А.С.Карпенко*, В.М.Попов

Новая аксиоматизация импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_\omega$

Бесконечнозначной матрицей Лукасевича $\mathfrak{M}^L_\omega$ [Łukasiewicz, Tarski 1930] называется матрица вида

$$\mathfrak{M}^L_\omega = \langle V, \sim, \to, \{1\}\rangle,$$

где V есть множество рациональных чисел из отрезка [0, 1] или сам отрезок [0, 1]; {1} – множество выделенных значений; ~ есть унарная и → бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве V следующим образом:

$$\sim x = 1\text{-}x,$$
$$x \to y = \min(1,\ 1\text{-}x+y).$$

Я. Лукасевич в указанной выше работе выдвинул гипотезу, что бесконечнозначная матричная логика $Ł_\omega$, задаваемая матрицей $\mathfrak{M}^L_\omega$, аксиоматизируется с правилом подстановки и modus ponens посредством следующих аксиом:

B'. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

K. $p \to (q \to p)$.

D. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$

L. $((p \to q) \to (q \to p)) \to (q \to p)$.

Contr. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$

Эта гипотеза была подтверждена М. Вайсбергом [Wajsberg 1935, p. 240], но доказательство не сохранилось. Позже оказалось, что аксиома **L** не является независимой. Несколько различные доказательства этого факта были получены одновременно и независимо друг от друга К. А. Мередитом [Meredith 1958] и Ч.Ч.Чэном [Chang 1958a]. Наконец, А. Роуз и Дж. Россер [Rose, Rosser 1958] опубликовали семантическое, а

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 95-06-17270.

Ч.Ч.Чэн [Chang 1958b, 1959] алгебраическое доказательство полноты $Ł_\omega$ относительно M^L_ω.

А. Роуз [Rose 1956a], а затем независимым образом Р. Мейер [Meyer 1966], показали, что импликативный фрагмент $Ł_{\omega\rightarrow}$ логики $Ł_\omega$ аксиоматизируют формулы **B’**, **K**, **D**, **L**[1].

В работе [Meyer, Parks 1972] при аксиоматизации импликативного фрагмента логики **RM** (см. [Anderson, Belnap 1975]) появляется формула

$$((((p\rightarrow q)\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow r)\rightarrow(((((q\rightarrow p)\rightarrow p)\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow r),$$

которую обозначим посредством **X**.

Мы покажем, что $Ł_{\omega\rightarrow}$ аксиоматизируется посредством **B**, **C**, **K**, **X**, где

B. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$.

Теорема. **BCKX = B’KDL**.

Доказуемость формулы A будем обозначать посредством $\vdash$A. Сами доказательства будем записывать способом, предложенным Я. Лукасевичем, однако, в наших обозначениях. Каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большей посылкой. Справа указывается меньшая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения modus ponens указывается посредством тире, после чего вся строка заканчивается запятой, а доказанная формула - точкой.

Утверждение 1. **B**, **C**, **K**, **X** $\vdash$ **B’**, **D**, **L**.

1. $(q\rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (=**B**).
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (=**C**).
3. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (=**K**).
4. $((((p\rightarrow q)\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow r)\rightarrow(((((q\rightarrow p)\rightarrow p)\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow r)$ (=**X**).

---

[1] См. также [Woźniakowska 1978], где $Ł_{\omega\rightarrow}$ аксиоматизируется посредством **K**, **D** и $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r))$.

2 r/p * 3 - 5,

5. $q \to (p \to p)$.

5 $q/p\to(q\to p)$ * 3 - 6.

6. $p \to p$.

3 $p/p\to p$, $q/q\to p$ * 6 - 7,

7. $(q\to p)\to(p\to p)$.

2 $p/q\to p$, q/p, r/p * 7 - 8,

8. $p\to((q\to p)\to p)$.

