ФГБОУ ВО
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 539.3

Климов Кирилл Юрьевич

РЕОНОМНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Мовчан Андрей Александрович

МОСКВА-2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Вводные замечания

Термоупругие мартенситные фазовые превращения [1], наблюдаемые в сплавах с памятью формы (СПФ), были впервые открыты в 1948 г. Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандорсом. Первый промышленно значимый образец СПФ — нитинол (примерно равноатомный никелид титана, NiTi) — был синтезирован в Ливерморской лаборатории (США) в 50-х годах XX века и запатентован в 1965 г. На сегодняшний день также известны и широко используются сплавы, обладающие свойством памяти формы, синтезированные на основе Ti-Ni-Cu, Fe-Mn, Mn-Cu, Cu-Zn-Al и других соединений [2].

Уникальность данных сплавов обусловлена наличием эффекта памяти формы, проявляемого следующим образом:

- если нагрузить СПФ (находящийся при некоторой достаточно низкой температуре) возрастающим напряжением за границы предела упругости и затем снять нагрузку, то приобретенная неупругая компонента деформации материала сохраняется (снимется лишь упругая деформация);
- далее, после нагрева до определенного уровня температур (называемого уровнем окончания обратного превращения) описанная выше неупругая деформация частично или полностью исчезает. Таким образом, материал возвращается в свою первоначальную форму.

Данное явление для NiTi может быть объяснено следующим образом: никелид титана в простейшем случае может находиться в двух разных фазовых состояниях, характеризующихся разным типом кристаллической решетки. При низких температурах NiTi находится в мартенситном фазовом состоянии, имеющем моноклинную с искажениями кристаллическую решетку. Ячейка моноклинной структуры с искажениями представляет собой прямой параллелепипед, в основании которого лежит параллелограмм с углом 96.8°. При высоких температурах СПФ переходит в фазовое состояние, называемое аустенитом, характеризующееся объемноцентрированной кубической (ОЦК) кристаллической решеткой типа B2 (атомы одной группы расположены в узлах кубической решетки, а атомы другой группы — в центре ячейки).

Переход образца из аустенитной фазы в мартенситную называется прямым мартенситным превращением (ПМП). Прямое превращение может происходить как за счет уменьшения температуры, так и за счет роста механических напряжений [3]. В общем случае температура начала прямого превращения при заданном постоянном уровне механических напряжений σ в образце обозначается как M_s^σ (верхний индекс характеризует уровень напряжений), температура окончания — M_f^σ. Обратным мартенситным превращением (ОМП) называется переход от мартенситной фазы в аустенитную при увеличении температуры или разгрузке. В общем случае температура начала обратного превращения при заданном постоянном уровне механических напряжений σ в образце обозначается как A_s^σ, а температура окончания — как A_f^σ. В некоторых работах [4] считается, что модули Юнга NiTi в аустенитном и мартенситном фазовых состояниях отличаются примерно в 3 раза:

E_A = 84000 МПа (в аустенитном состоянии),

E_M = 28000 МПа (в мартенситном состоянии),

при этом коэффициенты Пуассона в аустените и мартенсите равны ν_A = 0.3 и ν_M = 0.48 соответственно.

Для описания фазового состояния поликристаллических СПФ в простейшем случае принято использовать внутреннюю переменную состояния $q \in [0.1]$, характеризующую объемную долю мартенситной фазы. В полностью аустенитном состоянии переменная q принимается равной 0, а в полностью мартенситном состоянии q = 1. Таким образом, в случае прямого превращения материала, находящегося изначально в полностью аустенитном состоянии (q = 1), при понижении температуры от M_s^σ до M_f^σ q растет от 0 до 1. При обратном превращении материала, находящегося в полностью мартенситном состоянии, q изменяется от 1 до 0 при возрастании температуры от A_s^σ до A_f^σ.

При прямом превращении образца из никелида титана переход в моноклинную структуру в общем случае может происходить в 12 различных направлениях (в системе координат, образованной осями исходной объемноцентрированной ячейки аустенитной фазы). По этой причине полученный мартенсит может находиться в разных структурных состояниях, различающихся степенью ориентированности мартенситных ячеек. В случае отсутствия внешних напряжений при прямом превращении образуется хаотический сдвойникованный мартенсит, направление ориентации ячеек которого характеризуется равномерным распределением. Таким образом, при прямом превращении и в отсутствии внешних напряжений деформация формоизменения не наблюдается (при этом наблюдается деформация изменения объема). Этот тип деформации СПФ принято называть фазовой деформацией. Структурной деформацией СПФ принято называть деформацию, вызванную увеличением степени ориентированности мартенситных элементов СПФ как результата действия внешних механических напряжений, сопровождающуюся раздвойникованием и переориентацией мартенситных элементов [5].

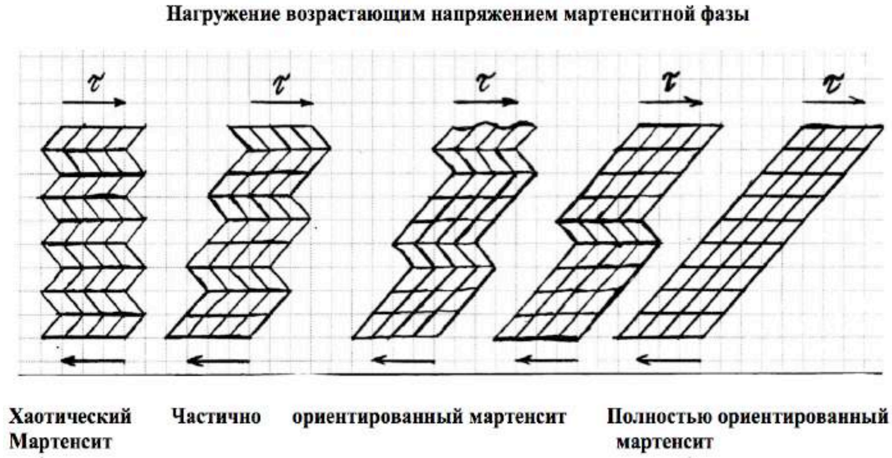


Рисунок 1

Схематично развитие структурной деформации в СПФ, находящемся в полностью мартенситном состоянии, показано на рис. 1, а само это явление, наблюдаемое в СПФ, находящемся в полностью мартенситном состоянии, принято называть явлением мартенситной неупругости.

Уровни неупругих структурных деформаций, возникающие благодаря раздвойникованию и переориентации мартенситных элементов (которые полностью или частично исчезают в процессе полного обратного превращения), могут достигать в NiTi значений порядка 8 %.

Именно благодаря совокупности перечисленных выше свойств сплавы с памятью формы являются перспективными материалами для использования в аэрокосмической промышленности, медицинской промышленности, энергетике, транспорте и т. д.

Вопросы экспериментального исследования и моделирования поведения СПФ

Одним из ключевых вопросов, решение которого необходимо для применения данного материала, является вопрос моделирования и экспериментального исследования поведения элементов из СПФ. Данному вопросу посвящены работы Лихачева В.А., Абдрахманова С.А., Малинина В.Г., Волкова А.Е., Беляева С.П., Андронова И.Н., Мовчана А.А, Лурье С.А., Васина Р.А., Tanaka K., Lagoudas D.C., Brinson L.C., Liang C., Rogers C.A., Lexcellent C., Auricchio F. и др. В работах [6–12] представлены экспериментальные данные о влиянии скорости изменения внешних воздействий на механическое поведение сплавов с памятью формы. В работах [13–15] авторы считают, что сам процесс деформирования СПФ является реономным, то есть зависит от масштаба времени. Но в то же время авторы большинства работ [16–25], изучающих поведение СПФ, придерживаются той точки зрения, что процесс деформирования СПФ сам по себе является склерономным, а экспериментально наблюдаемое реономное поведение обусловлено зависимостью от времени процессов теплопередачи и теплопроводности при выделении и поглощении латентного тепла при фазовых переходах. Однако экспериментальные данные, опубликованные в [26,27], свидетельствуют о том, что реономное поведение может наблюдаться и в изотермическом процессе, то есть оно не объясняется только лишь процессами теплопроводности. Вопросам анализа экспериментальных данных, подтверждающих наличие у СПФ реономных свойств, посвящена Глава 1 данной диссертационной работы.

Обзор вопросов устойчивости конструкций, содержащих СПФ

Реономные свойства деформируемых твердых тел и соответствующие краевые задачи рассматривались в работах Работнова Ю.Н., Ильюшина А.А., Шестерикова С.А., Победри Б.Е., Ржаницина А.Р., Локощенко А.М., Соколовского В.В., Думанского А.М., Георгиевского Д.В., Malvern L.E., Perzina P., Jonson G.R., Cook W.H. и др.

Экспериментальному исследованию и теоретическому анализу устойчивости элементов из СПФ посвящены работы Малыгина Г.А., Хусаинова М.А., Мовчана А.А., Сильченко Л.Г., Шкутина Л.И., Rahman M.A., Qui J., Tani J., Richter F., Kastner O., Eggeler G., Urushiyama Y., Lewinnek D., Kunavar J., Kozel F., Puksic A., Videnic T. и др. В [28,29] показано, что термоупругие фазовые и структурные превращения, являющиеся причиной уникальных механических свойств сплавов с памятью формы (СПФ), могут служить причиной потери устойчивости тонкостенных элементов из этих материалов. Различные модели (концепции) явления потери устойчивости элементов из СПФ предложены в работах [30–43]. В [30] решена задача об устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ; в [31,36] — задача устойчивости стержня из СПФ при прямом и обратном термоупругом фазовом превращении; в [32,33] найдены критические нагрузки для прямоугольной пластины из СПФ при прямом и обратном термоупругом превращении; в [34,35,38] аналогичная задача решена для круглой пластины; в [39] рассмотрена потеря устойчивости кольцеобразной пластины из СПФ; в [40] исследована устойчивость скручиваемого вала из СПФ. В упомянутых выше работах задачи решались либо в рамках модели линейного деформирования СПФ при термоупругих фазовых превращениях [44–47], либо с использованием модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [37,47]. Необходимо отметить, что обе эти модели рассматривают свойства СПФ как склерономные, т. е. независящие от масштаба времени.

В связи с упомянутыми выше экспериментальными данными возникает проблема учета влияния реономных свойств СПФ на устойчивость элементов из этих материалов. Задачи устойчивости для деформируемых твердых тел, обладающих реономными свойствами (вязкоупругих полимеров и металлов, демонстрирующих явление ползучести), рассматривались различными авторами: [48–52] и др. В [48,49] установлено, что для линейно вязкоупругих полимеров, демонстрирующих явление ограниченной ползучести, имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале (т. е. постановка задачи устойчивости по Ляпунову). В рамках вязкоупругой модели Кельвина — Фойгхта предельная нагрузка может быть вычислена по зависимости типа формулы Эйлера с использованием длительного упругого модуля вместо мгновенного. В то же время для металлов, демонстрирующих явление нелинейной неограниченной ползучести, постановка задачи устойчивости по Ляпунову, как правило, не имеет смысла. Здесь речь может идти об определении критического времени потери устойчивости при заданной нагрузке. Аналогичные результаты получаются для вязкопластических систем [51], зависящая от времени деформация которых подчиняется законам установившейся ползучести. В то же время в случае вязкопластического стержня из материала, для которого характерно явление ограниченной ползучести, в [52] установлена корректность постановки задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале.

СПФ, с одной стороны, демонстрируют существенно нелинейное поведение, и в этом плане данные материалы схожи с металлами, для которых характерна нелинейная ползучесть или вязкопластическая деформация. С другой стороны, для СПФ характерно явление ограниченной ползучести, и в этом отношении данные материалы схожи с вязкоупругими полимерами. В результате встает принципиальный вопрос о том, возможна ли для элементов из СПФ, проявляющего реономные свойства, постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале, или же речь может идти только об определении критического времени для заданной нагрузки. Интересно также понять, как зависят критические условия потери устойчивости элементов из СПФ от скорости нагружения.

Данная работа посвящена исследованию сформулированных выше вопросов на примере простейших задач об устойчивости жесткого стержня, который соединен с неподвижным основанием с помощью шарнира, обладающего реономными свойствами, характерными для СПФ, деформируемого стержня и стойки Шенли из СПФ. Необходимо отметить, что, по данным автора работы, ранее проблема влияния реономных свойств СПФ на устойчивость элементов из этих материалов не рассматривалась.

Цели работы:

- Предложить модели, описывающие реономное поведение СПФ;
- Предложить способ идентификации (калибровки) параметров модели по экспериментальным данным;
- Соотнести результаты экспериментов с вычислениями, полученными при использовании определяющих соотношений предложенных моделей;

- Оценить возможность постановки задачи устойчивости для модельных систем, содержащих элементы из СПФ в форме Эйлера и Ляпунова;
- Оценить влияние реономного поведения СПФ на устойчивость модельных систем, содержащих элементы из данного материала.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Предложен ряд моделей, призванных описать реономное поведение сплавов с памятью формы, наблюдаемое в экспериментах;
- Предложена процедура идентификации параметров модели (калибровки);
- Показано хорошее качественное согласование модельных данных и экспериментальных наблюдений;
- Установлено, что для модельных систем, содержащих элементы из СПФ (являющиеся неконсервативной средой), учитывая реономные свойства, имеет смысл постановка задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале;
- Установлено, что квазистатическая (Эйлерова) и динамическая (Ляпунова) постановки задачи устойчивости для элементов из СПФ в рамках разных моделей при консервативных нагрузках дают одинаковое значение критической силы;
- Установлено, что критическая сила потери устойчивости может быть определена с помощью касательного модуля к кривой мартенситной непругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости. Приведена точная формула для вычисления этой критической силы.

Научная новизна

В данной работе впервые была предпринята попытка построения моделей, согласующихся с экспериментальными наблюдениями реономного поведения СПФ при их нагружении в режиме мартенситной неупругости в рамках предположений о существовании предельно медленных и предельно быстрых процессов неупругого деформирования. Впервые исследовано влияние реономных свойств СПФ на устойчивость элементов, содержащих эти материалы.

Научная и практическая значимость

Предложенные в работе определяющие соотношения могут быть использованы для моделирования реономного поведения элементов и конструкций, содержащих сплавы с памятью формы и таких, для которых важное значение имеет время срабатывания. На основе данных определяющих соотношений для ряда модельных систем, содержащих элементы из СПФ, приведена формула расчета критической нагрузки потери устойчивости.

Степень достоверности

Достоверность теоретических результатов диссертации вытекает из использования классического аппарата механики сплошных сред, теории упругости и теории пластичности. Результаты также подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики. Ряд задач устойчивости решен в различных постановках (квазистатической и динамической), в результате чего получены одинаковые уровни критической нагрузки потери устойчивости. Достоверность предлагаемых моделей подтверждается сравнением с экспериментальными данными по реономному поведению СПФ.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством академика РАН, профессора Р.И. Нигматулина и профессора Н.Н. Смирнова (19 декабря 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Д.В. Георгиевского (07 декабря 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.И. Горбачева (21 ноября 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Ломакина (05 сентября 2016 г.);
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композитных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», ИПРИМ РАН, г. Москва, 15–17 декабря 2015 г.;
- Международная конференция «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю.Н. Работнова», ИМАШ РАН, г. Москва, 24–26 февраля 2014 г.;
- Научная конференция «Ломоносовские чтения», МГУ, г. Москва, апрель 2013 г.;

- II Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем», ИПРИМ РАН, г. Москва, 2013 и 2011 гг.;
- Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100-летию Л.А. Галина, г. Москва, 20–21 сентября 2012 г.;
- Международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Х. Арутюняна, г. Цахкадзор, Армения, 8–12 октября 2012 г.

Личный вклад

В совместных работах А.А. Мовчану принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях [88–101], 6 из которых опубликованы в журналах из списка ВАК РФ [88–93], 1 – в журнале из перечня Scopus [94], 7 — в тезисах докладов [95–101].

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 150 страниц с 76 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 101 наименование.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИХ НАЛИЧИЕ У СПФ РЕОНОМНЫХ СВОЙСТВ

В основу данного исследования легли экспериментальные данные, сформулированные в работах [26,27,53]. В данной главе будут проиллюстрированы основные результаты данных исследований, а в конце главы будут представлены основные положения, истинность которых вытекает из рассматриваемых экспериментальных данных. С учетом этих положений будет предпринята попытка моделирования реономного поведения СПФ, наблюдаемого в эксперименте.

Также необходимо отметить, что точку зрения, представленную в работах [16–25] (о том, что процесс деформирования СПФ сам по себе является склерономным, а экспериментально наблюдаемое реономное поведение обусловлено зависимостью от времени процессов теплопередачи и теплопроводности при выделении и поглощении латентного тепла в процессе фазовых переходов), удобнее всего опровергать за счет постановки опытов над СПФ, происходящих в режиме мартенситной неупругости в изотермических условиях. Именно на анализе экспериментальных данных опытов, проведенных в изотермических условиях (что контролируется термопарами, закрепленными на образце) в режиме мартенситной неупругости, будет сконцентрировано наше внимание в данной главе.

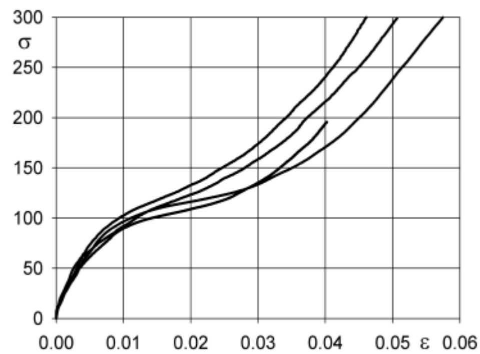


Рисунок 1.1

На рис. 1.1 (в осях ε — σ[МПа]) представлены результаты экспериментов изотермического (при температуре 20 °С) жесткого нагружения образца из никелида титана, контролируемого по полным деформациям (процесс подготовки образца из СПФ к эксперименту, а также методика проведения эксперимента подробно описаны в [26,27]). Полученные в результате экспериментальные кривые, представленные на рис. 1.1 для скоростей деформирования (для кривых слева направо) $\dot{\varepsilon} = 0.2\times10^{-2}$, 0.22×10^{-3}, 6.2×10^{-4}, 6.4×10^{-5} сек$^{-1}$, показывают, что при росте скорости деформирования заданному уровню напряжения соответствует меньший уровень полной деформации (то есть чем медленнее процесс, тем выше величина деформации для данного уровня напряжений).

На рис. 1.2–1.3 (в осях t[c] — ε) приведены результаты экспериментального исследования процесса изотермического мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости образца из никелида титана. В частности, кривые, представленные на рис. 1.2, демонстрируют процесс развития неупругой деформации с течением времени под действием постоянного уровня напряжения, равного соответственно при движении от нижней кривой рисунка к верхней, 50 МПа, 75 МПа и 100 МПа. Каждый из перечисленных уровней напряжений достигается в результате скачкообразного увеличения значения напряжения на 25 МПа (то есть нижняя кривая, представленная на рис. 1.2., получается в результате развития деформации с течением времени при постоянном уровне внешнего напряжения, составляющего 25 МПа, который достигается в результате его скачкообразного увеличения из ненапряженного состояния на величину 25 МПа). Вид кривых, приведенных на рис. 1.2, показывает, что сразу после скачка напряжений возникает мгновенный скачок неупругой деформации, после чего деформации растут под действием постоянного напряжения на начальном участке с достаточно высокой скоростью. С течением времени этот рост существенно замедляется и по прошествии 30–60 минут с момента скачкообразного увеличения уровня напряжений уровень деформации перестает значимо изменяться. В результате после скачка неупругой деформации с течением времени величина накопленной реономной деформации становится сравнимой по уровню с величиной мгновенной неупругой деформации, которая возникает вследствие скачкообразного увеличения уровня напряжений. Следующий этап скачкообразного нагружения производится только после окончания роста деформации при постоянном уровне напряжений на предыдущем этапе. Следует отметить, что вид кривых, представленных на рис. 1.2, показывает, что с ростом уровня напряжений, достигаемых в результате их скачкообразного увеличения, растет как величина мгновенного скачка неупругой деформации, так и величина деформации, накопленной со временем под действием постоянного уровня напряжений.

Эта монотонная связь утрачивается при дальнейшем росте уровней напряжений, достигаемых в результате скачкообразного увеличения. Так, на рис. 1.4 приведены кривые, соответствующие трем следующим этапам изотермического мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости того же образца из никелида титана. Кривые, представленные на рис. 1.4, построены уже при скачках напряжений на 50 МПа (а не на 25 МПа, как для кривых рис. 1.2). То есть соответственно при движении от нижней кривой, приведенной на рисунке, к верхней результирующие уровни напряжения равны 150, 200 и 250 МПа. В данном диапазоне уровней напряжений наблюдается противоположная картина: при фиксированном скачке уровня напряжений увеличение уровня результирующих напряжений приводит как к уменьшению величины мгновенного скачка неупругой деформаций, так и к уменьшению величины деформации, нарастающей с течением времени при постоянном уровне напряжений после их скачка. Таким образом, рассматриваемый реономный эффект зависит не только от величины скачка напряжений, но и от того места диаграммы мартенситной неупругости, в котором происходит этот скачок.

Объясняется данное немонотонное поведение наличием точки перегиба диаграммы мартенситной неупругости. Чем больше результирующее напряжение при уровнях напряжений до значения координаты напряжения точки перегиба, тем больше как мгновенная, так и нарастающая со временем компонента неупругой деформации. При дальнейшем увеличении уровня напряжения, достигаемого в результате скачкообразного роста, за точку перегиба диаграммы мартенситной неупругости характер зависимости меняется на противоположный, и теперь большему уровню напряжений соответствуют меньшие значения мгновенной и нарастающей компонент неупругих деформаций.

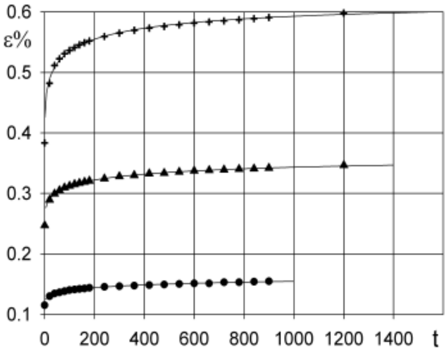


Рисунок 1.2

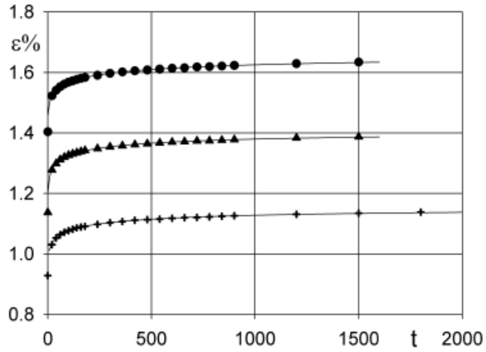


Рисунок 1.3

На рис. 1.4–1.5 (в осях ε — σ [МПа]) приведены результаты экспериментального исследования процесса нагружения (рис. 1.4) и разгрузки (рис. 1.5) образца из никелида титана, отожженного при температуре 640 °C, в режиме сверхупругости. Кривые, представленные на рис. 1.4, демонстрируют процесс развития деформации с течением времени под действием постоянного уровня напряжения. Этот уровень был достигнут в результате скачка напряжений, который при движении от нижней кривой, приведенной на рисунке, к верхней равен 199–224, 224–249, 249–274, 274–302 и 302–330 МПа соответственно. Кривые, представленные на рис. 1.5, получены в результате изменения и фиксации уровня напряжений 249–224 МПа (верхняя кривая) и 224–199 МПа (нижняя кривая). Следует отметить, что прямая зависимость величины мгновенной и нарастающей компоненты неупругой деформации от результирующего значения напряжения при нагружении, а также обратная зависимость этих величин при разгрузке также согласуются с тем фактом, что кривая сверхупругости имеет монотонно растущую производную при увеличении уровня напряжений и монотонно убывающую — при уменьшении (то есть на каждом участке производная изменяется монотонно, поэтому и связь между уровнями напряжения и неупругой деформации также является монотонной).

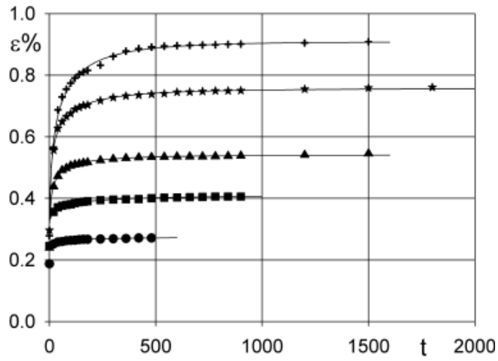


Рисунок 1.4

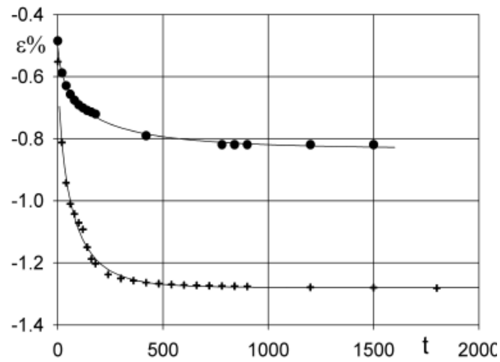


Рисунок 1.5

На рис. 1.6 приведены результаты эксперимента по релаксации напряжений в образце из никелида титана при его заневоливании (фиксации величины полной деформации) после жесткого изотермического нагружения в режиме мартенситной неупругости со скоростями движения захватов 0.1 мм/мин (кривая 1) и 0.01 мм/мин (кривая 2).

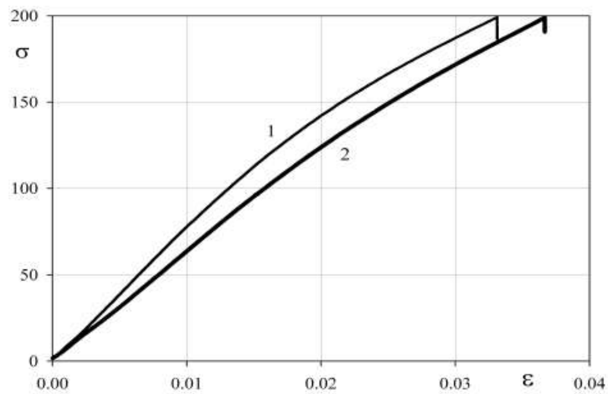
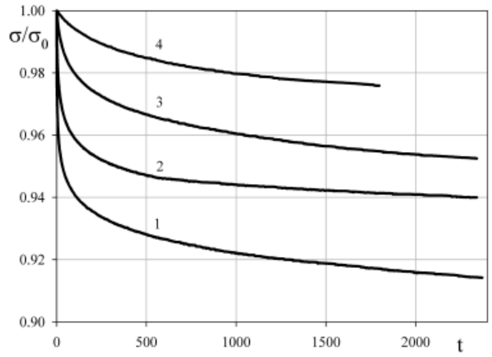


Рисунок 1.6

Кривые, представленные на рис. 1.7–1.8 (в осях t[c] — σ / σ_0), демонстрируют участок релаксации уровня напряжений с течением времени более детально. Рис. 1.7 соответствует случаю релаксации напряжений после жесткого нагружения образца из никелида титана в режиме мартенситной неупругости до уровня напряжений $\sigma_0 = 135$ МПа со скоростями 1 мм/мин (кривая 1), 0.1 мм/мин (кривая 2), 0.01 мм/мин (кривая 3) и 0.001 мм/мин (кривая 4). Пронумерованные кривые на рис. 1.8 соответствуют тем же уровням скоростей предварительного жесткого нагружения, но, в отличие от кривых, представленных на рис. 1.7, в данном случае нагружение продолжается до уровня напряжений $\sigma_0 = 250$ МПа. Исходя из представленных экспериментальных данных, можно сделать вывод, что чем больше скорость предварительного жесткого нагружения, тем большая величина релаксации напряжений наблюдается при заневоливании образца (при одинаковых начальных значениях напряжения).



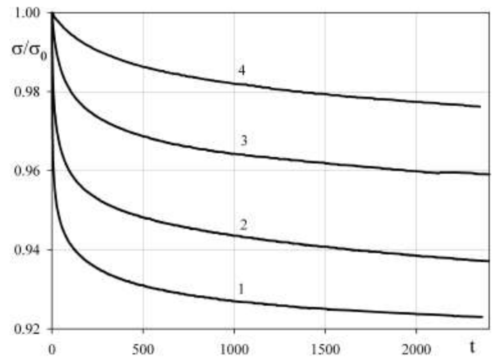
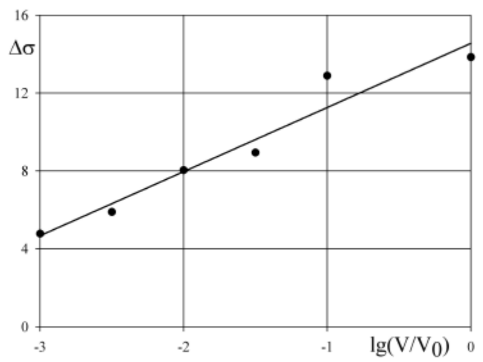


Рисунок 1.7 Рисунок 1.8

На рис. 1.9–1.10 точками показана наблюдаемая в эксперименте связь между величиной релаксации напряжения и логарифмом обезразмеренной величины скорости предварительного жесткого нагружения (точки, представленные на рис. 1.9, получены в качестве результатов экспериментов по релаксации напряжений после жесткого нагружения до уровня напряжений $\sigma_0 = 200$ МПа, на рис. 1.10 — при нагружении до уровня $\sigma_0 = 290$ МПа). Чтобы подчеркнуть близость наблюдаемой зависимости к линейной, на каждой диаграмме методом МНК построена прямая: $\Delta\sigma = \Delta\sigma(V_0) + \alpha \lg\left(V / V_0\right)$, $V_0 = 1$ мм/сек.



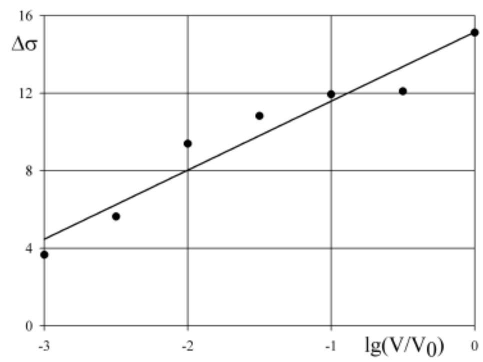


Рисунок 1.9 Рисунок 1.10

На рис. 1.11–1.12 представлены результаты зависимости величины релаксации от начального значения напряжений, предшествующего процессу релаксации, при постоянном значении скорости предварительного жесткого нагружения. Точки на рис. 1.11 получены в результате экспериментов при значении скорости предварительного жесткого нагружения $V = 1$ мм/сек, на рис. 1.12 — при $V = 0.1$ мм/сек. Следует отметить, что представленная зависимость является немонотонной, с ярко выраженным максимумом при величине напряжений, близкой к величине напряжений точки перегиба кривой мартенситной неупругости. Следует также отметить, что явление релаксации напряжений как таковое характерно для структурных переходов, а не для упруго-пластических деформаций.

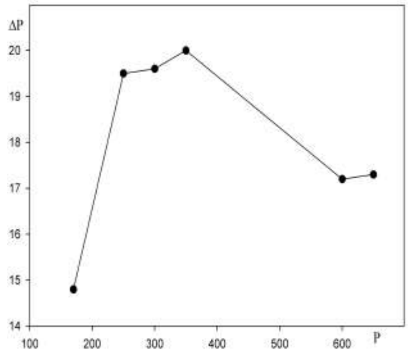


Рисунок 1.11

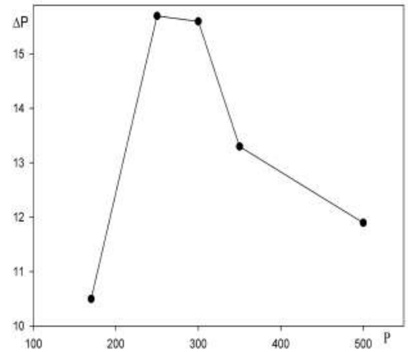


Рисунок 1.12

Таким образом, исходя из представленных выше экспериментальных данных, можно сделать следующие выводы:

1. Никелид титана при комнатных температурах и малых скоростях изменения деформаций или напряжений проявляет реономные свойства, соответствующие явлению ограниченной ползучести (рис. 1.2–1.3).
2. При жестком изотермическом нагружении в режиме мартенситной неупругости при равных напряжениях деформация тем больше, чем меньше скорость движения активного захвата (рис. 1.1).
3. При мягком ступенчатом нагружении, как в режиме мартенситной неупругости, так и в режиме сверхупругости, после каждого скачка нагрузки наблюдается затухающий с течением времени рост деформаций при постоянном напряжении (рис. 1.2–1.4).
4. При ступенчатой изотермической разгрузке в режиме сверхупругости после скачкообразного падения нагрузки наблюдается затухающее с течением времени уменьшение деформации при постоянном напряжении (рис. 1.5).
5. Изменения деформации со временем после скачка нагрузки сравнимы по величине с мгновенным скачком деформаций в том же процессе. При одинаковых скачках напряжений величина накапливаемой со временем деформации тем выше, чем меньшее значение касательного модуля соответствует рассматриваемой области изменения напряжений (рис. 1.2–1.3).
6. После жесткого нагружения в режиме мартенситной неупругости до заданного значения напряжений и дальнейшей фиксации полученных деформаций наблюдается явление релаксации напряжений. Величина релаксации напряжения при нагружении до одних и тех же уровней напряжений тем больше, чем больше скорость предварительного жесткого нагружения (рис. 1.7–1.8).

Таким образом, взяв за основу эксперименты по мягкому (контролируемому по напряжениям) изотермическому ступенчатому нагружению в режиме мартенситной неупругости, впервые для СПФ было доказано, что реономное поведение СПФ наблюдается независимо от процессов теплопередачи латентного тепла, выделяемого при фазовых переходах.

Необходимо отметить, что при анализе приведенных в данной главе результатов экспериментального исследования был выявлен ряд особенностей, характеризующих реономное поведение СПФ, наблюдаемое на практике. Эти особенности взяты за основу в качестве положений, опираясь на которые, была предпринята попытка поиска определяющих соотношений моделей реономного поведения СПФ, удовлетворяющих этим положениям:

1. Существование нелинейной диаграммы предельно медленного процесса в осях $\sigma - \varepsilon$ (каждая точка $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ которой является асимптотой ε_0 для диаграммы роста неупругих деформаций с течением времени в процессе мягкого ступенчатого нагружения при скачкообразном увеличении напряжения до уровня σ_0 независимо от величины этого скачка).
2. Существование нелинейной диаграммы предельно быстрого процесса в осях $\sigma - \varepsilon$, которая характеризует мгновенный скачок неупругой деформации при скачкообразном росте величины напряжения в процессе мягкого ступенчатого нагружения.
3. Ограниченная ползучесть с асимптотическим приближением к предельно медленной диаграмме при постоянном напряжении на каждом участке после скачкообразного увеличения напряжения (рис. 1.2–1.3: каждая из кривых выходит на горизонтальную асимптоту).
4. Упругое поведение СПФ реономными свойствами не обладает, т. е. упругие модули от скорости нагружения не зависят, и при ступенчатой упругой разгрузке деформация при постоянных значениях напряжений и температуры не уменьшается.

При дальнейшем поиске моделей, определяющие соотношения которых призваны описать наблюдаемое в эксперименте реономное поведение, будем в первую очередь опираться на данный список положений.

