

УДК 536.242

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКИХ ПРОВОДНИКАХ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

© 2018 г. Т. Н. Герасименко¹, П. А. Поляков²

¹Общество с ограниченной ответственностью Научно-технический центр “БиоКлиникум”

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет

E-mail: polyakovpa@mail.ru

Исследованы стационарные распределения температур в плоских проводниках различной конфигурации при протекании по ним постоянного электрического тока. Было обнаружено, что распределения температуры определяются не только свойствами материала, но и характерными размерами проводника и могут не коррелировать с распределениями тока. Установлены критерии подобия распределений температуры в геометрически подобных плоских проводниках.

DOI: 10.7868/S0367676518020205

ВВЕДЕНИЕ

Исследование распределений тока в плоских проводниках (толщина τ которых много меньше их линейных размеров) часто имеет своим результатом решение, содержащее сингулярность в одной или некоторых точках проводника [1–4]. Устранение погрешностей модели позволяет устранить эту сингулярность [5]; однако остается ясным, что в проводнике сложной формы могут иметься области, плотность тока в которых окажется существенно больше, чем во всех остальных его частях.

Естественно, что именно в этих областях в силу закона Джоуля – Ленца выделяется максимальное количество теплоты и, казалось бы, естественно предполагать, что именно там проводник будет сильнее всего нагреваться. Для качественного понимания особенностей распределения температуры в такой ситуации нами был аналитически исследован случай сингулярности в распределении тока в задаче с цилиндрической симметрией [6]. При этом было выяснено, что хотя процессы объемной теплопроводности существенно сглаживают неоднородность в выделении тепла и тем самым делают распределение температуры отличным от распределения выделяемой тепловой мощности, максимум температуры совпадает с максимумом плотности тока.

Для исследования распределений температуры в отсутствие симметрии мы рассмотрели несколько проводников, изогнутых под различными углами, а также проводник с вырезом прямоугольной формы. На рис. 1 приведены распределения плотности тока в этих проводниках [4, 5], из которых

видно, что в окрестности углов имеет место резкое возрастание плотности тока. К сожалению, для проводников такого вида аналитическое решение уравнения теплопроводности невозможно, что приводит к необходимости использования численных методов.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

При решении задачи о распределении температуры было учтено, что на распределение тепла влияет как объемная теплопроводность, так и теплоотдача с поверхности проводника. Для описания последней использовался закон Ньютона–Рихмана с эффективным коэффициентом теплоотдачи [7–9], который предполагался постоянным.

Учитывалось, что для большинства металлов зависимость удельного сопротивления от температуры описывается линейной функцией в большом диапазоне температур [10, 11]:

$$\rho = \rho_\theta (1 + \alpha(T - \theta)),$$

где α – температурный коэффициент сопротивления, θ – температура окружающей среды, которая предполагалась постоянной, ρ_θ – удельное сопротивление материала проводника при этой температуре, T – искомая температура проводника.

С учетом сделанных предположений уравнение теплопроводности может быть записано в виде [6]:

$$\tau \beta \Delta u - h_T u = -\tau j^2 \rho_\theta (1 + \alpha u), \quad (1)$$

