

Общероссийский математический портал

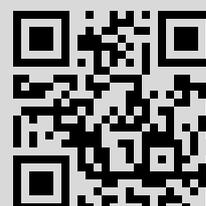
С. Ю. Вернов, Построение решений обобщенной системы Хенона–Хейлеса с помощью теста Пенлеве, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 409–419

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 91.229.59.100

28 октября 2014 г., 00:22:51



ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА С ПОМОЩЬЮ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ

Рассматривается система Хенона–Хейлеса в общем виде. В двух неинтегрируемых случаях с помощью теста Пенлеве найдены новые частные решения в виде рядов Лорана, зависящих от трех параметров. Один из параметров определяет положение особой точки, а два других – коэффициенты рядов Лорана. При определенных значениях этих двух параметров получаются ряды Лорана известных точных решений. Установлено, что в других неинтегрируемых случаях подобных решений не существует.

Ключевые слова: неинтегрируемые системы, тест Пенлеве, сингулярный анализ, полиномиальный потенциал, система Хенона–Хейлеса, ряд Лорана, эллиптические функции.

1. СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Гамильтонова система, заданная на $2s$ -мерном фазовом пространстве, называется *вполне интегрируемой* (интегрируемой по Лиувиллю), если существует s независимых коммутирующих интегралов движения. В этом случае уравнения движения являются (по крайней мере, в принципе) разделимыми и решение может быть найдено в квадратурах.

При решении задач механики и теории поля координаты и время предполагаются действительными. Вместе с тем интегрируемость уравнений движения связана с поведением их решений как функций комплексного времени, а в случае теории поля также и комплексных пространственных координат. Идея рассматривать время как комплексную переменную и требовать, чтобы решения механической задачи представляли собой однозначные, мероморфные на всей комплексной временной плоскости функции, впервые была высказана Ковалевской в работах [1]. Эта идея привела Ковалевскую к замечательному результату [1] (см. также [2], [3]): был найден новый интегрируемый случай (ныне известный как случай Ковалевской) движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот результат показал эффективность применения к физическим задачам аналитической теории дифференциальных уравнений. Важным этапом разви-

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: svemov@theory.sinp.msu.ru

тия этой теории явилась классификация обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по типам особенностей их решений, предложенная Пенлеве.

Сформулируем свойство Пенлеве для ОДУ. Решение системы ОДУ будем рассматривать как аналитическую функцию, возможно, имеющую изолированные особые точки [4], [5]. Если при обходе особой точки функция меняет значение, то особая точка называется *критической точкой*, в противном случае – *некритической*. Особая точка, положение которой зависит от начальных условий, называется *подвижной*¹⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Система ОДУ обладает *свойством Пенлеве*, если ее общее решение не имеет подвижных критических особых точек.

В окрестности особой точки t_0 произвольное решение такой системы разлагается в ряд Лорана, содержащий конечное число членов с отрицательными степенями разности $t - t_0$. В ряде случаев замена переменных позволяет получить из системы, не обладающей свойством Пенлеве, систему, обладающую этим свойством. В таких случаях говорят, что первоначальная система обладает *слабым свойством Пенлеве*.

Исследования многих механических систем показывают [7]–[9], что систему удается полностью проинтегрировать только при тех значениях параметров, при которых система обладает свойством Пенлеве (или слабым свойством Пенлеве). Аргументы, проясняющие связь анализа Пенлеве с существованием интегралов движения, приведены в работах [10]. Доказано, что если система имеет комплексные и иррациональные “резонансы”, то она не является алгебраически интегрируемой [11] (см. также [12] и приведенную там литературу). Однако доказательства интегрируемости произвольной системы со свойством Пенлеве и алгоритма построения дополнительного интеграла по данным анализа Пенлеве до сих пор не существует. Легко привести пример интегрируемой в квадратурах системы, не обладающей свойством Пенлеве [13]: $H = p^2/2 + f(x)$, где $f(x)$ – полином не ниже пятой степени. Данная система тривиально интегрируется в квадратурах, а ее общее решение не является мероморфной функцией.