Завершая данную главу, хотелось бы отметить, что дальнейшее исследование сконцентрировано в основном на задаче моделирования реономного поведения СПФ, находящегося в режиме мартенситной неупругости (в полностью мартенситном состоянии при $q = 1$). Это оправдано не только представленными в данной главе экспериментальными данными (опровергающим традиционную парадигму о склерономности СПФ и описании наблюдаемой в эксперименте реономии процессами теплопроводности), но и тем фактом, что уровни структурных деформаций, наблюдаемых в экспериментах по мартенситной неупругости после прямого перехода, проведенного без внешних напряжений, в общем случае могут значительно превышать уровни фазовых деформаций.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕОНОМНОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

В данной главе речь пойдет о различных моделях, определяющие соотношения которых призваны описать наблюдаемое в эксперименте реономное поведение элементов из сплава с памятью формы (более подробно оно было рассмотрено в главе 1).

2.1 Простейшая модель реономного поведения СПФ

2.1.1 Формулировка модели

Предполагается наличие класса предельно медленных процессов в СПФ, которые не зависят от масштаба времени и являются склерономными. Для таких процессов фазово-структурные деформации являются в общем говоря некоторыми функционалами истории изменения напряжений и параметров фазового состава, которые далее обозначаются в виде:

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \psi_{ij}(\sigma_{kl}, q) \qquad (2.1.1.1)$$

или в одномерном варианте как:

$$\varepsilon^{phst} = \psi(\sigma, q) \qquad (2.1.1.2)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{phst}, \varepsilon^{phst}$ — фазово-структурные деформации СПФ, σ_{ij}, σ — напряжения, q — объемная доля мартенситной фазы. Важно, что переменная времени в соотношения (2.1.1.1) или (2.1.1.2) не входит.

Можно предположить, что предложенные ранее линейная [44–46] или нелинейная [36,37,47,54-56] склерономные модели деформирования СПФ при соответствующем выборе постоянных материала как раз описывают предельно медленные процессы деформирования СПФ. В [37,47], в рамках системы [54,55,56], установлено положение об активных процессах пропорционального изменения компонентов девиатора напряжений. Рассматривается класс процессов, начинающихся из полностью аустенитного состояния и состоящих из конечного числа фрагментов прямого или обратного термоупругого фазового превращения, сопровождающихся или не сопровождающихся структурными переходами. Предполагается, что разгрузка отсутствует, а компоненты девиатора напряжений меняются пропорционально одному параметру. Показано, что в этом случае функции ψ_{ij} и ψ не зависят от истории термомеханического нагружения, а являются функциями мгновенных значений параметров состояния вида:

$$\psi = \rho_D q \varphi(\sigma), \qquad \psi_{ij} = \frac{3}{2}\rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q \varphi(\sigma_i) \qquad (2.1.1.3)$$

Здесь σ_i, σ_{ij}' — интенсивность и девиатор напряжений, ρ_D — предельное значение интенсивности деформаций прямого превращения СПФ, $\varphi(\sigma_i)$ — материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме поликристаллического СПФ. С целью упрощения анализа в данном разделе соотношения (2.1.1.3) считаются выполненными.

Предполагается, что процессы, происходящие с конечной скоростью, подчиняются соотношению:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{phst} = k\left\langle \psi_{ij}(\sigma_{kl}, q) - \varepsilon_{ij}^{phst} \right\rangle$$

В одномерном случае данное соотношение сводится к:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k\left\langle \psi(\sigma, q) - \varepsilon^{phst} \right\rangle \qquad (2.1.1.4)$$

где $\varepsilon^{phst} > 0$ — фазово-структурная деформация в рассматриваемом реономном процессе, k — постоянная материала (в простейшем случае величину k можно считать постоянной, но этот параметр в общем говоря может зависеть от q, σ, ε), $\varepsilon_1^{phst} = \psi(\sigma, q)$ — зависимость фазово-структурной деформации от истории изменения напряжений $\sigma > 0$ и объемной доли мартенситной фазы q в предельно медленном процессе, соответствующем данному реономному процессу ($\psi(\sigma, q)$, вообще говоря — функционал истории изменения своих аргументов). В (2.1.1.4) использовано обозначение:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & при \quad x \geq 0 \\ 0 & при \quad x < 0 \end{cases}$$

Понятие предельно медленного процесса, соответствующего рассматриваемому реономному процессу, требует важных для дальнейших рассуждений пояснений. Пусть процесс нагружения и фазового перехода задается зависимостями напряжения и параметра фазового состава от времени:

$$\sigma = \sigma_0 + f_1(t), q = q_0 + f_2(t), t \in [0, T], f_1(0) = f_2(0) = 0 \qquad (2.1.1.5)$$

Каждой точке этого процесса соответствует значение фазово-структурной деформации, которую для конкретного процесса можно считать функцией времени:

$$\varepsilon^{phst} = f_3(t) \qquad (2.1.1.6)$$

В трехмерном пространстве, по осям декартовой системы координат которого отложены величины $\sigma, q, \varepsilon^{phst}$, соотношения (2.1.1.5) и (2.1.1.6) являются параметрическими уравнениями множества точек, которое при достаточно гладких функциях $f_i(t)$ определяет собой некоторую в общем говоря пространственную кривую. Форма этой кривой зависит от скоростей изменения σ и q.

Далее рассматривается процесс нагружения и фазового перехода, определяемый соотношениями:

$$\sigma = \sigma_0 + \varphi_1(t), q = q_0 + \varphi_2(t), t \in [0, T/\beta], \beta > 0 \qquad (2.1.1.7)$$

$$\varphi_1(x) = f_1(\beta x), \quad \varphi_2(x) = f_2(\beta x)$$

Фактически переход от (2.1.1.5) к (2.1.1.7) соответствует изменению масштаба времени. Пара значений (σ, q) процесса (2.1.1.5), отвечающая моменту времени t, идентична паре значений (σ, q) процесса (2.1.1.7), отвечающей моменту времени t/β. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками процессов (2.1.1.5) и (2.1.1.7) для фиксированного значения β. Поскольку исходный процесс не является склерономным, то равенство, соответствующее (2.1.1.6), в общем говоря не должно выполняться: для процесса (2.1.1.7) $\varepsilon^{phst} \neq f_3(\beta t)$. Поэтому значения ε^{phst} для первого и второго процессов, отвечающие одной и той же паре (σ, q), будут различаться. Для всего множества процессов (2.1.1.7) величина ε^{phst} будет зависеть не только от σ и q, но и от β. В пространстве переменных $(\sigma, q, \varepsilon^{phst})$ процессам нагружения и фазового перехода (2.1.1.7) будет соответствовать однопараметрическое множество кривых, которое можно условно обозначить равенством:

$$\varepsilon^{phst} = F(\beta, \sigma, q) \qquad (2.1.1.8)$$

Основное предположение рассматриваемой здесь модели реономного поведения СПФ заключается в том, что существует предельная кривая, к которой стремятся кривые множества (2.1.1.8) при $\beta \to 0$, которая обозначается как:

$$\varepsilon^{phst} = \psi(\sigma, q), \lim_{\beta \to 0} F(\beta, \sigma, q) = \psi(\sigma, q) \qquad (2.1.1.9)$$

Эта кривая называется диаграммой предельно медленного процесса, соответствующего данному реономному процессу (2.1.1.5). Естественно, что отмеченное ранее взаимно-однозначное соответствие между точками процессов (2.1.1.5) и (2.1.1.7) распространяется и на точки процесса (2.1.1.9). Необходимо отметить, что, согласно (2.1.1.8), величина ε^{phst} в общем случае не является функцией величин σ и q, а зависит от синхронизированной истории их изменения.

Ниже перечислены важные для дальнейших рассуждений свойства предельно медленных процессов.

1. Предельно медленный процесс является склерономным, то есть не зависит от масштаба времени.
2. Если в некоторой точке (σ, q) исходного реономного процесса происходит разгрузка, а $d\sigma < 0$ (догрузка — $d\sigma > 0$), то в соответствующей точке предельно медленного процесса тоже будет происходить разгрузка (догрузка).
3. Если в некоторой точке исходного реономного процесса происходит прямое превращение $dq > 0$ (обратное превращение — $dq < 0$), то в той же точке соответствующего предельно медленного процесса также будет происходить прямое (обратное) превращение.

Для доказательства первого положения наряду с исходным процессом (2.1.1.5) рассматривается другой исходный процесс, отличающийся от первого масштабом времени:

$$\begin{gathered}\sigma = \sigma_0 + f_1(\lambda t), q = q_0 + f_2(\lambda t), t \in [0, T/\lambda], \\ f_1(0) = f_2(0) = 0\end{gathered} \qquad (2.1.1.10)$$

Здесь $\lambda > 0$. Ясно, что процесс (2.1.1.10) входит в совокупность процессов (2.1.1.7). Очевидно также, что однопараметрическое множество кривых (2.1.1.8) для исходных процессов (2.1.1.5) и (2.1.1.10) совпадает (если точнее, то каждой кривой из первого множества, отвечающей параметру β, соответствует кривая из второго множества, соответствующая параметру $\beta_1 = \beta / \lambda$). Следовательно, и предельные кривые обоих множеств (2.1.1.9) будут совпадать, поскольку при $\beta \to 0$ получается, что $\beta_1 \to 0$ (и наоборот). Таким образом, при изменении масштаба времени исходного процесса соответствующий ему предельно медленный процесс не меняется, т. е. он является склерономным и не зависит от масштаба времени.

Утверждения (2) и (3) следуют из того, что изменения пар (σ, q) в исходном и соответствующем предельно медленном процессе синхронизированы.

Ниже будут рассматриваться процессы нагружения СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии, не приводящие к фазовым переходам. В этом случае $q = 1$, также будет использовано обозначение $\psi(\sigma, 1) = \rho_D \varphi(\sigma)$. Если же записать соотношение (2.1.1.4) относительно суммарной фазово-структурной и упругой деформации $\varepsilon^{tot} = \varepsilon^{phst} + \sigma / E$, то получается нелинейный аналог более общей модели Кельвина [57]:

$$\dot{\varepsilon}^{tot} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k\left\langle \rho_D q \varphi(\sigma) - \varepsilon^{tot} + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \qquad (2.1.1.11)$$

Здесь E — значение модуля Юнга СПФ, k — параметр материала, ρ_D — предельное значение деформации мартенситной неупругости, q — параметр фазового состава (который по умолчанию равен 1, что соответствует СПФ в полностью мартенситном состоянии). При выводе соотношения (2.1.1.11) для упрощения не учитывалась переменность упругих модулей СПФ при фазовых превращениях. В том случае, если речь идет о нагружении СПФ, находящемся в мартенситном состоянии, уравнение (2.1.1.11) является точным, если под величиной E понимать значение модуля Юнга в мартенситном фазовом состоянии. Стоит отметить, что при q = 1 (то есть для процессов, в которых материал в любой точке остается в полностью мартенситном состоянии) $\varepsilon^{phst} = \varepsilon^{st}$, так как фазовая деформация отсутствует. Далее, структурную деформацию для простоты будем обозначать просто как ε или ε^{r} (подчеркивая тот факт, что данная деформация является реономной), при этом полную деформацию во всех случаях будем обозначать как ε^{tot}.

Предполагается, что для предельно медленных процессов справедливы определяющие соотношения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [36,37,47].

Для функции $\varphi(\sigma)$ можно использовать выражение:

$$\varphi(\sigma) = \left\{1 - \exp\left[-\left(\sigma / \sigma_0\right)^{\alpha}\right]\right\} \qquad (2.1.1.12)$$

соответствующее функции распределения Вейбулла ($\alpha > 1$). Данная функция хорошо зарекомендовала себя при описании медленных процессов в СПФ типа никелида титана, поэтому по умолчанию именно эта функция будет подразумеваться в качестве $\varphi(\sigma)$.

Экспериментальные данные по мартенситной неупругости могут быть описаны также с помощью функций $\varphi(\sigma)$, соответствующих нормальному или экспоненциальному распределению. В первом случае:

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma) = \xi\left(\frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma_0}\right) + \xi\left(\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_0}\right) - 1, \\ &\xi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{0.5} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\right) dt \end{aligned} \qquad (2.1.1.13)$$

В случае функции $\varphi(\sigma)$, соответствующей экспоненциальному распределению:

$$\varphi\left(\sigma\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_0}\right)\right] + \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma + \sigma_1}{\sigma_0}\right)\right]\right\}, \sigma \geq \sigma_1 \\ \dfrac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_0}\right)\right] - \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma + \sigma_1}{\sigma_0}\right)\right]\right\}, 0 < \sigma < \sigma_1 \end{cases} \qquad (2.1.1.14)$$

Здесь σ_0, σ_1— параметры материала (σ_0— квадратичное отклонение микронапряжений в случае функции $\varphi(\sigma)$, соответствующей нормальному закону распределения, $\sigma_1 > 0$ — пороговое напряжение [47]).

Далее рассматривается вопрос о знаке выражения в угловых скобках (2.1.1.4) или (2.1.1.11). Согласно (2.1.1.11), скорость роста неупругой деформации отлична от нуля лишь в том случае, если:

$$\chi = \rho_D \varphi(\sigma) - \varepsilon^{tot} + \frac{\sigma}{E} = \rho_D \varphi(\sigma) - \varepsilon^{st} > 0 \qquad (2.1.1.15)$$

Величина χ равна нулю в точке начала нагружения, где $\sigma = 0, \varepsilon = 0$ (поскольку $\varphi(0) = 0$), и удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\chi}{dt} + k\langle\chi\rangle = \rho_D \varphi'(\sigma)\dot{\sigma}(t) \qquad (2.1.1.16)$$

решение которого при $\chi > 0$ и нулевых начальных условиях имеет вид:

$$\chi = \rho_D \int_0^t \varphi'\left(\sigma(\tau)\right)\dot{\sigma}(\tau)\exp\left(-k(t-\tau)\right)d\tau \qquad (2.1.1.17)$$

Здесь штрихом обозначается производная функции по ее аргументу. Поскольку функция $\varphi(\sigma)$, соответствующая функции распределения, не может убывать, то производная от этой функции, стоящая под интегралом правой части (2.1.1.17), неотрицательна. Для рассматриваемых функций $\varphi(\sigma)$ (2.1.1.12) – (2.1.1.14) эта производная будет положительной (для материальной функции, соответствующей распределению Вейбулла — везде, кроме нулевой точки). Следовательно, в случае монотонного нагружения ($\dot{\sigma} > 0$) из состояния, свободного от напряжений, выполняется неравенство (2.1.1.15), и угловые скобки в правых частях (2.1.1.4) и (2.1.1.11) можно опустить. При происходящей для $t > t_0$ выдержке под действием постоянного напряжения решение (2.1.1.16) при $\dot{\sigma} = 0$ дает:

$$\chi = \chi(t_0)\exp\left[-k\left(t - t_0\right)\right] \qquad (2.1.1.18)$$

т. е. величина χ убывает, оставаясь положительной. Можно показать, что на первых этапах последующего убывания σ величина χ будет убывать, сохраняя положительное значение. Лишь по истечении определенного промежутка времени, величина которого уменьшается с ростом скорости разгрузки и немонотонно зависит от достигнутого уровня напряжений, значение χ переходит через нуль и становится отрицательным. Таким образом, для монотонно возрастающих или постоянных напряжений, а также на первом этапе процесса разгрузки величину χ можно считать положительной, и угловые скобки в определяющих соотношениях (2.1.1.4) или (2.1.1.11) можно опустить. Также, при применении данной модели для решения задач устойчивости (поскольку речь в настоящей работе идет об устойчивости по отношению к малым — в том числе и по продолжительности — возмущениям), в силу сказанного выше, угловые скобки в определяющих соотношениях при таком анализе можно не учитывать.

Стоит отметить, что определяющие соотношения в виде (2.1.1.4) согласуются со всеми положениями, приведенными в главе 1, кроме положения о существовании нелинейной диаграммы предельно быстрого процесса (более сложные варианты моделей, согласующиеся со всеми положениями будут представлены в следующих разделах). Тем не менее, определяющие соотношения (2.1.1.4) имеют ряд преимуществ относительно других известных и широко используемых моделей. Тот факт, что в экспериментах наблюдается явно нелинейная, но при этом ограниченная ползучесть, подтверждает, что уравнение установившейся ползучести в форме $\dot{\varepsilon} = F(\sigma, T)$ для описания свойств СПФ не подходит, так как установившаяся ползучесть не бывает ограниченной. Соотношение (2.1.1.4) без символа угловых скобок можно рассматривать как частный случай уравнения ползучести в форме теории упрочнения [57] $\Phi\left(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \sigma\right) = 0$, где $\Phi = \dot{\varepsilon} - k(\psi(\sigma, q) - \varepsilon)$. В [58] предложено разделять общую деформацию ползучести на деформацию установившейся ползучести и деформацию ограниченной ползучести: для последней предлагается уравнение вида [59] $\dot{\varepsilon} = \varphi_1(\varepsilon)\varphi_2(\sigma)(\psi(\sigma) - \varepsilon)$, сводящееся к (2.1.1.11) при $\varphi_1(\varepsilon)\varphi_2(\sigma) = k$. В рамках вязкопластических теорий [60] предел текучести считается функцией деформации и скорости деформации:

$$\sigma = \phi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \qquad (2.1.1.19)$$

Соотношение (2.1.1.4) можно трактовать как частный случай (2.1.1.19) при $\phi = \psi^{-1}\left(\varepsilon + \dot{\varepsilon}/k\right)$.

Уравнение (2.1.1.4) является нелинейным аналогом вязкоупругой модели Кельвина — Фойгхта [57]. Для получения (2.1.1.4) в уравнении этой модели $\sigma = \eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon$ достаточно принять $\psi(\sigma) = \sigma/E$, $k = E/\eta$. Если же записать соотношение (2.1.1.4) относительно суммарной фазово-структурной и упругой деформации $\varepsilon^{tot} = \varepsilon + \sigma/E$, то получается соотношение (2.1.1.11), являющееся нелинейным аналогом более общей модели Кельвина [57]. Также известны и широко применяются модели упруго-вязкопластических тел

Соколовского [61,62]:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + k\langle\sigma - f(\varepsilon)\rangle$$

Малверна [63]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k\langle F(\sigma - f(\varepsilon))\rangle, \text{ где } F(x) = a\left[e^{bx} - 1\right]$$

и Пэжины [64]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}}{E} + k\left\langle \Phi\left[\frac{\sigma}{f(\varepsilon^p)} - 1\right]\right\rangle \tag{2.1.1.20}$$

где $\sigma = f(\varepsilon^p)$ — статическая диаграмма материала, ε^p — пластическая деформация,

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & при \quad x \geq 0 \\ 0 & при \quad x < 0 \end{cases}$$

Различие между (2.1.1.20) и (2.1.1.4) сводится к тому, что в (2.1.1.4) диаграмма предельно медленного процесса задается определяющими соотношениями модели в виде $\varepsilon = \psi(\sigma)$, а в (2.1.1.20) — в виде $\sigma = f(\varepsilon^p)$. При этом результаты, полученные по модели первого типа (в том случае, если диаграмма предельно медленного процесса по определяющим соотношениям задана в виде $\varepsilon = \psi(\sigma)$), лучше согласуются с экспериментом по мягкому нагружению в режиме мартенситной неупругости по сравнению с моделями второго типа, где диаграмма по определяющим соотношениям задана в виде $\sigma = f(\varepsilon^p)$, и скорость роста деформации зависит от величины $\sigma - f(\varepsilon^p)$. Это обусловлено тем, что кривая предельно медленного процесса в осях $\varepsilon - \sigma$ имеет участок, близкий к горизонтальному, где при малом изменении напряжений происходит значительное изменение неупругой деформации. Поэтому при фиксации напряжения после достаточно быстрого нагружения рост деформаций будет происходить со скоростью, пропорциональной $\sigma - f(\varepsilon^p)$, то есть на участке a-b при значительном изменении деформации скорость роста деформации долгое время будет оставаться практически постоянной, что противоречит экспериментальным наблюдениям. При этом следует отметить, что, как и в (2.1.1.4), определяющие соотношения (2.1.1.20) не удовлетворяют положению о существовании нелинейной диаграммы предельно быстрого деформирования.

В работе [65] предложено соотношение:

$$\sigma = \sigma_c(\varepsilon)\left[1 + \psi\left(\left(\dot{\varepsilon}/a\right)^k\right)\right] \tag{2.1.1.21}$$

Здесь $\sigma = \sigma_c(\varepsilon)$ — диаграмма статического нагружения. При подстановке $\psi\left(x^k\right) = \xi(x)$ соотношение (2.1.1.21) принимает вид:

$$\sigma = \sigma_c(\varepsilon)\left[1 + \xi\left(\dot{\varepsilon}/a\right)\right]$$

и может быть разрешено относительно скорости деформации:

$$\dot{\varepsilon} = a\xi^{-1}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c(\varepsilon)} - 1\right) \tag{2.1.1.22}$$

Видим, что (2.1.1.22) отличается от (2.1.1.20) только отсутствием выделенной скорости упругих деформаций, поэтому имеет те же недостатки, что и (2.1.1.20).

Далее рассмотрим вариант классической линейно-вязкоупругой модели в виде:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau \qquad (2.1.1.23)$$

В рамках такого класса моделей с различными регулярными ядрами предельно быстрая диаграмма получается линейно-упругой с модулем E, при этом предельно медленная диаграмма также будет линейной, что не согласуется с поведением СПФ. Так, для экспоненциального ядра в виде $K(t-\tau) = k\exp\left[-\beta(t-\tau)\right]$ уравнение диаграммы предельно медленного процесса принимает вид $\varepsilon = \left(1/E + k/\beta\right)\sigma$. Также внимания заслуживает модель нелинейной вязкоупругости Ю.Н. Работнова, определяющие соотношения которой могут быть записаны в виде:

$$\varphi\left(\varepsilon\right) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t K\left(t-\tau\right)\sigma(\tau)\,d\tau$$

Следует отметить, что в соответствии с данными определяющими соотношениями разгрузка и догрузка происходят по единому закону. В случае экспоненциального ядра дифференциальное уравнение для скорости роста деформации записывается в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E\varphi'(\varepsilon)} + \left(k + \frac{\beta}{E}\right)\frac{\sigma - \varphi\left(\varepsilon\right)/\left(1/E + k/\beta\right)}{\varphi'(\varepsilon)}$$

Эта зависимость обладает теми же недостатками (в случае ее применения к описанию реономных свойств СПФ), что и класс моделей (2.1.1.20). Следует отметить, что уравнение (2.1.1.4) без угловых скобок может быть записано в виде:

$$\varepsilon^r = \int_0^t k\exp\left[-k\left(t-\tau\right)\right]\psi\left(\sigma(\tau)\right)d\tau$$

2.1.2 Жесткое нагружение с фиксированной скоростью роста деформаций

Пусть осуществляется жесткое нагружение СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии ($q = 1$) и с заданной скоростью изменения фазово-структурной деформации $\dot{\varepsilon} = \lambda$. Тогда из (2.1.1.4) получается следующее уравнение диаграммы деформирования:

$$\varepsilon = \rho_D\varphi(\sigma) - \lambda/k \qquad (2.1.2.1)$$

В результате оказывается, что чем больше скорость деформации λ, тем меньше деформация на диаграмме будет соответствовать тому же значению напряжений, что не противоречит экспериментальным данным [26,27]. С увеличением параметра k этот эффект уменьшается.

Если исходить из того, что функция $\varphi(\sigma) \to 1$ при $\sigma \to +\infty$, то следует, что для предельно медленного процесса $\varepsilon \to \rho_D$ при $\sigma \to +\infty$. Согласно (2.1.2.1), с ростом скорости деформации это максимальное значение деформации уменьшается на величину λ / k.

Необходимо отметить, что в рамках уравнения (2.1.1.4), в том случае, если диаграмма предельно медленного процесса начинается из нулевой точки ($\varphi(0) = 0$), при $\sigma = \varepsilon = 0$ должно быть $\dot{\varepsilon} = 0$, т. е. процесс, начинающийся из недеформированного и ненапряженного состояния и происходящий с постоянной ненулевой скоростью деформирования, в рамках уравнения (2.1.1.4) не описывается.

Корректно рассмотреть процесс жесткого деформирования, контролируемый по фазово-структурным деформациям можно, если предположить, что скорость фазово-структурной деформации меняется по закону:

$$\dot{\varepsilon} = \lambda\left(1 - exp\left(-t / t^*\right)\right) \tag{2.1.2.2}$$

Согласно (2.1.2.2) скорость деформации равна нулю в начальный момент времени при $t = 0$ и стремится к величине λ при $t \to \infty$, при этом t^* — характерное время, за которое разница между $\dot{\varepsilon}$ и λ уменьшается в e раз. Интегрируя (2.1.2.2) при нулевом начальном условии, получаем:

$$\varepsilon = \lambda\left(t + t^*\left(\exp\left(-t / t^*\right) - 1\right)\right) \tag{2.1.2.3}$$

Подставляя (2.1.2.2) и (2.1.2.3) в определяющее соотношение для неупругих деформаций (2.1.1.4) и разрешая полученное уравнение относительно σ, находим:

$$\sigma = \varphi^{-1}\left\{\frac{\lambda}{\rho_D}\left[\left(\frac{1}{k} - t^*\right)\left(1 - exp\left(-t / t^*\right)\right) + t\right]\right\} \tag{2.1.2.4}$$

Здесь φ^{-1} — функция, обратная $\varphi(\sigma)$ и существующая в силу монотонности и непрерывности $\varphi(\sigma)$.

Совокупность двух соотношений — (2.1.2.3) и (2.1.2.4) — представляет собой параметрическое уравнение диаграммы деформирования со скоростью деформаций, изменяющейся по закону (2.1.2.2).

При малых t, разлагая экспоненты в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами, получаем:

$$\varepsilon \approx 0, \quad \sigma \approx \varphi^{-1}\left(\frac{\lambda t}{\rho_D k t^*}\right) \tag{2.1.2.5}$$

Согласно (2.1.2.5), начальные участки диаграммы характеризуются резким ростом напряжений при почти неизменных деформациях (если в качестве функции φ берется функция, соответствующая распределению Вейбулла с показателем $\alpha > 1$, то график функции φ^{-1} имеет в нуле вертикальную касательную).

Для больших значений $t \to \infty$, полагая в (2.1.2.3) и (2.1.2.4) $\exp\left(-t/t^*\right) \approx 0$, получаем:

$$\varepsilon \approx \lambda\left(t - t^*\right) \tag{2.1.2.6}$$

$$\sigma = \varphi^{-1}\left[\frac{\lambda}{\rho_D}\left(1/k + t - t^*\right)\right] = \varphi^{-1}\left[\frac{1}{\rho_D}\left(\frac{\lambda}{k} + \varepsilon\right)\right] \tag{2.1.2.7}$$

Функция φ^{-1} имеет особенность в том случае, если значение аргумента равно 1. Согласно (2.1.2.6) и (2.1.2.7), диаграмма деформирования в координатах $\sigma \div \varepsilon$ будет иметь вертикальную асимптоту (параллельную оси напряжений) при $\varepsilon = \rho_D - \lambda/k$. Таким образом, в том случае, если задается скорость фазово-структурной деформации, в рамках моделей (2.1.2.3) и (2.1.2.4) получается тот же вывод, что и в рамках упрощенного соотношения (2.1.2.1): с ростом скорости изменения фазово-структурной деформации предельное значение деформаций на диаграмме жесткого нагружения будет уменьшаться. То есть в рамках рассматриваемой модели фазово-структурная деформативность СПФ при жестком нагружении падает с ростом скорости нагружения. Этот эффект уменьшается с ростом значения параметра модели k. Существует критическая скорость $\lambda^* = k\rho_D$, превышение которой ведет к хрупкому разрушению СПФ в отсутствии фазово-структурной деформации. Столь резкое уменьшение деформативности СПФ с ростом скорости фазово-структурной деформации в экспериментах по жесткому нагружению [26,27] не наблюдается.

Далее рассматривается процесс с постоянной скоростью изменения суммарной, а не фазово-структурной деформации: $\dot{\varepsilon}^{tot} = \lambda = const$. В этом случае следует воспользоваться соотношением (2.1.1.11), из которого получается дифференциальное уравнение для зависимости σ от t:

$$\dot{\sigma} + k\left(\sigma + E\rho_D\varphi(\sigma)\right) = E\lambda(1 + kt) \tag{2.1.2.8}$$

которое, будучи решенным при начальном условии $\sigma(0) = 0$, вместе с соотношением:

$$\varepsilon = \lambda t - \sigma / E \tag{2.1.2.9}$$

даст параметрическое представление диаграммы жесткого деформирования СПФ в координатах напряжение — фазово-структурная деформация.

Полагая в (2.1.2.8) $t = \sigma = 0$, и с учетом того, что $\varphi(0) = 0$, получаем $\dot{\sigma} = E\lambda = E\dot{\varepsilon}^{tot}$, т. е. в начальный момент времени скорость роста напряжений связана со скоростью роста деформаций упругим законом, а величина λ совпадает со скоростью упругой деформации (скорость изменения фазово-структурной деформации в начальный момент равна нулю). В результате получается, что для не слишком малых значений скорости полной деформации λ начальная скорость роста напряжений чрезвычайно велика, так что соответствующий процесс имеет смысл рассматривать как динамический. Напряжение быстро нарастает до достаточно больших значений σ, таких, что $\sigma/\sigma_0 >> 1$. В результате величина $\varphi(\sigma)$ мало отличается от своего асимптотического значения, равного 1. Этот факт позволяет исследовать поведение решения (2.1.2.8) при больших значениях переменной времени путем замены в (2.1.2.8) величины $\varphi(\sigma)$ на единицу. В результате получается уравнение $\dot{\sigma} + k\sigma = E(\lambda - k\rho_D - \lambda kt)$, решение которого, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид:

$$\sigma = E\lambda t - E\rho_D\left(1 - \exp(-kt)\right) \qquad (2.1.2.10)$$

Подставляя (2.1.2.10) в (2.1.2.9), получаем зависимость от времени фазово-структурной деформации:

$$\varepsilon = \rho_D\left(1 - \exp(-kt)\right) \qquad (2.1.2.11)$$

Согласно (2.1.2.11), в данной постановке задачи о жестком нагружении предельная деформация не зависит от скорости изменения полной деформации и равна ρ_D.

Таким образом, обнаружено принципиальное отличие между диаграммами жесткого деформирования, контролируемого по фазово-структурным и полным деформациям. Если фиксируется (хотя бы асимптотически для $t \to +\infty$) скорость фазово-структурной деформации, то предельная фазово-структурная деформативность падает с ростом этой скорости. Если же фиксируется скорость полной деформации, то предельная деформативность от скорости деформации не зависит, хотя промежуточные значения деформации для тех же значений напряжения падают с ростом этой скорости.

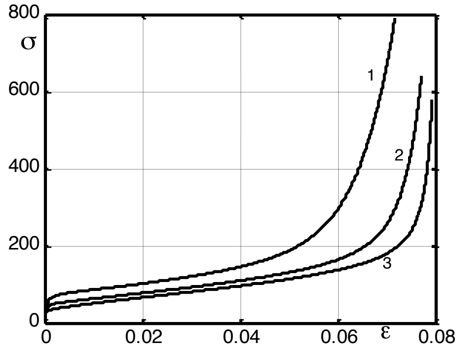


Рисунок 2.1.1

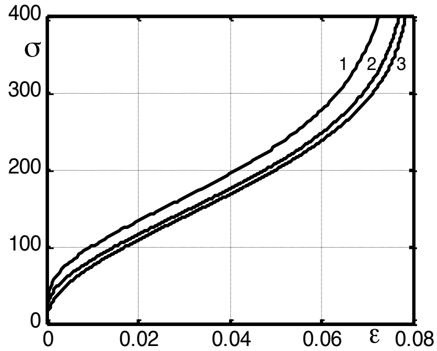


Рисунок 2.1.2

На рис. 2.1.1 приведены диаграммы $\sigma \div \varepsilon$, полученные путем решения (2.1.2.8) с учетом (2.1.2.9). Параметры материала приняты равными $k = 0.003$, $\alpha = 2$, $\sigma_0 = 100 МПа$, $E = 28\,000 МПа$, что соответствует никелиду титана, находящемуся в мартенситном состоянии. Кривая 1 построена для $\lambda = 10^{-4}\, сек^{-1}$, кривая 2 — для $\lambda = 5 \times 10^{-5}\, сек^{-1}$, кривая 3 — для $\lambda = 2.5 \times 10^{-5}\, сек^{-1}$. Расчеты проведены для весьма малых скоростей деформации. При больших значениях λ приближение к асимптотическому значению ρ_D происходит при чрезвычайно высоких значениях напряжений, не наблюдаемых в соответствующих экспериментах [26,27]. Связано это несоответствие, по-видимому, с тем, что в опытах не реализуется столь высокая скорость нарастания напряжений, которая получается при решении (2.1.2.8).

На деле даже на испытательных машинах с весьма жестким нагружением условие $\dot{\varepsilon}^{tot} = \lambda = const$ с самого начала нагружения никогда не выполняется. Процессу деформирования с постоянной скоростью всегда предшествует небольшой период возрастания этой скорости от нуля до стационарного значения. Чтобы можно было учесть это обстоятельство, ниже рассматривается процесс изменения полной деформации, задаваемый формулами типа (2.1.2.2), (2.1.2.3).

Подстановка этих формул в уравнение (2.1.1.11) дает для описания диаграммы деформирования следующую систему уравнений:

$$\dot{\sigma} + k\sigma + Ek\psi(\sigma) = E\lambda\left[\left(1 - kt^*\right)\left(1 - exp\left(-t/t^*\right)\right) + kt\right] \qquad (2.1.2.12)$$

$$\varepsilon = \lambda\left(t + t^*\left(exp\left(-t/t^*\right) - 1\right)\right) - \sigma/E \qquad (2.1.2.13)$$

На рис. 2.1.2 приведены диаграммы $\sigma \div \varepsilon$, полученные путем решения уравнения (2.1.2.12) с учетом (2.1.2.13). Решения получены для $t^* = 5 сек$, $k = 0.2$, $\sigma_0 = 200 МПа$, $\alpha = 2$. Кривая 1 соответствует $\lambda = 2 \times 10^{-3}\, сек^{-1}$, кривая 2 — $\lambda = 6 \times 10^{-4}\, сек^{-1}$, кривая 3 — $\lambda = 6 \times 10^{-5}\, сек^{-1}$. Приведенные на рис. 2.1.2 кривые неплохо соответствуют экспериментальным данным [26,27].

2.1.3 Мягкое нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений

Пусть осуществляется мягкое нагружение $\dot{\sigma} = \gamma = const$:

$$\sigma = \gamma t \qquad (2.1.3.1)$$

Тогда уравнение (2.1.1.4) принимает вид:

$$\dot{\varepsilon} = k\left(\rho_D \varphi(\gamma t) - \varepsilon\right) \qquad (2.1.3.2)$$

Решение уравнения (2.1.3.2), удовлетворяющее нулевому начальному условию с функцией Вейбулла $\varphi(\sigma)$, имеет вид:

$$\varepsilon = \rho_D \left\{ 1 - \exp(-kt) - k\int_0^t \left[\exp\left(-k(t-\tau) - (\gamma\tau/\sigma_0)^\alpha \right) \right] d\tau \right\} \qquad (2.1.3.3)$$

Зависимость (2.1.3.3) вместе с выражением (2.1.3.1) представляют собой параметрическое выражение диаграммы деформирования при мягком нагружении с заданной скоростью γ изменения напряжений. Явное выражение для нахождения ε через элементарные функции удается получить в случае, если $\alpha = 1$, т. е. для материальной функции φ, соответствующей экспоненциальной функции распределения:

$$\varepsilon = \varepsilon_D \left[1 + \frac{\gamma \exp(-kt)}{k\sigma_0 - \gamma} - \frac{k\sigma_0 \exp(-\gamma t/\sigma_0)}{k\sigma_0 - \gamma} \right] \qquad (2.1.3.4)$$

Решение (2.1.3.4) справедливо при $k\sigma_0 \neq \gamma$. Если же $k\sigma_0 = \gamma$, то получается:

$$\varepsilon = \varepsilon_D \left[1 - (1 + kt)\exp(-kt) \right] \qquad (2.1.3.5)$$

В случае, если $\alpha = 2$, что качественно соответствует описанию явления мартенситной неупругости, то зависимость деформации от времени выражается через интеграл вероятности $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-x^2)dx$:

$$\varepsilon = \varepsilon_D \left\{ 1 - \exp(-kt) - k_1\sqrt{\pi}\exp\left(-kt + k_1^2\right) \right\} \left[erf\left(\gamma t/\sigma_0 - k_1\right) + erf\left(k_1\right) \right] \qquad (2.1.3.6)$$

где $k_1 = k\sigma_0/(2\gamma)$. Согласно (2.1.3.4) или (2.1.3.5), при $t \to +\infty$ (что эквивалентно $\sigma \to +\infty$) и независимо от величины γ выполняется $\varepsilon \to \rho_D$. Для решения (2.1.3.6) аналогичный вывод следует из ограниченности интеграла вероятности на бесконечности. Вычисления, проведенные в соответствии с (2.1.3.3), показывают, что аналогичное поведение наблюдается при любом $\alpha \geq 1$. Таким образом, при мягком нагружении с заданной скоростью предельная деформация не зависит от скорости нагружения.