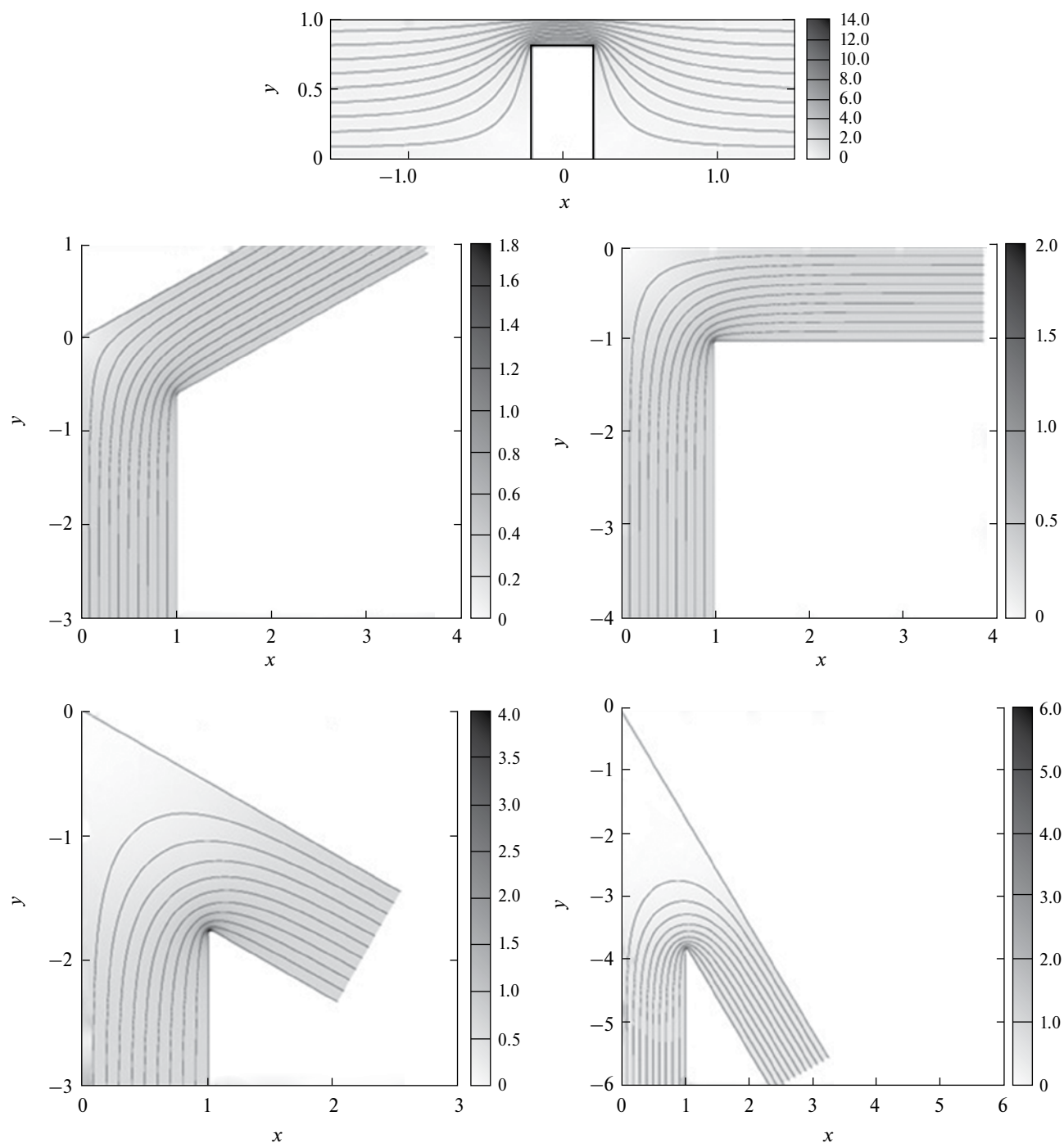


Рис. 1. Нормированные распределения плотности тока $j(x, y)/j_\infty$ и линии тока в рассматриваемых проводниках [4, 5], j_∞ – плотность тока на бесконечном удалении от неоднородности.

здесь $u(x, y) = T(x, y) - \theta$, β – коэффициент теплопроводности, h_T – эффективный коэффициент теплоотдачи, τ – толщина проводника.

Поскольку распределения токов в геометрически подобных проводниках также подобны, то в тех случаях, когда у рассматриваемых проводников совпадают плотности тока, подобными будут

и распределения выделяемой тепловой энергии. Однако за перераспределение этой энергии по проводнику отвечает объемная теплопроводность, которая описывается законом Фурье, т.е. зависит от градиента температур, а стало быть, и от характерных размеров проводника.

Для того чтобы исследовать вопрос о подобии распределений температур, уравнение (1) было

записано в безразмерных переменных, число которых, согласно П-теореме Бакингема [12], может быть сведено к трем:

$$\Delta_{\Pi} \tilde{u} - (\Pi_1 - \Pi_{\alpha} \Pi_2) \tilde{u} = -\Pi_2, \quad (2)$$

где

$$\Pi_1 = L^2 \frac{h_T}{\beta \tau}, \quad \Pi_2 = \frac{L^2}{T} \frac{\rho_{\theta} j^2}{\beta}, \quad \Pi_{\alpha} = T \alpha, \quad (3)$$

L , T – характерные величины длины и температуры соответственно, Δ_{Π} – оператор Лапласа в безразмерных координатах, $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$ и $\tilde{u} = u/T$.

