесоюз. конфер. по теории пластин и оболочек. Киев. 1962. С. 249–253.
384. Селезов И.Т., Кильчевская Г.А. Приведение трехмерной динамической задачи термоупругости к двумерной для слоя постоянной толщины// В сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 4. Киев. «Наукова думка». 1964. С. 172–179.
385. Селезов И.Т. О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью// Прикладная механика. 1965. Т. 1. Вып. 3. С. 10–16.
386. Селезов И.Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем// Сб. Кибернетика и вычисл. техника. Вып. 4.. Киев. «Наукова думка». 1969. С. 131–137.
387. Си Дж. Механика разрушения композитных материалов// Механика композитных материалов. 1979. №3. С. 434–446.
388. Сокольников И.С. Тензорный анализ. М.: наука, 1971. 376 с.
389. Солер А. Теория высшего порядка анализа конструкций, основанная на разложении по полиномам Лежандра. Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Прикл. механика. Сер. Е. 1969. Т. 36. №4. С. 107–112.
390. Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Вибрации трехслойных металлополимерных пластин// Матер., технол., инструм. 2001. Т. 6. №2. С. 5–10.
391. Строщио М., Дутга М. Фононы в наноструктурах / Пер с англ. под ред. Г.Н. Жижицина. М.: Физматлит. 2006. 320 с.
392. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
393. Сулейманов Р.А., Сеидов М.Ю., Салаев Ф.М. Упругие свойства слоистых кристаллов // ФТТ. 1991. Т. 33. №6. С. 1797–1800.
394. Сыркин Е.С., Феодосьев С.Б., Шамфарова О.Я. Влияние изгибной жесткости слоев на динамические характеристики слоистых кристаллов со сложной решеткой // Физика низких температур. 1991. Т. 17. №6. С. 746–754.
395. Такер Дж., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир. 1975.
396. Твалчрелидзе А.К., Твалтвадзе Д.В., Никабадзе М.У. К расчету больших осесимметричных деформаций оболочек вращения из эластомеров// Тезисы док-ов XXII научно-технич. конф. проф.-препод. состава ВТУЗ-ов Закавказья, Тбилиси, 25–27 октября 1984. 1 с.
397. Твалчрелидзе А.К. Теория упругих оболочек с использованием нескольких базовых поверхностей// Тр. Всесоюз. совещания семинара "Теория и численные методы расчета пластин и оболочек". Тбилиси, 1984 г.
398. Тварчрелидзе А.К. Основные уравнения теории оболочек с учетом больших деформаций и сдвигов// Сообщ. АН Груз.ССР. Т. 121. №1. 1986. С. 53–56.
399. Тварчрелидзе А.К. Теория оболочек с использованием нескольких базовых поверхностей и некоторые ее приложения// Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Кутаиси. 1994.
400. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
401. Угодчиков А.Г. Моментная динамика линейно-упругого тела // ДАН. 1995. Т. 340. №1.
402. Угодчиков А.Г. Об уравнениях моментной динамики твердого деформируемого тела // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.: 1995. С.159–176.