Тестом Пенлеве называют любой алгоритм, проверяющий выполнение условий, необходимых для наличия у дифференциального уравнения свойства Пенлеве. Алгоритм, построенный самим Пенлеве и использованный им для нахождения всех ОДУ второго порядка, обладающих свойством Пенлеве [6], известен как α -метод. Метод Ковалевской [1] является менее общим, чем α -метод, но зато гораздо более простым.

Абловиц, Рамани и Сегур [14], развивая метод Ковалевской, построили новый алгоритм теста Пенлеве для ОДУ. Они также первыми заметили связь между нелинейными уравнениями в частных производных, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, и уравнениями, обладающими свойством Пенлеве. Впоследствии было сформулировано свойство Пенлеве для уравнений в частных производных и построен соответствующий тест Пенлеве (ВТК (WTC)-метод) [15], [16] (см. также [17]–[20]).

На основе теста Пенлеве был разработан [21] алгоритм нахождения частных решений ОДУ в виде конечных разложений по неизвестной функции $\varphi(t - t_0)$. Функция $\varphi(t - t_0)$ и

¹⁾ Для систем с не зависящим от времени гамильтонианом все особые точки являются подвижными.

коэффициенты разложения оказываются решениями некоторой системы ОДУ, часто более простой, чем исходное уравнение. Данный метод был использован [22] для получения точных частных решений неинтегрируемых ОДУ. С помощью теста Пенлеве, основанного на теории возмущений [18], было построено [23] четырехпараметрическое обобщение точного трехпараметрического решения девятой космологической модели Бианки (Mixmaster).

Целью данной статьи является нахождение новых частных решений обобщенной системы Хенона–Хейлеса с помощью теста Пенлеве. В отличие от работы [22], здесь решения получаются в виде формальных рядов Лорана (возможно, умноженных на $\sqrt{t-t_0}$), для которых впоследствии находится область сходимости.

2. ГАМИЛЬТониан ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

В 60-е годы в астрономии активно изучались модели движения звезд в цилиндрически-симметричном и не зависящем от времени потенциале [24], [25]. Благодаря симметрии потенциала трехмерная задача сводится к двумерной, однако нахождение второго интеграла полученной системы в аналитическом виде, например в виде полинома по фазовым переменным, оказывается неразрешимой задачей даже для сравнительно простых полиномиальных потенциалов. Чтобы ответить на вопрос о существовании неизвестного интеграла, Хенон и Хейлес исследовали [25] поведение траекторий с помощью численного интегрирования уравнений движения. Подчеркивая, что при выборе потенциала не исходят из экспериментальных данных, они предложили гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3,$$

поскольку он, с одной стороны, достаточно прост, что позволяет легко вычислять траектории, а с другой стороны, достаточно сложен, чтобы полученные траектории оказались далеко не тривиальными. В самом деле, при малых энергиях система Хенона–Хейлеса выглядит интегрируемой в том смысле, что независимо от начальных условий траектории, полученные с помощью численного интегрирования, лежат на двумерных поверхностях, т.е. так, как если бы существовал второй независимый интеграл. В то же время с увеличением энергии многие из этих поверхностей распадаются, что указывает на отсутствие второго интеграла. Последующие численные исследования [26], [27] показали, что в комплексной t -плоскости особые точки решений уравнений движения группируются в подобные себе спирали. Получаются чрезвычайно сложные распределения сингулярностей, образующие границу, за которую решение не может быть аналитически продолжено.

Обобщенная система Хенона–Хейлеса описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2 + \lambda x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{C}{3}y^3 \quad (1)$$

и соответствующей системой уравнений движения

$$\begin{aligned} x_{tt} &= -\lambda x - 2xy, \\ y_{tt} &= -y - x^2 + Cy^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x_{tt} \equiv d^2x/dt^2$ и $y_{tt} \equiv d^2y/dt^2$, а λ и C – численные параметры.

Анализ Пенлеве позволил отыскать интегрируемые случаи (2):

- а) $C = -1$, $\lambda = 1$;
- б) $C = -6$, λ – произвольное число;
- в) $C = -16$, $\lambda = 1/16$.