Из выражений (3) следует, что на вид распределений температуры, как и предполагалось, оказывают влияние характерные размеры проводников. Как видно, параметр Π_1 пропорционален квадрату

характерного размера проводника, но не зависит от тока, протекающего через этот проводник. Это говорит о том, что при изменении характерных размеров проводника изменяется вид уравнения (2), а следовательно, и его решение.

При решении уравнения (2) предполагалось, что проводники с боков окружены полностью теплоизолирующим материалом, и отток тепла через боковые границы отсутствует. Для того чтобы сделать возможным использование численных методов, мы рассматривали конечные области проводников, выбирая границы там, где линии тока можно считать однородными. Было сделано предположение, что в силу равномерности распределения тока, а следовательно, и источников тепла, градиент температуры можно считать пренебрежимо малым, т.е. считать, что на всей границе рассматриваемой области проводника заданы условия Неймана:

$$\begin{cases} \Delta_{\Pi} \tilde{u} - [\Pi_1 - \Pi_{\alpha} \Pi_2(\tilde{x}, \tilde{y})] \tilde{u} = -\Pi_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \text{ при } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} = 0, \text{ при } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

здесь Ω – рассматриваемый участок проводника в безразмерных координатах. Эта задача,

согласно [13], эквивалентна задаче о минимизации функционала

$$\chi[\tilde{u}, \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}, \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}] = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} [(\partial_{\tilde{x}} \tilde{u})^2 + (\partial_{\tilde{y}} \tilde{u})^2 + (\Pi_1 - \Pi_{\alpha} \Pi_2) \tilde{u}^2] - \Pi_2 \tilde{u} \right] dS, \quad (5)$$

что позволило применить для ее решения метод конечных элементов.

При технической реализации последнего нами использовался тот факт, что все рассматриваемые области были получены из верхней комплексной полуплоскости с помощью конформных отображений [4, 5]. Это позволило выбирать точки для триангуляции не в самой области Ω , а в соответствующем ей полукольце верхней комплексной полуплоскости, что, в свою очередь, позволило избежать трудностей с выбором точек на границе и использовать один и тот же алгоритм для всех рассматриваемых областей.

Для построения триангуляции Делоне была использована программа “Triangle” [14], для решения результирующей системы линейных уравнений – библиотека UMFPACK [15].

Результаты решения для алюминиевых проводников толщиной $\tau = 10$ мкм, по которым течет ток плотностью $j_{\infty} = 50$ А · мм⁻² приведены на рис. 2. Температура окружающей среды $\theta = 26.6$ °С, параметры материала: $\rho = 0.0292$ Ом · мм² · м⁻¹, $\beta = 226$ Вт К⁻¹ · м⁻¹, $h_T = 49.6$ Вт · К⁻¹ · м⁻², $\alpha = 0.0042$ К⁻¹. Видно, что при изменении характерных размеров L распределения температуры весьма существенно изменяются, и температура в точке с максимальной плотностью тока может быть не только больше, но и меньше температуры удаленных от неоднородности частей проводника. Кроме того, в проводниках с меньшими характерными размерами разброс температур оказывается намного меньше, чем в проводниках с большими размерами, поэтому при недостаточной точности измерительных приборов они могут выглядеть равномерно нагретыми.