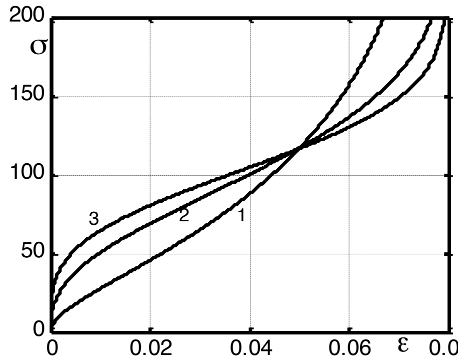


Рисунок 2.1.3

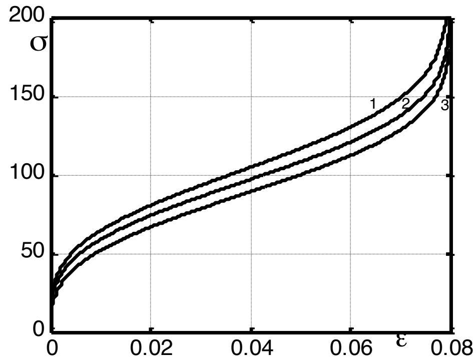


Рисунок 2.1.4

На рис. 2.1.3 и 2.1.4 приведены диаграммы мягкого нагружения СПФ в мартенситном состоянии. Расчеты проведены для $k = 0.003$, $\sigma_0 = 100\ МПа$. Рис. 2.1.3 соответствует скорости нагружения $\gamma = 0.05$, а значение параметра α равно номеру кривой. Для рис. 2.1.4 $\alpha = 3$, а скорость нагружения варьируется. Для кривой 1 — $\gamma = 0.05$, для кривой 2 — $\gamma = 0.025$, для кривой 3 — $\gamma = 0.001$.

2.1.4 Моделирование релаксации напряжений

Пусть образец из СПФ, находящийся в полностью мартенситном состоянии, нагружен до напряжения σ_{00} и приобрел полную деформацию ε_0^{tot}. Поскольку процесс происходил с конечной скоростью, то приобретенная деформация должна быть меньше, чем получаемая по диаграмме предельно медленного нагружения:

$$\varepsilon_0^{tot} < \rho_D \varphi(\sigma_{00}) + \sigma_{00} / E \qquad (2.1.4.1)$$

Далее, достигнутая полная деформация образца фиксируется $\varepsilon^{tot} = \varepsilon_0 = const,\ \dot{\varepsilon}^{tot} = 0$. Следует определить, как будут после этого с течением времени меняться напряжения (опыт на релаксацию напряжений). Для этого случая из (2.1.1.11) получаем:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -k\left(\rho_D \varphi(\sigma) + \frac{\sigma}{E} - \varepsilon_0\right) \qquad (2.1.4.2)$$

Данное уравнение следует решать при начальном условии:

$$\sigma(0) = \sigma_{00} \qquad (2.1.4.3)$$

Решение задачи (2.1.4.2), (2.1.4.3) имеет вид:

$$\int_{\sigma_{00}}^{\sigma} \frac{ds}{E\rho_D \varphi(s) + s - E\varepsilon_0} = kt \qquad (2.1.4.4)$$

Правая часть (2.1.4.2) в начальный момент времени в силу неравенства (2.1.4.1) является отрицательной. Следовательно, напряжения будут убывать с течением времени. При этом точка, изображающая напряженно-деформированное состояние, находясь левее диаграммы деформирования предельно медленного процесса, будет с течением времени приближаться к этой диаграмме по прямой, параллельной оси напряжений. При $t \to +\infty$ напряжения будут стремиться сверху к величине σ_*, удовлетворяющей соотношению $\varepsilon_0^{tot} = \rho_D \varphi(\sigma_*) + \sigma_* / E$ и обращающей в ноль знаменатель подынтегрального выражения (2.1.4.4).

В том случае, если начальная точка лежит на диаграмме предельно медленного деформирования, т. е. вместо неравенства (2.1.4.1) выполняется равенство, формула (2.1.4.4) не дает решения, т. к. содержит расходящийся несобственный интеграл. В этом случае уравнению

(2.1.4.2) удовлетворяет тривиальное решение $\sigma = \sigma_{00}, \dot{\sigma} = 0$, т. е. напряжения, как и деформации, не меняются.

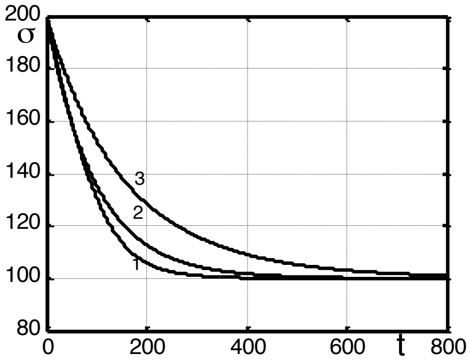


Рисунок 2.1.5

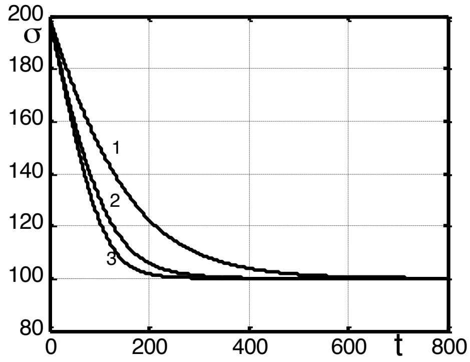


Рисунок 2.1.6

На рис. 2.1.5 и 2.1.6 изображены построенные с помощью (2.1.4.4) графики зависимости напряжений от времени в процессе релаксации напряжений. Расчеты проведены для $k = 0.001$ и начального напряжения $\sigma_{00} = 200\ МПа$. Начальное значение деформаций ε_0 выбиралось таким образом, чтобы этому значению на диаграмме предельно медленного нагружения соответствовало в два раза меньшее значение напряжения: $\varepsilon_0 = \rho_D \varphi(\sigma_{00}/2) + \sigma_{00}/(2E)$. Все графики на рис. 2.1.5 получены для $\alpha = 2$. При этом для первой кривой $\sigma_0 = 100\ МПа$, для кривой 2 — $\sigma_0 = 200 МПа$, для кривой 3 — $\sigma_0 = 300 МПа$. Графики на рис. 2.1.6 построены для значения параметра функции $\varphi(\sigma)$, соответствующей функции распределения Вейбулла, $\sigma_0 = 100 МПа$ и значений параметра α, равных номеру соответствующей кривой. Как видно, скорость релаксации напряжений растет с ростом α и уменьшением σ_0. При этом в процессе релаксации падение напряжения происходит монотонно от уровня напряжений σ_{00} (при котором значение аргумента функции угловых скобок (2.1.1.4) неотрицательно), при этом напряжение не может быть ниже асимптотического уровня σ_* (при котором значение аргумента функции угловых скобок (2.1.1.4) равно нулю). Это означает, что аргумент функции угловых скобок является неотрицательным в любой точке процесса, поэтому решения, полученные по определяющим соотношениям с использованием угловых скобок и без их использования, совпадают.

2.1.5 Мягкое ступенчатое нагружение в режиме мартенситной неупругости

Далее рассматривается мягкое ступенчатое нагружение СПФ в полностью мартенситном состоянии. Исследуется развитие фазово-структурной деформации на каждой ступени такого нагружения при постоянном напряжении после его скачкообразного изменения. Правая часть уравнения (2.1.1.4) ограничена при любом конечном значении напряжений и деформаций. Следовательно, в рамках рассматриваемой модели величина $\dot{\varepsilon}$ всегда ограничена. Поэтому даже при мгновенных скачках напряжений в рамках этой модели мгновенные скачки фазово-структурных деформаций невозможны. Следовательно, в качестве начального условия для решения уравнения (2.1.1.4) на очередной ступени процесса нагружения следует использовать значение фазово-структурной деформации, достигнутой в последней точке предшествующей ступени.

Решение (2.1.1.4) для $q = 1$, $\sigma = const$, удовлетворяющее начальному условию $\varepsilon(0) = 0$, имеет вид:

$$\varepsilon = \rho_D \varphi(\sigma) - \left(\rho_D \varphi(\sigma) - \varepsilon_0\right) exp\left(-kt\right) \tag{2.1.5.1}$$

Для первого этапа процесса после увеличения напряжения с нулевого значения до $\sigma = \sigma_1$ из (2.1.5.1) следует (в силу $\varepsilon_0 = 0$):

$$\varepsilon = \rho_D \varphi(\sigma_1)\left(1 - exp(-kt)\right) \tag{2.1.5.2}$$

Согласно (2.1.5.2), значение деформации после первого этапа ступенчатого нагружения будет меньше значения деформации $\rho_D \varphi(\sigma_1)$, соответствующей напряжению σ_1 на диаграмме предельно медленных процессов, но с течением времени оно будет асимптотически стремиться к этому значению снизу.

Далее рассматривается этап процесса ступенчатого нагружения, связанный с развитием деформации при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_n$ после быстрого увеличения напряжения от значения σ_{n-1} до величины σ_n. Докажем по индукции, что деформация на этом этапе всегда будет ниже, чем величина деформации $\varepsilon_n = \rho_D \varphi(\sigma_n)$, соответствующая тому же напряжению на диаграмме предельно медленного нагружения. Исходя из решения (2.1.5.1), получаем:

$$\rho_D \varphi(\sigma_n) - \varepsilon = \left(\rho_D \varphi(\sigma_n) - \varepsilon_0\right) exp(-kt) \tag{2.1.5.3}$$

Начальное значение деформации ε_0, согласно предположению индукции, не превосходит величину $\rho_D \varphi(\sigma_{n-1})$, соответствующую напряжению σ_{n-1} на диаграмме медленного нагружения: $\rho_D \varphi(\sigma_{n-1}) - \varepsilon_0 > 0$. Функция $\varphi_1(\sigma, q)$ монотонно возрастает по первому аргументу и $\sigma_n > \sigma_{n-1}$. Поэтому:

$$\rho_D \varphi(\sigma_n) - \varepsilon_0 = \rho_D \left(\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_{n-1})\right) + \left(\rho_D \varphi(\sigma_{n-1}) - \varepsilon_0\right) > 0 \tag{2.1.5.4}$$

Из (2.1.5.3) и (2.1.5.4) получается $\rho_D \varphi(\sigma_n) > \varepsilon$, что и требовалось доказать. При этом, согласно (2.1.5.3), с течением времени на каждом этапе ступенчатого нагружения деформация будет приближаться к значению, соответствующему на диаграмме медленного нагружения значению напряжения σ_n.

Учитывая, что произвольную диаграмму монотонного нагружения СПФ в мартенситном состоянии можно с любой степенью точности приблизить ступенчатой диаграммой с увеличивающимся количеством ступеней при уменьшении скачка напряжений на каждой ступени, можно утверждать, что для любой диаграммы монотонного нагружения СПФ в мартенситном состоянии фазово-структурная деформация должна быть не больше значения, соответствующего тому же напряжению на диаграмме предельно медленного нагружения.

Пусть продолжительность предшествующей ступени процесса нагружения была достаточно велика, так что начальную деформацию для рассматриваемого этапа, соответствующего $\sigma = \sigma_n$, можно считать равной $\varepsilon_0 = \rho_D \varphi(\sigma_{n-1})$. Тогда из (2.1.5.3) закон изменения приращения деформации $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$ с течением времени в рамках рассматриваемого этапа процесса можно записать в виде:

$$\Delta\varepsilon = \rho_D \left(\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_{n-1})\right)\left(1 - exp(-kt)\right) \qquad (2.1.5.5)$$

Согласно (2.1.5.5), приращение неупругой деформации за фиксированное время, прошедшее с момента скачкообразного увеличения напряжения при неизменном значении σ_{n-1}, растет с ростом скачка напряжений $\Delta\sigma = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, поскольку $\varphi(\sigma)$ является возрастающей функцией σ. Если же величины t и $\Delta\sigma$ фиксированы, то приращение неупругой деформации со временем будет тем больше, чем более пологой является диаграмма нагружения в координатах $\sigma \div \varepsilon$ на участке $\sigma \in \left[\sigma_{n-1}, \sigma_n\right]$, т. е. чем ниже будет касательный модуль диаграммы предельно медленного нагружения. Эти выводы соответствуют экспериментальным данным [26,27].

Для малых значений t, разлагая в ряд показательную функцию в (2.1.5.5) и ограничиваясь двумя членами разложения, получаем $\Delta\varepsilon \approx \rho_D kt\left(\varphi(\sigma_n) - \varphi(\sigma_{n-1})\right)$, т. е. для малых значений t асимптотика роста $\Delta\varepsilon$ с t является линейной.

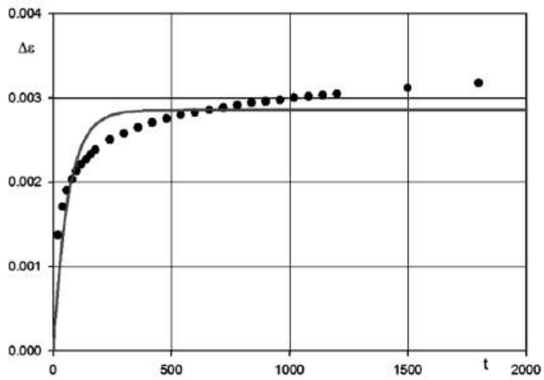


Рисунок 2.1.7

На рис. 2.1.7 продемонстрирована модельная кривая, построенная по определяющим соотношениям (2.1.1.4) с коэффициентами, идентифицированными с помощью метода наименьших квадратов по экспериментальным точкам процесса мягкого ступенчатого нагружения (которые также показаны на рисунке). Сравнение модельной кривой и экспериментальных наблюдений свидетельствует о том, что модельная кривая, построенная по определяющим соотношениям (2.1.1.4), недостаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Этот факт, а также то, что предложенная модель не описывает мгновенные скачки неупругой деформации при ступенчатом изменении нагрузки в процессе мягкого ступенчатого нагружения, являются основными недостатками определяющих соотношений (2.1.1.4), касающихся описания процесса мягкого ступенчатого нагружения.

2.1.6 Мягкое ступенчатое нагружение в режиме сверхупругости

Пусть образец из СПФ, находящийся в отсутствии напряжений в аустенитном фазовом состоянии, изотермически при температуре T_0 нагружается монотонно возрастающим одноосным растягивающим напряжением. В результате после достижения возрастающим напряжением значения фазового предела текучести σ_1^{ph} будет осуществляться вызванное ростом напряжений прямое мартенситное превращение и одновременно — структурный переход, ведущий к увеличению степени ориентированности ранее образовавшегося мартенсита и росту структурной деформации. В [26,27] экспериментально установлено, что этот процесс сопровождается реономными явлениями, которые можно описать в рамках развиваемой модели.

Далее, в целях упрощения, рассматривается случай, когда материальные функции $\varphi(\sigma)$ в аустенитном и мартенситном состоянии материала одинаковы. Тогда справедливо положение об активных процессах пропорционального нагружения [47], в рамках которого уравнение предельно медленной диаграммы деформирования имеет вид:

$$\varepsilon = \rho_D \varphi(\sigma) q,\ q = \frac{1}{2}\left(1-\cos(\pi t)\right),\ t = \frac{M_s^\sigma - T_0}{M_s^0 - M_f^0},\ M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\rho_D \sigma \varphi(\sigma)}{\Delta S}$$

В последней формуле для упрощения пренебрегают влиянием на температуру начала прямого мартенситного превращения изменения упругих модулей и объемным эффектом реакции фазового превращения. В результате для процесса, происходящего с конечной скоростью, справедливо уравнение (2.1.1.4), в котором функцию ψ следует заменить на ψ_1, где:

$$\psi_1 = \rho_D \varphi_1(\sigma) = \frac{1}{2}\rho_D \varphi(\sigma)\left\{1-\cos\left[\frac{\pi}{M_s^0 - M_f^0}\left(M_s^0 + \frac{\sigma \rho_D \varphi(\sigma)}{\Delta S} - T_0\right)\right]\right\} \qquad (2.1.6.1)$$

Зависимость (2.1.6.1) справедлива для $\sigma \geq \sigma_1^{ph}$, где величина σ_1^{ph} является корнем уравнения $M_s^0 + \dfrac{\rho_D \sigma_1^{ph} \varphi(\sigma_1^{ph})}{\Delta S} = T_0$. Фазовый переход продолжается до значения напряжения σ_2^{ph}, являющегося корнем уравнения $M_f^0 + \dfrac{\rho_D \sigma_2^{ph} \varphi(\sigma_2^{ph})}{\Delta S} = T_0$. Полученные ранее решения для нагружения в режиме мартенситной неупругости могут быть переделаны на случай нагружения в режиме сверхупругости путем замены функций $\varphi(\sigma)$ на $\varphi_1(\sigma)$. В результате модель качественно правильно описывает рост деформаций со временем на каждом этапе мягкого ступенчатого нагружения в режиме сверхупругости [26,27].

2.1.7 Выводы

В данном разделе была предложена простейшая модель, качественно правильно описывающая реономные свойства СПФ и основанная на гипотезе о наличии класса предельно медленных процессов, имеющих склерономный характер. В рамках модели при жестком нагружении с фиксированной скоростью фазово-структурных деформаций, предельная деформативность падает с ростом этой скорости, тогда как в случае нагружения с фиксированной скоростью полных деформаций предельная деформативность от этой скорости не зависит. Диаграмма монотонного мягкого нагружения СПФ в мартенситном состоянии всегда дает меньшие значения деформации, чем характерные для соответствующего предельно медленного процесса. Модель описывает явление релаксации напряжений, причем для фиксированного значения полных деформаций точка, изображающая состояние материала, с течением времени стремится к диаграмме предельно медленного процесса. К основным недостаткам данной модели следует отнести отсутствие скачка неупругих деформаций при скачкообразном увеличении напряжений в процессе мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости, а также недостаточно хорошую согласованность модельных кривых, построенных с помощью МНК и использованных для построения экспериментальных данных после увеличения деформации в данных процессах. В рамках данной модели при неограниченном росте скорости процесса этот процесс приближается к упругому. Таким образом можно сказать, что предельно быстрый процесс является упругим. В результате разница между диаграммами предельно быстрого и предельно медленного процесса в рамках данной модели становится чрезвычайно большой. Реономные эффекты, характерные для СПФ, преувеличиваются по сравнению с экспериментальными данными.

2.2 Дробно-линейная модель, использующая гипотезы о склерономности предельно медленных и предельно быстрых процессов нагружения

2.2.1 Формулировка модели

В добавлении к классу предельно медленных процессов (2.1.1.2), определяемых соотношением $\varepsilon^{phst} = \psi_1(q,\sigma)$, постулируется существование класса предельно быстрых процессов деформирования СПФ, определяемых соотношением:

$$\varepsilon^{phst} = \psi_2(q,\sigma) \qquad (2.2.1.1)$$

где $\psi_2(q,\sigma)$ — в общем случае функционал истории изменения своих аргументов. Класс предельно быстрых процессов может быть строго детерминирован с помощью аналогичного представленному в параграфе 1.1.1 рассуждения (приведенного для определения класса предельно медленных процессов), с той лишь разницей, что в (2.1.1.9) должны взять предел при $\beta \to \infty$ ($\psi_2(\sigma,q) = \lim\limits_{\beta\to\infty} F(\beta,\sigma,q)$).

Для процессов, происходящих с конечной скоростью, предлагается определяющее соотношение вида:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k\left\langle \frac{\psi_1(q,\sigma) - \varepsilon^{phst}}{\varepsilon^{phst} - \psi_2(q,\sigma)} \right\rangle$$

где использовано обозначение:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & при \quad x \ge 0 \\ 0 & при \quad x < 0 \end{cases}$$

Моделирование реономного поведения СПФ, подчиняющееся данному определяющему соотношению с угловыми скобками, является трудоемким, поэтому в данном разделе будем проводить моделирование в рамках аналогичного определяющего соотношения без угловых скобок:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k\left[\frac{\psi_1(q,\sigma) - \varepsilon^{phst}}{\varepsilon^{phst} - \psi_2(q,\sigma)} \right] \qquad (2.2.1.2)$$

после чего проверять, что для всех полученных решений выполняется неравенство:

$$\psi_2(q,\sigma) \le \varepsilon^{phst} \le \psi_1(q,\sigma) \qquad (2.2.1.3)$$

Для весьма быстрых процессов: $\varepsilon^{phst} \approx \psi_2(q,\sigma)$ и $\dot{\varepsilon}^{phst} \to \infty$. Для весьма медленных процессов: ($\dot{\varepsilon}^{phst} \approx 0$), как и ранее, будет $\varepsilon^{phst} \approx \psi_1(q,\sigma)$. В данной работе рассматривается простейший вариант модели (2.2.1.2), в рамках которой $k = const$.

Соотношение (2.2.1.2) записано для фазово-структурных деформаций ε^{phst} (в дальнейшем, как и ранее, фазово-структурные деформации будем обозначать как ε). Переходя к полным деформациям $\varepsilon^{tot} = \varepsilon + \sigma / E$, соотношение (2.2.1.2) можно переписать в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{tot} = k\left[\frac{\psi_1(q,\sigma) - \varepsilon^{tot} + \sigma / E}{\varepsilon^{tot} - \sigma / E - \psi_2(q,\sigma)}\right] + \frac{\dot{\sigma}}{E} \qquad (2.2.1.4)$$

В (2.2.1.4) для упрощения в силу малости соответствующих эффектов не учитываются температурные деформации и переменность упругих модулей при фазовых переходах.

Предполагается, что для описания предельно медленных и предельно быстрых процессов деформирования могут быть использованы склерономные определяющие соотношения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [36,37,47,54-56]. Считается также, что выполнены условия положения об активных процессах пропорционального нагружения [36,37], так что вместо функционалов (2.1.1.2) и (2.2.1.1) можно использовать простые алгебраические соотношения типа $\psi_1(q,\sigma) = q\rho_{D1}\varphi_1(\sigma)$, $\psi_2(q,\sigma) = q\rho_{D2}\varphi_2(\sigma)$, где величины ρ_{D1}, ρ_{D2} представляют собой предельные значения фазово-структурной деформации в предельно медленных и предельно быстрых процессах, а функции $\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma)$ монотонно возрастают и стремятся к единице на бесконечности.

Соотношения $\varepsilon = \rho_{D1}\varphi_1(\sigma)$ и $\varepsilon = \rho_{D2}\varphi_2(\sigma)$ представляют собой уравнения диаграмм мартенситной неупругости в координатах структурные деформации — напряжения для предельно медленного и предельно быстрого нагружения. Для конкретных расчетов будут использованы материальные функции, соответствующие функции распределения Вейбулла:

$$\varphi_k(\sigma) = 1 - exp\left(-\left(\sigma / \sigma_k\right)^{\alpha_k}\right),\ k = 1.2 \qquad (2.2.1.5)$$

где α_k, σ_k — параметры материала, $\sigma_k > 0$ и $\alpha_k \geq 1$. При этом должно выполняться условие $\rho_{D1}\varphi_1(\sigma) \geq \rho_{D2}\varphi_2(\sigma)$ для всех значений σ. Поскольку асимптотические значения функций $\psi_1(1,\sigma)$ и $\psi_2(1,\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ равны, соответственно, ρ_{D1}, ρ_{D2}, то должно выполняться неравенство $\rho_{D1} \geq \rho_{D2}$.

С целью упрощения уравнения (2.2.1.2) и сокращения количества параметров модели вводится приведенное безразмерное время $\tau = kt$. Уравнение (2.2.1.2) переписывается в виде:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{\psi_1(q,\sigma) - \varepsilon}{\varepsilon - \psi_2(q,\sigma)} \qquad (2.2.1.6)$$

где все величины рассматриваются как функции τ.

2.2.2 Анализ решения (2.2.1.6) при нулевых начальных условиях

В случае заданного процесса изменения напряжений и температуры уравнение (2.2.1.6) можно представить в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{f_1(\tau) - \varepsilon}{\varepsilon - f_2(\tau)} \tag{2.2.2.1}$$

В частности, при выполнении условий положения об активных процессах пропорционального нагружения [36,37] $f_i(\tau) = q(\tau)\rho_{Di}\varphi_i(\sigma(\tau))$ для нагружения в режиме мартенситной неупругости $q = 1$ и $f_i(\tau) = \rho_{Di}\varphi_i(\sigma(\tau))$.

Рассматриваются процессы, происходящие из ненапряженного и недеформированного состояния, т. е уравнение (2.2.2.1) должно решаться при начальном условии:

$$\varepsilon(0) = 0 \tag{2.2.2.2}$$

причем выполняется $\sigma(0) = 0$. В силу свойств функций φ_i (2.2.1.5), при $\tau = 0$ правая часть дифференциального уравнения (2.2.2.1) представляет собой неопределенность типа $0/0$. Для задач (2.2.2.1) и (2.2.2.2) не выполняются общие условия теоремы существования и единственности. Из-за неопределенности производной в начальной точке невозможно провести процедуру построения ломаных Эйлера. Таким образом, возникают два вопроса:

- существует и единственно ли решение, исходящее из нулевой точки;
- возможно ли поставить начальное условие, отступив от нулевой точки на некоторый, достаточно малый, шаг для решения задачи в численном виде без существенной потери точности решения.

Ответить на первый вопрос позволяет следующая процедура. Выполним преобразование уравнения (2.2.2.1) к виду:

$$\dot{\varepsilon} = -1 + \frac{f_1(\tau) - f_2(\tau)}{\varepsilon - f_2(\tau)}$$

Тогда после произведения замены вида:

$$z = \varepsilon - f_2(\tau) \ge 0 \tag{2.2.2.3}$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$z\dot{z} + \lambda(\tau)z = \gamma(\tau) \tag{2.2.2.4}$$

$$\lambda(\tau) = 1 + f_2'(\tau), \qquad \gamma(\tau) = f_1(\tau) - f_2(\tau) \ge 0$$

Делая в уравнении (2.2.2.4) замену $w = z^2$ для новой неизвестной функции w, получаем уравнение:

$$\dot{w} = 2\gamma(\tau) - 2\lambda(\tau)\sqrt{w} \tag{2.2.2.5}$$

с начальным условием $w(0) = 0$. Для уравнения (2.2.2.5) в окрестности начальной точки уже выполняются условия теоремы существования решения (правая часть (2.2.2.5) в окрестности начальной точки непрерывна). Вопрос о единственности решения (2.2.2.5) остается открытым, т. к. для правой части (2.2.2.5) в окрестности нулевой точки не выполняется условие Липшица. В любом случае, для всякого неотрицательного решения (2.2.2.5) существует два решения задачи (2.2.2.1), (2.2.2.2), отличающихся знаками $z = \pm\sqrt{w}$, из которых, естественно, необходимо выбрать неотрицательное в силу неравенства (2.2.2.3).

Теперь вернемся ко второму вопросу, который касается построения численной аппроксимации решения, выходящего из нулевой точки. Для начала рассмотрим случай линейных функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$.

Пусть:

$$f_1(0) = 0, f_1(\tau) = f_1'(0)\tau + O(\tau^2), f_2(0) = 0, f_2(\tau) = f_2'(0)\tau + O(\tau^2)$$

где разложения справедливы в окрестности нуля, а отношения $O(\tau^2)/\tau^2$ ограничены в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. В этом случае характер поведения интегральных кривых (2.2.2.1) в малой окрестности нулевой точки не зависит от слагаемых $O(\tau^2)$ и полностью определяется линейным приближением:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{k_1\tau - \varepsilon}{\varepsilon - k_2\tau}, k_1 = f_1'(0) \geq 0, k_2 = f_2'(0) \geq 0, k_1 > k_2 \qquad (2.2.2.6)$$

Будем далее опираться на известное исследование поведения в окрестности нулевой особой точки решения уравнения:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y} \qquad (2.2.2.7)$$

которое переходит в (2.2.2.5) при:

$$\begin{aligned} &x = \varepsilon, y = \tau, \\ &a_{11} = -1, a_{12} = k_1, a_{21} = 1, a_{22} = -k_2 \end{aligned} \qquad (2.2.2.8)$$

Дальнейшее исследование справедливо при условии:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & k_1 \\ 1 & -k_2 \end{vmatrix} = k_2 - k_1 \neq 0$$

В частности, ситуация, когда $k_1 = k_2 = 0$, что имеет место в том случае, когда используются функции, соответствующие распределению Вейбулла, при $\alpha \neq 1$, изложенным ниже способом исследована быть не может и требует отдельного рассмотрения. В то же время для материальных функций, соответствующих экспоненциальному распределению

$\psi(\sigma) = \rho_{Di}\left(1 - \exp\left(-\sigma/\sigma_{0i}\right)\right)$, нижеследующее рассмотрение подходит, причем для нагружения $\sigma = \sigma(t)$ выполняется $k_i = \rho_{Di}\sigma'(0)/\sigma_{0i}$.

Характер поведения решения (2.2.2.7) зависит от значения характеристических корней λ_1, λ_2 матрицы a_{ij}, т. е. от корней уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

которое записывается в виде:

$$\lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + \left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = 0 \qquad (2.2.2.9)$$

Подставляя в (2.2.2.9) значения коэффициентов матрицы a_{ij} (2.2.2.8), получаем:

$$\lambda^2 + \left(1 + k_2\right)\lambda - \left(k_1 - k_2\right) = 0 \qquad (2.2.2.10)$$

Корни уравнения (2.2.2.10) определяются по формуле:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(1 + k_2\right) \pm \sqrt{(1 + k_2)^2 + 4\left(k_1 - k_2\right)}}{2} = \frac{-\left(1 + k_2\right) \pm \sqrt{\left(1 - k_2\right)^2 + 4k_1}}{2} \qquad (2.2.2.11)$$

Согласно второму выражению (2.2.2.11), при $k_1 > 0$ оба корня являются действительными. Согласно первому выражению (2.2.2.11), при:

$$k_1 > k_2 \qquad (2.2.2.12)$$

один из корней является отрицательным, а второй — положительным. Неравенство (2.2.2.12) является условием того, что для малых значений напряжения деформация предельно медленного процесса превосходит деформацию предельно быстрого процесса, соответствующего тому же значению напряжения. Это условие должно быть выполнено по определению рассматриваемой модели.

В том случае, когда оба собственных значения матрицы a_{ij} действительны и имеют разные знаки, соответствующая особая точка называется седлом. Имеются две интегральные линии (сепаратрисы) уравнения (2.2.2.7) или (2.2.2.5), проходящие через особую точку (начало координат), которые имеют уравнение:

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11} - \lambda_i}y, \quad i = 1.2 \qquad (2.2.2.13)$$

Подставляя в (2.2.2.13) значения корней (2.2.2.11) и коэффициентов матрицы a_{ij} (2.2.2.8), получаем соответствующие решения (2.2.2.5):

$$\varepsilon = \frac{\left(k_2 - 1\right) - \sqrt{\left(k_2 - 1\right)^2 + 4k_1}}{2}\tau \qquad (2.2.2.14)$$

$$\varepsilon = \frac{(k_2 - 1) + \sqrt{(k_2 - 1)^2 + 4k_1}}{2}\tau \qquad (2.2.2.15)$$

Решения (2.2.2.14) и (2.2.2.15) можно получить непосредственно, если подставить представление $\varepsilon = \lambda\tau$ в уравнение (2.2.2.6). В результате получается:

$$\lambda = \frac{k_1 - \lambda}{\lambda - k_2}$$

или $\lambda^2 - (k_2 - 1)\lambda - k_1 = 0$, откуда получается $\lambda = \dfrac{(k_2 - 1) \pm \sqrt{(1 - k_2)^2 + 4k_1}}{2}$, т. е. те же значения, что и в (2.2.2.14) и (2.2.2.15).

Согласно (2.2.2.14) и (2.2.2.15), решения линеаризованных задач представляют собой две прямые линии, первая из которых имеет отрицательный, а вторая — положительный наклон (при условии выполнения неравенства $k_1 > 0$). В соответствии со смыслом решаемой задачи следует выбрать второе из этих решений. Таким образом, для искомого решения нелинейной задачи значение скорости деформации в нуле равно:

$$\dot{\varepsilon}(0) = \beta, \quad \beta = \frac{(k_2 - 1) + \sqrt{(k_2 - 1)^2 + 4k_1}}{2} \qquad (2.2.2.16)$$

Формула (2.2.2.16) ликвидирует неопределенность со значением правой части уравнения (2.2.2.1) в нулевой точке и позволяет строить численные схемы решения этого уравнения с нулевым начальным условием. Возможен следующий вариант численного решения нелинейного уравнения (2.2.2.1) с нулевым начальным условием: выбирается некоторое малое число τ_1, и уравнение (2.2.2.1) решается с помощью стандартных программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений при начальном условии $\varepsilon(\tau_1) = \beta\tau_1$ вместо нулевого начального условия.

На рис. 2.2.1 построен фазовый портрет для задачи (2.2.2.6) при $k_1 = 2, k_2 = 1$. Данный вид фазового портрета показывает, что у приближенного (с точностью до отбрасывания членов второго порядка) уравнения имеется одно решение, выходящее из нуля и имеющее физический смысл (находящееся в первом квадранте), и более того, все другие решения, выходящие из любой точки $\varepsilon(\tau_1) = c \geq 0$, асимптотически стремятся к правильному решению. То есть, если при постановке численной задачи была допущена ошибка в постановке начального условия в близкой к нулю точке τ_1, то на достаточно большом временном интервале кривая, полученная в результате численного моделирования, станет предельно близкой к реальной кривой.