403. Угодчиков А.Г. Уравнения динамики упругого тела с учетом "внутреннего вращения". Вариационный подход // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций. 1991. С.78–83.
404. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции (перев. с англ.). М.: Физматгиз. 1963. 516 с.
405. Улукханын А.Р. Моделирование деформирования микрополярных призматических тонких тел с применением системы полиномов Лежандра. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2012. 150 с.
406. Феллерс Дж., Солер А. Приближенное решение задачи о цилиндре конечной длины с помощью полиномов Лежандра// Ракет. техника и космонавтика. 1970. Т. 8. №11. С. 145–151.
407. Физическая акустика (под ред. У. Мэзона). Том II. Часть А. Свойства газов жидкостей и растворов (перев. с англ. под ред. И.Г. Михайлова). М.: Мир. 1968. 488 с.
408. Филлин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. Ленинград. отд-ние, 1987. 384 с.
409. Хвингия М.В. Влияние сдвигов и инерции вращения на частоту изгибных колебаний упругих стержней// Инженерный журнал. 1963. Т. 3. Вып. 4. С. 727–732.
410. Хертеленди П. Приближенная теория симметричных колебаний упругих стержней прямоугольного и квадратного сечения// Прикладная механика. Изд-во Мир. 1968. №4. С. 289–299.
411. Хома И.Ю. Об общем решении системы уравнений равновесия изгиба пластин постоянной толщины// ДАН СССР. 1973. Т. 213. №1. С. 59–62.
412. Хома И.Ю. К вопросу изгиба толстых анизотропных плит с малой сдвиговой жесткостью. Теория оболочек и пластин/ Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Л.: Изд-во "Судостроение" 1975. С. 96–99.
413. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка. 1986. 172 с.
414. Хорошун Л.П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек// Прикл. механика. 1978. №10. С. 3–21.
415. Хорошун Л.П., Герасимчук Б.В. Уравнения изгиба пластин при нелинейных деформациях паперечного сдвига// Прикл. механика. 1982. Т. 18(4). С. 64–70.
416. Хорошун Л.П. Концепция смеси в построении теории слоистых пластин и оболочек// Прикладная механика. 1985. Т. 21. №4. С. 110–118.
417. Чепига В.Е. К уточненной теории слоистых оболочек// Прикладная механика. 1976. Т. 12. №11. С. 45–49.
418. Чепига В.Е. О построении теории многослойных анизотропных оболочек с заданной условной точностью порядка h^N // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. №4. С. 111–120.
419. Чепига В.Е. Применение полиномов Лежандра для построения теории многослойных оболочек// Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №5. С. 190.
420. Чепига В.Е. Исследование устойчивости многослойных оболочек по уточненной теории// Деп. в ВИНТИ АН СССР. 14.01.1986. № 289-В. 14 с.
421. Чепига В.Е. Численный анализ уравнений уточненной теории слоистых оболочек// Деп. в ВИНТИ АН СССР. 14.01.1986. № 290-В. 14 с.
422. Чепига В.Е. Об асимптотической погрешности некоторых гипотез в теории слоистых оболочек// Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. М.: 1986. С. 118–125.

423. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, Ленинград. отд-ние. 1986. 336 с.
424. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
425. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
426. Шашкина С.А. Деформирование упругих тел с учётом микроструктуры материала. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Воронеж: 2009. 137 с.
427. Шешенин С.В. Численное решение некоторых пространственных задач теории упругости// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ им. М.В.Ломоносова. 1980.
428. Шешенин С.В. Численный анализ квазистатических краевых задач МДТТ// Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: МГУ им. М.В.Ломоносова. 1990.
429. Шкутин Л. И. Нелинейные модели деформируемых моментных сред // ПМТФ. 1980. №6. С. 111–117.
430. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Н.: Наука, 1988. 127 с.
431. Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37. №3. С. 120–132.
432. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение. М.: Мир. 1975. Т. 2. С. 646–751.
433. Altenbach H Modelling of viscoelastic behaviour of plates// Creep in Structures/Ed. by M. Zyczowski. Berlin et/ al.: Springer, 1990. P. 531–537.
434. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1995. 751 pp.
435. Askar A. Lattice Dynamics Foundation of Continuum Theory// World-Scientific. Singapore. (1985).
436. Askar A. Molecular crystals and the polar theories of continua: experimental values of material coefficients for KNO₃// Int. J. Eng. Sc. 1972. 10. 293–300.
437. Askar A. A model for coupled rotation-displacement mode of certain molecular crystals. Illustration for KNO₃ // J.Phys. Chem. Solids. 1973. V. 34. 1901–1907.
438. Bardenhagen S., Triantafyllidis N. Derivation of higher order gradient continuum theories in 2,3-D non-linear elasticity from periodic lattice models// J. Mech. Phys. Solids. 1994. 42. №1. 111–139.
439. Belyaeva I.Y., Ostrovsky L.A., Zaitsev V.Y., Stefan V., Sutin A.M. Comparison of linear and nonlinear elastic moduli for reservoir rock by use of a granular medium model// Journal of the Acoustical Society of America. 1996. 99 (n3). 1360–1365.
440. Belyaeva I.Y., Zaitsev V.Y., Ostrovsky L.A. Nonlinear acoustoelastic properties of granular media// Acoustical physics. 1993. 39. (n1). 1-14.
441. Berglund K. Structural Models of Micropolar Media// Mechanics of Micropolar Media (Eds. O. Brulin and R.K.T. Hsieh). World-Scientific. Singapore. 1982. 35–86.
442. Berryman J.G. L. Thigpen Nonlinear and semilinear dynamic poroelasticity with microstructure// J. Mech. Phys. Solids. 1985. V. 33. 97–116.
443. Blank X., Bris C.Le, Lions P.L. From molecular models to continuum mechanics// Arch. Rational Mech. Anal. 2002. V. 164. 341–381.