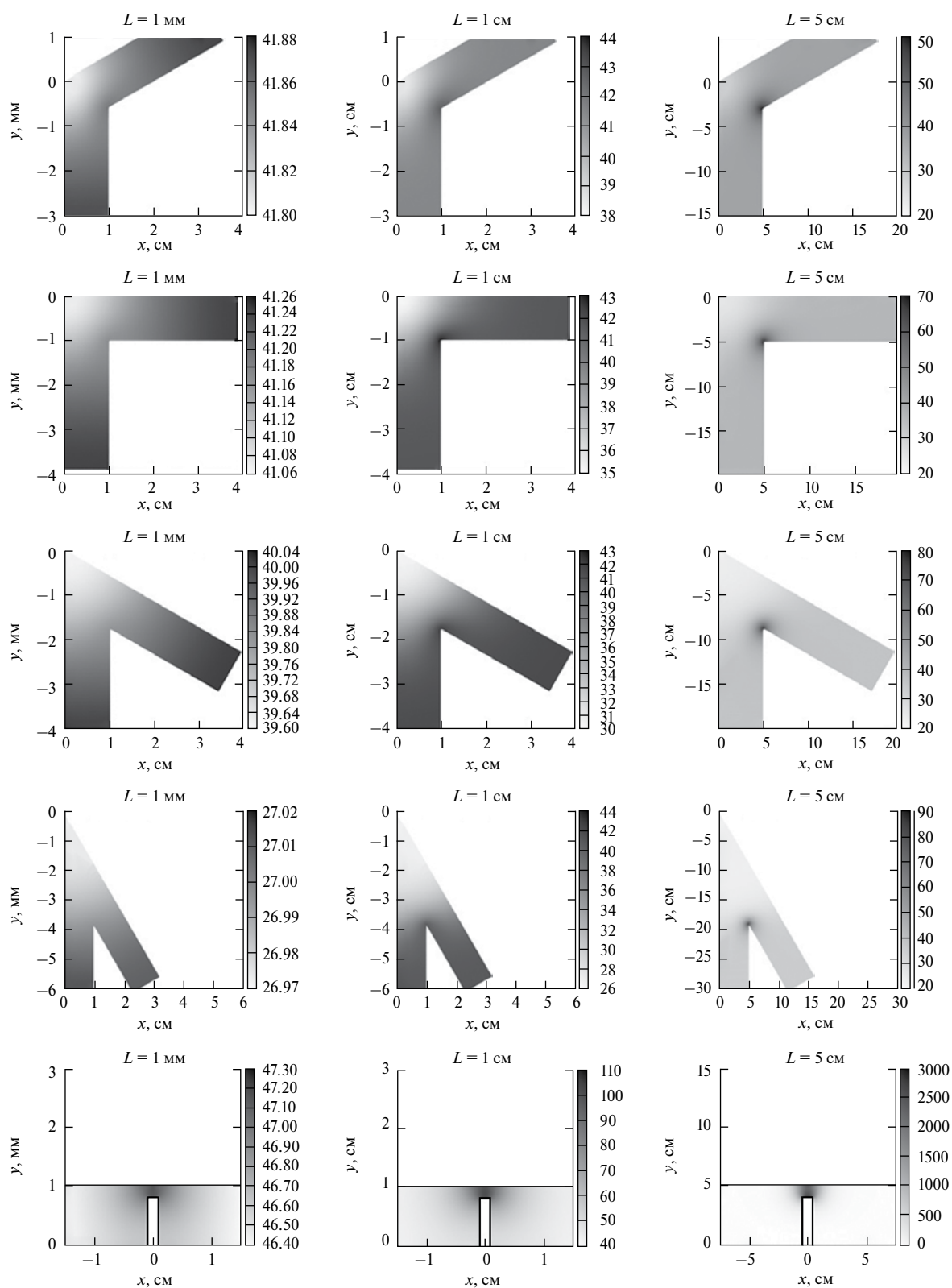


Рис. 2. Распределения температуры в геометрически подобных проводниках различной формы.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

При экспериментальном исследовании распределений температуры использовался ИК-термограф SAT-S160, позволяющий получать как картину распределения температуры, так и ее значения в отдельных точках проводника. Доступная погрешность измерения температуры составила 2°C , пространственное разрешение — 2.2 мрад.

В качестве образцов для измерения был использован проводник шириной 1 см, изогнутый под углом 90° , и проводник такой же ширины с прямоугольным вырезом, величина сужения в котором составляет 2 мм. Проводники были изготовлены из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм с поверхностью, имеющей следы технологической обработки. Согласно расчетам для различных радиусов скругления, температура внутреннего угла в таких проводниках равна или несущественно превышает температуру на удалении от изгиба. Дополнительно была измерена температура двух проводников в виде прямых полосок шириной 1.1 см и 2 мм.