Далее рассмотрим случай, когда обе функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ имеют в разложении в ряд Тейлора старшие члены порядка, выше первого. Пусть:

$$f_1(\tau) = k_n\tau^n + k_{n+1}\tau^{n+1} + \dots$$
$$f_2(\tau) = p_n\tau^n + p_{n+1}\tau^{n+1} + \dots \qquad (2.2.2.17)$$

представляют собой разложение в ряды Тейлора функций $f_1(\tau), f_2(\tau)$, которые начинаются со степени $n \geq 2$. Будет отыскиваться асимптотическое представление решения уравнения (2.2.2.1) в случае функций (2.2.2.17) для малых значений τ и ε. Решение ищется путем разложения в ряд по малому параметру, роль которого играет величина τ. Таким образом, решение ищется в виде асимптотического для $\tau \to 0$ ряда:

$$\varepsilon(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_n\tau^n + \dots \qquad (2.2.2.18)$$

$$d\varepsilon / d\tau = a_1 + 2a_2\tau + \dots na_n\tau^{n-1} + \dots \qquad (2.2.2.19)$$

Подстановка (2.2.2.17), (2.2.2.18) и (2.2.2.19) в (2.2.2.1) дает следующее соотношение:

$$\left[a_1 + 2a_2\tau + \dots + na_n\tau^{n-1} + \dots\right]\times$$
$$\times\left[a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + \left(a_n - p_n\right)\tau^n + \left(a_{n+1} - p_{n+1}\right)\tau^{n+1} + \dots\right] = \qquad (2.2.2.20)$$
$$= -a_1\tau - a_2\tau^2 - \dots - a_{n-1}\tau^{n-1} + \left(k_n - a_n\right)\tau^n + \left(k_{n+1} - a_{n+1)}\right)\tau^{n+1} + \dots$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени τ в (2.2.2.20), получаем:

$$a_1^2 = -a_1 \qquad (2.2.2.21)$$

Уравнение (2.2.2.21) имеет два решения:

$$a_1 = 0 \qquad (2.2.2.22)$$

и $a_1 = -1$, второе из которых не подходит по условию задачи, поскольку при $a_1 = -1$ величина ε (2.2.2.18) в некоторой правой окрестности нуля будет отрицательной. Наличие двух корней для a_1 наталкивает на мысль о наличии в рассматриваемом случае двух интегральных кривых, проходящих через начало координат подобно тому, как это было при рассмотренной в первом пункте линейной асимптотике функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$. Второе решение ниже не рассматривается.

Таким образом, следует принять (2.2.2.22). После обнуления в (2.2.2.20) слагаемых, пропорциональных a_1, получается, что если $n > 2$, то слагаемое со второй степенью τ содержится лишь в правой части (2.2.2.20), откуда следует, что $a_2 = 0$. Повторяя нужное число раз эту процедуру, получаем:

$$a_3 = a_4 = \dots = a_{n-1} = 0 \qquad (2.2.2.23)$$

Положив равными нулю слагаемые в (2.2.2.20), пропорциональные приведенным в (2.2.2.23) параметрам, приравняем коэффициенты при τ^n в (2.2.2.20). При этом младшая степень по τ левой части равна $2n-1$, а правой части — n. Поскольку по предположению

$n > 1$, то $2n - 1 > n$, и слагаемое, пропорциональное τ^n, есть только в правой части. Отсюда получается, что данное слагаемое равно нулю, т. е. $a_n = k_n$. Проводя аналогичную процедуру для степеней $\tau^{n+1}, \tau^{n+2}, \ldots \tau^{2n-2}$, опять получим, что соответствующие слагаемые присутствуют только в правой части (2.2.2.20), откуда следует, что:

$$a_n = k_n,\ a_{n+1} = k_{n+1},\ a_{n+2} = k_{n+2},\ \ldots,\ a_{2n-2} = k_{2n-2} \qquad (2.2.2.24)$$

В последовательности (2.2.2.24) будет один член, если $2n - 2 = n$, т. е. $n = 2$, будет два члена, если $2n - 2 = n + 1$, т. е. $n = 3$, будет 3 члена, если $2n - 2 = n + 2$, т. е. $n = 4$, и т. д. Т. е. будет k членов, если $2n - 2 = n + k - 1$, т. е. $n = 1 + k$.

Таким образом, разложение в ряд по τ искомого решения начинается с члена той же степени, что и разложение в ряд функций $f_i(\tau)$, причем первые $n - 1$ членов разложения ε имеют те же коэффициенты, что и первые $n - 1$ членов разложения по τ функции $f_1(\tau)$.

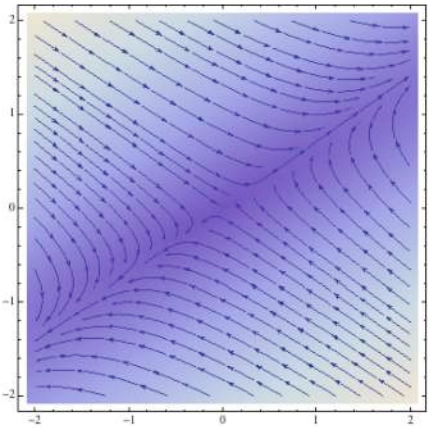


Рисунок 2.2.1

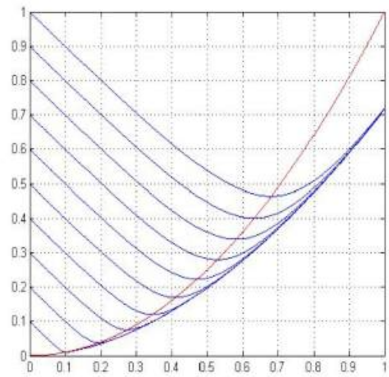


Рисунок 2.2.2

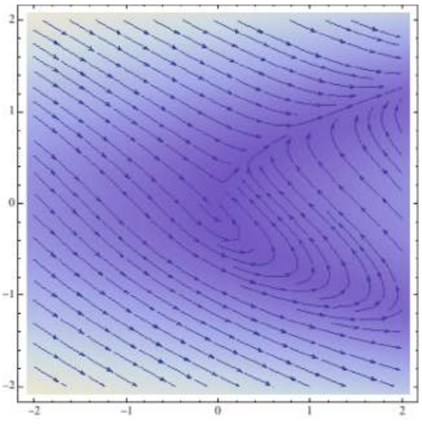


Рисунок 2.2.3

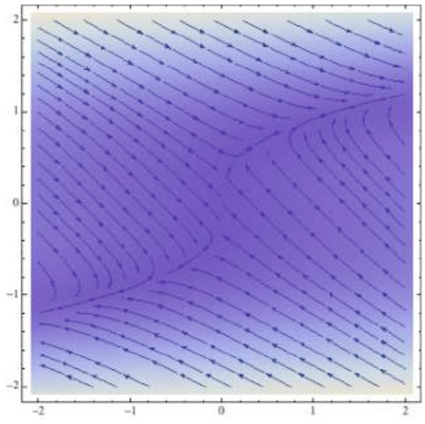


Рисунок 2.2.4

Слагаемые со степенью τ^{2n-1} имеются уже как в левой, так и в правой частях равенства (2.2.2.20). Приравнивая соответствующие коэффициенты с учетом уже полученных соотношений (2.2.2.22), (2.2.2.23), (2.2.2.24), можно найти:

$$a_{2n-1} = k_{2n-1} - nk_n\left(k_n - p_n\right) \qquad (2.2.2.25)$$

Пусть функция $f_1(\tau)$ является степенной: $f_1(\tau)=k_n\tau^n$, т. е. все остальные члены разложения, кроме первого, отсутствуют, а для $f_2(\tau)$ справедливо то же предположение (2.2.2.17). В этом случае, согласно (2.2.2.24), получается, что $a_n = k_n$, $a_{n+1} = a_{n+2} = ...a_{2n-2} = 0$, и первый после $a_n\tau^n$ ненулевой член разложения $\varepsilon(\tau)$ будет $a_{2n-1}\tau^{2n-1}$, где, согласно (2.2.2.25), $a_{2n-1} = -nk_n(k_n - p_n)$.

Таким образом, асимптотика неотрицательного решения уравнения (2.2.2.1) с нулевым начальным значением (2.2.2.2) при условии, что функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ могут быть представлены рядами (2.2.2.17), имеет вид:

$$\varepsilon(\tau) \approx k_n\tau^n + k_{n+1}\tau^{n+1} + ... + k_{2n-2}\tau^{2n-2} - \left[k_{2n-1} - nk_n\left(k_n - p_n\right)\right]\tau^{2n-1} + ...$$

Пусть функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ представлены одночленными степенными выражениями:

$$f_1(t) = k_n t^n,\ f_2(t) = p_n t^n.$$

В этом случае, согласно (2.2.2.24) и (2.2.2.25), поскольку $k_{n+1} = k_{n+2} = ... = k_{2n-2} = k_{2n-1} = ... = 0$, будет:

$$a_n = k_n,\ a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_{2n-2} = 0,\ a_{2n-1} = -nk_n(k_n - p_n),..$$

В таблице 1.2.1 для ряда значений n приведены первый и второй ненулевые члены разложения решения для $\varepsilon(t)$:

n	**Первый ненулевой член**	**Второй ненулевой член**
2	k_2t^2	$-2k_2(k_2 - p_2)t^3$
3	k_3t^3	$-3k_3(k_3 - p_3)t^5$
4	k_4t^4	$-4k_4(k_4 - p_4)t^7$
5	k_5t^5	$-5k_5(k_5 - p_5)t^9$
. .	. .	. .
n	k_nt^n	$-nk_n(k_n - p_n)t^{2n-1}$

Таблица 1.2.1

Таким образом, в рассматриваемом случае первый член разложения решения совпадает с первым членом разложения предельно медленного процесса. Для $n > 2$ после первого ненулевого члена ряда следующие за ним $n-2$ степени t пропускаются, и ненулевой коэффициент будет лишь при степени $2n-2$. Поскольку $k_n > p_n$, то второй ненулевой член разложения всегда будет отрицательным, т. е. при использовании первых двух членов разложения решение перемещается вниз от кривой предельно медленного процесса в сторону кривой предельно быстрого процесса. Таким образом, для численного решения задачи Коши, исходящей из нулевой точки, предлагается процедура, аналогичная описанной выше: выбирается некоторое малое число τ_1, и уравнение (2.2.2.1) решается с помощью стандартных подходов решения обыкновенных дифференциальных уравнений при начальном условии $\varepsilon(\tau_1) = k_n\left(\tau_1\right)^n$, где коэффициент и степень находятся из вида старшего члена разложения в ряд Тейлора функции предельно медленного процесса (2.2.2.17). Рис. 2.2.2 подтверждает тот факт, что кривая $\varepsilon(\tau) = k_n\left(\tau\right)^n$ (красная кривая на данном рисунке) в окрестности нуля достаточно близка к семейству кривых (синие кривые на данном рисунке), построенных для уравнения $\dot{\varepsilon} = \dfrac{2\tau^2 - \varepsilon}{\varepsilon - \tau^2}$ с начальными условиями вида $\varepsilon(0) = c$ (при разных значениях параметра c>0). Сам вид данного семейства кривых подтверждает предположение, что, независимо от выбора начального условия, все решения асимптотически стремятся к одному, исходящему из нулевой точки. Этот же факт подтверждают и фазовые портреты, построенные для $\dot{\varepsilon} = \dfrac{2\tau^2 - \varepsilon}{\varepsilon - \tau^2}$ и $\dot{\varepsilon} = \dfrac{2\tau^3 - \varepsilon}{\varepsilon - \tau^3}$ (рис. 2.2.3 и 2.2.4 соответственно, где по оси абсцисс отложена деформация, а по оси ординат — время).

2.2.3 Мягкое нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений

В качестве примера использования уравнения (2.2.2.5) рассмотрим процесс мягкого нагружения СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии из ненапряженного и недеформированного состояния. Пусть напряжение меняется со временем по линейному закону $\sigma = \gamma t$. В этом случае $\sigma = \beta\tau,\ \beta = \gamma / k$. Процесс описывается уравнением (2.2.2.5), где:

$$\gamma(\tau) = \rho_{D1}\varphi_1(\beta\tau) - \rho_{D2}\varphi_2(\beta\tau), \quad \lambda(\tau) = 1 + \beta\rho_{D2}\varphi_2{}'(\beta\tau)$$

Получив решение (2.2.2.5) при нулевых начальных условиях и найдя с помощью (2.2.2.3) зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$, можно в параметрическом виде получить диаграмму $\sigma - \varepsilon$ для мягкого нагружения СПФ с заданной постоянной скоростью роста напряжений. На рис. 2.2.5, 2.2.6 в графическом виде приведены некоторые полученные таким образом результаты. Для кривых на рис. 2.2.5: $\sigma_{01} = \sigma_{02} = 100$ МПа, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

Рассматривается случай, когда разница в диаграммах предельно медленного и предельно быстрого нагружения связана с разницей значений параметров ρ_{D1} и ρ_{D2} при совпадении значений остальных параметров. Считается, что $\rho_{D1} = 0.08$. Верхняя группа из трех кривых соответствует соотношению $\rho_{D2} = 0.9\rho_{D1}$, для средней группы — $\rho_{D2} = 0.5\rho_{D1}$, для нижней —

$\rho_{D2} = 0.1\rho_{D1}$. Для верхней кривой в каждой группе $\beta = 25000$, для средней — $\beta = 50000$, для нижней — $\beta = 75000$.

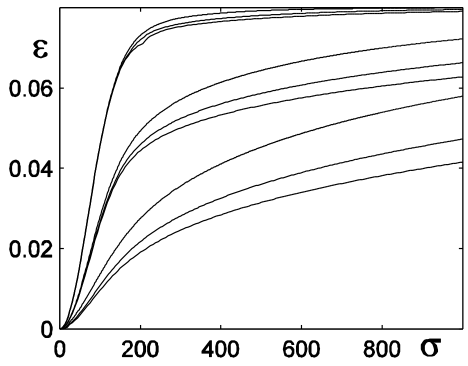


Рисунок 2.2.5

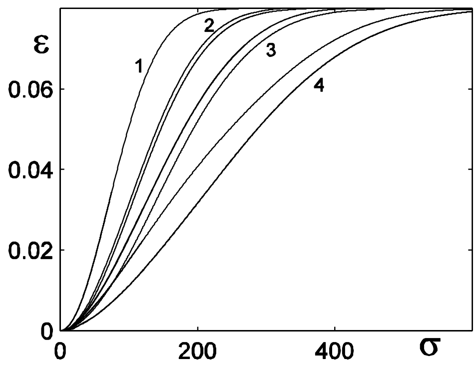


Рисунок 2.2.6

Рис. 2.2.6 относится к случаю, когда уравнения диаграмм предельно медленного и предельно быстрого нагружения отличаются значениями параметров σ_{0i}, а именно: $\sigma_{02} > \sigma_{01}$. Значения остальных параметров, в частности, предельных деформаций, совпадают: $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\rho_{D1} = \rho_{D2} = 0.08$. Все кривые построены для $\sigma_{01} = 100$ МПа. Линия 1 соответствует случаю $\sigma_{01} = \sigma_{02}$, она не меняется при изменении скорости нагружения и приведена для сравнения. Пара линий 2 соответствует случаю $\sigma_{02} = 150$МПа, линии 3 — $\sigma_{02} = 200$ МПа, линии 4 — $\sigma_{02} = 300$ МПа. Верхняя линия каждой пары соответствует малой скорости нагружения $\beta = 15000$, а нижняя — высокой скорости $\beta = 75000$.

Согласно данным рис. 2.2.5 и 2.2.6, с ростом скорости нагружения деформация, соответствующая одному и тому же напряжению, падает. Этот эффект усиливается с ростом разницы между диаграммами предельно быстрого и предельно медленного процессов. С ростом напряжений до достаточно больших величин деформация, независимо от скорости нагружения, стремится к одному и тому же максимальному значению, соответствующему предельно медленному процессу, даже если максимальные деформации для предельно медленных и предельно быстрых процессов существенно различаются. Стремление деформации ε к предельной величине происходит тем медленнее, чем больше разница между диаграммами предельно быстрого и предельно медленного процессов.

2.2.4 Зависимость формы диаграммы жесткого монотонного нагружения от скорости деформирования

Пусть некоторый фрагмент процесса происходит с постоянной скоростью изменения фазово-структурной деформации $\dot{\varepsilon} = V = const$. В данном параграфе удобно вернуться к дифференцированию по реальному t, а не безразмерному времени τ, т. е. рассматривать уравнение (2.2.1.2), согласно которому для этого случая получается:

$$\varepsilon = \frac{k\psi_1(\sigma,q) + V\psi_2(\sigma,q)}{k+V} \tag{2.2.4.1}$$

Следуя (2.2.4.1), при положительных значениях k и V диаграмма деформирования для заданной конечной скорости получается путем осреднения предельно медленной (2.1.1.2) и предельно быстрой (2.2.1.1) диаграмм с весами, равными соответственно k и V. В случае справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения [36,37] из (2.2.4.1) получается:

$$\varepsilon = q\frac{k\rho_{D1}\varphi_1(\sigma) + V\rho_{D2}\varphi_2(\sigma)}{k+V} \tag{2.2.4.2}$$

Согласно (2.2.4.2), с ростом V форма диаграммы нагружения будет меняться. Для больших значений V тем же значениям σ будут соответствовать меньшие значения ε, как это и наблюдается в экспериментах [26,27].

В разделе 2.1 описаны серьезные трудности, возникающие при описании диаграмм жесткого деформирования СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии с постоянной скоростью изменения фазово-структурных деформаций в рамках модели (2.1.1.4). Прежде всего, в начальной точке диаграммы нагружения (при $\sigma = 0, \quad \varepsilon = 0$), согласно (2.1.1.4), получается $\dot{\varepsilon} = 0$, т. е. нагружение с фиксированной ненулевой скоростью изменения фазово-структурной деформации в рамках модели (2.1.1.4) не может быть описано в принципе. Кроме того, в рамках модели (2.1.1.4) наблюдается достаточно резкое уменьшение предельной деформативности с ростом скорости деформации, так что при не слишком высоких скоростях СПФ должен был вести себя как хрупкое тело (деформативность обращалась в нуль), что явно не соответствует экспериментальным данным.

В рамках модели (2.2.1.2) обе эти проблемы легко решаются с помощью соотношения (2.2.4.2), где необходимо положить $q = 1$. Зависимость (2.2.4.2) при $\sigma = 0$ дает, в силу свойств функций $\varphi_k(\sigma)$ (2.2.1.5), $\varepsilon = 0$. Поэтому в рамках модели (2.2.1.2), в отличие от модели (2.1.1.4), возможно рассмотрение процесса, происходящего с постоянной скоростью деформации из недеформированного и ненапряженного состояния. Устремляя в (2.2.4.2) напряжение к бесконечности, в соответствии со свойствами функции распределения, для предельного значения деформации ε_{DV} при нагружении в режиме мартенситной неупругости с постоянным значением скорости неупругой деформации V получаем:

$$\varepsilon_{DV} = \frac{k\varepsilon_{D1} + V\varepsilon_{D2}}{k+V}$$

т. е. максимальное значение фазово-структурной деформации получается путем осреднения значений максимальных деформаций для предельно медленных и предельно быстрых процессов с весами, равными соответственно k и V. В частности, если максимальные значения деформации для предельно медленных и предельно быстрых процессов одинаковы ($\varepsilon_{D1} = \varepsilon_{D2} = \varepsilon_D$), то деформативность для процесса, происходящего с любой постоянной скоростью, не зависит от этой скорости и равна ε_D. Таким образом, обязательного уменьшения деформативности с ростом скорости деформации, характерного для модели (2.1.1.4), в рамках предлагаемой модели (2.2.1.2) не наблюдается.

2.2.5 *Моделирование релаксации напряжений*

Явление релаксации напряжений в СПФ экспериментально обнаружено в [66,67]. Установлено, что с увеличением скорости предварительного деформирования этот эффект усиливается. В [16] на основании экспериментальных данных высказывается сомнение в существовании этого явления в случае нагружения, характерного для сверхупругости. Описание релаксации напряжений в рамках простейшей модели реономного поведения СПФ (2.1.1.4) получено в разделе 2.1. Данный параграф посвящен описанию этого явления в рамках модели (2.2.1.6) при нагружении в режиме мартенситной неупругости.

Пусть образец из СПФ, находящийся в полностью мартенситном состоянии, нагружен до напряжения σ_{00} и приобрел полную деформацию ε_0^{tot}. Поскольку процесс происходил с конечной скоростью, то, согласно (2.2.1.3), приобретенная деформация должна находиться между значениями, получаемыми по диаграммам предельно медленного и предельно быстрого нагружения:

$$\rho_{D2}\varphi_2(\sigma_{00}) + \sigma_{00}/E \le \varepsilon_0^{tot} \le \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_{00}) + \sigma_{00}/E \qquad (2.2.5.1)$$

Далее, достигнутая полная деформация образца фиксируется $\varepsilon^{tot} = \varepsilon_0 = const, \dot{\varepsilon}^{tot} = 0$. Следует определить, как будут после этого с течением времени меняться напряжения (опыт по релаксации напряжений). Для этого случая из (2.2.1.4) получается:

$$\dot{\sigma} = -E\left[\frac{\rho_{D1}\varphi_1(\sigma) - \varepsilon_0 + \sigma/E}{\varepsilon_0 - \sigma/E - \rho_{D2}\varphi_2(q,\sigma)}\right] \qquad (2.2.5.2)$$

Уравнение (2.2.5.2) следует решать при начальном условии $\sigma(0) = \sigma_{00}$. При решении данной задачи для удовлетворения неравенства (2.2.5.1) начальное значение деформации ε_0 удобно задавать в виде:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{00}}{E} + \lambda\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_{00}/\sigma_0) + (1-\lambda)\rho_{D2}\varphi_2\left(\sigma_{00}/\sigma_0\right)$$

где значение $\lambda \in (0,1)$ определяет положение начальной деформации между точками, соответствующими предельно медленному ($\lambda = 1$) или предельно быстрому ($\lambda = 0$) процессам предварительного нагружения. Малые значения λ соответствуют быстрым процессам предварительного нагружения, а большие — медленным.

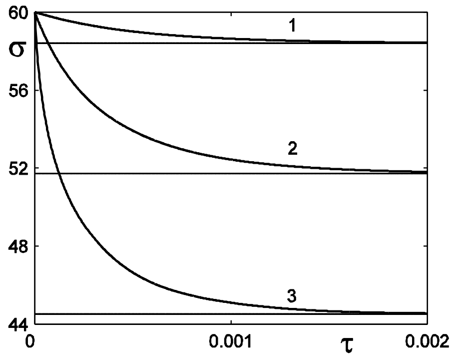


Рисунок 2.2.7

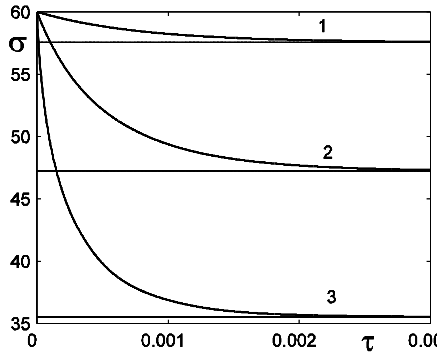


Рисунок 2.2.8

На рис. 2.2.7 и 2.2.8 изображены графики зависимости напряжений σ от приведенного времени τ для процесса релаксации. Все расчеты проведены для начального напряжения $\sigma_{00} = 60$ МПа, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$. Кривые 1 на обоих рисунках построены для $\lambda = 0.9$, т. е. для весьма медленных процессов предварительного нагружения, кривые 2 соответствуют $\lambda = 0.5$, кривые 3 — $\lambda = 0.1$, т. е. случаю весьма быстрых процессов предварительного нагружения. Горизонтальные прямые линии имеют уравнения $\sigma = \sigma_*$, где σ_* является корнем уравнения $\varepsilon_0 = \sigma_* / E + \rho_{D1}\varphi_1(\sigma_* / \sigma_{01})$. Напряжение σ_* соответствует фиксированной деформации каждого из трех процессов на диаграмме предельно медленного нагружения.

Рис. 2.2.7 соответствует случаю, когда $\sigma_{01} = \sigma_{02} = 120$МПа, а диаграммы предельно медленного и предельно быстрого нагружения отличаются лишь значениями предельных деформаций: $\rho_{D2} = 0.5\rho_{D1}$. Для рис. 2.2.8 $\rho_{D1} = \rho_{D2}$, а диаграммы предельно быстрых и предельно медленных процессов различаются за счет различий в величинах σ_{0i}: $\sigma_{01} = 100$ МПа, $\sigma_{02} = 200$ МПа. Как видно, рассматриваемая модель описывает явление релаксации напряжений в СПФ. Чем выше скорость предварительного нагружения, тем существеннее релаксируют напряжения, что соответствует экспериментальным данным [65,66]. В процессе релаксации напряжений точка, которая изображает напряженно-деформированное состояние, двигаясь вдоль оси напряжений в сторону их убывания, асимптотически приближается к диаграмме предельно медленного нагружения.

Сравнение рис. 2.2.7 и 2.2.8 с экспериментальными данными по релаксации напряжений в СПФ (рис 1.6 и 1.7) свидетельствует о том, что данная модель может существенно преувеличивать степень релаксации напряжений. В рассмотренных примерах это обстоятельство связано с тем, что взята слишком большая разница между деформациями предельно медленных и предельно быстрых процессов. Следует отметить, что в рамках данной модели, в отличие от рассматриваемых далее, эта разница никак не ограничивается.

2.2.6 Мягкое ступенчатое нагружение в режиме мартенситной неупругости

Рассматривается процесс контролируемого по напряжениям нагружения, состоящий из нескольких ступеней. Каждая ступень начинается с резкого (мгновенного) возрастания напряжения на величину $\Delta\sigma$, после чего напряжение становится равным σ и не меняется до начала следующего скачка. Материал находится в полностью мартенситном состоянии, так что $q = 1$. Непосредственно перед скачком напряжений фазово-структурная деформация равна ε_0. Величина ε_0 должна находиться в пределах:

$$\chi_2(\sigma - \Delta\sigma) < \varepsilon_0 < \chi_1(\sigma - \Delta\sigma) \qquad (2.2.6.1)$$

Здесь и ниже для сокращения записи используются обозначения $\rho_{Dk}\varphi_k(\sigma) = \chi_k(\sigma)$.

Дифференциальное уравнение (2.2.1.6) в данном случае имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\chi_1(\sigma) - \varepsilon}{\varepsilon - \chi_2(\sigma)} \right) \qquad (2.2.6.2)$$

Для интервала времени между двумя последовательными скачками напряжений $\sigma = const$, и решение (2.2.6.2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_{00} \qquad (2.2.6.3)$$

записывается в виде:

$$\left(\chi_2(\sigma) - \chi_1(\sigma)\right)\ln\left(\frac{\chi_1(\sigma) - \varepsilon}{\chi_1(\sigma) - \varepsilon_{00}} \right) - \left(\varepsilon - \varepsilon_{00}\right) = \tau \qquad (2.2.6.4)$$

Возникает вопрос о величине ε_{00}, входящей в начальное условие (2.2.6.3), что непосредственно связано с вопросом о наличии или отсутствии мгновенного скачка фазово-структурных деформаций, соответствующего скачку напряжений. Простейшее предположение состоит в том, что такой скачок отсутствует, и $\varepsilon_{00} = \varepsilon_0$. Это предположение не приводит к противоречию, если выполняются неравенства $\varepsilon_0 < \chi_1(\sigma)$, и:

$$\varepsilon_0 > \chi_2(\sigma) \qquad (2.2.6.5)$$

В этом случае правая часть (2.2.6.2) будет неотрицательной, и деформации после скачка напряжений будут возрастать со временем, как это можно наблюдать в экспериментах [26,27]. В силу возрастания деформации и неравенства (2.2.6.5) для ее начального значения знаменатель (2.2.6.2) ни для какого значения t не обратится в нуль. Скорость деформации в каждой точке процесса ограничена, скачки деформации отсутствуют.

При достаточно больших скачках напряжений $\Delta\sigma$ неравенство (2.2.6.5) может нарушиться. Причем, в силу (2.2.6.1), оно заведомо нарушится, если для данного значения $\Delta\sigma$ будет выполняться условие $\chi_2(\sigma) > \chi_1(\sigma - \Delta\sigma)$. Поскольку в силу правого из неравенств (2.2.6.1) и монотонного возрастания $\chi_1(\sigma)$ с ростом σ, справедливо неравенство $\varepsilon_0 < \chi_1(\sigma)$, то при выполнении обратного неравенства (2.2.6.5) правая часть (2.2.6.2) в некоторой окрестности начального значения ε_0 будет отрицательной, а деформация, в силу (2.2.6.2), убывает, в результате чего отрицательный знак правой части (2.2.6.2) и тенденция к убыванию ε сохранятся для всех последующих значений времени t. Такое поведение явно противоречит экспериментальным данным для никелида титана [26,27]. Поэтому в случае достаточно больших скачков напряжений, когда справедливо неравенство, обратное (2.2.6.5), величина деформации ε_0, достигнутая непосредственно перед скачком напряжений, не может фигурировать в качестве начального условия при решении уравнения (2.2.6.2). Должен существовать мгновенный скачок фазово-структурных деформаций, соответствующий скачку напряжений. Как отмечалось ранее, такие скачки наблюдаются в экспериментах [26,27].

Для того, чтобы установить величину мгновенного скачка деформаций, исследуем асимптотику поведения деформаций для малых значений переменной времени, прошедшего с момента скачка. Разлагая логарифмическую функцию из решения (2.2.6.4) в ряд по степеням малой величины $(\varepsilon - \varepsilon_{00})/(\chi_1 - \varepsilon_{00})$ и подставляя результат в (2.2.6.4), получаем:

$$(\chi_2 - \chi_1)\left[-\frac{\varepsilon - \varepsilon_{00}}{\chi_1 - \varepsilon_{00}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{00}}{\chi_1 - \varepsilon_{00}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{00}}{\chi_1 - \varepsilon_{00}}\right)^3 + \ldots\right] - (\varepsilon - \varepsilon_{00}) = \tau \qquad (2.2.6.6)$$

Здесь для сокращения записи аргумент σ у функций χ_1 и χ_2 опущен. Предположим сначала, что при получении асимптотики решения для малых t в (2.2.6.6) можно ограничиться первым слагаемым в разложении логарифмической функции. В результате из (2.2.6.6) получается:

$$(\varepsilon - \varepsilon_{00})\frac{\varepsilon_{00} - \chi_2}{\chi_1 - \varepsilon_{00}} = \tau \qquad (2.2.6.7)$$

Пусть:

$$\varepsilon_{00} \neq \chi_2(\sigma) \qquad (2.2.6.8)$$

В этом случае из (2.2.6.7) получаем искомое асимптотическое выражение для приращения деформаций со временем после скачка напряжений:

$$\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{00} = \tau\frac{\chi_1 - \varepsilon_{00}}{\varepsilon_{00} - \chi_2} \qquad (2.2.6.9)$$

Согласно (2.2.6.9), при $\varepsilon_{00} < \chi_2(\sigma)$ и сразу после скачка напряжений деформации будут убывать, что противоречит экспериментальным данным. Если же $\varepsilon_{00} > \chi_2(\sigma)$, то деформация возрастает, но асимптотически линейно по времени. При этом линейная асимптотика (2.2.6.9) не имеет места лишь в том случае, когда не выполняется условие (2.2.6.8), т. е. когда:

$$\varepsilon_{00} = \chi_2(\sigma) \qquad (2.2.6.10)$$

Для исследования этого случая необходимо в разложении (2.2.6.6), где вместо ε_{00} фигурирует величина χ_2, сохранить не один, а два первых члена. В результате линейные по ε слагаемые сокращаются, и получается, что $\delta\varepsilon = \sqrt{2\tau(\chi_1 - \chi_2)}$. Для улучшения согласования модельной кривой с экспериментальными данными [26,27] в процессе мягкого ступенчатого нагружения после скачка неупругой деформации предложено выбирать начальное условие именно в форме (2.2.6.10). Так, полученная в данном случае корневая асимптотика приращения деформации для малых τ хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями (результаты моделирования и сопоставления с экспериментальными данными будут представлены ниже). Таким образом, предлагается следующее определение для мгновенного скачка фазово-структурных деформаций, соответствующего скачку напряжений $\Delta\sigma$:

$$\Delta\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad \chi_2(\sigma) \le \varepsilon_0 \qquad (2.2.6.11)$$

$$\Delta\varepsilon = \chi_2(\sigma) - \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad \chi_2(\sigma) \ge \varepsilon_0 \qquad (2.2.6.12)$$

Необходимо отметить, что зависимости (2.2.6.11) и (2.2.6.12) являются непрерывными при переходе величины $\chi_2(\sigma)$ через значение ε_0. Легко видеть, что при выборе начального значения ε_{00}, в соответствии со сформулированным правилом, деформация ε при постоянном значении напряжения σ будет монотонно возрастать со временем, асимптотически стремясь при $t \to \infty$ к величине $\chi_1(\sigma)$.

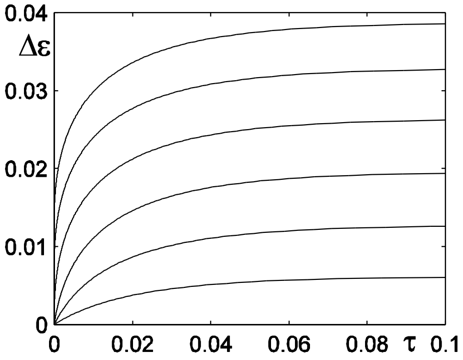
Решение (2.2.6.4) формально не содержит величины скачка напряжений $\Delta\sigma$. Тем не менее, его результат неявно зависит от скачка напряжений. В случае небольших скачков, когда выполняется неравенство (2.2.6.5), деформация со временем возрастает от значения $\varepsilon_0 < \chi_1(\sigma - \Delta\sigma)$ до асимптотического значения $\varepsilon_{\max} = \chi_1(\sigma)$. Таким образом, приращение деформации со временем $\varepsilon_{\max} - \varepsilon_0 > \chi_1(\sigma) - \chi_1(\sigma - \Delta\sigma)$ ограничено снизу величиной, явно возрастающей с ростом $\Delta\sigma$. В случае больших скачков напряжений и при выполнении неравенства, противоположного (2.2.6.5), приращение деформации со временем при постоянном напряжении σ, согласно решению (2.2.6.4) при $\varepsilon_{00} = \chi_2(\sigma)$, не зависит от величины $\Delta\sigma$, лишь бы эта величина превосходила соответствующее пороговое значение. В частности, максимальное асимптотическое значение прироста деформации со временем есть

$\chi_1(\sigma)-\chi_2(\sigma)$ и от $\Delta\sigma$ не зависит. Однако от скачка $\Delta\sigma$ зависит мгновенный скачок деформации $\chi_2(\sigma)-\varepsilon_0 > \chi_2(\sigma)-\chi_1(\sigma-\Delta\sigma)$.

Необходимо отметить, что при больших скачках напряжений, приводящих к мгновенным скачкам деформаций, правая часть дифференциального уравнения (2.2.6.2) в начальной точке интегрирования $\varepsilon_{00}=\chi_2(\sigma)$ имеет бесконечную особенность, что соответствует экспериментальным данным о чрезвычайно быстром росте деформаций сразу после скачка напряжений.

Рис. 2.2.9 и 2.2.10 иллюстрируют отмеченные выше особенности поведения деформаций после скачка напряжений. Для обоих графиков: $\alpha_1=\alpha_2=2$, $\rho_{D1}=0.08$, $\sigma_{01}=100$ МПа. Начальное значение напряжений $\sigma_0=\sigma-\Delta\sigma$ равно 100 МПа. Считается, что на предварительном этапе процесса материал достаточно долго выдерживался при напряжении σ_0, так что значение деформации в конце предварительного этапа равно $\varepsilon_0=\chi_1(\sigma_0)$. На обоих рисунках кривые снизу вверх соответствуют значениям $\Delta\sigma=10, 20, 30, 40, 50, 60$ МПа. Рис. 2.2.9 соответствует случаю, когда предельно медленные и предельно быстрые процессы различаются только по своей деформативности: $\rho_{D2}=0.04$, $\sigma_{02}=100$ МПа. Здесь для трех нижних кривых выполняется неравенство (2.2.6.5), поэтому они исходят из начала координат, а мгновенный скачок неупругой деформации равен нулю. Все три кривые имеют в окрестности нулевой точки линейные асимптотики, угол наклона которых растет с ростом величины $\Delta\sigma$. Для трех верхних кривых выполняется неравенство, противоположное (2.2.6.5). Здесь уже наблюдается скачок неупругих деформаций, величина которого тем выше, чем больше $\Delta\sigma$. Для трех нижних кривых величина деформации $\Delta\varepsilon_{\max}=\chi_1(\sigma)-\varepsilon_{00}$, которая может быть накоплена под действием постоянного напряжения, растет с возрастанием $\Delta\sigma$, но в случае трех верхних кривых величина $\Delta\varepsilon_{\max}$ от $\Delta\sigma$ не зависит. Во всех случаях при увеличении времени выдержки под постоянным напряжением скорость роста деформации падает, а значение деформации асимптотически стремится к величине $\chi_1(\sigma)$.