1 q/p, $r/(q\to p)\to p$, $p/(p\to q)\to q$ * 8 - 9,

9. $(((p\to q)\to q)\to p)\to \mathbf{D}$.

2 $p/q\to r$, $q/p\to q$, $r/p\to r$ * 1 - 10,

10. $(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ $(=\mathbf{B'})$.

10 $q/(q\to p)\to p$, r/q * 8 - 11,

11. $(((q\to p)\to p)\to q)\to(p\to q)$.

2 $p/q\to p$, r/p * 6 $p/q\to p$ - 12,

12. $q\to((q\to p)\to p)$.

1 $r/(q\to p)\to p$, $p/(p\to q)\to q)$ * 12 - 13,

13. $(((p\to q)\to q)\to q)\to(((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p))$.

1 $q/((p\to q)\to q)\to q$, $r/\mathbf{D}$, $p/p\to q$ * 13 -14,

14. $((p\to q)\to(((p\to q)\to q)\to q))\to((p\to q)\to \mathbf{D})$.

14 * 12 $q/p\to q$, p/q - 15,

15. $(p\to q)\to \mathbf{D}$.

1 $q/p\to q$, $r/\mathbf{D}$, $p/((q\to p)\to p)\to q$ * 15 - 11 - 16,

16. $(((q\to p)\to p)\to q) \to \mathbf{D}$.

4 $r/\mathbf{D}$ * 9 - 16 - 17,

17. $((p\to q)\to q)\to((q\to p)\to p)$ $(=\mathbf{D})$[2].

3 $p/(((p\to q)\to q)\to p)\to(q\to p)$, $q/(p\to q)\to(q\to p)$ *
11 q/p, p/q - 18,

18. $((p\to q)\to(q\to p))\to((((p\to q)\to q)\to p)\to(q\to p)$.

2 $p/(p\to q)\to(q\to p)$, $q/((p\to q)\to q)\to p$, $r/q\to p$ *
18 - 19,

19. $(((p\to q)\to q)\to p)\to \mathbf{L}$.

---

[2] Другое доказательство **B, C, K, X** $\vdash$ **D** имеется в [Slaney, Bunder 1994].

1 $q/((q\to p)\to(p\to q))\to(p\to q)$, $r/\mathbf{L}$, $p/((q\to p)\to p)\to q$ * 17 $p/q\to p$, $q/p\to q$ - 19 p/q, q/p - 20,

20. $(((q\to p)\to p)\to q)\to\mathbf{L}$.
4 $r/\mathbf{L}$ * 19 - 20 - 21,

21. $((p\to q)\to(q\to p))\to(q\to p)$ (=**L**).

Утверждение 2. **B', K, D, L** $\vdash$ **C, B, X**.

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ (=**B'**).
2. $p \to (q \to p)$ (=**K**).
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$ (=**D**).
4. $((p\to q)\to(q\to p))\to(q\to p)$ (=**L**).
1 $q/(q\to p)\to p$, $r/(p\to q)\to q$ * 2 $q/q\to p$ - 3 p/q, q/p - 5,
5. $p\to((p\to q)\to q)$.
1 p/q, $q/(q\to r)\to r$, $r/p\to r$ * 5 p/q, q/r - 6,
6. $(((q\to r)\to r)\to(p\to r))\to(q\to(p\to r))$.
1 $p/p\to(q\to r)$, $q/((q\to r)\to r)\to(p\to r)$, $r/q\to(p\to r)$ * 1 $q/q\to r$ - 6 - 7,
7. $(p\to(q\to r))\to(q\to(p\to r))$ (=**C**).
7 $p/p\to q$, $q/q\to r$, $r/p\to r$ * 1 - 8,
8. $(q\to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (=**B**).
8 $q/((q\to p)\to(p\to q))$, $r/p\to q$, $p/r\to(p\to q)$ * 4 p/q, q/p - 9,
9. $((r\to(p\to q))\to((q\to p)\to(p\to q)))\to((r\to(p\to q))\to(p\to q))$.
1 $p/q\to(p\to r)$, $q/(r\to(p\to q))\to((q\to p)\to(p\to q))$, $r/(r\to(p\to q))\to(p\to q)$ * 1 $p/q\to p$, q/r, $r/p\to q$ - 9 - 10,
10. $((q\to p)\to r)\to((r\to(p\to q))\to(p\to q))$.
1 $p/(q\to p)\to r$, $q/(r\to(p\to q))\to(p\to q)$, $r/((p\to q)\to r)\to r$ * 10 - 3 p/r, $q/p\to q$ - 11,
11. $((q\to p)\to r)\to(((p\to q)\to r)\to r)$.
7 $p/(p\to q)\to q$, $q/q\to p$, r/p * 3 - 12,
12. $(q\to p)\to(((p\to q)\to q)\to p)$.
1 $p/q\to p$, $q/((p\to q)\to q)\to p$ * 12 - 13,
13. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to((q\to p)\to r)$.
1 $p/(((p\to q)\to q)\to p)\to r$, $q/(q\to p)\to r$, $r/((p\to q)\to r)\to r$ * 13 - 11 - 14,