444. Mechanics of Micropolar Media (Eds. O. Brulin, R.K.T. Ilesih). World- Scientific. Singapore. 1982.
445. *Burton W.S., Noor A.K.* Assessment of computational models for sandwich panels and shells// Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1995. Vol. 124. P. 125–151.
446. *Capriz G.* Continuum with Microstructure. Springer Tracts in Natural Philosophy (ed. by C.Truesdell). New-York: Springer. 1989. 35.
447. *Chang C.S., Ma L.* A micromechanical-based micro-polar theory for deformation of granular solids// International journal of solids and structures. 1994. 28. 67–87.
448. *Chang C.S., Ma L.* Elastic material constants for isotropic granular solids with particle rotation// International journal of solids and structures. 1992. 8. 1001–1018.
449. *Chang C.S., Gao J.* Non-linear dispersion of plane wave in granular media// Int. J. Non-Linear Mech. 1995. №2. 111–128.
450. *Chang, C.S., Gao, J.* Wave propagation in granular rod using high-gradient theory// J. of Engn. Mech.-ASCE. 1997. №1. 52–59.
451. *Christoffersen J., Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.A.* A micromechanical description of granular material behavior// ASME. J. Appl. Mech. 1981. 48. 339–344.
452. *Cliland A.N.* Foundations of nanomechanics: from solid-state theory to device applications // Springer-Verlag. Berlin. 2003. 435 p.
453. *Cosserat E. and F.* Theorie des Corp Dcformables. Paris. Librairie Scientifique A.Hermann et Fils. 1909. 226 p.
454. Eremeyev V. A. Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions //J. Elasticity. 2004. Vol. 74. P. 67–86.
455. Eremeyev V. A. Pietraszkiewicz W. Local symmetry group in the general theory of elastic shells // J. Elasticity. 2006. Vol. 85. к 2. Pp. 125–152.
456. Eremeyev V. A., Zubov L.M. On constitutive inequalities in nonlinear theory of elastic shells// ZAMM. 2007. Vol. 87. No. 2. P. 94–101.
457. *Eringen A.C. and Suhubi E.S.* Nonlinear theory of simple micro-elastic solids// Int. J. Engn. Sci. 1964. V. 2. 189–203, 389–404.
458. *Eringen A.C.* Theory of micropolar plates // Zeitschrift für Angawandte Mathematik und Physik. 25.01.1967. Vol. 18. №1, pp. 12–30.
459. *Eringen A.C.* Balanse laws of micromorffhic mechanics// Int. J. Engn. Sci. 1970. 8. №10. 819–828. (перев. в сб. "Механика". 1971. 4(128). 119–128).
460. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. 1. Foundation and solids. Springer-Verlag. N.Y.: 1999. 341 p.
461. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. 2. Micropolar fluids. Springer-Verlag. N.Y.: 2000.
462. *Galerkin B.G.* Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. C.R. Acad. Sci., **190** (1930), 1047–1048.
463. *Galerkin B.G.* Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. C.R. Acad. Sci., **193** (1931), 568–571.
464. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants. Pt 2// Arch. Mech. 1981. V. 33. №5. P. 717–737.
465. *Giarletta G., Iezan D.* Non-classical elastic solids. Longman, Scientific and Technical, John Wiley and Sons. Inc. New-York. 1993. 345 p.
466. *Green A.E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford, 1954, 442 p.