На рис. 2.2.10 аналогичные кривые построены для случая, когда предельная деформативность медленных и быстрых процессов одинакова: $\rho_{D2}=0.08$, но $\sigma_{02}=200$, т. е. эти два класса процессов различаются значениями σ_{0i}. Качественно наблюдается та же картина, однако для четвертой снизу кривой выполняется равенство $\chi_2(\sigma)=\varepsilon_0$. Поэтому скачок неупругих деформаций для этой кривой отсутствует, однако асимптотика в нуле является не линейной, а степенной с показателем 0.5.



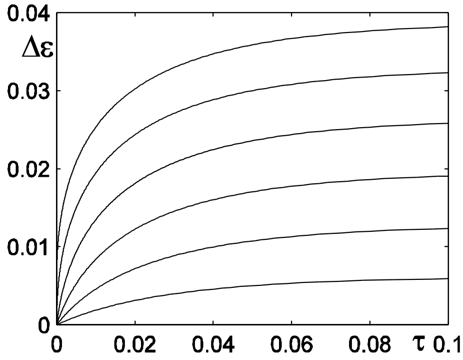
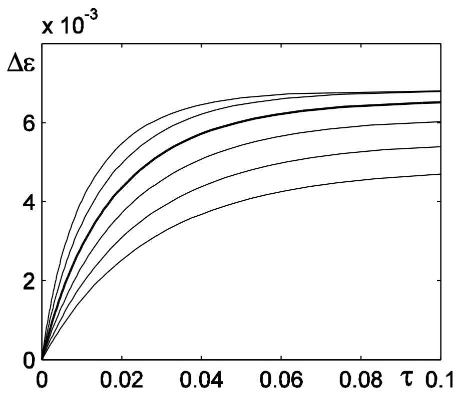


Рисунок 2.2.9

Рисунок 2.2.10

Приведенные на рис. 2.2.9 и 2.2.10 графики имели одинаковые значения σ_0, однако различались величиной $\Delta\sigma$. Данные рис. 2.2.11 и 2.2.12 позволяют анализировать ситуацию в том случае, когда скачки напряжений одинаковы $\Delta\sigma = 10$ МПа, но различны значения напряжений $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$ после скачка. Параметры модели такие же, что и для рис. 2.2.8. Для верхней кривой $\sigma = \sigma_{01} / \sqrt{2}$: данное значение соответствует точке перегиба на диаграммах предельно медленного и предельно быстрого нагружения, в которой касательный модуль минимален. Для каждой следующей сверху вниз кривой рис. 2.2.11 значение σ на 10 МПа больше, чем для предыдущей. Таким образом, второй сверху кривой точке с минимальным значением касательного модуля соответствует значение σ_0.

На рис. 2.2.12 для каждой следующей по номеру кривой величина σ не растет, а уменьшается на ту же величину 10 МПа, т. е. интервал (σ_0, σ) удаляется от области с наименьшим значением касательного модуля в сторону уменьшения напряжений. Согласно рис. 2.2.11 и 2.2.12, при фиксированном значении $\Delta\sigma$ эффект ограниченной ползучести уменьшается, когда интервал напряжения (σ_0, σ) удаляется от области с наименьшим значением касательного модуля как в сторону бóльших, так и в сторону меньших напряжений, что соответствует экспериментальным данным [26,27].



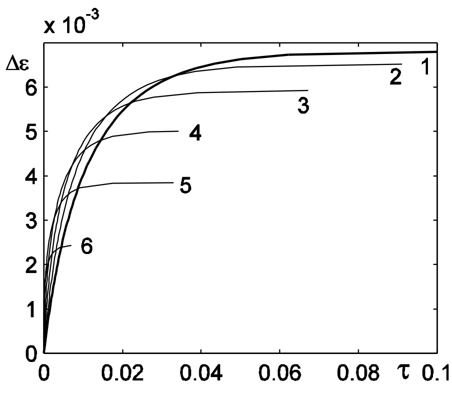


Рисунок 2.2.11

Рисунок 2.2.12

Таким образом, предложенная модель качественно правильно описывает влияние скорости нагружения на форму диаграмм мартенситной неупругости при мягком и жестком нагружении, явление релаксации напряжений и ограниченную ползучесть после скачкообразного изменения напряжений, включая наличие мгновенного скачка неупругих деформаций при достаточно больших скачках напряжений и характер роста деформаций после их скачкообразного изменения.

Также была предпринята попытка построения модельных кривых при использовании соотношения (2.2.6.4) с условием, задающим величину скачка мгновенных неупругих деформаций после скачкообразного увеличения напряжения (2.2.6.11), (2.2.6.12) методом МНК, и сравнение этих кривых с кривыми, построенными по определяющим соотношениям (2.1.1.4). На рис. 2.2.13 (при скачке напряжений с 275 МПа до 325 МПа) и на рис. 2.2.14 (при скачке напряжений с 325 МПа до 450 МПа) показаны результаты данного анализа (кривые с индексом 1 построены с использованием определяющего соотношения (2.1.1.4), с индексом 2 — соотношения (2.2.6.4), (2.2.6.11), (2.2.6.12)).

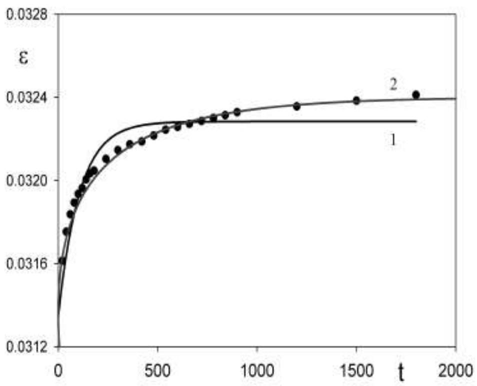


Рисунок 2.2.13

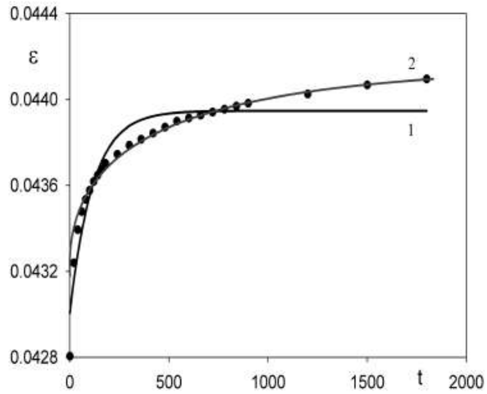


Рисунок 2.2.14

Результаты данного исследования подтверждают тот факт, что модель, описанная в этом разделе, значительно лучше модели, представленной в разделе 2.1, согласуется с экспериментальными данными мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости. Данный факт является основным достоинством данной модели.

2.2.7 Выводы

В данном разделе была предложена модель, опирающаяся на гипотезы о существовании классов предельно медленных и предельно быстрых процессов неупругого деформирования. Показано, что данная модель качественно правильно описывает все те процессы, которые были корректно описаны с помощью модели раздела 2.1. Но, помимо этого, данная модель позволяет описать как мгновенный скачок неупругой деформации после скачка напряжений в эксперименте по мягкому ступенчатому нагружению в режиме мартенситной неупругости, так и характер роста деформаций после скачка. Существенным недостатком данной модели следует признать нелинейность ее определяющих соотношений и возникающие математические трудности в вопросах исследования существования и единственности решений в нулевой точке.

2.3 Вязкопластическая модель

2.3.1 Формулировка модели

В данном разделе рассмотрение, как и ранее, ограничивается процессами, связанными со структурными превращениями в СПФ, находящихся в полностью мартенситном фазовом состоянии и не претерпевающих фазовые переходы. В рамках теории малых деформаций для одномерного случая рассматриваются определяющие соотношения вида:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f + \varepsilon^r \tag{2.3.1.1}$$

Здесь $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^f, \varepsilon^r$ — полные, упругие, мгновенные неупругие и реономные деформации, причем:

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \qquad \dot{\varepsilon}^f = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} \tag{2.3.1.2}$$

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left\langle \psi^s(\sigma) - \left(\varepsilon^f + \varepsilon^r\right)\right\rangle \tag{2.3.1.3}$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & при \quad x \geq 0 \\ 0 & при \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Наряду с уравнением (2.3.1.3) для сравнения будет рассматриваться такое же соотношение, но без оператора угловых скобок:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\psi^s(\sigma) - (\varepsilon^f + \varepsilon^r)\right) \tag{2.3.1.4}$$

В (2.3.1.2), (2.3.1.3) E — мгновенный упругий модуль, $H(\sigma)$ — касательный модуль для мгновенных неупругих деформаций, равный бесконечности при деформировании в упругой области, таким образом:

$$\varepsilon = \psi^s(\sigma) \tag{2.3.1.5}$$

— это диаграмма неупругого деформирования в предельно медленном процессе, включающая в себя как мгновенные неупругие, так и реономные деформации. При монотонном нагружении с любой скоростью для мгновенных неупругих деформации получаем:

$$\varepsilon^f = \int_0^\sigma \frac{ds}{H(s)} = \psi^f(\sigma) \tag{2.3.1.6}$$

Зависимость (2.3.1.6) определяет процесс предельно быстрого неупругого деформирования. Учитывая (2.3.1.4) и (2.3.1.6), можно записать:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\psi_1(\sigma) - \varepsilon^r\right) \tag{2.3.1.7}$$

где $\psi_1(\sigma) = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$ является разницей деформаций предельно медленного и предельно быстрого процессов.

В вязкопластических моделях оператор угловых скобок используется обычно для того, чтобы описать эффект упругой разгрузки. При этом входящие в определяющее соотношение зависимости $\psi^s(\sigma), \psi^f(\sigma)$ или $\psi_1(\sigma)$ могут считаться функциями своих аргументов, одинаковыми для нагружения и разгрузки.

Возникает вопрос, можно ли учесть эффект разгрузки при использовании соотношений типа (2.3.1.4) или (2.3.1.7) без оператора угловых скобок, считая, что зависимости (2.3.1.5) и (2.3.1.6) представляют собой функционалы истории изменения напряжений. В частности, для определения этих функционалов может быть применена система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [36,37,47,56], которая трактует процесс деформирования СПФ как склерономный. В результате применения этих моделей получается, что при разгрузке после монотонного нагружения как для предельно быстрых, так и для предельно медленных процессов неупругая деформация не меняется, а происходит упругая разгрузка с одним и тем же модулем E. В частности, при разгрузке $H(\sigma) = \infty$.

Считается, что деформация предельно медленного процесса не может быть меньше деформации соответствующего предельно быстрого процесса. Поэтому должно быть:

$$\psi^s(\sigma) \geq \psi^f(\sigma) \tag{2.3.1.8}$$

В полных деформациях определяющие соотношения (2.3.1.1), (2.3.1.2) и (2.3.1.3) записываются в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k\left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \tag{2.3.1.9}$$

Уравнение (2.3.1.7) переходит в уравнение модели (2.1.1.4) раздела 2.1 при замене $\psi_1(\sigma)$ на $\psi^s(\sigma)$. Таким образом, если функционалы $\psi^s(\sigma)$ и $\psi_1(\sigma)$ совпадают, то характер изменений реономной деформации в модели раздела 2.1 и в предлагаемой здесь модели идентичны.

В отличие от модели (2.1.1.4), предлагаемые здесь определяющие соотношения будут, так же как и определяющие соотношения модели (2.2.1.2) раздела 2.2, описывать мгновенные скачки неупругих деформаций, соответствующие скачкам напряжений. Действительно, уравнение (2.3.1.3) для суммарной неупругой деформации $\varepsilon^{ne} = \varepsilon^f + \varepsilon^r$ имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}^{ne} = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k\left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon^{ne} \right\rangle \tag{2.3.1.10}$$

В случае очень быстрого роста напряжений вторым слагаемым правой части (2.3.1.10) можно пренебречь по сравнению с первым. Тогда в результате интегрирования (2.3.1.10) получается явное выражение для мгновенного скачка неупругих деформаций, соответствующего скачку напряжений $\Delta\sigma$:

$$\Delta\varepsilon^{ne} = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} \frac{d\sigma}{H(\sigma)} = \psi^{f}(\sigma+\Delta\sigma) - \psi^{f}(\sigma)$$

Необходимо отметить, что асимптотика роста деформаций при постоянном напряжении для малых времен после скачка напряжения в рамках рассматриваемой модели будет линейной, как для модели (2.1.1.4), а не степенной, как в модели (2.2.1.2).

Для интегрирования (2.3.1.3) важен знак величины $\chi = \psi_1(\sigma) - \varepsilon^{reon}$. Дифференцируя выражение для χ по времени и заменяя в формуле для $\dot{\chi}$ величину $\dot{\varepsilon}^{reon}$ на $k\langle\chi\rangle$, получаем дифференциальное уравнение для χ: $\dot{\chi} + k\langle\chi\rangle = \psi_1{}'(\sigma)\dot{\sigma}$. Решение этого уравнения в случае, если $\chi \geq 0$ при нулевых начальных условиях, имеет вид:

$$\chi = \int\limits_{0}^{t} \psi_1{}'(\sigma(\tau))\,\dot{\sigma}(\tau)\exp\big(-k(t-\tau)\big)d\tau \qquad (2.3.1.11)$$

Согласно (2.3.1.11), достаточным условием неотрицательности χ является монотонность нагружения ($\dot{\sigma} \geq 0$) и неотрицательность производной:

$$\psi_1{}'(\sigma) \geq 0 \qquad (2.3.1.12)$$

При этих условиях уравнение (2.3.1.3) можно решать, не обращая внимания на угловые скобки. Естественным требованием для монотонного нагружения является неубывание функций $\psi^{s}(\sigma)$ и $\psi^{f}(\sigma)$, а также справедливость неравенства (2.3.1.8). Требование (2.3.1.12) является более ограничительным, поскольку, в силу (2.3.1.12), разница $\psi^{s}(\sigma) - \psi^{f}(\sigma)$ должна быть не просто неотрицательной — эта разница не должна убывать с ростом σ.

Ниже рассматривается вопрос об описании в рамках рассматриваемой модели различных процессов нагружения СПФ.

2.3.2 Мягкое монотонное нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений

Пусть напряжения возрастают с постоянной скоростью $\sigma = \lambda t$. Уравнение (2.3.1.7) для реономной деформации имеет вид $\dot{\varepsilon}^{r} = k\big(\psi_1(\lambda t) - \varepsilon^{r}\big)$.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\varepsilon^{r}(0) = 0$, после замены переменных $s = \lambda\tau$ записывается в виде:

$$\varepsilon^r = \frac{k}{\lambda}\int_0^{\sigma}\psi_1(s)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}(\sigma - s)\right]ds \tag{2.3.2.1}$$

При использовании уравнения (2.3.1.3) с угловыми скобками выражение (2.3.2.1) справедливо для случая $\varepsilon^r < \psi_1(\sigma)$, а при выполнении противоположного неравенства получаем $\varepsilon^r = const$.

Пусть:

$$\begin{aligned} \psi^s(\sigma) &= \rho_{D1}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\alpha}\right)\right), \\ \psi^f(\sigma) &= \rho_{D2}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\alpha}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.3.2.2}$$

Здесь $\rho_{D1}, \rho_{D2}, \sigma_1, \sigma_2, \alpha$ — параметры материала, причем величины ρ_{D1} и ρ_{D2} имеют смысл максимально возможных деформаций для предельно медленного и предельно быстрого процессов.

Из условия выполнения неравенства (2.3.1.8) для достаточно больших значений σ следует $\rho_{D1} \geq \rho_{D2}$ или:

$$\beta \leq 1 \tag{2.3.2.3}$$

где $\beta = \rho_{D2}/\rho_{D1}$. Неравенство (2.3.1.8) для достаточно малых значений σ путем разложения экспоненциальных функций в ряды с сохранением первых членов разложения можно привести к виду:

$$\beta\gamma^{\alpha} \leq 1 \tag{2.3.2.4}$$

где $\gamma = \sigma_1/\sigma_2$. Таким образом, совместное выполнение неравенств (2.3.2.3) и (2.3.2.4) является необходимым условием справедливости (2.3.1.8). Достаточность этих условий будет доказана ниже.

Выполнение условия (2.3.1.12) монотонного возрастания $\Delta\psi = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$ по σ, в силу $\psi^s(0) = \psi^f(0) = 0$, является достаточным для справедливости (2.3.1.8). Поскольку $\Delta\psi/\rho_{D1} = 1 - \exp(-s^{\alpha}) - \beta\left(1 - \exp(-(\gamma s)^{\alpha})\right)$, где $s = \sigma/\sigma_1$, то (2.3.1.12) приводит к неравенству:

$$\beta\gamma^{\alpha}\exp(s^{\alpha}(1-\gamma^{\alpha})) \leq 1 \tag{2.3.2.5}$$

Если $\gamma < 1$, то левая часть (2.3.2.5) стремится к бесконечности при $s \to \infty$ и, следовательно, неравенство (2.3.2.5) для всех s выполняться не может. Если:

$$\gamma \geq 1 \tag{2.3.2.6}$$

то левая часть (2.3.2.5) либо постоянна (при $\gamma = 1$), либо монотонно убывает с ростом s. В обоих случаях для справедливости (2.3.2.5) необходимо и достаточно выполнение этого неравенства для $s = 0$, т. е. выполнение (2.3.2.4). Таким образом, необходимое и достаточное условие неубывания разницы $\psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$ состоит в одновременном выполнении неравенств (2.3.2.4) и (2.3.2.6), что является одновременно достаточным условием неотрицательности этой разности.

Докажем теперь достаточность выполнения неравенств (2.3.2.3) и (2.3.2.4) для справедливости (2.3.1.8). Легко видеть, что, при условии положительности всех входящих в (2.3.2.2) величин, неравенство (2.3.1.8) эквивалентно:

$$\beta \le \frac{1 - \exp(-s^\alpha)}{1 - \exp(-(\gamma s)^\alpha)} \qquad (2.3.2.7)$$

Для $\gamma \ge 1$, при условии выполнения (2.3.2.4), требуемое неравенство уже доказано. Пусть $\gamma < 1$. В этом случае для правой части (2.3.2.7) будет справедливо неравенство:

$$\frac{1 - \exp(-s^\alpha)}{1 - \exp(-(\gamma s)^\alpha)} \ge 1 \qquad (2.3.2.8)$$

Действительно, (2.3.2.8) путем несложных преобразований можно привести к эквивалентному условию $\gamma \le 1$, которое, по предположению, выполняется. Но тогда из (2.3.2.8) и (2.3.2.3) следует справедливость требуемого неравенства (2.3.2.7). Таким образом, необходимым и достаточным условием справедливости неравенства (2.3.1.8) является одновременное выполнение (2.3.2.3) и (2.3.2.4).

Далее, в данном параграфе для простоты считается, что $\alpha = 1$. После введения безразмерной скорости нагружения $\Lambda = \lambda/(k\sigma_1)$, отнесенной к собственной скорости процесса k, относительной реономной деформации $e^r = \varepsilon^r / \rho_{D1}$ и относительной величины $\mathrm{X} = \chi / \rho_{D1}$, получаем:

$$\begin{gathered} e^r = (1-\beta)\left(1 - \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right)\right) + f_1(s) - f_2(s),\ \mathrm{X} = \Lambda\big(f_2(s) - \gamma f_1(s)\big), \\ f_1(s) = \beta\frac{\exp(-\gamma s) - \exp(-s/\Lambda)}{1 - \gamma\Lambda}, \quad f_2(s) = \frac{\exp(-s) - \exp(-s/\Lambda)}{1 - \Lambda} \end{gathered} \qquad (2.3.2.9)$$

В том случае, если $\gamma\Lambda = 1$, выражение для $f_1(s)$ с помощью предельного перехода приводится к виду: $\beta s \exp(-\gamma s)/\Lambda$. В случае, если $\Lambda = 1$, то с помощью предельного перехода получается $f_2(s) = s\exp(-s)$.

Суммарная неупругая деформация получается путем добавления к реономной деформации величины мгновенной неупругой деформации, относительное значение которой определяется по формуле $\varepsilon^f / \rho_{D1} = e^f = \beta(1 - \exp(-\gamma s))$. Относительная величина упругой деформации вычисляется по формуле:

$$e^e = \varepsilon^e / \rho_{D1} = s_1 s \qquad (2.3.2.10)$$

где $s_1 = \sigma_1 / (E\rho_{D1})$ — безразмерный параметр, значение которого далее принимается равным $s_1 = 0.067$, что соответствует значениям $\sigma_1 = 150$ МПа, $E = 28000$ МПа, $\rho_{D1} = 0.08$, характерным для никелида титана.

Ниже представлены графики зависимости относительной реономной деформации e^r от относительного напряжения s для различных значений параметров материала γ, β и различных значений безразмерной скорости нагружения Λ. Значения параметров материала выбирались таким образом, чтобы выполнялись достаточные условия неотрицательности $\psi_1(\sigma)$ (2.3.2.4) и (2.3.2.3).

Необходимо отметить, что если оба неравенства (2.3.2.4) и (2.3.2.3) превращаются в равенства, то $\psi^s(\sigma) \equiv \psi^f(\sigma)$, и модель вырождается. Поэтому одно из неравенств (2.3.2.4), (2.3.2.3) должно быть строгим.

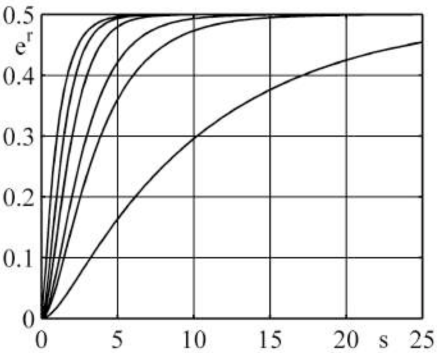


Рисунок 2.3.1

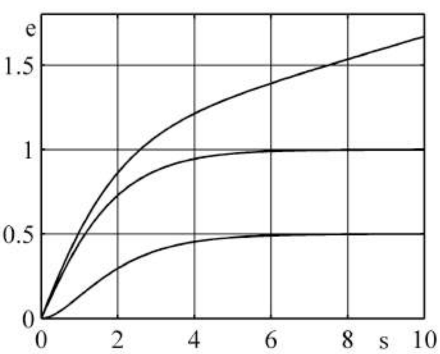


Рисунок 2.3.2

На рис. 2.3.1 приведены результаты расчета для случая $\gamma = 1$, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2$. При этом, согласно (2.3.2.4), должно быть $\beta < 1$. Приведенные результаты получены для $\beta = 0.5$. При этом выполняются достаточные условия (2.3.2.6), (2.3.2.4) положительности χ, и поэтому полученные решения справедливы как для уравнения (2.3.1.3), так и для (2.3.1.4). В соответствии с этим, реономная деформация монотонно возрастает. Кривые справа налево соответствуют значениям безразмерной скорости нагружения $\Lambda = 10,3,2,1,0.5,0.1$.

На рис. 2.3.2 для тех же значений $\gamma = 1, \beta = 0.5$ и одной скорости нагружения $\Lambda = 1$ приведены три диаграммы: нижняя — для реономной деформации, средняя — для общей неупругой деформации, верхняя — для полной деформации, включая упругую. На диаграмме реономной деформации явно видна точка перегиба, тогда как остальные кривые являются выпуклыми вверх.

На рис. 2.3.3 построены диаграммы нагружения для $\beta = 1$, т. е. $\rho_{D1} = \rho_{D2}$, когда разница между предельно быстрой и предельно медленной диаграммой получается за счет разницы между параметрами σ_1 и σ_2. В этом случае, согласно (2.3.2.4), должно быть $\gamma < 1$ и, следовательно, одно из достаточных условий неотрицательности χ, а именно (2.3.2.6), не может быть выполнено. Результаты получены по модели (2.3.1.4) без угловых скобок. Для модели (2.3.1.3) с угловыми скобками убывающая ветвь каждой кривой должна быть заменена горизонтальным отрезком, для которого $e^r = const$. Расчет проведен для $\gamma = 0.5$. Кривые сверху вниз по величинам максимумов соответствуют значениям $\Lambda = 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 10$. Здесь зависимость e^r от s заведомо должна быть немонотонной, поскольку она равна разнице между деформациями предельно медленного и предельно быстрого процессов: эта разница равна нулю в начальной точке диаграммы и стремится к нулю при $\sigma \to \infty$, а между этими положениями она должна быть положительна.

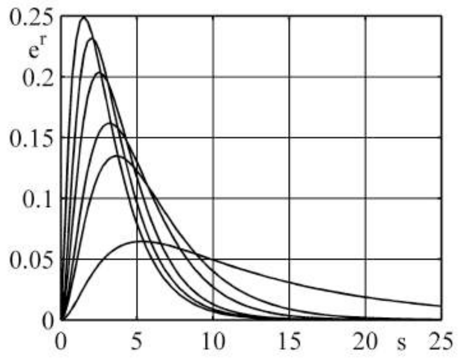


Рисунок 2.3.3

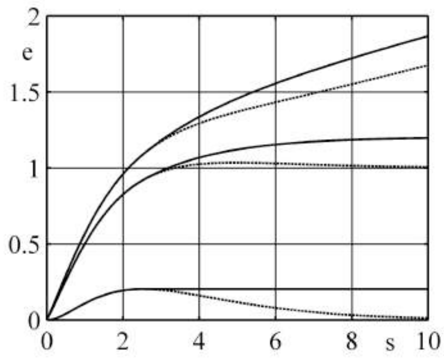


Рисунок 2.3.4

Этот факт иллюстрируется на рис. 2.3.4, где приведены диаграммы для тех же значений $\beta = 1, \gamma = 0.5$ и одного значения $\Lambda = 1$. Здесь построены три кривые, соответствующие (снизу вверх) реономной, суммарной неупругой и полной деформации. Штриховые линии соответствуют формуле (2.3.1.4), т. е. анализу без учета угловых скобок. Обращает на себя внимание тот факт, что в результате решения (2.3.1.4) немонотонно зависят от s не только реономные, но и суммарные неупругие деформации, которые убывают при возрастающих напряжениях, что вызывает недоумение. Что касается решения уравнения (2.3.1.3), то здесь вызывает удивление то, что значение суммарной неупругой деформации при $s \to \infty$ стремится к большей величине, чем ρ_{D1}. Непонятно, как деформация, накапливаемая в процессе, происходящем с конечной скоростью, может быть больше, чем максимальная деформация, которая может быть получена в предельно медленном процессе. Таким образом, при невыполнении условия (2.3.1.12) неадекватные результаты получаются как при использовании уравнения (2.3.1.3), так и при использовании (2.3.1.4). Если же условие (2.3.1.12) выполнено, то решения, как при наличии, так и при отсутствии угловых скобок, совпадают.

Рис. 2.3.5 соответствует случаю, когда $\beta = 0.7, \gamma = 0.5$, и решается уравнение (2.3.1.4). Кривые справа налево (по нижней части рис. 2.3.5) соответствуют скоростям нагружения $\Lambda = 10,5,3,2,1,0.5,0.1$. Здесь снова не выполняется условие (2.3.1.12), и поэтому для не слишком больших скоростей нагружения реономная деформация изменяется с ростом напряжения немонотонно. На рис. 2.3.6 построены диаграммы нагружения для предельного случая $\gamma\beta = 1$ и различных значений β, равных для кривых сверху вниз 0.1, 0.25, 0.5 и 0.8 для скорости нагружения $\Lambda = 5$. Здесь, в силу выполнения условия (2.3.1.12), реономная деформация монотонно возрастает.

Приведенные ниже графики позволяют сделать следующие выводы. Величина e^r при $s \to \infty$ всегда стремится к значению $(1-\beta)$. При этом $\varepsilon^r \to \rho_{D1} - \rho_{D2}$. В рассматриваемом процессе стремление s к бесконечности соответствует $t \to \infty$.

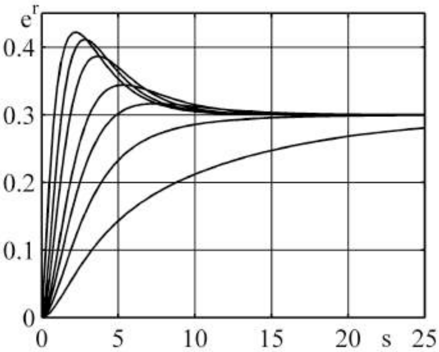


Рисунок 2.3.5

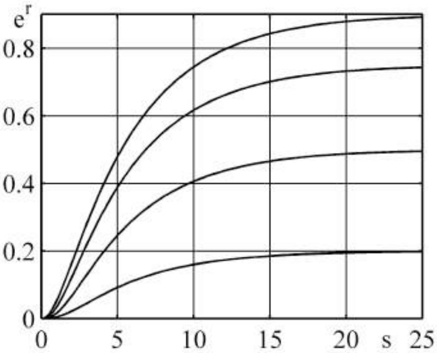


Рисунок 2.3.6

При этом $\varepsilon^f \to \rho_{D2}$, а $\varepsilon^r + \varepsilon^f \to \rho_{D1}$, т. е. суммарная неупругая деформация стремится к максимальной деформации предельно медленного процесса. В частности, при $\beta = 1$ реономная деформация стремится к нулю. Если же $\beta = 0$, т. е. предельно быстрый процесс является чисто упругим, то реономная деформация при значениях времени, стремящихся к бесконечности, стремится к ρ_{D1}. Чем меньше скорость нагружения, тем быстрее по шкале s происходит приближение к предельному значению.

В том случае, когда не выполнено условие неубывания функции $\psi_1(\sigma)$, к проблемным результатам приводит использование определяющего уравнения как с угловыми скобками, так и без них. В первом случае суммарная неупругая деформация может убывать с ростом напряжений. Во втором случае асимптотическое значение неупругой деформации превышает величину кристаллографической деформации фазового превращения. Такому типу поведения способствуют большие значения β (при $\beta = 1$ немонотонность наблюдается при любых допустимых значениях остальных параметров), уменьшение γ и падение скорости нагружения.

Поэтому рекомендуется применять данную модель только при соблюдении условий (2.3.1.8), (2.3.1.12) для материальных функций или, что то же самое, при соблюдении условий (2.3.2.4) и (2.3.2.6) для материальных параметров при использовании функций (2.3.2.2). В результате при задании величины $0 < \beta < 1$ определяется, какую часть максимальная деформация предельно быстрого процесса составляет от максимальной деформации предельно медленного процесса. После этого величину γ можно брать из интервала $1 \le \gamma \le 1/\beta^{1/\alpha}$, причем левая граница этого интервала соответствует одинаковой асимптотике диаграмм предельно медленного и предельно быстрого процессов для малых напряжений, а правая граница — максимально большой разнице этих асимптотик. Чем ближе величины β и α к единице, тем меньше возможная разница между диаграммами предельно медленного и предельно быстрого процессов, как для малых, так и для больших напряжений.

2.3.3 Диаграмма монотонного жесткого нагружения с постоянной скоростью

Пусть полная деформация меняется по закону $\varepsilon = \eta t, \quad \eta = const$. Для такого процесса уравнение для полных деформаций (2.3.1.9) записывается в виде:

$$\eta = \left(1/E + \psi^{f}{}'(\sigma)\right)\dot{\sigma} + k\left(\psi^{s}(\sigma) + \sigma/E - \eta t\right)$$

(считается, что угловые скобки отсутствуют). Переходя к дифференцированию по приведенному времени $\tau = kt$ и используя введенные ранее безразмерные переменные и безразмерную приведенную скорость деформирования $\mathrm{N} = \eta/\left(k\rho_{D1}\right)$, а также выражения (2.3.2.2), получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{\mathrm{N}(1+\tau) - ss_1 - 1 + \exp\left(-s^{\alpha}\right)}{s_1 + \alpha\beta\gamma\left(s\gamma\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(s\gamma\right)^{\alpha}\right)} \tag{2.3.3.1}$$

Учитывая, что $e = \mathrm{N}\tau$, из (2.3.3.1) получаем дифференциальное уравнение диаграммы жесткого нагружения в безразмерных координатах (e, s):

$$\frac{ds}{de} = \frac{\mathrm{N} + e - ss_1 - 1 + \exp\left(-s^{\alpha}\right)}{\mathrm{N}\left[s_1 + \alpha\beta\gamma\left(s\gamma\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(s\gamma\right)^{\alpha}\right)\right]} \tag{2.3.3.2}$$

которое должно решаться при нулевом начальном условии:

$$s(0) = 0 \tag{2.3.3.3}$$

Решение уравнения (2.3.3.2) в общем случае не выражается в квадратурах. Ниже приведены некоторые результаты численного решения задач (2.3.3.2) и (2.3.3.3). Следует отметить, что при нарушении условия (2.3.2.4) и выполнении неравенства (2.3.2.6) для некоторых диапазонов значений приведенной деформации e получается парадоксальный результат: при одном и том же значении s большему значению скорости деформирования соответствует большее значение деформации. Этот факт иллюстрируется на рис. 2.3.7, посчитанном для $\beta = 0.8, \gamma = 1.25, \alpha = 5, s_0 = 0.067$. Кривая 1 соответствует скорости $\Lambda = 0.1$, кривая 2 — $\Lambda = 1$, кривая 3 — $\Lambda = 10$, кривая 4 — $\Lambda = 100$. Рис. 2.3.8 построен для тех же данных, кроме значения γ, которое теперь равно 1. В результате условие (2.3.2.4) выполняется, и описанный выше парадокс не имеет места. Случай, когда выполнено условие (2.3.2.4), но не выполняется условие (2.3.2.6), представлен на рис. 2.3.9, который соответствует значениям параметров $\beta = \gamma = 0.8, \alpha = 5, s_0 = 0.067$. Кривая 1 соответствует $\Lambda = 0.1$, кривая 2 — $\Lambda = 0.5$, кривая 3 — $\Lambda = 1$, кривая 4 — $\Lambda = 10$, а кривая 5 — $\Lambda = 100$. Здесь для малых скоростей деформирования наблюдается, как и при мягком нагружении, убывание неупругих деформаций с ростом напряжений, что не соответствует экспериментальным данным.

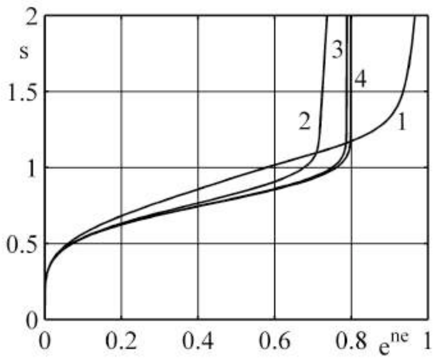


Рисунок 2.3.7

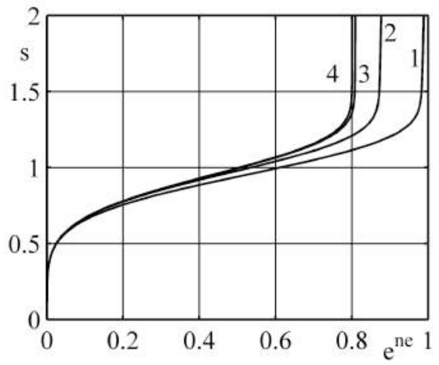


Рисунок 2.3.8

На рис. 2.3.10 приведены диаграммы жесткого нагружения СПФ, построенные для $\Lambda = 1$ и различных значений параметра α, которые указаны над каждой кривой. Значение β для всех кривых равно 0.8, а значения γ определены по формуле $\gamma = 1/\beta^{1/\alpha}$, т. е. являются максимально возможными, при которых выполняется неравенство (2.3.2.4). В данном случае парадоксальных эффектов не наблюдается.