Система Хенона–Хейлеса является моделью, не только активно изучаемой различными математическими методами²⁾, но и широко используемой в физике, в частности в теории гравитации [29]–[31] и в теории плазмы [32]. Активно изучаются также модели, получаемые добавлением в гамильтониан (1) неполиномиальных членов [33]–[35].

3. НЕИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ

Общие решения системы Хенона–Хейлеса известны только в интегрируемых случаях [35], в остальных случаях не только четырех-, но даже и трехпараметрические точные решения пока не найдены.

Система Хенона–Хейлеса, как система двух ОДУ второго порядка, равносильна уравнению четвертого порядка³⁾

$$y_{tttt} = (2C - 8)y_{tty} - (4\lambda + 1)y_{tt} + 2(C + 1)y_t^2 + \frac{20C}{3}y^3 + (4C\lambda - 6)y^2 - 4\lambda y - 4H, \quad (3)$$

где H – энергия системы. Частные решения данного уравнения можно найти, предположив, что y – решение более простого ОДУ. Например, хорошо известны двухпараметрические решения в виде эллиптических функций Вейерштасса [36], удовлетворяющих следующему уравнению первого порядка:

$$y_t^2 = \tilde{A}y^3 + \tilde{B}y^2 + \tilde{C}y + \tilde{D}, \quad (4)$$

где \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} – некоторые константы.

Тимошкова [37] обобщила уравнение (4):

$$y_t^2 = \tilde{A}y^3 + \tilde{B}y^2 + \tilde{C}y + \tilde{D} + \tilde{G}y^{5/2} + \tilde{E}y^{3/2}, \quad (5)$$

и нашла новые однопараметрические множества решений системы Хенона–Хейлеса в неинтегрируемых случаях ($C = -4/3$ или $C = -16/5$, λ – произвольное число). Каждой паре значений C и λ соответствуют четыре уравнения с $\tilde{G} \neq 0$ или $\tilde{E} \neq 0$. Примечательно, что подобные уравнения получаются при $\tilde{D} = 0$, поэтому замена $y = \varrho^2$ приводит к уравнению

$$\varrho_t^2 = \frac{1}{4}(\tilde{A}\varrho^4 + \tilde{G}\varrho^3 + \tilde{B}\varrho^2 + \tilde{E}\varrho + \tilde{C}). \quad (6)$$

Общее решение этого уравнения зависит от одного произвольного параметра и может быть выражено либо в элементарных, либо в эллиптических функциях.

²⁾История изучения обобщенной системы Хенона–Хейлеса описана в [28].

³⁾При известной $y(t)$ функция $x^2(t)$ находится как решение линейного уравнения. Система (2) инвариантна относительно замены x на $-x$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА

При нахождении решений в виде формального ряда Лорана использование алгоритма Абловица–Рамани–Сегура теста Пенлеве оказывается чрезвычайно полезным.

Предположим, что поведение решения в окрестности особой точки t_0 является алгебраическим, т.е. решения стремятся к бесконечности как

$$x = a_\alpha(t - t_0)^\alpha, \quad y = b_\beta(t - t_0)^\beta, \quad (7)$$

где α, β, a_α и b_β – некоторые константы. Разумеется, действительные части α и β должны быть меньше нуля, а также $a_\alpha \neq 0$ и $b_\beta \neq 0$.

Если α и β – целые числа, то подстановка разложений вида

$$x = a_\alpha(t - t_0)^\alpha + \sum_{k=1}^{N_{\max}} a_{k+\alpha}(t - t_0)^{k+\alpha}, \quad y = b_\beta(t - t_0)^\beta + \sum_{k=1}^{N_{\max}} b_{k+\beta}(t - t_0)^{k+\beta}$$