467. *Hencky H.* Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten// Ingenieur-Archiv. 1947. Bd 16. S. 72–76.
468. *Hjalmarr S.* Non-linear micropolar theory// Mechanics of Micropolar Media (Eds. O.Brulin and R.K.T.Hsieh). Word Scintic. 1982. 147–185.
469. *Hodges D.H., Lee B.W., Atilgan A.R.* Application of the variational-asymptotical method to laminated composite pllates// AIAA J. 1993. Vol. 31(9). P. 1674–1683.
470. *Johnson P., Rasolofosaon P.N.* Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // Nonlinear Processes in Geophysics. 1996. V. 32. P. 77–88.
471. *Kienzler R.* Erweiterung der klassischen Schalentheorie; der Einfluß von Dickenverzerrung und Querschnittverwölbungen// Ingenieur-Archiv. 1982. Bd 52. S. 311–322.
472. *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe// J. Reine Angew. Math. 1850. Bd 40. S. 51–88.
473. *Kosevich A.M.* Crystal Lattice: Phonons, Solitons, Dislocations. Berlin, New York, Wiley-VCI-I, 1999.
474. *Kroner E., Datta B.K.* Non-local theory of elasticity for a finite inhomogeneous medium - a derivation from lattice theory. В кн. "Fundamental aspects of dislocation theory (Conference Proc.) eds. J. Simmons, R. de Wit, National Bureau of Standards. Washington: 1970. V. II. 737–746.
475. *Kunin I.A.* Elastic Media with Microstructure. Parts I and II. Springer Series in Solid-State Sciences. Vol. 26 and 43. Berlin: Springer-Verlag (1982, 1983).
476. *Lakes R. S. and Benedict R. L.* Noncentrosymmetry in micropolar elasticity. International Journal of Engineering Science. 1982. 29. 1161-1167.
477. *Lakes R.S.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua// Continuum models for materials with micro-structure/ Ed. by H. Muehlhaus. N.Y.: Wiley. 1995. P. 1–22.
478. *Levinson M.* An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates// Mech. Res. Comm. 1980. Vol. 7. №6. P.343–350.
479. *Lewinski T.* On refined plate models based on kinematical assumptions// Ingenieur-Archiv. 1987. Bd. 57. S.133–146.
480. *Lewinski T.* On displacement-based theories of sandwich plates with soft core// Mech. Res. Comm. 1990. Vol. 17. № 6. P.375–382.
481. *Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M.* A high-order theory of plate deformation. Pt. I: Homogeneous plates// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. Vol. 44. № 4. P. 663–668.
482. *Mac Cullagh J.* An essay towards a dynamical theory of Crystalline Reflection and Refraction //Trans.Roy.Irish.Acad.Sci. 1839. V. 21. 17–50.
483. *Makowski J., Pietraszkiewicz W.* Thermomechanics of shells with singular curves. Gdansk: Institute of Fluid-Flow Machinery, PAS, 2002. Zesz. Nauk. No 528/1487/2002. 100 p.
484. *Metrikine A.V., Askes H.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure - PartI: Generic formulation // European Journal of Mechanics A/Solids. V. 21. 2002. 555–572.
485. *Metrikine A.V., Askes H.* An isotropic dynamically consistent gradient elasticity model derived from a 2D lattice // Philosophical Magazine. V. 86. №21- 22. 2006. 3259–3286.
486. *Mindlin R.D.* Note on the Galerkin and Papkovich Stress Functions. Bull. Amer. Math. Sos. **42** (1936), 373–376.

487. *Mindlin R.D., Medick M.A.* Extensional Vibrations of Elastic Plates// Journal of Applied Mechanics. Vol. 26. №4/Trans. ASME. Vol. 81. Series E. Dec. 1959. P. 561–569.
488. *Naghdi P.* The theory of shells and plates// Handbuch der Physik. Berlin: Springer. 1972. Bd. VI a/2. S. 425–640.
489. *Neuber H.* Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie// Zeitsch. für angew. Math. und Mech. **14**. №4. 1934. 203–212.
490. *Nikolaevskii V.N.* Continuum approach to the theory of waves in fragmentary media// Phys. Earth Planet. Inter. 1988. V. 50. №1. 32–38.
491. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates// Appl. Mech. Rev. 1989. Vol. 42. № 1. P. 1–13.
492. *Noor A.K., Burton W.S.* Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates// Composite Structures. 1989. Vol. 11. P. 183–204.
493. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates// Composite Structures. 1990. Vol. 14. P. 233–265.
494. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates// Appl. Mech. Rev. 1990. Vol. 43. № 4. P. 67–97.
495. *Patel H.P., Kennedy R.H.* Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading// Comput. a Struc. 1982. Vol. 15. № 1. P. 79–84.
496. *Pavlov I.S., Lisina S.A., Potapov A.I.* Nonlinear Acoustic Waves in Micropolar and Granular Media // Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century (Edited by O.V. Rudenko and O.A. Sapozhnikov). Moscow: 2002. V. 2. 665–668.
497. *Pflüger A.* Elementare Schalenstatic. 5-te Auflage. Berlin: Springer Verlag, 1981, VIII, 128 S.
498. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A., Konopirńska V.* Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions //ZAMM. 2007. Vol. 87. No 2. P. 150–159.
499. *Pipkin A.C.* Constraints in linearly elastic materials// J. Elast. 1976. V. 6, №2. P. 179–193.
500. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Lisina S.A.* Acoustic identification of nanocrystalline media // Journal of Sound and Vibration 2009. V. 322. 564–580.
501. *Potapov A.I., Pavlov I.S.* Nonlinear waves in ID oriented media. Acoustics Letters. 1996. 19. 110–115.
502. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Maugin G.A.* Nonlinear wave interactions in ID crystals with complex lattice. Wave Motion. 1999. V. 29. 297–312.
503. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Potapova S.A.* Vibro-acoustic analysis of physical properties of nonlinear oriented media. In: New Advances in Modal Synthesis of Large Structures. Ed. L.Jezequel. Balkema, Rotterdam (the Netherlands). 1997. 399–410.
504. *Pouget J., Maugin G.A.* Nonlinear dynamics of oriented elastic solids, Part 1,2// J. of Elasticity. 1989. 22. 135–155, 157–183.
505. *Preußner G.* Eine Systematische Herleitung verbesserter Plattentheorien// Ingenieur-Archiv. 1984. Bd 54. S. 51–61.
506. *Puck A.* Festigkeitsanalyse an Faser-Matrix-Laminaten: Realistische bruchkriterien und Degradationsmodelle. München: Hanser, 1996.
507. *Reddy J.N.* On the generalization of displacement-based laminate theories// Appl. Mech. Rev. 1993. Vol. 42. № 11. Pt. 2. P. S213–S222.

508. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates// J. Math. and Phys. Vol. 23. 1944, p. 184–191.
509. *Reissner E.* Finite deflection of sandwich plates// J. Aeronaut. Sci., 1948, vol. 15, №7. P. 435–440.
510. *Reissner E.* Reflections of the theory of elastic plates// Appl. Mech. Rev. 1985. vol. 38. №11. P. 1453–1464.
511. *Robbins D.H., Reddy J.N.* Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory// Int. J. Numer. Meth. Engng. 1993. Vol. 36. P. 655–677.
512. Rubin M. B. Cosserat theories: shells, rods and points. (Ser.: Solid Mechanics and its applications. Vol. 79., Ed. G. M. L. Gladwell) Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000. 480 p.
513. *Sandru N.* On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity// Int. J. Eng. Sci. 1966. 4. N 1. 81–94.
514. *Sansone G. (Сансоне)* Orthogonal functions.- Interscience Publishers, New York. 1959.
515. *Schäfer H.* Das Cosserant-Kontinuum// ZAMM: 1967. Bd. 47, H. 8, S. 485–498.
516. *Shaofan Li, Gang Wang* Introduction in Micromechanics and nanomechanics. World Scientific Publ. Co, 2008. 504 p.
517. *Staltnaker D.O., Kennedy R.H., Ford I.L.* Interlaminar shear strain in twoplay balanced cord-rubber composite// Expl. Mech. 1980. Vol. 20. № 3. P. 87–94.
518. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stresses, Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. P. 85–112 (перев. В сб. "Механика". 1965. Т. 3 №91 С. 113–140).
519. *Triantafullidis N., Bardenhagen S.* The influence of scale size on the stability of periodic solids and the rate of associated higher order gradient continuum models// J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. 41. 1891–1928.
520. *Truell R., Elbaum C., Chick B.* Ultrasonic Methods in Solid State Physics. Academic Press, New-York: 1969.
521. *Vajeva D.V., Volchkov Yu.M.* The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells// Proc. of the 9th Russian-Korean symp. on sci. and technol., Novosibirsk, 26 June –2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.
522. *Vardoulakis I., Aifantis E.C.* On the role of microstructure in the behavior of soils - effects of higher order gradients and internal inertia // Mechanics of Materials. 1994. 18 (n2). 151–158.
523. *Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., and Miroshnichenko A.E.* Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // Int. J. of Solids and Structures. 2005. V. 42. 6245–6260.
524. *Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M.* Multifield model for Cosserat media // Journal of mechanics and Structures. 2008. V. 3. №7. 1365–1382.
525. *Voigt W.* Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle // Abn. Ges. Wiss. Gottingen: 1887. V. 34.
526. *Wunderlich W.* Vergleich verschiedener Approximation der Theorie dünner Schalen (mit numerischen Beispielen)// Tech. Wiss. Mitt. der Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der ruhr-Universität Bochum. 1973.– 73-1.
527. *Zhilin P.A.* Mechanics of deformable directed surface// Int. J. Solids Structures. 1976. Vol. 12. P. 635–648.
528. *Zubov L. M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1997. 205 p.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В МЕХАНИКЕ
МИКРОПОЛЯРНЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТОНКИХ ТЕЛ

Оригинал-макет подготовлен издательской группой
механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 30.05.2014 г.
Формат 60 × 90 1/16. Объем 32,3125 п.л.
Заказ 55. Тираж 550 экз.

Издательство Попечительского совета механико-математического
факультета МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании
механико-математического факультета

© Никабадзе М.У., 2014 г.