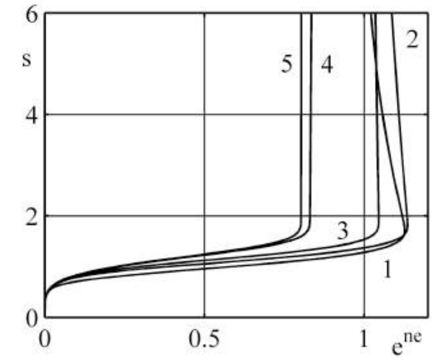


Рисунок 2.3.9

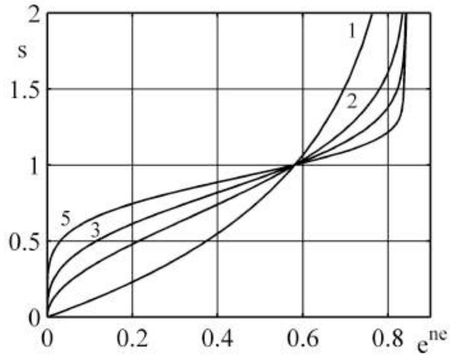


Рисунок 2.3.10

2.3.4 Случай разгрузки после монотонного нагружения

В данном параграфе исследуется вопрос о том, может ли рассматриваемая модель (2.3.1.4), не использующая оператор угловых скобок, описать эффект разгрузки. Пусть на участке $0 \le t \le t_1$ происходило монотонное нагружение, а на участке $t_1 \le t \le t_2$ — разгрузка. При этом предполагается, что при уменьшении напряжений упругая разгрузка происходит как для предельно медленных, так и для предельно быстрых процессов, причем с одним и тем же модулем, так что на этапе разгрузки $\psi_1(\sigma) = const, \psi_1'(\sigma) = 0$. Тогда для $t \in (t_1, t_2)$ из (2.3.1.11) получается:

$$\chi(t) = \exp(-k(t - t_1))\chi(t_1) \tag{2.3.4.1}$$

Для точки t_1 конца процесса монотонного нагружения при условии выполнения неравенства (2.3.1.12) будет $\chi(t_1) > 0$. В этом случае, согласно (2.3.4.1), в процессе разгрузки величина $\chi(t)$ будет убывать, асимптотически стремясь к нулю, но оставаясь положительной. Поэтому модели (2.3.1.3) и (2.3.1.4) дают одинаковые результаты, и в использовании угловых скобок нет необходимости. Для величины реономной деформации в процессе разгрузки, интегрируя уравнение $\dot{\varepsilon}^r = k\chi$, получаем:

$$\varepsilon^r(t) = \varepsilon^r(t_1) + \chi(t_1)(1 - \exp(-k(t - t_1))) \tag{2.3.4.2}$$

Согласно (2.3.4.2), в процессе разгрузки реономная деформация монотонно возрастает, асимптотически стремясь к величине $\varepsilon^r(t_1) + \chi(t_1)$ при $t \to \infty$. В относительных безразмерных переменных, согласно (2.3.4.2), диаграмма разгрузки принимает вид:

$$e^r(s) = e^r(s_0) + \mathrm{X}(s_0)(1 - \exp((s - s_0)/\Lambda_1)) \tag{2.3.4.3}$$

Здесь считается, что при разгрузке напряжения убывают от значения σ_0, достигнутого в предварительном монотонном нагружении, линейно со временем:

$$\sigma = \sigma_0 - \lambda_1(t - t_1), \quad s_0 = \sigma_0 / \sigma_1, \quad \Lambda_1 = \lambda_1 / (k\sigma_1)$$

где Λ_1 — безразмерная скорость разгрузки, отнесенная к собственной скорости реономного процесса k. Мгновенная неупругая деформация при разгрузке не меняется, а упругая деформация определяется по формуле (2.3.2.10).

Ниже приведены диаграммы нагружения и разгрузки в полных относительных деформациях e, полученные в соответствии с (2.3.2.9) и (2.3.4.3) для $\alpha = 1$ и различных значений параметров модели.

Рис. 2.3.11 соответствует случаю большой разницы между асимптотическими значениями деформации предельно быстрого и предельно медленного процессов — $\beta = 0.1$. Значение параметра γ выбрано таким, чтобы асимптотика диаграмм нагружения для малых напряжений была бы одинакова: $\gamma = 1/\beta = 10$.

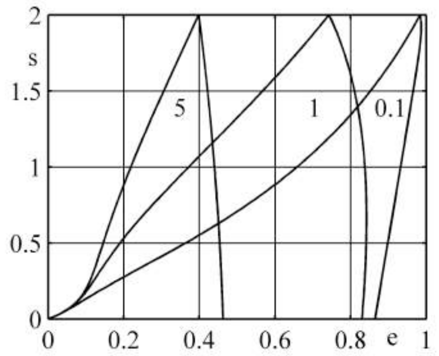


Рисунок 2.3.11

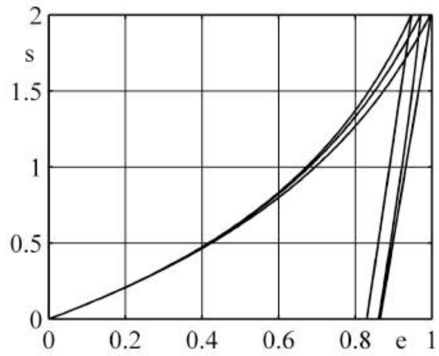


Рисунок 2.3.12

Относительные скорости нагружения и разгрузки считаются для каждой пары кривых одинаковыми и равными значениям, приведенным на графике. Как видно, при малых значениях β на всех кривых, соответствующих падению напряжений, сразу после начала разгрузки наблюдается участок роста деформаций, который для высоких скоростей продолжается до окончания кривой разгрузки, а для меньших скоростей сменяется участком падения деформаций. Рис. 2.3.12, напротив, соответствует малой разнице между асимптотическими значениями деформации предельно медленного и предельно быстрого процессов ($\beta = 0.9$, при том же условии $\gamma = 1/\beta$). Здесь для кривых слева направо относительные скорости равны тем же, что и на рис. 2.3.11, значениям $\Lambda = 5{,}1{,}0.1$. В этом случае разница между кривыми разгрузки для тех же, что и на рис. 2.3.11, значений скорости изменения напряжений значительно меньше, а падение полных деформаций начинается сразу после начала разгрузки при всех значениях Λ.

На рис. 2.3.13 и 2.3.14 изображены кривые нагружения (исходящие из начала координат линии), происходящего с относительной скоростью $\Lambda = 5$, а также диаграммы разгрузки, производимой для кривых слева направо при скоростях $\Lambda_1 = 50, 10, 5, 1, 0.1$. Оба рисунка соответствуют случаю $\beta\gamma = 1$. Рис. 2.3.13 построен для большой разницы максимальных деформаций предельно медленного и предельно быстрого процессов — $\beta = 0.1$. Интересно отметить, что в данном случае участки упругого деформирования наблюдаются на кривых разгрузки как для весьма больших ($\Lambda = 50$), так и для весьма малых ($\Lambda = 0.1$) скоростей падения напряжений (в последнем случае участок линейного падения деформации следует за начальным участком ее интенсивного роста). Для промежуточных значений скорости упругий участок на диаграмме разгрузки вообще отсутствует.

Рис. 2.3.14 соответствует противоположному случаю при $\beta = 0.9$, когда диаграммы предельно медленного и предельно быстрого процесса близки между собой. В данном случае небольшой начальный рост деформации сразу после начала разгрузки наблюдается лишь для весьма малой скорости разгрузки, которая в 50 раз меньше скорости предшествующего нагружения. Для той же, что и на рис. 2.3.13, совокупности скоростей разгрузки разница между диаграммами разгрузки существенно меньше, чем для малых значений β.

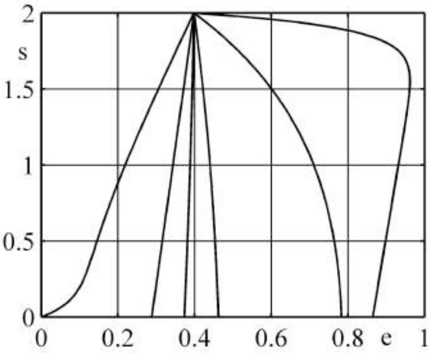


Рисунок 2.3.13

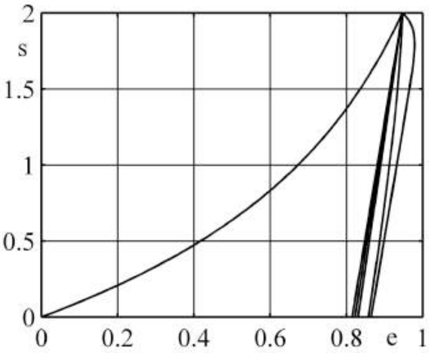


Рисунок 2.3.14

Экспериментальные данные по нагружению и разгрузке образцов из СПФ приведены в [68–69]. Диаграммы разгрузки действительно обладают небольшой выпуклостью, однако они лучше соответствуют рис. 2.3.12 и 2.3.14, а не рис. 2.3.11 и 2.3.13. Отсюда следует, что разница между асимптотическими значениями деформаций для больших напряжений в предельно медленных и предельно быстрых процессах должна быть небольшой. Эффект разгрузки может быть описан в рамках соотношения (2.3.1.4), в котором не используется оператор угловых скобок.

2.3.5 Релаксация напряжений

Пусть образец из СПФ, находящийся в состоянии хаотического мартенсита, нагружен в режиме мартенситной неупругости монотонно возрастающим напряжением до некоторого значения σ_0. Далее полная деформация фиксируется в виде: $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$. После этого, согласно экспериментальным данным [53], напряжения убывают со временем при фиксированной температуре и полной деформации. Скорость убывания σ велика сразу после фиксации деформаций, но уменьшается с течением времени. Примерно через 1 час после фиксации деформаций значение напряжений стабилизируется. Ниже рассматривается вопрос о моделировании явления релаксации напряжений в рамках предложенной модели.

Уравнение (2.3.1.9) для полных деформаций ε переписывается в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^f + k\left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \qquad (2.3.5.1)$$

Здесь:

$$\dot{\varepsilon}^f = \begin{cases} 1/H(\sigma) & при \quad \dot{\sigma} > 0 \\ 0 \quad при & \dot{\sigma} \le 0 \end{cases} \tag{2.3.5.2}$$

$$\psi^s(\sigma) = \begin{cases} \rho_{D1}\left(1 - \exp\left(-\left(\sigma/\sigma_1\right)^{\alpha}\right)\right) \quad при \quad \dot{\sigma} \ge 0 \\ \rho_{D1}\left(1 - \exp\left(-\left(\sigma_0/\sigma_1\right)^{\alpha}\right)\right) = const \quad при \quad \dot{\sigma} \le 0 \end{cases} \tag{2.3.5.3}$$

В формулах (2.3.5.2) и (2.3.5.3) учтено, что при разгрузке мгновенная неупругая деформация и неупругая деформация предельно медленного процесса не меняются, т. е. рассматривается вариант, когда зависимости $\psi^S(\sigma)$ и $\psi^f(\sigma)$ для активного нагружения и разгрузки различны.

После фиксации величины полной деформации получается, что $\dot{\varepsilon} = 0$. Фиксированное значение неупругой деформации ε_0^{ne} должно находиться между значениями деформации, соответствующими деформации предельно быстрого и предельно медленного процессов, то есть для напряжения σ_0: $\psi^f(\sigma_0) \le \varepsilon_0 \le \psi^s(\sigma_0)$. Величину ε_0 удобно представить в виде:

$$\varepsilon_0 = \lambda\psi^s(\sigma_0) + (1-\lambda)\psi^f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E}$$

где параметр λ принимает значения $0 \le \lambda \le 1$ и характеризует скорость предварительного нагружения. Значение $\lambda = 1$ соответствует предельно медленному процессу предварительного нагружения, а $\lambda = 0$ — предельно быстрому процессу.

В случае, если напряжение в рассматриваемом процессе уменьшается, то, полагая в (2.3.5.1) $\dot{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ и используя (2.3.5.2) и (2.3.5.3), для $\dot{\sigma} < 0$, получаем:

$$\dot{\sigma} = -k\left\langle E(1-\lambda)\left(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0)\right) + \sigma - \sigma_0 \right\rangle \tag{2.3.5.4}$$

Уравнение (2.3.5.4) следует решать при начальном условии:

$$\sigma(0) = \sigma_0 \tag{2.3.5.5}$$

В силу свойств оператора $\langle\ \rangle$, согласно (2.3.5.4), условие $\dot{\sigma} \le 0$ всегда будет выполнено, так что выбор уравнения (2.3.5.4) оправдан. Более того, если записать соответствующее уравнение для σ, исходя из предположения о том, что:

$$\dot{\sigma} > 0 \tag{2.3.5.6}$$

то в силу этого уравнения и с учетом $H(\sigma) > 0$, все равно получаем $\dot{\sigma} < 0$, так что уравнение, основанное на предположении (2.3.5.6), противоречит самому этому предположению.

В некоторой правой окрестности начальной точки (2.3.5.5) выражение, стоящее в угловых скобках (2.3.5.4), в силу неравенства (2.3.1.8), является неотрицательным. В этих условиях решение задачи (2.3.5.4) и (2.3.5.5) имеет вид:

$$\sigma = \sigma_0 - E(1-\lambda)\left(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0)\right)\left(1 - \exp(-kt)\right) \qquad (2.3.5.7)$$

Согласно (2.3.5.7), напряжение монотонно убывает от значения σ_0 при $t = 0$, асимптотически стремясь к значению:

$$\sigma^* = \sigma_0 - E(1-\lambda)\left(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0)\right) \qquad (2.3.5.8)$$

при $t \to \infty$. При этом величина, стоящая в фигурных скобках (2.3.5.4), монотонно стремится к нулю, оставаясь положительной для любого конечного значения t. Поэтому выбор знака выражения в угловых скобках (2.3.5.4) сделан правильно, и (2.3.5.7) действительно является решением (2.3.5.4). Знак угловых скобок в (2.3.5.4) при решении задачи о релаксации напряжений можно не учитывать.

Согласно (2.3.5.7) максимальное падение напряжений происходит при $\lambda = 0$, т. е. в случае предельно быстрого процесса предварительного нагружения. Предельное минимальное значение напряжений равно при этом:

$$\sigma^*_{\min} = \sigma_0 - E\left(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0)\right)$$

Естественно предположить при этом, что напряжения в процессе релаксации не могут стать отрицательными. Из этого условия следует неравенство:

$$\psi_1(\sigma_0) = \psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \le \frac{\sigma_0}{E} \qquad (2.3.5.9)$$

т. е. разница между деформациями предельно медленного и предельно быстрого процессов для данного значения напряжений не может превзойти упругую деформацию, соответствующую этому же напряжению. В экспериментах, описанных в [53], падение напряжений в процессе релаксации не превышало 10 % от исходного значения напряжений. Если считать, что наиболее быстрые реализованные в [53] процессы предварительного нагружения принадлежат к классу предельно быстрых процессов, то получается еще более жесткое ограничение: $\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \le 0.1\dfrac{\sigma_0}{E}$. Таким образом, модель адекватно описывает процесс релаксации напряжений в никелиде титана лишь при условии весьма малой разницы между деформациями предельно быстрых и предельно медленных процессов.

В том случае, если предварительное нагружение является предельно медленным, то $\lambda = 1$, и, согласно (2.3.5.8), релаксации напряжений вообще не происходит. Справедлива следующая графическая иллюстрация полученного решения: напряжение в процессе релаксации уменьшается до тех пор, пока точка, изображающая процесс, не снизится, двигаясь параллельно оси напряжений до линии упругой разгрузки, соответствующей предельно медленному процессу.

Если считать, что на диаграммах предельно медленных и предельно быстрых процессов упругой разгрузки нет, а процессы нагружения и процессы разгрузки происходят по одной и той же кривой, то падение напряжений происходит до достижения изображающей точкой диаграммы предельно медленного процесса, которая лежит в области положительных значений σ. В рамках такого предположения ограничений типа (2.3.5.9) не возникает, а сама величина падения напряжений становится существенно меньше.

2.3.6 Выводы

Установлено, что предлагаемый аналог вязкопластической модели качественно правильно описывает наблюдаемые в эксперименте реономные свойства СПФ при следующих условиях. Разница между деформациями предельно медленного и предельно быстрого процессов должна быть неотрицательной и не может убывать с ростом напряжения. В том случае, если для предельно медленных и предельно быстрых процессов учитывается явление упругой разгрузки, то для описания мягкого и жесткого монотонного нагружения, а также мягкого ступенчатого нагружения нет необходимости использовать неаналитический символ угловых скобок в правой части определяющего уравнения для реономной деформации (2.3.1.3). Для описания в рамках того же предположения процесса нагружения с последующей разгрузкой и явления релаксации напряжений в СПФ необходимо потребовать, чтобы разница между деформациями предельно медленных и предельно быстрых процессов была достаточно малой (для описания релаксации напряжений эта разница не должна превышать упругой деформации СПФ, соответствующей тому же значению напряжения).

2.4 Вязкопластическая модель со степенной зависимостью для скорости изменения реономной деформации

2.4.1 Формулировка модели

Модель, описанная в данном разделе, является логическим продолжением модели, исследованной в разделе 2.3, с добавлением степенной зависимости для скорости роста реономной деформации с показателем n ≥ 1. Основная задача, решаемая за счет перехода от линейной зависимости скорости изменения реономной компоненты деформации к степенной — это улучшение описания роста неупругих деформаций в процессе мягкого ступенчатого нагружения после скачка напряжений (так как модельные кривые, построенные по модели, рассмотренной в разделе 2.3, и реальные кривые плохо соотносятся друг с другом).

Основополагающим моментом вводимой модели является предположение, что в рамках теории малых деформаций для одномерного случая определяющие соотношения для СПФ имеют следующий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{ne}, \varepsilon^{ne} = \varepsilon^{f} + \varepsilon^{r} \qquad (2.4.1.1)$$

где $\varepsilon, \varepsilon^{e}, \varepsilon^{ne}, \varepsilon^{f}, \varepsilon^{r}$ — полные, упругие, полные неупругие, мгновенные неупругие и реономные деформации, которые задаются в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}^{e} = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \qquad \dot{\varepsilon}^{f} = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} \qquad (2.4.1.2)$$

$$\dot{\varepsilon}^{r} = k\left(\left\langle \psi^{s}(\sigma) - \varepsilon^{ne} \right\rangle\right)^{n} \qquad (2.4.1.3)$$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & при \quad x \geq 0 \\ 0 & при \quad x \leq 0 \end{cases}$$

В приведенных выше соотношениях n является параметром модели и, в общем случае, может быть любым действительным числом. В данном разделе ограничимся рассмотрением моделей с $n \geq 1$, которое принимает исключительно целочисленные значения.

Для упрощения вычислений и рассуждений в ряде случаев вместо соотношения (2.4.1.3) будет использоваться аналогичное соотношение без угловых скобок. Позже будут сформулированы ограничения, при соблюдении которых допустимо отбрасывание угловых скобок без изменения получаемого решения:

$$\dot{\varepsilon}^{r} = k\left(\psi^{s}(\sigma) - (\varepsilon^{f} + \varepsilon^{r})\right)^{n} \qquad (2.4.1.4)$$

В (2.4.1.2), (2.4.1.3) E — мгновенный упругий модуль, а $H(\sigma)$ — касательный модуль для мгновенных неупругих деформаций, равный бесконечности при разгрузке и последующем нагружении в упругой области для мгновенных процессов. Соотношение $\varepsilon = \psi^{s}(\sigma)$ задает диаграмму неупругого деформирования в процессе предельно медленного активного нагружения, включающую как мгновенные неупругие, так и реономные деформации (без учета упругих деформаций). Для удобства введем функцию, описывающую поведение мгновенных неупругих деформаций, которая может быть задана в активном процессе монотонного нагружения как:

$$\psi^f(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{ds}{H(s)} \qquad (2.4.1.5)$$

Учитывая соотношения (2.4.1.4) и (2.4.1.5), уравнение для реономной компоненты деформаций в случае отсутствия угловых скобок можно записать в виде:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\psi_1(\sigma) - \varepsilon^r\right)^n \qquad (2.4.1.6)$$

где $\psi_1(\sigma) = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$ — разница между неупругими деформациями предельно медленного и мгновенного процессов при заданном напряжении.

Исходя из экспериментально наблюдаемых данных, считается, что деформация предельно медленного процесса не может быть меньше деформации соответствующего мгновенного процесса. Исходя из этого, ограничение на функции предельных процессов формулируется естественным образом в виде:

$$\psi^s(\sigma) \geq \psi^f(\sigma) \qquad (2.4.1.7)$$

В полных деформациях, исходя из (2.4.1.1), (2.4.1.2) и (2.4.1.3), определяющие соотношения модели записываются в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k\left(\left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle\right)^n \qquad (2.4.1.8)$$

В случае отсутствия угловых скобок — в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k\left(\psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E}\right)^n \qquad (2.4.1.9)$$

Как было отмечено ранее, постулируется, что мгновенная неупругая деформация в упругой области для мгновенных процессов (и, в частности, при разгрузке) не меняется. Также, согласно существующим моделям склерономного поведения СПФ [56,71,72], при разгрузке, следующей за предельно медленным нагружением, полные неупругие деформации также не меняются, и разгрузка происходит по упругому сценарию с одним и тем же модулем E. Таким образом, считается, что после активного нагружения до некоторого максимального напряжения σ_0, деформация при разгрузке и последующем нагружении до σ_0 подчиняется уравнению:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k\left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle\right)^n$$

Модель со степенным параметром, так же как и модели, представленные ранее в разделах 2.2 и 2.3 (в отличие от модели, представленной в разделе 2.1), будет корректно описывать мгновенные скачки неупругой деформации при мгновенном изменении напряжения. Действительно, уравнение (2.4.1.3) для суммарной неупругой деформации $\varepsilon^{ne} = \varepsilon^{f} + \varepsilon^{r}$ имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}^{ne} = \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k\left(\left\langle \psi^{s}(\sigma) - \varepsilon^{ne} \right\rangle\right)^{n} \qquad (2.4.1.10)$$

В случае предельно быстрого роста напряжений и малой разницы между функциями предельно быстрого и медленного нагружения, вторым слагаемым правой части (2.4.1.10) — по сравнению с первым — можно пренебречь. Тогда естественным образом получается выражение для описания скачка неупругих деформаций при скачке напряжений $\Delta\sigma$:

$$\Delta\varepsilon^{ne} = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} \frac{d\sigma}{H(\sigma)} = \psi^{f}(\sigma + \Delta\sigma) - \psi^{f}(\sigma) \qquad (2.4.1.11)$$

Введение степенного параметра n позволяет добиться лучшей (по сравнению с моделью (2.3.1.9), представленной в разделе 2.3) согласованности экспериментальных данных и модельных кривых в процессе мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости после скачка неупругих деформаций.

Возвращаясь к вопросу о возможности записи определяющего соотношения без угловых скобок, можно действовать следующим образом: для начала ввести гипотезу о том, что содержимое угловых скобок неотрицательно, потом решить уравнение при данных ограничениях, а после этого доказать, что при подстановке полученного решения выражение в угловых скобках действительно неотрицательно, и гипотеза верна. Так, вводя $\chi = \psi_1(\sigma) - \varepsilon^{reon}$ и подставляя данное выражение в (2.4.1.3), выражая ε^{reon} через χ и $\psi_1(\sigma)$, получаем уравнение для χ: $\dot{\chi} + k\left(\left\langle \chi \right\rangle\right)^{n} = \psi_1'(\sigma)\dot{\sigma}$. Теперь в рамках гипотезы $\chi(t) \geq 0$ необходимо найти решение уравнения $\dot{\chi} + k\chi^{n} = \psi_1'(\sigma)\dot{\sigma}$. После нахождения решения необходимо доказать, что гипотеза верна, и что полученное решение $\chi(t)$ является неотрицательным в любой момент времени.

В отличие от уравнения при n = 1, при n > 1 в общем случае решение данного уравнения при неотрицательных начальных условиях не удается выразить через элементарные функции. Поэтому анализ знака решения $\chi(t)$ в случае n > 1 усложняется.

Для дальнейшего анализа в качестве $\psi^{s}(\sigma)$ и $\psi^{f}(\sigma)$ предполагается использовать функции Вейбулла (2.3.2.2) с целочисленным показателем α > 1 (которые при этом условии являются бесконечно дифференцируемыми):

$$\psi^s(\sigma)=\rho_{D1}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\alpha}\right)\right),$$

$$\psi^f(\sigma)=\rho_{D2}\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\sigma}{\sigma_2}\right)^{\alpha}\right)\right)$$

Здесь $\rho_{D1},\rho_{D2},\sigma_1,\sigma_2,\alpha$ — параметры материала, причем величины ρ_{D1} и ρ_{D2} обозначают максимально возможные деформации для предельно медленного и предельно быстрого процессов.

В случае монотонного активного нагружения, для которого напряжения задаются достаточно гладкой локально ограниченной функцией (например, нагружение с постоянной скоростью роста напряжений), задача Коши для определения $\chi(t)$ может быть записана в виде $\dot{\chi}=f(t)-k\chi^n$, $\chi(0)=\chi_0\geq 0$. Таким образом, при условиях $f(0)=f_0\geq 0; \psi_1'(\sigma)\geq 0$ и монотонном активном нагружении, получаем: $f(t)=\psi_1'(\sigma)\dot{\sigma}\geq 0$ в любой момент времени. Согласно теореме существования и единственности решения уравнения, так как при введенных выше ограничениях правая часть и ее частная производная по χ непрерывны по совокупности аргументов χ и t, решение задачи Коши существует и является единственным. Если предположить, что в некоторой точке T гипотеза $\chi(T)\geq 0$ нарушается, то из непрерывности $\chi(t)$ и начального условия $\chi(0)=\chi_0\geq 0$ следует, что в некоторой промежуточной точке t решение $\chi(t)$ достигает нулевого значения. Тогда в этой точке выполняется условие $\dot{\chi}=f(t)\geq 0$, при этом существует некоторая полуокрестность $[t,t+\varepsilon]$, в которой для любого $\tilde{t}\in[t,t+\varepsilon]$ правая часть уравнения при n > 1 больше или равна правой части уравнения при n = 1 (исходя из неубывания полученного в разделе 2.3 вида решения (2.3.1.11) задачи при n = 1). Это означает, что в любой точке $\tilde{t}\in[t,t+\varepsilon]$ производная решения при n > 1 будет больше или равна производной решения при n = 1, из чего, принимая во внимание (2.3.1.11), следует неравенство $0\leq\int_t^{\tilde{t}} f(x)e^{-k(\tilde{t}-x)}dx\leq\chi(\tilde{t})\leq\int_t^{\tilde{t}} f(x)dx$, которое доказывает справедливость выдвинутой гипотезы.

Если же условие $\psi_1'(\sigma)\geq 0$ нарушено, то при достижении функцией χ нуля в условиях процесса монотонного активного нагружения, ОДУ вырождается в $\dot{\chi}=f(t)<0$, что влечет за собой дальнейшее убывание решения в отрицательную область и нарушение гипотезы $\chi(t)\geq 0$.

Таким образом, в случае монотонного активного нагружения ($\dot{\sigma} \geq 0$) при сформулированных выше ограничениях, условие:

$$\psi_1'(\sigma) \geq 0, \qquad (2.4.1.12)$$

как и в модели, представленной в разделе 2.3 с n = 1, является необходимым и достаточным условием, при котором угловые скобки могут быть убраны без потери смысла (т. е. решения со скобками и без скобок при данных ограничениях в случае монотонного активного нагружения совпадают).

Если же функция изменения напряжений не является гладкой и непрерывной (например, для случая мягкого ступенчатого нагружения), но при этом остается локально ограниченной и может быть разбита на конечный набор участков, напряжение на каждом из которых задается гладкой и ограниченной функцией, то для каждого из этих участков применимо приведенное выше рассуждение. При этом, исходя из вида задачи Коши для реономной компоненты деформации, несложно увидеть, что разрывы локально ограниченной функции, задающей закон изменения напряжений, влияют лишь на гладкость решения, но не влияют на его непрерывность (при этом полная неупругая деформация будет разрывной, но величина разрыва может быть найдена по формуле (2.4.1.11)).

Выполнение условия (2.4.1.12) не следует из выполнения условия (2.4.1.7), так как условие (2.4.1.7) является более слабым (по той причине, что при заданном начальном условии $\psi^s(0) = \psi^f(0) = 0$ из неотрицательности производной разности можно сделать вывод о неотрицательности самой разности). В (2.4.1.12) требуется, чтобы производная функции предельно медленного процесса была не меньше производной функции предельно быстрого процесса.

Возвращаясь к виду функций предельно медленного и предельно быстрого склерономных процессов, заданных в виде функций Вейбулла (2.3.2.2), из условия выполнения неравенства (2.4.1.7) как более слабого условия по отношению к (2.4.1.12) получаем соотношение для максимальных деформаций предельно медленного и предельно быстрого процессов:

$$\beta = \frac{\rho_{D1}}{\rho_{D2}} \leq 1 \qquad (2.4.1.13)$$

Вводя новые обозначения, которые будут использоваться далее: $s = \sigma / \sigma_1$, $\gamma = \sigma_1 / \sigma_2$, и подставляя их в функцию $\psi_1(\sigma) = \psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma)$, предварительно поделив на нормировочный коэффициент, получаем: $\psi_1 / \rho_{D1} = 1 - \exp(-s^{\alpha}) - \beta\left(1 - \exp(-(\gamma s)^{\alpha}\right)$. Согласно (2.4.1.7), это выражение должно быть неотрицательным при всех значениях s, в том числе и при значениях s, близких к нулю, что достижимо только при:

$$\beta\gamma^{\alpha} \le 1 \qquad (2.4.1.14)$$

Далее будем пользоваться результатами раздела 2.3, в котором было доказано, что для выполнения условия (2.4.1.12) необходимо и достаточно совместного выполнения условий (2.4.1.13) и (2.4.1.14). Для целей дальнейшего моделирования в рамках данного раздела для простоты ограничимся рассмотрением определяющих соотношений с $\gamma = 1$. Тогда для выполнения (2.4.1.12) и наличия реономных деформаций достаточно выполнение условий:

$$\beta = \frac{\rho_{D1}}{\rho_{D2}} < 1,\ \gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 \qquad (2.4.1.15)$$

Условия (2.4.1.15) подразумевают отличие функций (2.3.2.2) исключительно на нормировочный множитель $\beta < 1$, характеризующий отношение значений максимальных неупругих деформаций, достигаемых при предельно медленном и предельно быстром нагружениях.

2.4.2 Мягкое ступенчатое нагружение в режиме мартенситной неупругости

Мягкое ступенчатое нагружение в режиме мартенситной неупругости — это процесс нагружения образца из СПФ, находящегося в полностью мартенситном состоянии (при q = 1), контролируемый по напряжениям, при котором на каждом этапе нагружения напряжение от некоторого начального значения σ_0 меняется скачком на заданную величину $\Delta\sigma$ до напряжения $\sigma = \Delta\sigma + \sigma_0$, после чего фиксируется и остается неизменным до момента полного затухания заметного роста деформаций (выхода кривой зависимости полных деформаций от времени на горизонтальную асимптоту). Согласно [27] в процессе мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости наблюдается скачок неупругих деформаций и их последующий рост, с течением времени напоминающий ограниченную ползучесть. Более того, после скачка напряжений деформации растут достаточно быстро, что недостаточно хорошо согласуется с кривыми, построенными по модели, представленной в разделе 2.3 (рис. 2.4.1, пунктирная линия). Для корректировки определяющих соотношений (2.3.1.9) модели, представленной в разделе 2.3, и получения лучшего согласования между модельной и экспериментальной кривыми для неупругих деформаций сразу после скачка напряжений при моделировании процесса было предложено ввести степенную зависимость для определения скорости реономной деформации. Скачок неупругих деформаций вычисляется в соответствии с (2.4.1.11).

Определяющее соотношение для моделирования развития реономных деформаций после скачка, согласно (2.4.1.4), можно записать в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\left\langle \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma + \sigma_0) - \varepsilon^r \right\rangle\right)^n, \varepsilon^r(t_0) = \varepsilon_0^r \qquad (2.4.2.1)$$

Здесь ε_0^r — реономная деформация, накопленная в предварительном (предшествующем скачку напряжений) процессе нагружения.

Существует альтернативная форма записи определяющих соотношений, характеризующих развитие реономной деформации после скачка напряжений. Накопленная реономная деформация в предшествующих скачку процессах может быть учтена, если второе из уравнений (2.4.1.1) записать в виде:

$$\varepsilon^{ne} = \varepsilon^f + \varepsilon^r + \varepsilon_0^r \qquad (2.4.2.2)$$

Тогда после подстановки (2.4.2.2) в (2.4.1.3) получаем:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\left\langle \psi^s(\Delta\sigma+\sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma+\sigma_0) - \varepsilon_0^r - \varepsilon^r \right\rangle\right)^n, \varepsilon^r(t_0) = 0 \qquad (2.4.2.3)$$

Видим, что постановка задачи для определения полных деформаций с реономной компонентой в виде (2.4.2.1) эквивалентна постановке задачи для полных деформаций с реономной компонентой в виде (2.4.2.3), так как решением этих задач в полных деформациях при n > 1 является функция:

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma+\sigma_0}{E} + \psi^s(\Delta\sigma+\sigma_0) - \\ - \frac{1}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_0) + \dfrac{1}{(\psi^s(\Delta\sigma+\sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma+\sigma_0) - \varepsilon_0^r)^{n-1}}}} \qquad (2.4.2.4)$$

При n = 1 решение обеих задач также записывается в общем виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma+\sigma_0}{E} + \psi^s(\Delta\sigma+\sigma_0) - (\psi^s(\Delta\sigma+\sigma_0) - \psi^f(\Delta\sigma+\sigma_0) - \varepsilon_0^r)e^{-k(t-t_0)} \qquad (2.4.2.5)$$

Таким образом, модель допускает некоторую произвольность в виде учета накопленной реономной деформации на предварительных стадиях процесса, которая в итоге не влияет на конечное решение в полных деформациях. Без ограничения общности далее будем придерживаться вариантов (2.4.1.1) и (2.4.2.1).

Переходя к вопросу о калибровке модели по экспериментальным данным для процесса мягкого ступенчатого нагружения при скачкообразном увеличении напряжений с уровня σ_0 на $\Delta\sigma$ до уровня $\Delta\sigma+\sigma_0$, исходя из ограничения (2.4.1.15) и характерных для СПФ значений параметров E = 28 000 МПа, $\rho_{D1} = 0.08$, а также заданного n, для калибровки остается три свободных параметра, а именно: k, β и σ_1 (при этом параметр α для функций (2.3.2.2.) берем равным 2, что также согласуется с экспериментальными наблюдениями). Идентификацию параметров модели (калибровку) будем производить методом наименьших квадратов с функцией потерь, равной сумме квадратов разности между экспериментальными и модельными значениями полных деформаций в моменты, для которых проводились экспериментальные измерения. Для улучшения сходимости и нахождения глобального минимума функции потерь оценим стартовые значения калибруемых параметров следующим образом:

1) Предположим, что последняя по времени экспериментальная точка (соответствующая времени T = 1800 с) вышла на асимптоту, и далее, с течением времени, при фиксированном напряжении полные деформации будут изменяться настолько незначительно, что этими изменениями можно пренебречь. Исходя из данного предположения, можно записать следующее соотношение: $\varepsilon(T) = (\Delta\sigma + \sigma_0)/E + \psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0)$, где неизвестным является только параметр $\sigma_1 > 0$, стоящий в знаменателе экспоненциальной функции (2.3.2.2).