Для того чтобы приблизить спектральные характеристики теплового излучения проводников к спектральным характеристикам черного тела, проводники покрывались тонким слоем черного красителя, изготовленного на основе газовой сажи.

Проводники нагревались постоянным электрическим током, вырабатываемым стандартным источником питания Mastech DC Power Supply HY3030E, позволяющим получить ток до 30 А. Интегральный ток, протекающий через проводник, фиксировался встроенным цифровым прибором с погрешностью до 0.1 А. Максимальный ток через образец ограничивался константовым реостатом.

Коэффициент теплоотдачи был получен эмпирическим путем из тех соображений, что в стационарном режиме температура прямого проводника без изгибов определяется как

$$u = \frac{\rho_\theta j^2 \tau}{h_T - \alpha \rho_\theta j^2 \tau}; \quad (6)$$

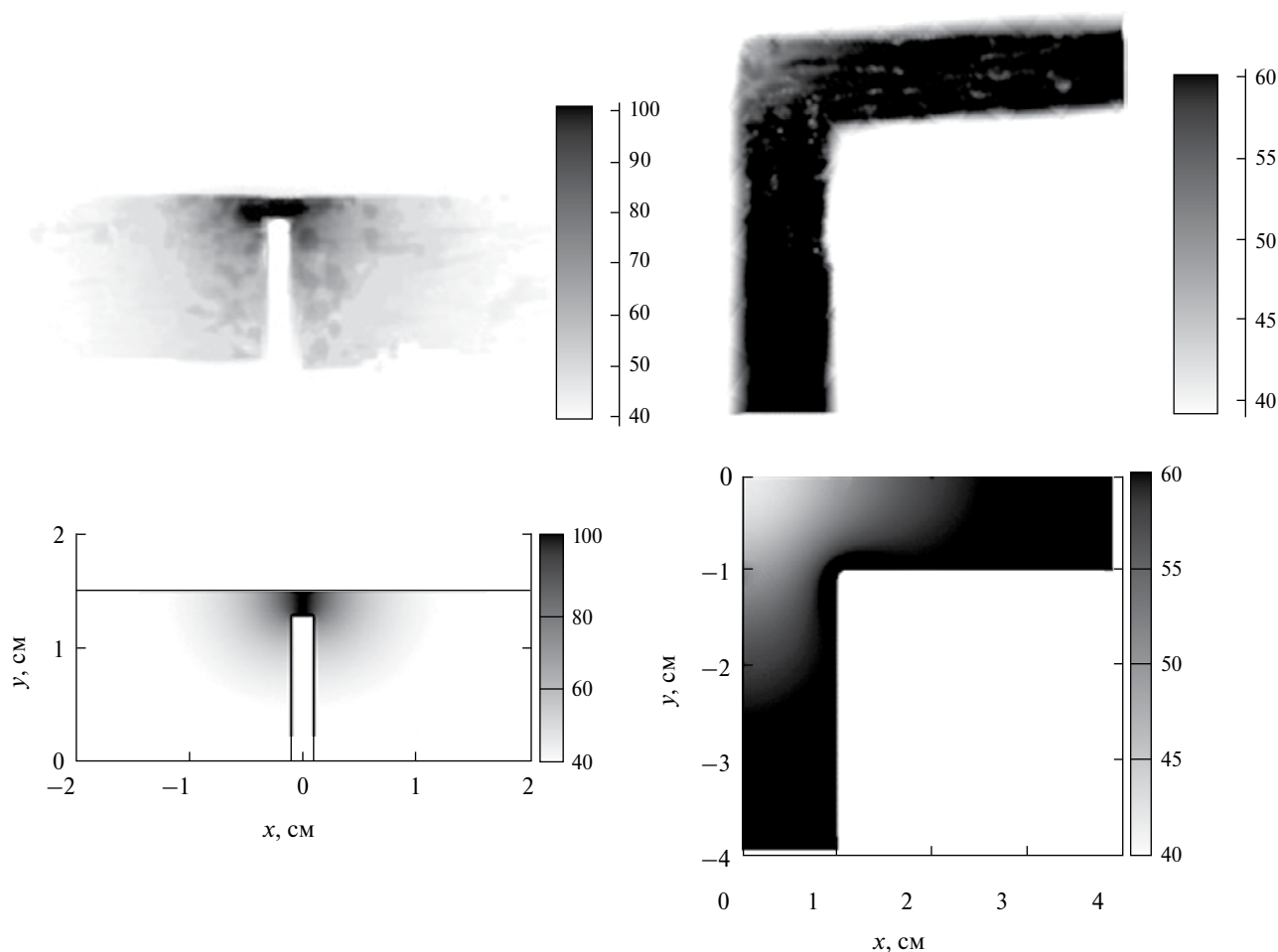


Рис. 3. Термограммы и численный расчет.