позволяет свести систему дифференциальных уравнений к множеству последовательно решаемых линейных алгебраических систем на коэффициенты a_k и b_k . В общем случае точные решения (в виде формальных рядов Лорана) возможно получить, только решив бесконечное число систем ($N_{\max} = \infty$). В то же время решение конечного числа систем позволяет получить решения с точностью до $\mathcal{O}(t^{N_{\max}})$. Последовательное решение линейных алгебраических систем может быть проведено на ЭВМ с помощью системы компьютерной алгебры, например REDUCE [38], [39] или Mathematica [40]. Однако для подобной автоматизации необходимо предварительно определить значения констант α, β, a_α и b_β и номера систем, детерминанты которых равны нулю. Эти системы соответствуют тем степеням t (часто называемым резонансами), в коэффициентах при которых могут появляться новые произвольные параметры. Только после исследования подобных систем можно переходить к автоматическому получению решений. Всю эту необходимую информацию можно получить, проведя тест Пенлеве (см., например, [9]). Более того, результаты анализа Пенлеве подсказывают случаи, в которых полезно включать в разложения члены с дробными степенями $t - t_0$.

Случай 1	Случай 2 ($\beta < \operatorname{Re} \alpha < 0$)
$\alpha = -2$	$\alpha = (1 \pm \sqrt{1 - 48/C})/2$
$\beta = -2$	$\beta = -2$
$a_\alpha = \pm 3\sqrt{2 + C}$	$a_\alpha = c_1$ (произвольно)
$b_\beta = -3$	$b_\beta = 6/C$
$r = -1, 6, 5/2 - (\sqrt{1 - 24(1 + C)})/2,$ $5/2 + (\sqrt{1 - 24(1 + C)})/2$	$r = -1, 0, 6, \mp \sqrt{1 - 48/C}$

Существуют два различных типа поведения решений системы (2) в окрестности сингулярности [9], [27], [41] (см. таблицу). Значения переменной r обозначают резонансы: $r = -1$ соответствует t_0 , $r = 0$ (в случае 2) соответствует тому, что ведущий член пропорционален произвольному параметру c_1 . Остальные значения r определяют степени t , а именно $t^{\alpha+r}$ для x и $t^{\beta+r}$ для y , при которых появляются новые произвольные коэффициенты (как решения линейной системы с нулевым детерминантом). Наличие в одном из случаев отрицательных резонансов, отличных от всегда существующего $r = -1$, означает, что данный случай соответствует не общему, а особому решению.

Для интегрируемости системы (2) необходимо, чтобы все значения α и r были целыми (или рациональными) и все системы с нулевыми детерминантами имели решения при любых значениях входящих в них свободных параметров. Это возможно только в интегрируемых случаях “а”–“в” (см. раздел 2).

Для поиска частных решений представляются интересными те значения C , при которых α и r – целые (или рациональные) числа либо только в случае 1, либо только в случае 2. Найдем все случаи, когда существует частное (не особое) решение, представимое в виде трехпараметрического ряда Лорана (возможно, умноженного на $\sqrt{t - t_0}$). Из требования натуральности значений r получаем, что общее решение может быть представлено в виде ряда Лорана либо при $C = -1$ и $C = -4/3$ (случай 1), либо при $C = -16/5$, $C = -6$ и $C = -16$ (случай 2, $\alpha = (1 - \sqrt{1 - 48/C})/2$), а также при $C = -2$, когда два типа поведения решений в окрестности сингулярности сливаются в один. Рассмотрим все эти возможности.

При $C = -2$ получаем противоречие: $a_\alpha = 0$ (см. случай 1). Это следствие того, что вопреки нашему предположению поведение решения в окрестности особой точки не является алгебраическим, так как ведущий порядок включает логарифмические члены [9]. При $C = -6$ и любом значении λ известны точные четырехпараметрические решения. В случаях $C = -1$ и $C = -16$ подстановка неизвестных функций в виде рядов Лорана приводит к уравнениям на λ : соответственно $\lambda = 1$ и $\lambda = 1/16$. Таким образом, свободные от логарифмов решения существуют только в интегрируемых случаях. И так, частные решения в виде ряда Лорана, зависящего от трех параметров, могут существовать только в двух неинтегрируемых случаях, а именно при $C = -16/5$ и $C = -4/3$. Примечательно, что данные ряды Лорана обобщают точные решения, полученные в работе [37].

5. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему Хенна–Хейлеса при $C = -16/5$. В случае 2 получаем $\alpha = -3/2$ и $r = -1, 0, 4, 6$, следовательно, x следует искать в таком виде, чтобы разложение x^2 в ряд Лорана в окрестности t_0 начиналось с $(t - t_0)^{-3}$. Пусть $t_0 = 0$. Подставив

$$x = \sqrt{t} \left(c_1 t^{-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} a_k t^k \right), \quad y = -\frac{15}{8} t^{-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} b_k t^k$$

в систему (2), получим последовательность линейных систем на коэффициенты a_k и b_k :

$$\begin{aligned} (k^2 - 4)a_k + 2c_1b_k &= -\lambda a_{k-2} - 2 \sum_{j=-1}^{k-1} a_j b_{k-j-2}, \\ ((k-1)k - 12)b_k &= -b_{k-2} - \sum_{j=-2}^{k-1} a_j a_{k-j-3} - \frac{16}{5} \sum_{j=-1}^{k-1} b_j b_{k-j-2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Детерминанты систем, соответствующих значениям $k = 2$ и $k = 4$, равны нулю. Для определения a_2 и b_2 мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} c_1(557056c_1^8 + (15552000\lambda - 4860000)c_1^4 + 864000000b_2 + \\ + 108000000\lambda^2 - 67500000\lambda + 10546875) = 0, \\ 818176c_1^8 + (15660000\lambda - 4893750)c_1^4 - 810000000b_2 - 6328125 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как легко видеть, в данной системе нет членов, пропорциональных a_2 , следовательно, a_2 – новая константа интегрирования. Отбрасывая решение с $c_1 = 0$, получаем систему на $\tilde{c}_1 \equiv c_1^4$ и b_2 , имеющую следующие решения:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{1125(4\sqrt{35(2048\lambda^2 - 1280\lambda + 387)} - 1680\lambda + 525)}{167552}, \\ b_2 &= -\frac{(10944\lambda - 3420)\sqrt{35(2048\lambda^2 - 1280\lambda + 387)} - 4403456\lambda^2 + 2752160\lambda - 789065}{117956608} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{1125(-4\sqrt{35(2048\lambda^2 - 1280\lambda + 387)} - 1680\lambda + 525)}{167552}, \\ b_2 &= \frac{(10944\lambda - 3420)\sqrt{35(2048\lambda^2 - 1280\lambda + 387)} - 4403456\lambda^2 + 2752160\lambda - 789065}{117956608}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили новую константу интегрирования a_2 , но при этом нам потребовалось зафиксировать c_1 , и число произвольных параметров осталось равным двум. Как легко проверить, при $k = 4$ система сводится к одному уравнению, а b_4 – новый произвольный параметр. Итак, получено формальное решение, зависящее от трех параметров: t_0 , a_2 и b_4 .

Получить теперь решение с произвольной точностью можно с помощью системы компьютерной алгебры. Для данного значения λ выбираем одно из возможных значений c_1 , после этого a_j и b_j находятся автоматически. Таким образом, при $C = -16/5$ имеем четыре трехпараметрических решения, соответствующих четырем точным однопараметрическим решениям, найденным в работе [37]. Ряды Лорана точных решений совпадают с соответствующими двухпараметрическими рядами при определенных значениях этих параметров. В качестве примера в приложении рассмотрен случай $\lambda = 1/9$.

При $C = -4/3$ ситуация аналогична. В случае 1 имеем $r = -1, 1, 4, 6$. Подставляя

$$x = \sqrt{6}t^{-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} d_k t^k, \quad y = -3t^{-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} f_k t^k$$

в систему (2), получим последовательность линейных систем на коэффициенты d_k и f_k :

$$\begin{aligned} ((k-1)k-6)d_k + 2\sqrt{6}f_k &= -\lambda d_{k-2} - 2 \sum_{j=-1}^{k-1} d_j f_{k-j-2}, \\ ((k-1)k-8)f_k + 2\sqrt{6}d_k &= -f_{k-2} - \sum_{j=-1}^{k-1} d_j d_{k-j-2} - \frac{4}{3} \sum_{j=-1}^{k-1} f_j f_{k-j-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $k = -1, 2, 4$ системы имеют нулевой детерминант. В первом случае ($k = -1$) система всегда имеет решение, а f_{-1} – новый параметр, который фиксируется при решении системы с $k = 2$. Если

$$f_{-1} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{7(1216\lambda^2 - 1824\lambda + 783)} - 140\lambda + 105}{385}}$$