2) Предположим, что до скачка напряжений образец предельно долго находился на уровне напряжений σ_0 и, согласно определяющим соотношениям модели, приобрел реономную деформацию $\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) = (1-\beta)\psi^s(\sigma_0)$. Исходя из этого, по экспериментальному значению деформации в самой ранней экспериментальной точке t_0 мгновенно после скачка напряжений, записывая уравнение для полных деформаций на момент времени t_0 $\varepsilon(t_0) = \dfrac{\Delta\sigma + \sigma_0}{E} + \beta\psi^s(\Delta\sigma + \sigma_0) + (1-\beta)\psi^s(\sigma_0)$ и подставляя σ_1 (найденное на шаге 1), находим β.

3) Для оценки коэффициента k можно воспользоваться уравнениями (2.4.2.4) при n > 1 и (2.4.2.5) при n = 1, записанного для некоторого промежуточного момента t, для которого экспериментальное значение полной деформации — ближайшее к уровню средней деформации, задаваемой в виде $(\varepsilon(T) - \varepsilon(t_0))/2$.

В итоге, используя МНК вкупе с описанным выше методом выбора начальных значений оцениваемых параметров, были получены следующие значения этих параметров (вместе с уже известными значениями E = 28 000 МПа, $\rho_{D1} = 0.08$ и $\alpha = 2$):

Эксперимент 1: *скачкообразное изменение напряжений от 275 МПа до 325 МПа.*

n = 3: k = $7.13*10^3$ 1/сек, $\beta = 0.8328$, σ_1 = 543.52 МПа, $\gamma = 1$ (2.4.2.6)

n = 1: k = 0.0047 1/сек, $\beta = 0.8886$, σ_1 = 546.94 МПа, $\gamma = 1$. (2.4.2.7)

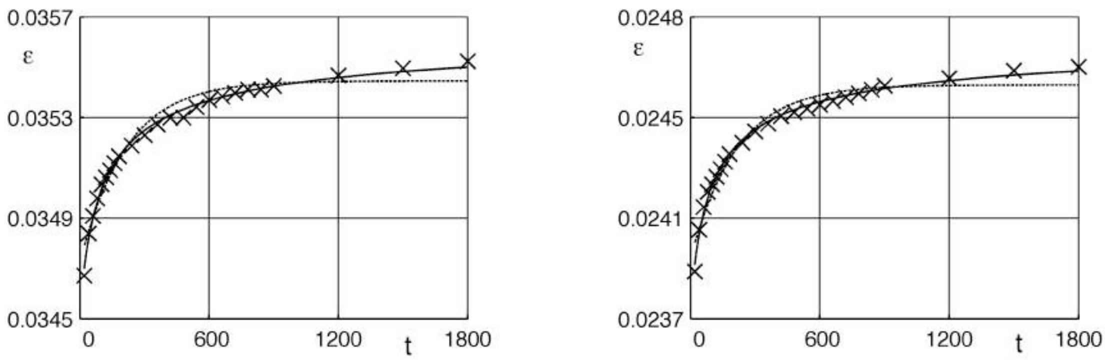
Эксперимент 2: *скачкообразное изменение напряжений от 175 МПа до 225 МПа.*

n = 3: k = $10*10^3$ 1/сек, $\beta = 0.8567$, σ_1 = 464.11 МПа, $\gamma = 1$ (2.4.2.8)

n = 1: k = 0.0047 1/сек, $\beta = 0.9031$, σ_1 = 467.52 МПа, $\gamma = 1$. (2.4.2.9)

На рис. 2.4.1 приведены экспериментальные данные зависимости полной деформации ε от времени t [с] (крестообразные символы) совместно с кривыми — результатами моделирования по откалиброванной методом МНК модели (сплошная линия соответствует модельной кривой, построенной для n = 3, пунктирная линия — для n = 1). На графиках видно, что модельные кривые, построенные при n = 3, значительно лучше кривых с n = 1 аппроксимируют экспериментальные данные, поэтому введение дополнительного степенного параметра в модель раздела 2.3 обоснованно и дает явное улучшение в описании процесса мягкого ступенчатого нагружения после скачка неупругих деформаций (т. е. исправляет единственный существенный недостаток модели (2.3.1.9), представленной в разделе 2.3).

Следует отметить, что значение n = 3 было выбрано исходя из того соображения, что для удобства исследования рассматривались исключительно целочисленные значения параметра n, при этом минимальное целочисленное значение параметра n, для которого наблюдается правильная форма кривой, достаточно хорошо согласующаяся с экспериментальными данными, равно трем. Более того, увеличение степени n дает незначительное уменьшение функции потерь, при этом стабильность решения сильно ухудшается. По этой причине предпочтение в выборе значения параметра n было отдано n = 3.



Скачкообразный рост напряжений от 275 МПа до 325 МПа.

Скачкообразный рост напряжений от 175 МПа до 225 МПа.

Рисунок 2.4.1

Для всех наборов значений откалиброванных параметров была дополнительно проведена проверка соблюдения условий (2.4.1.12): разность производных функций предельно быстрого и медленного процессов для всех наборов является положительной, поэтому при моделировании процессов активного нагружения с помощью откалиброванной модели угловые скобки можно опускать без изменения решения.

В дальнейшем без ограничения общности чаще будут использоваться модели при n = 3 и n = 1 с параметрами (2.4.2.6) и (2.4.2.7) соответственно (так как диаграммы, построенные с использованием параметров (2.4.2.8), (2.4.2.9), имеют такой же качественный вид и несущественно отличаются от диаграмм, построенных с использованием (2.4.2.6) и (2.4.2.7)). Моделирование будет производиться по откалиброванным определяющим соотношениям в размерном виде (для лучшего понимания характеристик предсказываемых моделью реальных процессов).

2.4.3 Мягкое монотонное нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений

Мягкое нагружение с фиксированной скоростью изменения напряжений — это контролируемый по напряжениям процесс, в котором напряжение изменяется по закону $\sigma = \lambda t$. Подставляя данное соотношение в уравнение для реономной деформации (2.4.1.6) и в уравнение для полной деформации (2.4.1.9), получаем следующую пару определяющих соотношений:

$$\dot{\varepsilon}^r = k\left(\psi_1(\lambda t) - \varepsilon^r\right)^n \tag{2.4.3.1}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\lambda}{E} + \frac{\lambda}{H(\lambda t)} + k\left(\psi^s(\lambda t) - \varepsilon + \frac{\lambda t}{E}\right)^n \tag{2.4.3.2}$$

В общем случае в квадратурах не удается найти решение уравнений (2.4.3.1) и (2.4.3.2), удовлетворяющее условию $\varepsilon^r(0) = 0$ ($\varepsilon(0) = 0$ соответственно), поэтому дальнейшее исследование будет проводиться численно.

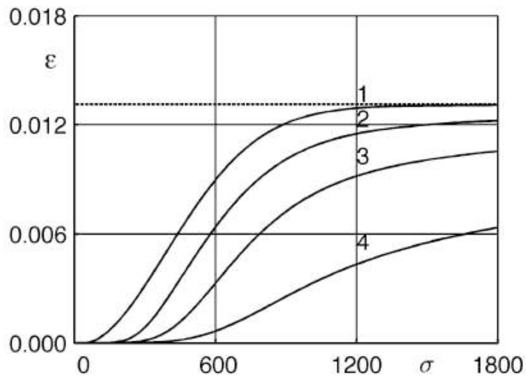
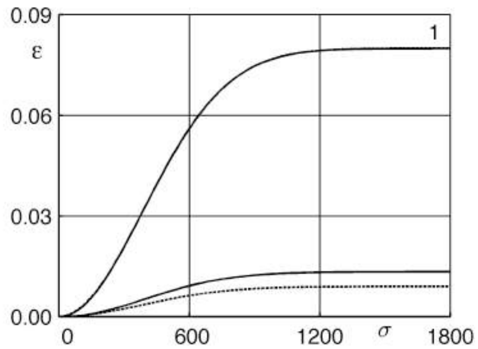


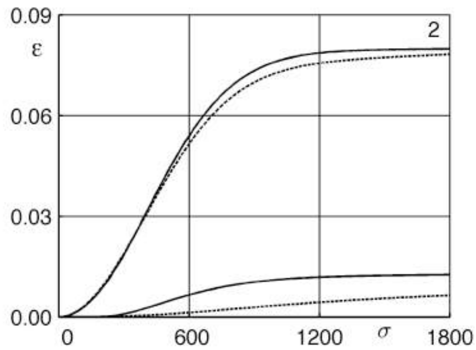
Рисунок 2.4.2

На рис. 2.4.2 представлены результаты моделирования развития реономной деформации ε^r от напряжения σ [МПа] в процессе мягкого монотонного нагружения с заданной скоростью изменения напряжений по откалиброванной модели с параметрами (2.4.2.6). Кривые построены для скоростей изменения нагружения λ, равных 0.01 МПа/с (кривая 1), 10 МПа/с (кривая 2), 100 МПа/с (кривая 3), 1000 МПа/с (кривая 4) соответственно. Как и ожидалось, можно увидеть, что при увеличении скорости нагружения заданному уровню напряжений при больших скоростям нагружения соответствуют меньшие значения реономной деформации, что согласуется с экспериментальными наблюдениями. Также видно, что все кривые стремятся к одной асимптоте (пунктирная линия), располагающейся на уровне $(1-\beta)\rho_{D1}$ (что для параметров модели (2.4.2.6) соответствует уровню деформаций = 0.0134).

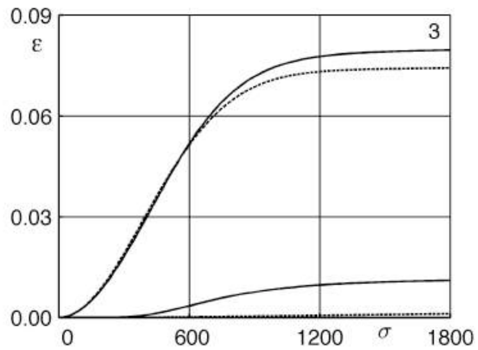
На рис. 2.4.3 приведено сравнение результатов моделирования зависимости полной неупругой и реономной деформации $\varepsilon^r, \varepsilon^{ne}$ от напряжения σ [МПа] для модели с $n = 3$ (с параметрами (2.4.2.6), сплошная линия) и n = 1 (с параметрами (2.4.2.7), пунктирная линия) для скоростей нагружения λ, равных 0.01 МПа/с (кривая 1), 10 МПа/с (кривая 2), 100 МПа/с (кривая 3), 1000 МПа/с (кривая 4). Так как β в (2.4.2.7) выше, чем в (2.4.2.6), то асимптота для реономных деформаций в модели при n = 1 будет ниже, чем при n = 3. Тем не менее, итоговые неупругие деформации в обоих случаях выходят на один уровень. Из диаграмм на рис. 2.4.3 видно, что при низких скоростях нагружения (0.01 МПа/с) полные неупругие деформации практически неразличимы для разных значений n. С ростом скорости нагружения (10 и 100 МПа/с) модельные кривые, характеризующие полные деформации, перестают совпадать, и становится очевидным, что при n = 3 полная деформация растет быстрее. При дальнейшем росте скорости нагружения тенденция меняется, кривые снова начинают сближаться, и при сверхвысоких скоростях нагружения рост деформаций при n = 1 становится более быстрым, чем при n = 3.



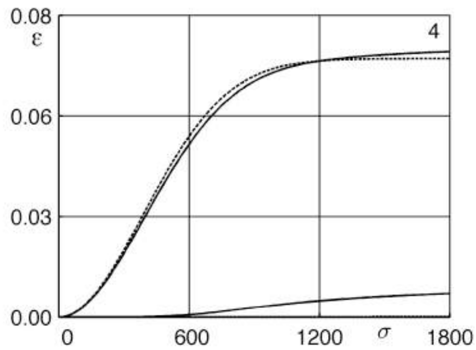
Кривая 1: *Скорость нагружения: 0.01 МПа/с*



Кривая 2: *Скорость нагружения: 10 МПа/с*



Кривая 3: *Скорость нагружения: 100 МПа/с*



Кривая 4: *Скорость нагружения: 1 000 МПа/с*

Рисунок 2.4.3

Таким образом, при разных скоростях роста напряжения более быстрый относительный рост деформаций может демонстрировать как модель с n = 1, так и модель с n = 3.

В качестве параметров модели, для которой нарушается условие (2.4.1.14), можно использовать набор параметров (2.4.2.6) с заменой $\gamma = 1$ на $\gamma = 2$. Результаты моделирования зависимости полной, неупругой и реономной деформации $\varepsilon^r, \varepsilon^{ne}, \varepsilon$ от уровня напряжения σ [МПа] (верхняя, средняя и нижняя сплошные линии) для случая модели с угловыми скобками приведены на рис. 2.4.4. Без угловых скобок в определяющих соотношениях модели рост реономных деформаций при увеличении напряжения в процессе мягкого монотонного нагружения с фиксированной скоростью изменения напряжений перестает быть монотонным (пунктирная линия), и, как результат, даже полные неупругие деформации в таком случае перестают быть монотонными, что противоречит поведению, наблюдаемому в эксперименте.

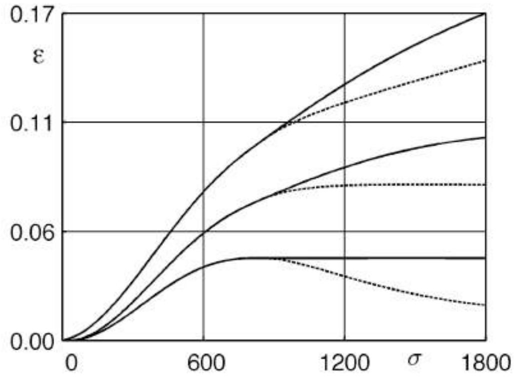


Рисунок 2.4.4

Подводя итог, следует отметить, что качественное поведение модели с параметрами (2.4.2.6), откалиброванными по экспериментальным данным для процесса мягкого ступенчатого нагружения, достаточно хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями, а модельные кривые, построенные по этой модели, не слишком существенно (особенно при малых скоростях нагружения) отличаются от модельных кривых, построенных по модели для n = 1 с параметрами (2.4.2.7).

2.4.4 Релаксация напряжений

В данном разделе рассмотрим моделирование процессов релаксации напряжений после предварительного активного нагружения с конечной скоростью. Пусть образец из СПФ, находящийся в состоянии хаотического мартенсита, нагружен в режиме мартенситной неупругости с монотонно возрастающим напряжением до напряжения σ_0, в результате чего он приобретает полную деформацию ε_0. После этого полная деформация фиксируется на уровне ε_0. Согласно экспериментальным данным [53], с течением времени наблюдается убывание напряжений при фиксированных полных деформациях и температуре. Падение напряжений ярко выражено сразу после фиксации деформаций, но убывает с течением времени и перестает значимо меняться спустя примерно 1 час. Моделированию этого процесса и посвящен данный параграф.

Для процесса релаксации после активного нагружения выполняется:

$$\dot{\varepsilon}^f = \begin{cases} 1/H(\sigma) \quad при \quad \dot{\sigma} > 0 \\ 0 \quad при \quad \dot{\sigma} \le 0 \end{cases} \qquad (2.4.4.1)$$

$$\psi^s(\sigma) = \begin{cases} \rho_{D1}\left(1 - \exp\left(-\left(\sigma/\sigma_1\right)^\alpha\right)\right) \quad при \quad \dot{\sigma} \ge 0 \\ \rho_{D1}\left(1 - \exp\left(-\left(\sigma_0/\sigma_1\right)^\alpha\right)\right) = const \quad при \quad \dot{\sigma} \le 0 \end{cases} \qquad (2.4.4.2)$$

При использовании условий (2.4.4.1) и (2.4.4.2) уравнение (2.4.1.8) для полных деформаций ε в процессе релаксации при $\dot{\sigma} \le 0$ будет записано в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k\left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle\right)^n$$

Если учесть, что $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$, то определяющее соотношение, задающее закон изменения напряжений в процессе релаксации, записывается в форме:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -k\left(\left\langle \psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E} \right\rangle\right)^n \qquad (\mathbf{2.}4.4.3)$$

Без угловых скобок:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = -k\left(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E}\right)^n \qquad (2.4.4.4)$$

Решение уравнения (2.4.4.4) с начальным условием $\sigma(t_0) = \sigma_0$ записывается в следующем виде:

при n = 1:

$$\sigma(t) = E\left(\varepsilon_0 - \psi^s(\sigma_0) + e^{-k(t-t_0)}(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0/E)\right) \qquad (2.4.4.5)$$

при n > 1:

$$\sigma(t) = E(\varepsilon_0 - \psi^s(\sigma_0)) + \\ + \frac{E}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_0) + \dfrac{1}{(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0/E)^{n-1}}}} \qquad (2.4.4.6)$$

Чтобы доказать эквивалентность (2.4.4.3) и (2.4.4.4), нам достаточно проверить, что для решений уравнения (2.4.4.4) выполняется неравенство:

$$\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma(t)}{E} \ge 0 \qquad (2.4.4.7)$$

(т. е. выражение, стоящее в угловых скобках, неотрицательно), что становится очевидным при подстановке (2.4.4.5) и (2.4.4.6) в (2.4.4.7) с учетом $\psi^f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} \le \varepsilon_0 \le \psi^s(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E}$ (так как в предварительном процессе, протекающем с конечной скоростью, фиксированное значение полной деформации ε_0, соответствующее напряжению σ_0, должно находиться между значениями деформации, соответствующими деформации предельно быстрого и предельно медленного процессов).

Для целей моделирования величину фиксированной деформации ε_0 удобно представить в виде:

$$\varepsilon_0 = \theta\psi^s(\sigma_0) + (1-\theta)\psi^f(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E}$$

где параметр θ принимает значения $0 \le \theta \le 1$ и характеризует степень близости начальной деформации к значениям деформации, достигаемым в предельно быстром (θ = 0) и предельно медленном (θ = 1) процессах. Важно понимать, что θ характеризует скорость предварительного нагружения, при этом значение параметра θ в общем случае не равно скорости предварительного нагружения.

Переходя к моделированию процесса релаксации напряжений с использованием откалиброванной модели с параметрами (2.4.2.6) – (2.4.2.9), необходимо отметить, что при данных значениях параметра условие вида:

$$\psi_1(\sigma_0) = \psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \le \frac{\sigma_0}{E} \qquad (2.4.4.8)$$

выполняется для всех наборов параметров и для каждого σ_0. Выполнение данного условия гарантирует, что минимальное напряжение, достигаемое в процессе предельно быстрого предварительного нагружения $\sigma^*_{\min} = \sigma_0 - E\left(\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0)\right)$, будет неотрицательным.

На рис. 2.4.5 (в осях t [с] и σ [МПа]) приведены результаты моделирования процесса релаксации напряжений при σ_0 = 300 МПа, θ = 0.9 (верхняя пара кривых); 0.5 (средняя пара); 0.1 (нижняя пара), по модели с n = 3 (с параметрами (2.4.2.6), сплошная линия) и модели с n = 1 (с параметрами (2.4.2.7), пунктирная линия). Результаты моделирования качественно правильно правильно описывают экспериментальные наблюдения: при больших значениях параметра θ наблюдается большая релаксация.

На рис. 2.4.6 изображена зависимость величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от начального значения напряжения σ_0 [МПа] при θ = 0.1 (верхняя пара кривых); 0.5 (средняя пара); 0.9 (нижняя пара), по модели с n = 3 (с параметрами (2.4.2.6), сплошная линия) и модели с n = 1 (с параметрами (2.4.2.7), пунктирная линия). В рамках (2.4.1.15) эта зависимость может быть записана в виде:

$$\Delta\sigma(\sigma_0) = E\psi^s(\sigma_0)(1-\theta-\beta(1-\theta)) \qquad (2.4.4.9)$$

Видно, что при такой постановке задачи кривые являются монотонными и стремятся к асимптоте $\Delta\sigma^{asympt}(\theta) = E\rho_{D1}(1-\theta-\beta(1-\theta))$. При этом величина релаксации не может превышать значения $\Delta\sigma^{\max} = \Delta\sigma^{asympt}(0) = E\rho_{D1}(1-\beta)$, достигаемого в случае предварительного предельно быстрого нагружения.

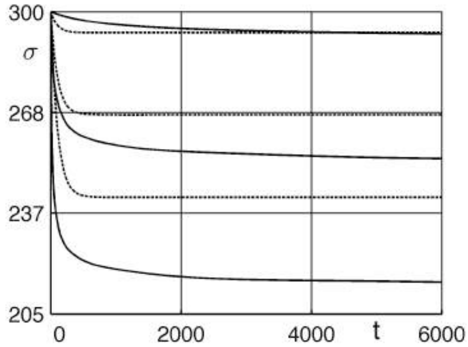


Рисунок 2.4.5

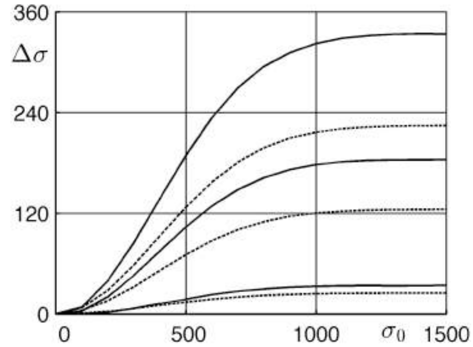


Рисунок 2.4.6

На рис. 2.4.7 приведены диаграммы зависимости величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от начального значения напряжения σ_0 [МПа], достигаемого в результате предварительного мягкого нагружения с фиксированной скоростью роста напряжений λ (для заданного значения σ_0 снизу вверх), равной 10 МПа/с, 100 МПа/с, 1000 МПа/с, 10 000 МПа/с соответственно, по модели с n = 3 (с параметрами (2.4.2.6), сплошная линия) и модели с n = 1 (с параметрами (2.4.2.7), пунктирная линия). Отличие данного процесса от рассмотренных ранее заключается в том, что λ здесь — это реальная скорость предварительного монотонного мягкого нагружения. При такой постановке задачи видим, что кривые утратили свою монотонность, при этом точка глобального максимума для разных кривых соответствует разным значениям напряжения σ_0. Такой вид кривых наблюдается и в эксперименте. Это позволяет сделать вывод о том, что модельные данные качественно правильно согласуются с экспериментальными данными. Немонотонность наблюдается по той причине, что при заданной скорости нагружения λ с течением времени происходит увеличение показателя θ, что, согласно (2.4.4.9), приводит к уменьшению $\Delta\sigma$ в том случае, если эффект падения параметра θ выражен больше, чем эффект роста $\psi^s(\sigma_0)$ при увеличении σ_0. Стоит отметить, что не удается однозначно сказать, расположен ли глобальный максимум при n = 1 выше, чем при n = 3 (при λ = 10 МПа/с — выше, при $\lambda = 10^4$ = МПа/с — ниже).

На рис. 2.4.8 показана зависимость величины итоговой релаксации $\Delta\sigma$ [МПа] от логарифма нормированной скорости предварительного мягкого монотонного нагружения при n = 3 и параметрах модели (2.4.2.6). Кривые соответствуют значениям σ_0, равным 100 МПа (кривая 1), 300 МПа (кривая 2), 600 МПа (кривая 3), 900 МПа (кривая 4) и 1 500 МПа (кривая

5). При этом также наблюдается заметная немонотонность, а наибольшие среди всех приведенных значения $\Delta\sigma$ наблюдаются на кривой, соответствующей σ_0=600 МПа. Данные графиков также неплохо качественно соответствуют экспериментальным данным (в эксперименте между указанными переменными наблюдается зависимость, близкая к линейной).

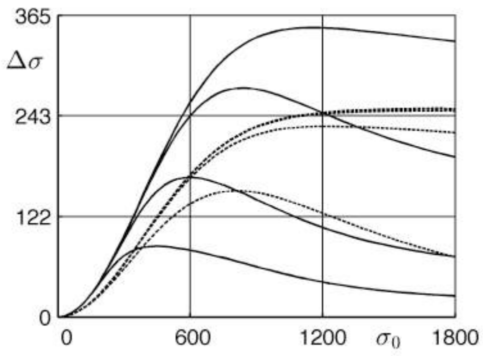


Рисунок 2.4.7

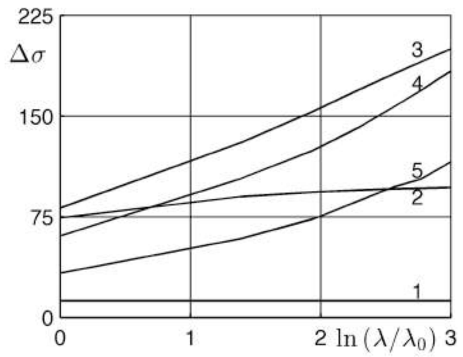


Рисунок 2.4.8

2.4.5 Диаграмма монотонного жесткого нагружения с постоянной скоростью

Пусть полная деформация меняется по закону $\varepsilon = \eta t, \quad \eta = const$ (в области малых деформаций это с большой точностью эквивалентно тому, что скорость движения захватов СПФ постоянна). Для такого процесса уравнение (2.4.1.8) в полных деформациях записывается в следующем виде (так как процесс активного нагружения происходит в условиях ограничений (2.4.1.13) и (2.4.1.14), то угловые скобки можно отбросить без изменения решения):

$$\eta = \left(1/E + \psi^{f}\,'(\sigma)\right)\dot{\sigma} + k\left(\psi^{s}(\sigma) + \sigma/E - \eta t\right)^{n}$$

В каноническом виде уравнение может быть переписано в форме:

$$\dot{\sigma} = (\eta - k\left(\psi^{s}(\sigma) + \sigma/E - \eta t\right)^{n})/\left(1/E + \psi^{f}\,'(\sigma)\right) \qquad (2.4.5.1)$$

В целом, решение уравнения (2.4.5.1) не выражается в квадратурах даже в случае n = 1, поэтому далее будут приведены результаты численного моделирования (2.4.5.1) с начальным условием $\sigma(0) = 0$.

На рис. 2.4.9 приведены результаты численного моделирования зависимости напряжения σ [МПа] от полной неупругой деформации ($\eta t - \sigma(t)/E$) для модели с n = 3 и параметрами (2.4.2.6) в процессе жесткого нагружения со скоростями деформирования $\eta = 10^{-4}$ 1/с (кривая 4), $\eta = 10^{-2}$ 1/с (кривая 3), $\eta = 0.1$ 1/с (кривая 2) и $\eta = 1$ 1/с (кривая 1).

Результаты численного моделирования также качественно правильно согласуются с экспериментальными данными: при заданном уровне напряжений большим скоростям деформации соответствуют меньшие уровни деформации.

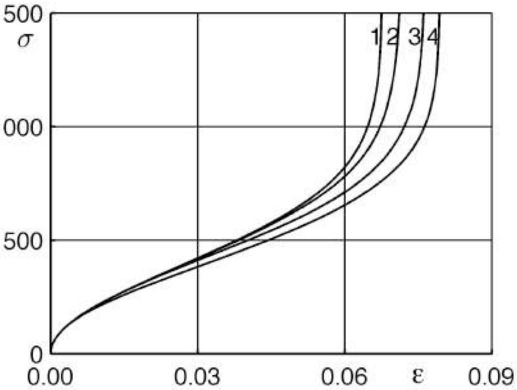
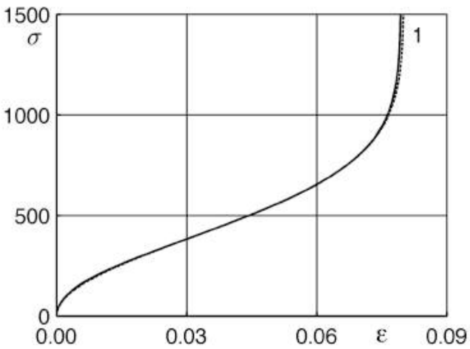
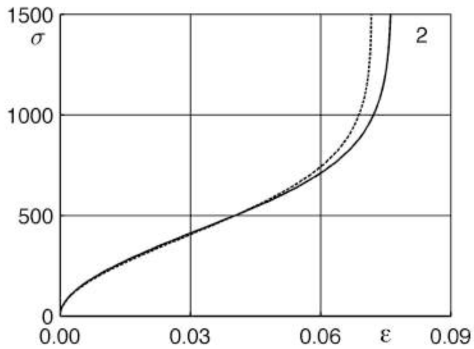


Рисунок 2.4.9

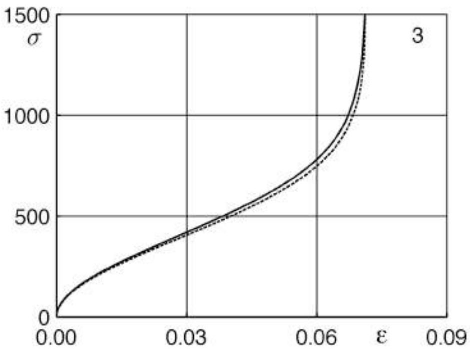
При замене в (2.4.2.6) значения параметра $\gamma = 1$ на $\gamma = 2$ (т. е. при нарушении условия (2.4.1.14)) модель без угловых скобок дает парадоксальный результат: при некотором заданном уровне напряжения большему значению скорости деформирования соответствует большее значение деформации, что противоречит экспериментальному наблюдению.



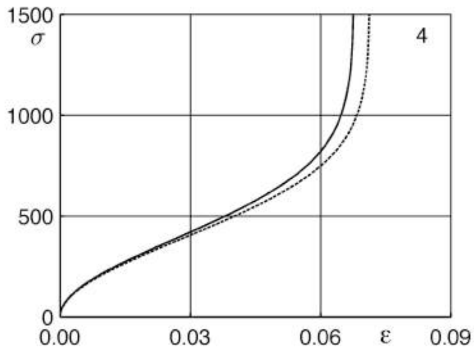
Кривая 1: *Скорость изменения полной деформации: 0.0001 1/с*



Кривая 2: *Скорость изменения полной деформации: 0.01 1/с*



Кривая 3: *Скорость изменения полной деформации: 0.1 1/с*



Кривая 4: *Скорость изменения полной деформации: 1 1/с*

Рисунок 2.4.10

На рис. 2.4.10 представлено сравнение результатов моделирования процесса жесткого нагружения с постоянной скоростью роста деформации при n = 3 (с параметрами (2.4.2.6), сплошная линия) и n = 1 (с параметрами (2.4.2.7), пунктирная линия) для скоростей деформирования $\eta = 10^{-4}$ 1/с (кривая 1), $\eta = 10^{-2}$ 1/с (кривая 2) , $\eta = 0.1$ 1/с (кривая 3) и

$\eta = 1$ 1/с (кривая 4). При малых скоростях (до $\eta = 10^{-4}$ 1/с) решения для n = 1 и n = 3 практически неразличимы, и при увеличении скорости (до $\eta = 10^{-2}$ 1/с) решение для n = 3 заметно быстрее выходит на асимптоту, чем для n = 1. При дальнейшем увеличении скорости можно наблюдать обратную динамику: кривые начинают сходиться, двигаясь ближе друг к другу ($\eta = 0.1$ 1/с), и в итоге при сверхвысоких скоростях ($\eta = 1$ 1/с) выход на асимптоту происходит раньше при n = 1, чем при n = 3.

2.4.6 Случай разгрузки после монотонного нагружения

Как и в разделе 2.3, в данном исследовании также возникает вопрос о том, может ли рассматриваемая модель (2.4.1.9), в которой не используются угловые скобки, корректно описать эффект разгрузки и привести к такому же решению, что и модель (2.4.1.8) с угловыми скобками.

Для исследования этого вопроса сформулируем следующую задачу: пусть на участке $0 \le t \le t_1$ происходило монотонное активное нагружение до уровня напряжений $\sigma(t_1) = \sigma^{\max} = \sigma_0$, а на участке $t_1 \le t \le t_2$ — разгрузка, заданная функцией изменения напряжений $\sigma(t)$ такой, что $\sigma(t) \le \sigma^{\max}$ в каждый момент времени $t_1 \le t \le t_2$ (т. е. процесс, протекающий на второй стадии, не является активным). При этом предполагается, что при уменьшении напряжений упругая разгрузка происходит как для предельно медленных, так и для предельно быстрых процессов, причем с одним и тем же упругим модулем, таким образом, что в упругой области для мгновенных процессов будет: $\psi_1(\sigma) = const = \psi_1(\sigma^{\max}), \psi_1{}'(\sigma) = 0$. Тогда для $t \in (t_1, t_2)$, при решении (2.4.1.6) с начальными условиями $\varepsilon^r(t_1) = \varepsilon_0$ для реономных деформаций и при переходе к полным деформациям по формуле (2.4.1.1), получаем:

при n = 1:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \psi^s(\sigma_0) - e^{-k(t-t_1)}(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E) \qquad (2.4.6.1)$$

при n > 1:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \psi^s(\sigma_0) - \\ - \frac{1}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_1) + \dfrac{1}{(\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0 / E)^{n-1}}}} \qquad (2.4.6.2)$$

Для точки t_1 — конца процесса монотонного нагружения — при условии выполнения (2.4.1.12) будет верным неравенство $\psi^s(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \dfrac{\sigma_0}{E} \ge 0$. Исходя из этого факта, очевидно, что для решений (2.4.6.1) и (2.4.6.2) также будет выполняться $\psi^{s}(\sigma(t))-\varepsilon(t)+\dfrac{\sigma(t)}{E}\geq 0$ для каждого $t\geq t_1$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в упругой области для мгновенных процессов (при разгрузке, сменяющейся нагружением, до максимального значения напряжений σ_0) решения уравнений (2.4.1.8) и (2.4.1.9) полностью эквивалентны.

Из этого рассуждения, а также из рассуждения, приведенного для случая активного монотонного процесса, следует достаточно определенный вывод: при соблюдении условия (2.4.1.12) решения уравнений (2.4.1.8) и (2.4.1.9) полностью эквивалентны как в процессе активного нагружения, так и при разгрузке и последующем нагружении в упругой области для мгновенных процессов. То есть, если процесс можно разбить на подпроцессы, каждый из которых является или активным и монотонным, задаваемым гладкой локально ограниченной функцией нагружения, или же не является активным ни в один момент времени, то для каждого такого процесса, при выполнении ограничений (2.4.1.13) и (2.4.1.14), угловые скобки в модели могут быть опущены без потери смысла.

Резюмируя, можно сказать, что при решении практических задач достаточно проверить выполнение условий (2.4.1.13) и (2.4.1.14). Если данные условия выполнены, то для последующего моделирования реального процесса можно использовать модель (2.4.1.9) без угловых скобок, что значительно упрощает дальнейший анализ задач устойчивости в рамках представленной модели.

2.4.7 Выводы

Установлено, что предлагаемый аналог вязкопластической модели со степенной зависимостью для скорости роста реономной деформации качественно лучше (по сравнению с моделью, представленной в разделе 2.3 без степенного параметра) описывает экспериментальные данные для процесса мягкого ступенчатого нагружения. При этом в размерных переменных качество описания процессов мягкого и жесткого монотонного нагружения, релаксации напряжений и монотонной разгрузки не ухудшается.

ГЛАВА 3. ВЛИЯНИЕ РЕОНОМНЫХ СВОЙСТВ СПФ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В данной главе речь пойдет об исследовании влияния реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость модельных систем, содержащих элементы из СПФ.

3.1 Исследование влияния реономных свойств СПФ в рамках первой модели для жесткого стержня на вязкопластическом шарнире

3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается абсолютно-жесткий, вертикально расположенный в тривиальном положении равновесия стержень длины L, к верхнему концу которого приложена действующая вниз и неизменная по направлению сила P, а нижний конец скреплен с неподвижной опорой шарниром, угол поворота которого φ, а также действующий в нем момент M связаны определяющим соотношением:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{M}}{D} + k\left\langle \rho_D \psi\left(M\right) - \varphi + \frac{M}{D} \right\rangle \tag{3.1.1.1}$$

идентичным (2.1.1.11), если полные деформации заменить на угол поворота, а напряжения — на момент. В (3.1.1.1) D — аналог модуля Юнга. Необходимо отметить, что в данной простейшей задаче отсутствует тривиальный неупругий процесс. Рассматривается вопрос об устойчивости тривиального положения равновесия.