отсюда, зная его температуру, можно найти коэффициент теплоотдачи

$$h_T = \frac{\rho_0 j^2 \tau (1 + \alpha u)}{u}. \quad (7)$$

Этот коэффициент был посчитан для полоски шириной 1.1 см и составил $49 \pm 5.5 \text{ Вт} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$, что качественно соответствует коэффициенту

теплоотдачи для проводника с естественной конвекцией, как сверху, так и снизу [1]. Несколько завышенное по сравнению с расчетным значение связано с тем, что фактически рассматриваемый проводник не является абсолютно черным телом, и измеренная температура может оказаться заниженной по сравнению с реальной, что при расчете приводит к большим значениям коэффициента теплоотдачи.

На рис. 3 приведены примеры термограмм, полученных ИК-термографом, и соответствующие численные расчеты. Для проводника с вырезом ток составляет 5 А, для проводника, изогнутого под прямым углом — 7.1 А. На рис. 4 — экспериментальная и теоретическая зависимости температуры вблизи внутреннего угла проводника, изогнутого под прямым углом, и в центре перемычки от пропускаемого тока. Относительно большой разброс значений температур во внутреннем угле связан со сложностью фокусировки прибора строго на внутреннем угле проводника, поэтому фактически температура измерялась на некотором расстоянии от него, которое колебалось в пределах миллиметра. При измерениях температуры перемычки такая проблема не возникала, поскольку прибор имеет функцию поиска максимальной температуры, которая соответствует центру перемычки.

Экспериментальная проверка была предпринята в основном в связи с некоторой парадоксальностью полученных теоретических результатов и ставила задачу качественной проверки распределений температуры, не имея целью достижение метрологической точности. Несмотря на это, видно, что имеет место как качественное, так и количественное, в пределах 30%, совпадение теории с экспериментом.

Измерение температуры полоски без дефектов шириной 2 мм показали, что она нагревается до температуры порядка 100°C токами 2.9–3 А. Наличие теплоотвода в широкую часть проводника позволяет пропускать через перемычку той же ширины в 2 раза больший ток без разрушения этой перемычки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенное рассмотрение показывает, что стационарные распределения температуры в плоских проводниках существенным образом определяются не только характеристиками материала проводников, но и их характерными размерами. Установлено, что с уменьшением характерных размеров проводника существенно возрастает роль объемной теплопроводности, что приводит к сильному перераспределению температуры по проводнику. В результате этого температуры областей,

