

Интуиционистски приемлемая параполная логика¹

In the paper a propositional logic AAP which is a paracomplete sublogic of intuitionistic propositional logic is constructed. The semantics of AAP which is a modification of Kripke semantics adequate to the intuitionistic prepositional logic, and a sequential calculus GAAP axiomatizing the AAP logic, are also described. The embeddings of intuitionistic prepositional logic into AAP are defined.

Строится пропозициональная логика AAP, являющаяся параконной подлогикой интуиционистской пропозициональной логики. Описываются семантика логики AAP, представляющая модификацию семантики Крипке, адекватной интуиционистской пропозициональной логике, и секвенциальное исчисление GAAP, аксиоматизирующее логику AAP. Определяются погружения интуиционистской пропозициональной логики в AAP.

Язык L логики AAP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом $\langle S, \&, \vee, \supset, \neg, (, \rangle \rangle$, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ всех пропозициональных переменных языка L. Определение L-формулы индуктивно: (i) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (ii) если A и B есть L-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть L-формулы. Элементарной L-формулой называется L-формула, которая является пропозициональной переменной языка L или имеет вид $(\neg p)$, где p – пропозициональная переменная языка L. Термины «формула» и «элементарная формула» используются как сокращения для «L-формула» и «элементарная L-формула» соответственно. Логика AAP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens, и которому принадлежат: (а) все интуиционистски доказуемые формулы, ни в одну из которых не входит $\neg$, (б) все формулы вида

$$(A \supset (\neg (B \supset B))) \supset (\neg A),$$

¹ Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-11819 а.

где A и B есть формулы и при этом A не есть пропозициональная переменная языка L , $(\forall)$ все формулы вида $(C \supset ((\neg C) \supset D))$, где C и D есть формулы. ААР – теорией называется множество формул, включающее ААР и замкнутое относительно правила *modus ponens*. Полной ААР-теорией называется такая ААР-теория T , что для всякой

формулы A верно, что $A \in T$ или $(\neg A) \in T$. Неполной ААР-теорией называется ААР-теория, не являющаяся полной ААР-теорией. Параконсистой ААР-теорией называется такая неполная ААР-теория T , что всякая полная ААР-теория, включающая T , равна множеству всех формул.

Теорема 1. (о параконсистентности логики ААР)

Существует параконсистентная ААР – теория.

ААР-моделью называется упорядоченная тройка $\langle G, R, \models \rangle$, где G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G , $\models$ есть подмножество множества $G \times \{A \mid A \text{ есть формула}\}$, и выполняются следующие условия: (1) для всякой элементарной формулы e и всяких α и β из G верно, что если $\alpha \models e$ и $\alpha R \beta$, то $\beta \models e$, (2) для всяких формул A и B , всякой формулы C , не являющейся пропозициональной переменной языка L , всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \models (A \& B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ и $\alpha \models B$,

(2.2) $\alpha \models (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ или $\alpha \models B$,

(2.3) $\alpha \models (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$ и $\beta \models A$, то $\beta \models B$,

(2.4) $\alpha \models (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$, то неверно, что $\beta \models C$,

(2.5) если $\alpha \models (\neg p)$, то для всякого β из G $\alpha R \beta$ влечет, что $\beta \not\models p$ неверно.

Формула A называется общезначимой в ААР – модели $\langle G, R, \models \rangle$, если всякий α из G таков, что $\alpha \models A$.

Теорема 2. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: $A \in \text{ААР}$ т.т.т. A общезначима во всякой ААР-модели.

Секвенциальное исчисление ГААР является секвенциальным исчислением генценовского типа. Формулировка исчисления ГААР получается из предложенной в [1] формулировки исчисления GI интуиционистской логики предикатов первого порядка исключением правил для кванторов (с соответствующей модификацией языка) и заменой правила $A, \Gamma \rightarrow \Delta / \Gamma \rightarrow \Delta$, $(\neg A)$ введения негации справа правилом $B, \Gamma \rightarrow \Delta / \Gamma \rightarrow \Delta$, $(\neg B)$ ограниченного

введения негации справа: $\neg$ не является пропозициональной переменной языка L . Выводы в $GAAP$ строятся обычным для генцевских секвенциальных исчислений способом. Теорема об устранимости сечения и нижеследующие теоремы 3 и 4 доказаны с использованием методов работы [1].

Теорема 3. Для всякой формулы A выполняется условие: $A \in AAP$ т.т.т. секвенция $\rightarrow A$ выводима в $GAAP$.

Теорема 4. Исчисление $GAAP$ разрешимо.

Следствием теоремы 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Логика AAP разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика AAP не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для AAP аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Связь логики AAP с интуиционистской пропозициональной логикой $IntP$ (язык логики $IntP$ есть L) устанавливается следующими теоремами 6 и 7.

Теорема 6. Пусть ϕ есть вычислимое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям: (1) $\phi(p)$ не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L , (2) для всякой пропозициональной переменной p языка L формулы $(p \supset \phi(p))$ и $(\phi(p) \supset p)$ принадлежат логике AAP . Пусть h_ϕ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

$$(a) h_\phi(p) = \phi(p),$$

$$(b) h_\phi((B \cdot C)) = (h_\phi(B) \cdot h_\phi(C)), \text{ где } \cdot \in \{ \&, \vee, \supset \},$$

$$(c) h_\phi((\neg B)) = (\neg h_\phi(B)).$$

Тогда для всякой формулы A : $A \in IntP$ т.т.т. $h_\phi(A) \in AAP$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка L $\phi(p)$ как $(p \& p)$ (или как $(p \vee p)$), получаем отображение h_ϕ , погружающее логику $IntP$ в AAP .

Теорема 7. Пусть g есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(I) $g(p) = p$,

(II) $g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C))$, где $\bullet \in \{ \&, \vee, \supset \}$,

(III) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg (s_1 \supset s_1)))$.

Тогда для всякой формулы A : $A \in \text{IntP}$ т.т.т. $g(A) \in \text{IntP}$.

Используя теорему 7, можно доказать, что для всякой формулы A такой, что всякое вхождение $\neg$ в A есть вхождение в формулу $(\neg (s_1 \supset s_1))$, верно следующее: $A \in \text{IntP}$ т.т.т. $A \in \text{AAP}$.

Литература

1. Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.
2. Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.