14. $(((p \to q) \to q) \to p) \to r) \to (((p \to q) \to r) \to r)$.

7 $p/(((p \to q) \to q) \to p) \to r$, $q/((p \to q) \to r$ * 14 - 15,

15. $((p \to q) \to r) \to ((((p \to q) \to q) \to p) \to r) \to r)$.

1 $p/(((p \to q) \to q) \to p) \to r$, $q/(q \to p) \to r$,

$r/((((q \to p) \to p) \to q) \to r) \to r$ * 13 - 15 p/q, q/p - 16,

16. $(((p \to q) \to q) \to p) \to r) \to ((((q \to p) \to p) \to q) \to r) \to r)$ (=**X**).

Таким образом, теорема доказана.

Литература

Anderson A. R., Belnap N. D., jr. [1975]. Entailment: The logic of relevance and necessity. Princeton.

Chang C. C. [1958a] Proof of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 87. P. 55-56.

Chang C.C. [1958b]. Algebraic analisis of many-valued logics // Ibid. Vol. 88. P. 467-490.

Chang C.C. [1959]. A new proof of the completeness c the Łukasiewicz axioms // Ibid. Vol. 93. P.74-80.

Łukasiewicz J., Tarski A. [1930]. Untersuchungen uber d :n Aussagenkalkul // Comptes rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie. Vol. 23. Cl. iii. P.1-21. (Английский перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J.. Selected works. Warszawa, 1970. P.131-152).

Meredith C. A. [1958]. The dependence of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 87. P. 54.

Meyer R.K. [1966] Pure denumerable Łukasiewicz implication // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 31. P.575-580.

Meyer R.K., Parks Z. [1972]. Independent axioms for the implicational fragment of Sobocinski's three-valued logic // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Bd.18. S.291-295.

Rose A. [1956a]. Formalization du calcul propositional implicatif á $\aleph_0$-valeurs de Łukasiewicz // Comptes rendud hebdomadaires des seance de l'Academie des Sciences Vol.243. P.1183-1185.

Slaney J. K., Bunder M. W. [1994]. Classical versions of **BCI**, **BCK** and **BCIW** logics // Bulletin of the Section of Logic. 1994. Vol. 23. N 2. P. 61-65.

Wajsberrg M. [1935]. Beiträge zum Metaaussgenkalkül I // Monatshefte für Mathematik und Physik. Vol. 42. P. 221-242. (Английский перевод: Contributions to meta-calculus of propositions I // Wajsberg M. [1977]. P. 89-106]).

Wozniakowska B. [1978]. Algebraic proof of the separation theorem for the infinite-valued logic of Łukasiewicz // Reports on Mathematical Logic. Vol. 10. P.129-137.