или

$$f_{-1} = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{7(1216\lambda^2 - 1824\lambda + 783)} - 140\lambda + 105}{385}},$$

то данная система имеет решения, а f_2 – новый произвольный параметр. Аналогично случаю $C = -16/5$ при $k = 4$ система сводится к одному уравнению, а f_4 – новый произвольный параметр. Таким образом, при $C = -4/3$ мы снова имеем четыре трехпараметрических (t_0, f_2, f_4) решения, соответствующих четырем точным однопараметрическим решениям, найденным в [37]. Ряды Лорана точных решений совпадают с соответствующими двухпараметрическими рядами при определенных значениях этих параметров.

После получения формального ряда естественно возникает вопрос о его сходимости. То, что полученные в виде формальных пси-рядов решения обобщенной системы Хенона–Хейлеса имеют ненулевую область сходимости, доказано в работах [41], [42]. В приложении в качестве примера рассмотрен случай $C = -16/5$ и $\lambda = 1/9$, для которого доказано, что если $|a_2| \leq 1$ и $|b_4| \leq 1$, то ряды Лорана сходятся в кольце $0 < |t - t_0| \leq (1 - \varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число. Аналогично может быть рассмотрена сходимость рядов и при иных значениях C и λ .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ Пенлеве позволяет не только найти интегрируемые случаи динамических систем, но также построить частные решения даже в неинтегрируемых случаях.

Для системы Хенона–Хейлеса с $C = -16/5$ или $C = -4/3$ и произвольным λ получены трехпараметрические решения в виде ряда Лорана. При определенных значениях

двух параметров данные решения совпадают с известными точными решениями. Данные ряды имеют ненулевую область сходимости. С помощью теста Пенлеве было показано, что неинтегрируемая система Хенона–Хейлеса имеет частные решения в виде трехпараметрического ряда Лорана только при указанных значениях C . Именно в этих случаях наиболее высока вероятность нахождения точных трехпараметрических решений уравнения (3), так как отсутствуют препятствия их существованию в виде однозначных функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим случай $C = -16/5$ и $\lambda = 1/9$. Уравнение (5) имеет вид или

$$y_t^2 + \frac{32}{15}y^3 + \frac{4}{9}y^2 \pm \frac{8i}{\sqrt{135}}y^{5/2} = 0,$$

и в зависимости от выбора знака перед последним слагаемым получаем либо (в случае знака +)

$$y = -\frac{5}{3(1 - 3 \sin((t - t_0)/3))^2}, \tag{11a}$$

либо (в случае знака -)

$$y = -\frac{5}{3(1 + 3 \sin((t - t_0)/3))^2}, \tag{11b}$$

или

$$y_t^2 + \frac{32}{15}y^3 + \frac{1748}{1683}y^2 \pm \frac{8\sqrt{65}}{15\sqrt{561}}y^{5/2} \pm \frac{8125\sqrt{65}}{20196\sqrt{561}}y^{3/2} + \frac{333125}{7553304}y = 0,$$

и решения получаются в виде эллиптических функций Якоби.

Система (9) имеет следующие решения:

$$\left\{ \tilde{c}_1 = \frac{625}{128}, \quad b_2 = -\frac{1819}{663552} \right\}, \quad \left\{ \tilde{c}_1 = -\frac{8125}{23936}, \quad b_2 = -\frac{8700683}{1364926464} \right\},$$