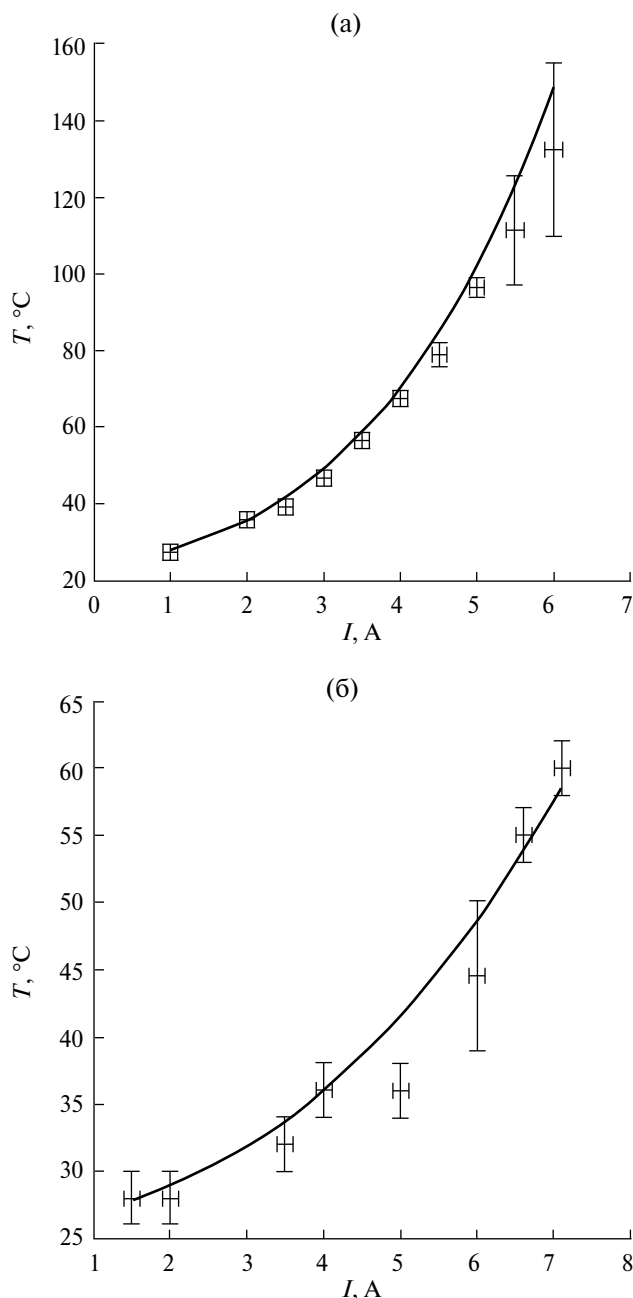


Рис. 4. Экспериментальная и теоретическая зависимости температуры в центре перемычки (а) и вблизи внутреннего угла проводника, изогнутого под прямым углом (б), от пропускаемого тока.

в которых выделяется максимальная тепловая мощность, могут оказаться даже меньше температур тех областей, где тепловая мощность практически не выделяется. Это приводит в частности к тому, что при локальных дефектах, приводящих к резкому возрастанию плотности тока в проводнике (примером может служить проводник с перемычкой), тем не менее не будет происходить перегорание проводников, если их характерные размеры малы.

Полученные критерии подобия позволяют подобрать материалы и условия обдува проводников так, чтобы достичь физического подобия при подобии геометрическом. Главным образом, на наш взгляд, это может быть достигнуто с помощью изменения коэффициента теплоотдачи, однако техническая реализация этого выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lai Y.-S., Kao C.-L.* // Microelectronics Reliability. 2006. V. 46. P. 1357.
2. *Lai Y.-S., Kao C.-L.* // Microelectronics Reliability. 2006. V. 46. P. 915.
3. *Zhang K., Gong L.* // Archiv fuer Elektrotechnik. 1993. V. 76. P. 423.
4. *Герасименко Т.Н., Иванов В.И., Поляков П.А., Попов В.Ю.* // Фундамент. и прикл. матем. 2009. Т. 15. № 6. С. 3.
5. *Gerasimenko T.N., Polyakov P.A., Frolov I.E.* // PIER Lett. 2014. V. 47. P. 41.
6. *Герасименко Т.Н., Поляков П.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2012. № 3. С. 63.
7. *Remsburg R.* Thermal design of electronic equipment. 2001. Boca Raton. CRC Press LLC. P. 102.
8. *Guenin B.M., Marrs R.C., Molnar R.J.* // IEEE Trans. Components Packag. Manuf. Technol. 1995. V. 18. P. 749.
9. *Shaukatullah H., Gaynes M.A., White L.H.* // Proc. Intersoc. confer. on thermal phenom. in electr. systems. 1994. P. 237.
10. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* Физич. величины: Справ. М.: Энергоатомиздат, 1991. С. 438.
11. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. 1976. М.: Атомиздат. С. 304.
12. *Buckingham E.* // Phys. Rev. 1914. V. 4. P. 345.
13. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. С. 46.
14. *Shewchuk J.R.* Triangle: A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. <http://www.cs.cmu.edu>.
15. *Davis T.A.* UMFPACK User Guide. Dept. of Computer and Information Science and Engineering Univ. of Florida, 2011. Gainesville, FL.