и мы получаем четыре типа функции y :

$$y = -\frac{15}{8}t^{-2} + \frac{5\sqrt{2}}{32}t^{-1} - \frac{205}{2304} + \frac{115\sqrt{2}}{13824}t - \frac{1819}{663552}t^2 + \left(\frac{741719\sqrt{2}}{1528823808} + \frac{5\sqrt[4]{2}}{12}a_2 \right)t^3 + b_4t^4 + \dots; \tag{12a}$$

$$y = -\frac{15}{8}t^{-2} - \frac{5\sqrt{2}}{32}t^{-1} - \frac{205}{2304} - \frac{115\sqrt{2}}{13824}t - \frac{1819}{663552}t^2 - \left(\frac{741719\sqrt{2}}{1528823808} + \frac{5i\sqrt[4]{2}}{12}a_2 \right)t^3 + b_4t^4 + \dots; \tag{12b}$$

$$y = -\frac{15}{8}t^{-2} + \frac{5i\sqrt{4862}}{5984}t^{-1} - \frac{69335}{430848} - \frac{37745i\sqrt{4862}}{483411456}t - \frac{8700683}{1364926464}t^2 -$$

$$- \left(\frac{1148020763i\sqrt{13}\sqrt{374}}{3332429743915008} - \frac{5\sqrt{2}}{12} a_2 \sqrt[4]{-\frac{13}{374}} \right) t^3 + b_4 t^4 + \dots; \quad (12в)$$

$$y = -\frac{15}{8} t^{-2} - \frac{5i\sqrt{4862}}{5984} t^{-1} - \frac{69335}{430848} + \frac{37745i\sqrt{4862}}{483411456} t - \frac{8700683}{1364926464} t^2 - \\ - \left(\frac{1148020763\sqrt{13}\sqrt{374}}{3332429743915008} + \frac{5i\sqrt{2}}{12} a_2 \sqrt[4]{-\frac{13}{374}} \right) t^3 + b_4 t^4 + \dots. \quad (12г)$$

Как легко проверить, при $a_2 = -21497\sqrt[4]{2}/42467328$ и $b_4 = -858455/12039487488$ ряд (12а) является рядом Лорана решения (11а), а при $a_2 = -21497i\sqrt[4]{2}/42467328$ и $b_4 = -858455/12039487488$ ряд (12б) является рядом Лорана решения (11б). Ряды (12в) и (12г) при некоторых значениях параметров являются рядами Лорана решений уравнений (9).

Как известно, область сходимости ряда Лорана – некоторое кольцо. Найдем условия, при которых ряды (12а)–(12г) и соответствующие ряды для функции x сходятся при $0 < |t| \leq 1 - \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число. Сумма геометрической прогрессии $S = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1/(1-t)$ является конечной при $|t| \leq 1 - \varepsilon$, поэтому ряд будет сходиться в заданном кольце, если существует N такое, что $\forall n > N \quad |a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$ (M – действительное число).

Допустим $|a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$ для всех $-1 < n < k$, тогда из (8) получаем

$$|a_k| \leq \frac{2M(k+1) + |\lambda| + 2|c_1|}{|k^2 - 4|} M, \quad |b_k| \leq \frac{21Mk + 26M + 5}{5|k^2 - k - 12|} M. \quad (13)$$

Как легко видеть, существует такое N , что если $|a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$ для $-1 \leq n \leq N$, то $|a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$ для $-1 \leq n < \infty$. Например, для $M = 1$ при любом возможном значении c_1 имеем $N = 8$. Легко проверить, что если $|a_2| \leq 1$ и $|b_4| \leq 1$, то $|a_n| \leq 1$ и $|b_n| \leq 1$ для $-1 \leq n \leq 8$, а следовательно, и для произвольного n . Таким образом, ряды Лорана сходятся в кольце $0 < |t| \leq 1 - \varepsilon$.

Благодарности. Автор выражает благодарность Р. И. Богданову и В. Ф. Еднералу за полезные обсуждения и Е. И. Тимошковой за подробный комментарий статьи [37]. Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 00-15-96560 и № 00-15-96577) и грантом научной программы “Университеты России” (№ УР.02.03.002).

Список литературы

- [1] *S. Kowalewski (S. V. Kovalevskaya)*. Acta Math. 1889. V. 12. P. 177; 1890. V. 14. P. 81. Перевод: С. В. Ковалевская. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
- [2] *В. В. Голубев*. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953; М.–Ижевск: РХД, 2002.
- [3] *A. Goriely*. Regul. Chaotic Dyn. 2000. V. 5. P. 1.
- [4] *В. В. Голубев*. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
- [5] *E. Hille*. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York: Wiley, 1976.

- [6] *P. Painlevé*. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (Leçons de Stockholm, 1895). Paris: Hermann, 1896; Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 201; Acta Math. 1902. V. 25. P. 1; Reprinted in: Oeuvres de P. Painlevé, V. 1. Paris: Editions du CNRS, 1973.
- [7] *T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi*. Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 1257.
- [8] *A. Ramani, B. Grammaticos, T. Bountis*. Phys. Rep. 1989. V. 180. P. 159.
- [9] *М. Табор*. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: УРСС, 2001.
- [10] *N. Ercolani, E. D. Siggia*. Phys. Lett. A. 1986. V. 119. P. 112; Physica D. 1989. V. 34. P. 303.
- [11] *H. Yoshida*. Celest. Mech. 1983. V. 31. P. 363; P. 381.
- [12] *H. Yoshida*. Physica D. 1999. V. 128. P. 53.
- [13] *В. В. Коллов*. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УГУ, 1995.
- [14] *M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur*. Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23. P. 333; J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715; P. 1006.
- [15] *J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale*. J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 522.
- [16] *J. Weiss*. J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 1405.
- [17] *A. C. Newell, M. Tabor, Y. B. Zeng*. Physica D. 1987. V. 29. P. 1.
- [18] *R. Conte, A. P. Fordy, A. Pickering*. Physica D. 1993. V. 69. P. 33.
- [19] *R. Conte*. (ed.). The Painlevé Property. One Century Later. CRM Ser. in Math. Phys. New York: Springer 1999.
- [20] *R. Conte*. Exact solutions of nonlinear partial differential equations by singularity analysis. nlin.SI/0009024.
- [21] *J. Weiss*. Phys. Lett. A. 1984. V. 102. P. 329; V. 105. P. 387.
- [22] *Р. Сагадеван*. ТМФ. 1994. Т. 99. № 3. С. 528.
- [23] *J. Springael, R. Conte, M. Musette*. Regul. Chaotic Dyn. 1998. V. 3. № 1. P. 3; solv-int/9804008.
- [24] *G. Contopoulos*. Z. Astrophys. 1960. V. 49. P. 273; Astron. J. 1963. V. 68. P. 1.
- [25] *M. Hénon, C. Heiles*. Astron. J. 1964. V. 69. P. 73.
- [26] *Y. F. Chang, M. Tabor, J. Weiss, G. Corliss*. Phys. Lett. A. 1981. V. 85. P. 211.
- [27] *Y. F. Chang, M. Tabor, J. Weiss*. J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 531.
- [28] *S. Yu. Vernov*. The Painlevé analysis and special solutions for nonintegrable systems. math-ph/0203003.
- [29] *D. L. Rod*. J. Diff. Equat. 1973. V. 14. P. 129.
- [30] *J. Podolský, K. Veselý*. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 081501.
- [31] *F. Kokubun*. Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 2610.
- [32] *Y. Guo, C. Grotta Ragazza*. Commun. Pure Appl. Math. 1996. V. 49. № 11. P. 1145.
- [33] *Г. Тондо*. ТМФ. 1994. Т. 99. № 3. С. 552.
- [34] *F. Kokubun*. Phys. Lett. A. 1998. V. 245. P. 358.
- [35] *R. Conte, M. Musette, C. Verhoeven*. J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906; nlin.SI/0112030.
- [36] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе). М.: Наука, 1967.
- [37] *Е. И. Тимошкова*. Астрон. журн. 1999. Т. 76. С. 470.
- [38] *A. C. Hearn*. REDUCE. User's Manual. Version 3.6. Santa Monica, California: RAND Publ. CP78, 1995.
- [39] *В. Ф. Еднерал, А. П. Крюков, А. Я. Родионов*. Язык аналитических вычислений REDUCE. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [40] *В. А. Муравьев, Д. Е. Бурланков*. МАТЕМАТИКА. М.–Ижевск: РХД, 2000.
- [41] *S. Melkonian*. J. Nonlinear Math. Phys. 1999. V. 6. P. 139; math.DS/9904186.
- [42] *S. Melkonian, A. Zурчен*. Nonlinearity. 1995. V. 8. P. 1143.