В случае упругого шарнира $(k = 0)$ положение равновесия устойчиво, если $P < P_E$, где аналог Эйлеровой критической силы P_E вычисляется по формуле:

$$P_E = \frac{D}{L} \tag{3.1.1.2}$$

Задача устойчивости в том случае, если сопротивление шарнира подчиняется уравнению линейно-вязкоупругой модели Кельвина — Фойгхта, решена в [49]. Установлено, что в данном случае корректна постановка задачи об устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале, причем критическое значение нагрузки определяется по той же формуле (3.1.1.2), в которой мгновенный модуль D необходимо заменить на длительный модуль.

В рамках квазистатической постановки задачи устойчивости момент в шарнире равен моменту действующей силы относительно центра шарнира:

$$M = PL\sin\varphi \tag{3.1.1.3}$$

Предполагая силу постоянной не только по направлению, но и по величине, можно записать:

$$\dot{M} = PL\cos\varphi\dot{\varphi} \tag{3.1.1.4}$$

Подстановка (3.1.1.3) и (3.1.1.4) в (3.1.1.1) дает дифференциальное уравнение для возмущенного процесса:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{P}{P_E}\cos\varphi\right)^{-1} \left\langle \rho_D \psi\left(PL\sin\varphi\right) + \frac{PL\sin\varphi}{D} - \varphi \right\rangle \tag{3.1.1.5}$$

Считая величину φ малой, можно провести в (3.1.1.5) линеаризацию по φ, т. е. заменить $\sin\varphi$ на φ, а $\cos\varphi$ на 1:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)^{-1} \left\langle \rho_D \psi\left(PL\varphi\right) - \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)\varphi \right\rangle \tag{3.1.1.6}$$

Если P приближается снизу к P_E, то, согласно (3.1.1.6), $\dot{\varphi} \to \infty$, что явно свидетельствует о неустойчивости тривиального положения равновесия. Величина P_E является мгновенной критической силой. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $P < P_E$. В этих условиях величина $\dot{\varphi}$, в соответствии с (3.1.1.6), неотрицательна. Поэтому если начальное значение возмущения для определенности будем считать положительным ($\varphi_0 > 0$), то величина φ будет неотрицательной на протяжении всего последующего процесса.

3.1.2 Решение в квазистатической постановке для материальных функций, соответствующих экспоненциальному и нормальному распределениям

В данном параграфе сначала предполагается, что функция $\psi(M)$ соответствует экспоненциальному распределению, то есть линеаризуется следующим образом:

$$\psi(M) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{M}{M_0}\right)\right] \approx \frac{M}{M_0} \tag{3.1.2.1}$$

Поскольку для любого $x > 0$ выполняется $x > 1 - \exp(-x)$, то замена (3.1.2.1) так же, как и переход от $\sin\varphi$ к φ при $0 < \varphi < \pi/2$, приводит к увеличению выражения, стоящего в угловых скобках правой части (3.1.1.5):

$$\rho_D \psi\left(PL\sin\varphi\right) + \frac{PL\sin\varphi}{D} - \varphi < \left(\frac{\rho_D PL}{M_0} + \frac{PL}{D} - 1\right)\varphi \tag{3.1.2.2}$$

Уравнению (3.1.1.6) можно придать вид:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)^{-1} \left\langle \frac{P}{P_*} - 1 \right\rangle \varphi \tag{3.1.2.3}$$

Здесь:

$$P_* = \frac{D_*}{L},\ D_* = \frac{D}{1 + D\rho_D / M_0} \tag{3.1.2.4}$$

В силу того, что $D > 0, \rho_D > 0, M_0 > 0$, то из (3.1.2.4) получается $D_* < D, P_* < P_E$. Если $P \le P_*$, то, согласно (3.1.2.3), будет $\dot{\varphi} = 0$, и начальное возмущение будет сохранять постоянное значение, что позволяет сделать вывод об устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале. Если $P_E > P > P_*$, то решение (3.1.2.3) при начальном условии $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ принимает вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(\lambda t), \quad \lambda = \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)^{-1}\left(\frac{P}{P_*} - 1\right) > 0 \qquad (3.1.2.5)$$

и угол φ с течением времени будет неограниченно возрастать, т. е. положение равновесия является неустойчивым. Следовательно, P_* (3.1.2.4) в данном случае является критической нагрузкой.

Неравенство:

$$P \le P_* \qquad (3.1.2.6)$$

является условием устойчивости решения линеаризованной задачи. Однако в силу соотношения (3.1.2.2), выполнение неравенства (3.1.2.6) гарантирует также равенство нулю левой части уравнения нелинеаризованной задачи (3.1.1.5), по крайней мере, для $0 < \varphi < \pi/2$. Таким образом, выполнение неравенства (3.1.2.6) гарантирует устойчивость положения равновесия и для нелинеаризованной задачи.

Согласно (3.1.1.1), диаграмма предельно медленного процесса имеет в данном случае уравнение $\varphi = \rho_D \psi(M) + M / D$. Касательная податливость g (величина, обратная касательному модулю) складывается из структурной g^{st} и упругой g^e податливостей:

$$g = \frac{d\varphi}{dM} = g^{st} + g^e, \quad g^{st} = \frac{\rho_D}{M_0}\exp\left(-\frac{M}{M_0}\right), \quad g^e = \frac{1}{D} \qquad (3.1.2.7)$$

Согласно (3.1.2.7) и (3.1.2.4), в начальной точке процесса ($M = 0$) выполняется $g = 1/D_*$. Таким образом, величину D_* можно трактовать как касательный модуль, определяемый по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости, которая для данной простейшей модели совпадает с точкой начала неупругого деформирования.

Переходя к материальной функции $\psi(M)$, соответствующей нормальному распределению микронапряжений, можно заметить, что в этом случае функция $\psi(M)$ линеаризуется следующим образом:

$$\psi(M) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{0.5} \frac{M}{M_0} \qquad (3.1.2.8)$$

Сравнивая представления (3.1.2.8) и (3.1.2.1), можно утверждать, что полученные выше результаты решения линеаризованной задачи устойчивости для материальной функции $\psi(M)$, соответствующей экспоненциальному распределению, будут справедливы и для функции $\psi(M)$, соответствующей нормальному распределению, если заменить в формулах величину M_0 на $M_0(\pi/2)^{0.5}$.

Следовательно, в данной задаче предельная нагрузка вычисляется по формуле типа формулы Эйлера (3.1.1.2), но не через мгновенный упругий модуль, как для случая упругого шарнира, и не через длительный модуль, как для линейно-вязкоупругого шарнира, а через касательный модуль, определяемый по диаграмме предельно медленного процесса. Качественно такой же результат получится при любой материальной функции $\psi(M)$, соответствующей распределению, плотность которого имеет в нуле конечное значение, отличное от нуля.

3.1.3 Решение задачи в динамической постановке

Рассматриваемая задача из-за реономных свойств шарнира является существенно неконсервативной. Для неконсервативных проблем устойчивости решение в квазистатической постановке может приводить к ошибочным результатам (как, например, в задаче об устойчивости стержня под действием следящей силы). Поэтому была предпринята попытка решить соответствующую задачу в динамической постановке.

Уравнение движения стержня на шарнире имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = PL\sin\varphi - M \tag{3.1.3.1}$$

где J — момент инерции стержня относительно оси вращения, M — момент в шарнире, который подчиняется уравнению (3.1.1.1) и уже не должен быть равен моменту внешней силы P. Систему уравнений (3.1.3.1) и (3.1.1.1) можно представить в каноническом виде, разрешенном относительно первых производных, путем введения третьей переменной φ_1:

$$\dot{\varphi} = \varphi_1 \tag{3.1.3.2}$$

$$J\dot{\varphi}_1 = Pl\sin\varphi - M \tag{3.1.3.3}$$

$$\dot{M} = D\varphi_1 - Dk\left\langle \rho_D\psi(M) + \frac{M}{D} - \varphi \right\rangle \tag{3.1.3.4}$$

Эта система имеет тривиальное решение $\varphi = \varphi_1 = M \equiv 0$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Возникает вопрос о том, при каких величинах P это тривиальное решение будет устойчивым по начальным данным. В качестве начальных условий возмущенного движения для переменных φ и φ_1 рассматриваются следующие:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \tag{3.1.3.5}$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_{10} = \varphi'(0) \tag{3.1.3.6}$$

Вопрос о правой части M^0 начального условия для M :

$$M(0) = M^0 \tag{3.1.3.7}$$

требует особого рассмотрения, поскольку связь между M и φ является наследственной. Граничное условие для величины M зависит от процесса задания начального возмущения. Для анализа удобно разделить величину φ на упругую φ^e и неупругую φ^{ne} части:

$$\varphi = \varphi^e + \varphi^{ne} \tag{3.1.3.8}$$

причем $\varphi^e = M / D$, $\dot{\varphi}^e = \dot{M} / D$, $\dot{\varphi}^{ne} = k\left\langle \rho_D \psi\left(M\right) - \varphi^{ne}\right\rangle$.

Пусть переход из тривиального состояния в начально-возмущенное происходит в рамках предельно медленного процесса нагружения (изменения M). В этом случае можно считать $\dot{\varphi}^{ne} = 0$ и $\rho_D \psi\left(M\right) - \varphi^{ne} = 0$. Данное соотношение должно выполняться и для конечной точки процесса начального возмущения, т. е. для начальной точки рассматриваемого процесса:

$$\rho_D \psi\left(M(0)\right) = \varphi^{ne}(0) \tag{3.1.3.9}$$

Для упругих компонент в начальной точке возмущенного процесса выполняется:

$$\frac{M(0)}{D} = \varphi^e(0) \tag{3.1.3.10}$$

Складывая (3.1.3.9) и (3.1.3.10) с учетом (3.1.3.8), получаем уравнение для определения искомого начального значения M_1^0 (для M при предельно медленном процессе начального возмущения):

$$\rho_D \psi\left(M_1^0\right) + M_1^0 / D = \varphi(0) \tag{3.1.3.11}$$

Вместо того чтобы решать это уравнение, можно явно задать величину M_1^0, а соответствующую величину $\varphi(0) = \varphi_0$ вычислить по явной формуле (3.1.3.11). Необходимо отметить, что в случае предельно медленного процесса начального возмущения для скорости изменения φ в начальный момент следует брать нулевое значение $\varphi_{10} = 0$.

Пусть переход из тривиального состояния в начальное возмущенное происходит при предельно быстром (скачкообразном) нагружении. Поскольку в рамках рассматриваемой модели мгновенный скачок силового воздействия не может приводить к мгновенному скачку неупругого деформационного отклика, то в начальной точке возмущенного процесса $\varphi^{ne} = 0$, а $\varphi = \varphi^e = M / D$. Следовательно, в случае предельно быстрого начального возмущения правая часть (3.1.3.7) равна:

$$M_2^0 = D\varphi(0) \tag{3.1.3.12}$$

Если начальное возмущение происходит с конечной скоростью, то соответствующее значение M^0 должно подчиняться неравенству $M_1^0 < M^0 < M_2^0$.

Анализ устойчивости тривиального решения системы (3.1.3.2) — (3.1.3.4) затруднен наличием неаналитического оператора, обозначенного угловыми скобками, поскольку в этом случае рассматриваемая система содержит односторонние связи. В целях получения аналитического решения в данном разделе рассматривается система, аналогичная (3.1.3.2) — (3.1.3.4), но без оператора угловых скобок. После получения формулы для критической силы правильность найденного значения проверяется путем численного решения системы (3.1.3.2) — (3.1.3.4) уже с оператором $\langle \bullet \rangle$ и начальными условиями (3.1.3.5) — (3.1.3.7).

Таким образом, третье уравнение системы (3.1.3.4) заменяется на:

$$\dot{M} = D\varphi_1 - Dk\left[\psi(M) + \frac{M}{D} - \varphi\right] \tag{3.1.3.13}$$

Используется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция $\psi(M)$ считается соответствующей экспоненциальному распределению. Проводя линеаризацию правых частей (3.1.3.3) и (3.1.3.13), получаем систему уравнений первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \varphi_1, \\ J\dot{\varphi}_1 = Pl\varphi - M, \\ \dot{M} = D\varphi_1 - Dk\left[M\left(\dfrac{\rho_D}{M_0} + \dfrac{1}{D}\right) - \varphi\right] \end{cases} \tag{3.1.3.14}$$

Решение будет устойчиво, если все собственные значения матрицы системы (3.1.3.14) имеют отрицательные вещественные части. Характеристическое уравнение матрицы системы (3.1.3.14) имеет вид:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \tag{3.1.3.15}$$

$$p = Dk\left(\frac{\rho_D}{M_0} + \frac{1}{D}\right), \quad q = \frac{D - Pl}{J}, \quad r = -\frac{Dk}{J}\left[Pl\left(\frac{\rho_D}{M_0} + \frac{1}{D}\right) - 1\right]$$

Условия отрицательности вещественных частей корней многочлена (3.1.3.15) сводятся к неравенствам $q > 0$, $pq > r$ и $r > 0$. Первое из этих условий эквивалентно ранее принятому неравенству $P < D / l = P_E$, второе же после несложных преобразований сводится к $D\rho_D / M_0 > 0$ и выполняется в силу положительности соответствующих постоянных. Третье условие приводится к виду:

$$P < \frac{D}{L}\left(1 + \frac{D\rho_D}{M_0}\right)^{-1} = P_* \qquad (3.1.3.16)$$

Таким образом, решение динамической задачи устойчивости без учета оператора $\langle \bullet \rangle$ дает то же значение критической силы (3.1.3.16), что и решение задачи в квазистатической постановке с учетом этого оператора (3.1.2.4).

Задача устойчивости в динамической постановке при наличии односторонних связей исследовалась численно. Исходная линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \varphi_1, \\ J\dot{\varphi}_1 = Pl\varphi - M, \\ \dot{M} = D\varphi_1 - Dk\left\langle M\left(\frac{\rho_D}{M_0} + \frac{1}{D}\right) - \varphi \right\rangle \end{cases} \qquad (3.1.3.17)$$

Для уменьшения количества параметров материала второе и третье уравнения системы делятся на D. Вводятся обозначения:

$$\mu = M / D, \qquad \pi = P / P_E, \qquad j = J / D, \qquad \pi^* = \left(1 + \rho_D D / M_0\right)^{-1} = P_* / P_E,$$

через которые система (3.1.3.17) записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \varphi_1, \\ j\dot{\varphi}_1 = \pi\varphi - \mu, \\ \dot{\mu} = \varphi_1 - k\left\langle \frac{\mu}{\pi^*} - \varphi \right\rangle \end{cases} \qquad (3.1.3.18)$$

Начальные условия для φ и φ_1 имеют тот же вид, что и в (3.1.3.5) и (3.1.3.6), где в качестве φ_0, φ_{10} могут быть выбраны малые числа (начальные возмущения). Правая часть μ_0 начального условия $\mu(0) = \mu^0$ (для μ в случае предельно медленного процесса начального возмущения) соответствует (3.1.3.11) и имеет вид:

$$\mu(0) = \mu_1^0 = \pi^* \varphi_0 \qquad (3.1.3.19)$$

При получении (3.1.3.19) в (3.1.3.11) проведена линеаризация функции ψ.

Для очень быстрого начального возмущения начальное условие для μ соответствует (3.1.3.12) и имеет вид:

$$\mu(0) = \mu_2^0 = \varphi_0 \qquad (3.1.3.20)$$

Численное решение системы (3.1.3.18) проводилось одношаговым методом Рунге-Кутта второго порядка для различных значений $\pi \in (0,1)$ и малых величин правых частей начальных условий (3.1.3.5), (3.1.3.6), (3.1.3.19) или (3.1.3.20). Значение параметра внешней нагрузки π

выбиралось несколько меньшее или несколько большее, чем π^*. Установлено, что в первом случае величина φ для возмущенного процесса не превосходила начальное значение φ_0, тогда как во втором наблюдался монотонный и неограниченный со временем рост φ.

Эти результаты проиллюстрированы на рис. 3.1.1 и 3.1.2. По оси абсцисс на обоих графиках отложено время в секундах, а по оси ординат — величина φ. Соответствующие решения получены для $\pi^* = 0.5,\ j = 1,\ k = 0.001$. Каждой паре кривых, выходящих из одной точки на оси ординат на рис. 3.1.1, соответствует $\pi = 0.9999\pi^*$ (нижняя кривая) и $\pi = 1.0001\pi^*$ (верхняя кривая). Между собой пары различаются величиной правой части начального условия для φ (3.1.3.5). Для нижней пары $\varphi_0 = 0.0001$, для средней — $\varphi_0 = 0.0002$, для верхней — $\varphi_0 = 0.0003$. Процесс задания начального возмущения предполагался предельно медленным, и в связи с этим для условия (3.1.3.6) предполагалось $\varphi_{01} = 0$, а начальное условие для μ выбиралось в форме (3.1.3.19). Согласно рис. 3.1.1, графики зависимости $\varphi = \varphi(t)$ в выбранном на этом рисунке для t весьма крупном масштабе для $\pi = 0.9999\pi^*$ выглядят как прямые линии, параллельные оси времени и отстоящие от нее на расстояние, чуть меньшее, чем начальное значение φ_0. На рис. 3.1.2 в более мелком масштабе по t показан начальный участок обоих кривых для $\varphi_0 = 0.0002$ (верхний и нижний график). Средняя прямая линия получена путем численного решения системы (3.1.3.18) при $\pi = \pi^*$. Видно, что при $P = P^*$ положение равновесия также является устойчивым.

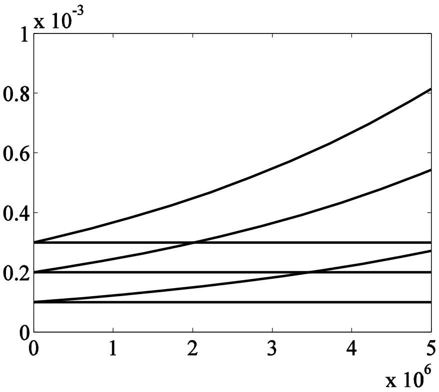


Рисунок 3.1.1

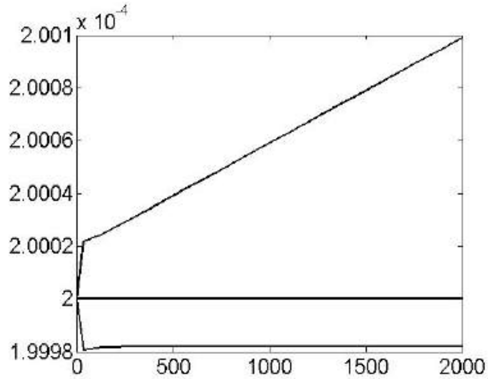


Рисунок 3.1.2

Полученные численные результаты подтверждают тот факт, что величина P^* (3.1.3.16) является критическим значением нагрузки не только для системы (3.1.3.14), но и для системы (3.1.3.17), содержащей неаналитический оператор $\langle \bullet \rangle$, характерный для вязко-пластических определяющих соотношений.

3.1.4 Решение в квазистатической постановке для функции, соответствующей распределению Вейбулла

Далее рассматривается случай, когда материальная функция $\psi(M)$ соответствует функции распредления Вейбулла (2.1.1.12) при $\alpha > 1$. Задача рассматривается в квазистатической постановке. Считая величину φ малой и заменяя $\sin\varphi$ на φ, вместо (3.1.1.5) получаем:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)^{-1} k \left\langle \rho_D \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{PL\varphi}{M_0}\right)^{\alpha}\right]\right\} - \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)\varphi \right\rangle \tag{3.1.4.1}$$

Возникает вопрос, при каких условиях правая часть (3.1.4.1) будет отличной от нуля? Если $P < P_E$, то условием этого является выполнение неравенства:

$$\rho_D \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{PL\varphi}{M_0}\right)^{\alpha}\right]\right\} - \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)\varphi > 0 \tag{3.1.4.2}$$

Считая величину $(PL\varphi / M_0)^{\alpha}$ малой, раскладывая функцию экспоненты в (3.1.4.2) по ее аргументу, имеющему порядок φ^{α}, в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами, вместо (3.1.4.2) получаем:

$$\rho_D \left(\frac{PL}{M_0}\right)^{\alpha} \varphi^{\alpha} - \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)\varphi > 0 \tag{3.1.4.3}$$

Поскольку $\varphi > 0$, то решение неравенства (3.1.4.3) можно записать в виде $\varphi > \varphi_*$, где:

$$\varphi_* = \left[\frac{1 - P/P_E}{\rho_D (PL/M_0)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha - 1}} \tag{3.1.4.4}$$

Необходимо отметить, что при $P < P_E$ величина $\varphi_* > 0$. Пусть для начального возмущения выполняется неравенство $\varphi(0) < \varphi_*$. В этом случае решением (3.1.4.1) будет $\varphi = const$ для всех t. В результате тривиальное положение равновесия можно считать устойчивым по отношению к малым начальным возмущениям. Если же нагрузка P становится равной Эйлеровому значению P_E, то, согласно (3.1.4.4), будет $\varphi_* = 0$. В этом случае множитель в угловых скобках правой части (3.1.4.1) может быть положительным при любых, сколь угодно малых, значениях φ. В результате величина $\dot{\varphi}$ становится равной бесконечности, а положение равновесия становится явно неустойчивым. Таким образом, в том случае, если $\alpha > 1$, критической нагрузкой является Эйлерова сила, вычисляемая по мгновенному упругому модулю.

Объяснить полученную разницу в решении задачи устойчивости для функции $\psi(M)$, соответствующей экспоненциальному распределению ($\alpha = 1$) и распределению Вейбулла ($\alpha > 1$), можно следующим образом. При $\alpha > 1$ структурная составляющая податливости:

$$g^{st} = \frac{d\varphi^{st}}{dM} = \frac{\alpha\rho_D}{M_0}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{M}{M_0}\right)^{\alpha}\right]$$

в начальной точке возмущенного процесса ($M = M^0$) стремится к нулю при стремлении к нулю начального возмущения M^0. Следовательно, суммарная податливость стремится к упругой, а касательный модуль — к упругому модулю. Именно поэтому критическая нагрузка, определяемая по касательному модулю, равна Эйлеровой, вычисляемой по упругому модулю. Данный результат является следствием того, что в рассмотренной задаче отсутствует тривиальный неупругий процесс. Для более сложных модельных систем (рассмотренных в следующих разделах), где тривиальный неупругий процесс имеет место, совпадение критической нагрузки с Эйлеровой для функции $\psi(M)$, соответствующей Вейбулловскому распределению, не будет иметь место.

3.1.5 Анализ влияния скорости нагружения на устойчивость

Для твердых деформируемых тел, обладающих реономными свойствами, скорость нагружения, как правило, влияет на величину предела текучести и даже предела прочности. Возникает вопрос, зависят ли от скорости нагружения критические нагрузки потери устойчивости для элементов из СПФ, обладающих реономными свойствами. Для выяснения этого вопроса ниже рассматривается задача об устойчивости стержня на шарнире в следующей постановке.

Пусть сила, действующая на стержень, меняется в соответствии с законом:

$$P = f(t,t^0) = \begin{cases} \lambda t \quad при \quad 0 \le t \le t^0 \\ P^0 = \lambda t^0 \quad при \quad t > t^0 \end{cases} \tag{3.1.5.1}$$

Для заданного λ необходимо найти такое значение t^*, чтобы при $t^0 > t^*$ тривиальное решение было неустойчивым, а при $t^0 < t^*$ оно было устойчивым. Под критической нагрузкой тогда следует понимать величину $P^* = \lambda t^*$. Необходимо выяснить, зависит ли величина P^* от λ. Ниже эта задача рассматривается для функции $\psi(M)$, соответствующей экспоненциальному распределению, в полностью линеаризованной квазистатической постановке. Для первого этапа процесса нагружения при $t \le t_0$, заменяя в (3.1.1.3) $\sin\varphi$ на φ, получаем:

$$M = \lambda t L\varphi, \qquad \dot{M} = PL\dot{\varphi} + \lambda L\varphi \tag{3.1.5.2}$$

Подстановка (3.1.5.2) в (3.1.1.1) после линеаризации выражения $\psi(M) \approx M / M_0$ дает:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\lambda + k\dfrac{P_E}{P_*}\left\langle P - P_*\right\rangle}{P_E - P}dt \tag{3.1.5.3}$$

Заменяя в (3.1.5.3) $P = \lambda t$, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\lambda + k\dfrac{P_E}{P_*}\left\langle \lambda t - P_*\right\rangle}{P_E - \lambda t}dt \tag{3.1.5.4}$$

Для начального этапа процесса $t < P_* / \lambda$ уравнение (3.1.5.4) принимает вид $\dfrac{d\varphi}{\varphi} = \dfrac{\lambda}{P_E - \lambda t}dt$, и его решением при начальном условии $\varphi(0) = \varphi_0$ является:

$$\varphi = \frac{P_E\varphi_0}{P_E - \lambda t} \tag{3.1.5.5}$$

Согласно (3.1.5.5), величина φ монотонно возрастает с ростом t.

Пусть $t^0 \le P_* / \lambda$, то есть:

$$P^0 \le P_* \tag{3.1.5.6}$$

В этом случае решение для интервала времени, в котором меняется нагрузка, задается формулой (3.1.5.5). Максимальное значение φ достигается в конце этого интервала и равно $\varphi(t^0) = \varphi_{00} = \dfrac{P_E\varphi_0}{P_E - \lambda t^0}$.

Далее нагрузка будет сохранять постоянное значение $P = P_0 = \lambda t^0 < P_*$. В этом случае справедливо уравнение (3.1.2.3), следуя которому при $P < P_*$ будет $\dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_{00} = const$. Таким образом, величина φ_{00} является максимальным значением φ за весь рассматриваемый процесс (3.1.5.1). Однако, легко увидеть, что при $\varphi_0 \to 0$ выполняется $\varphi_{00} \to 0$. Следовательно, при выполнении условия (3.1.5.6) положение равновесия является устойчивым.

Пусть теперь $t^0 > P_* / \lambda$, т. е.:

$$P^0 > P_* \tag{3.1.5.7}$$

В этом случае решение (3.1.5.5) будет справедливо вплоть до значения $t = t^* = P_* / \lambda$. При этом $\varphi(t_*) = \varphi^* = \dfrac{P_E\varphi_0}{P_E - \lambda t_*}$. При $t > t_*$ выражение в угловых скобках правой части (3.1.5.4) становится положительным, и эти угловые скобки можно заменить на обычные.

Решение (3.1.5.4), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(t_*) = \varphi_*$, имеет вид:

$$\varphi = \varphi_* \exp\left[-k\frac{P_E}{P_*}\left(t - t_*\right)\right]\left(\frac{P_E - \lambda t_*}{P_E - \lambda t}\right)^{\beta} \tag{3.1.5.8}$$

где $\beta = 1 + k\dfrac{P_E(P_E - P_*)}{\lambda P_*}$. Решение (3.1.5.8) будет справедливо до момента $t = t_0$, причем для конечной точки этого этапа:

$$\varphi_{00} = \varphi(t_0) = \varphi_* \exp\left[-k\frac{P_E}{P_*}(t_0 - t_*)\right]\left(\frac{P_E - \lambda t_*}{P_E - \lambda t_0}\right)^{\beta}$$

При $t > t^0$ выполняется $P = \lambda t^0 = P^0 = const$, и изменение φ подчиняется дифференциальному уравнению (3.1.2.3), в котором P следует заменить на P^0. В силу неравенства (3.1.5.7), его решение при начальном условии $\varphi(t_0) = \varphi_{00}$ получается по формуле (3.1.2.5), если заменить в ней φ_0 на φ_{00}, а P — на P^0.

В силу неравенства (3.1.5.7), в этом решении $\lambda > 0$, а величина φ монотонно возрастает с ростом t, стремясь к бесконечности при $t \to \infty$. Следовательно, при условии (3.1.5.7) положение равновесия является неустойчивым.

Таким образом, критическое значение нагрузки равно P_* и не зависит от скорости нагружения. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что условия потери устойчивости определяются диаграммой мартенситной неупругости предельно медленных процессов, а эти процессы считаются склерономными. Аналогичный результат получен экспериментально для нагружения деформируемого стержня из никелида титана сжимающим напряжением в режиме мартенситной неупругости [29].

3.1.6 Выводы

Проведенное на примере простейшей задачи о жестком стержне на реономном шарнире исследование влияния реономных свойств, характерных для СПФ, на устойчивость элементов из этих материалов, позволяет сделать следующие выводы:

1. Для рассматриваемой реономной модели имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале.
2. Критические нагрузки, полученные при решении данной задачи в квазистатической и динамической постановках, совпадают.
3. Критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на касательный модуль, вычисленный по диаграмме мартенситной неупругости в случае предельно медленного нагружения.
4. Скорость нагружения не влияет на значение критической нагрузки потери устойчивости.

3.2 Исследование влияния реономных свойств СПФ в рамках первой модели для деформируемого стержня из СПФ

3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача потери устойчивости стержня из СПФ при монотонном нагружении продольным усилием в режиме мартенситной неупругости. Невозмущенный процесс представляет собой равномерное по сечению продольное сжатие. Прогиб и изгибающий момент в тривиальном процессе равны нулю. Анализируется устойчивость по отношению к малым возмущениям прогиба и продольной сжимающей нагрузки.

В общем случае при выпучивании часть сечения стержня находится в области дополнительного структурного превращения, связанного с догрузкой, а остальная часть принадлежит области разгрузки. В зоне разгрузки функция $\psi(\sigma)$ принимает значения, отличные от (2.1.1.12) — (2.1.1.14), а именно, сохраняет постоянное значение, независящее от величины σ. Здесь $\psi'(\sigma(\tau)) = 0$, а подынтегральная функция правой части (2.1.1.17) для тех значений τ, для которых $\dot{\sigma} < 0$, будет равна нулю. Поэтому в зоне разгрузки величина χ не может обратиться в нуль или стать отрицательной, хотя и будет убывать по закону (2.1.1.18). Таким образом, как в зоне догрузки, так и в зоне разгрузки, при выпучивании будет выполняться неравенство (2.1.1.15), и поэтому для обеих этих зон в определяющих соотношениях (2.1.1.4) и (2.1.1.11) угловые скобки можно заменить на обычные круглые.

Граница между зонами догрузки и разгрузки заранее неизвестна и должна определяться в процессе решения задачи. Такая ситуация имеет место при решении задачи устойчивости в рамках концепции «фиксированной нагрузки», когда возможные возмущения внешней нагрузки при анализе выпучивания не учитываются. Задача устойчивости стержня в такой постановке без учета реономных свойств СПФ решена в [73].

При учете возможных малых возмущений внешней нагрузки задача потери устойчивости элементов из СПФ даже без учета реономных свойств этих материалов становится неопределенной. Дело в том, что положение границы между зонами догрузки и разгрузки в сечении рассматриваемого элемента испытывает конечные изменения при малых возмущениях внешней силы. При этом значение критической нагрузки изменяется на конечную величину. Однако может быть поставлена задача определения минимальной критической силы, соответствующей наличию малых возмущений внешней нагрузки. Такая задача имеет однозначное решение, соответствующее случаю, когда все сечение испытывает догрузку и соответствующий дополнительный структурный переход. Эта постановка задачи соответствует концепции «повсеместного дополнительного структурного перехода». В данном разделе решение получено именно в рамках этой концепции, т. е. найдено минимально возможное значение критической силы. Согласно приведенным выше рассуждениям, в таком процессе в каждой точке сечения выполняется неравенство (2.1.1.15), и угловые скобки в определяющих соотношениях (2.1.1.4) или (2.1.1.11) можно опустить.

3.2.2 Вывод разрешающего уравнения

Считается, что сечение стержня не зависит от продольной координаты, имеет площадь F и является симметричным относительно главных центральных осей инерции. На торцах стержня приложены напряжения, сжимающие его вдоль оси и симметрично распределенные по площади сечения торцов. Наряду с тривиальным процессом, состоящим в равномерном сжатии стержня вдоль оси, рассматривается мало отличающийся от него возмущенный процесс, сводящийся к выпучиванию в одной из плоскостей симметрии в направлении координаты z, которая отсчитывается от средней линии. Для решения задачи устойчивости необходимо получить линеаризованные уравнения относительно малых возмущений тривиального процесса. Величины, соответствующие тривиальному процессу, не зависят от координаты z и ниже будут обозначаться индексом ноль, соответствующие возмущенному процессу — величиной без индекса, а малые отклонения возмущенного процесса от тривиального — знаком вариации δ. В результате для силовых факторов получается:

$$\begin{gathered}\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma, \psi(\sigma) = \psi(\sigma_0) + \delta\psi, \\ \delta\psi = \psi'(\sigma_0)\delta\sigma, M_0 = 0, \delta M = \int_F \delta\sigma z\, dz\end{gathered} \tag{3.2.2.1}$$

Принимается гипотеза плоских сечений для полных деформаций, согласно которой:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon, \quad \delta\varepsilon = z\delta\kappa, \quad \kappa_0 = 0 \tag{3.2.2.2}$$

В (3.2.2.2) κ — кривизна нейтральной линии. Подстановка (3.2.2.1) и (3.2.2.2) для возмущенного процесса в определяющее соотношение (2.1.1.11) дает:

$$\begin{gathered}\dot{\varepsilon}_0 + z\delta\dot{\kappa} = \frac{\dot{\sigma}_0}{E} + \frac{\delta\dot{\sigma}}{E} + \\ + k\left\langle \rho_D\psi(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{E} + \rho_D\psi'(\sigma_0)\delta\sigma + \frac{\delta\sigma}{E} - \delta\kappa z \right\rangle\end{gathered} \tag{3.2.2.3}$$

Для тривиального процесса определяющее соотношение (2.1.1.11) сводится к:

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{E} + k\left\langle \rho_D\psi(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{E} \right\rangle \tag{3.2.2.4}$$

В силу сказанного, в предыдущем пункте в формулах (3.2.2.3) и (3.2.2.4) угловые скобки для рассматриваемых процессов можно заменить на обычные. Сопоставление получившихся после этого формул для малых возмущений тривиального процесса дает:

$$z\left(\delta\dot{\kappa}+k\delta\kappa\right)=\frac{\delta\dot{\sigma}}{E}+k\delta\sigma\left[\rho_D\psi'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right] \qquad (3.2.2.5)$$

Левая часть (3.2.2.5) пропорциональна z. Следовательно, решение дифференциального уравнения (3.2.2.5) относительно $\delta\sigma$ также пропорционально z: $\delta\sigma = z\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ не зависит от z. Используя последнее соотношение (3.2.2.1), соответствующее решение можно записать в виде:

$$\delta\sigma=\frac{\delta M}{J}z \qquad (3.2.2.6)$$

где J — момент инерции. Далее для вариации кривизны в силу малости рассматриваемых возмущений используется приближенное линейное выражение:

$$\kappa=-\delta w'' \qquad (3.2.2.7)$$

где δw — вариация прогиба ($w_0=0$), а штрих обозначает производную по продольной координате. Вариация момента определяется через продольную силу P и вариацию прогиба:

$$\delta M = P\delta w \qquad (3.2.2.8)$$

Подстановка (3.2.2.6) — (3.2.2.8) в (3.2.2.5) дает:

$$EJ\dot{w}''+P\dot{w}+\dot{P}w+kPw\left[1+E\rho_D\psi'(\sigma_0)\right]+kEJw''=0 \qquad (3.2.2.9)$$

Здесь и далее для сокращения записи знак вариации у w опущен.

Далее рассматривается задача устойчивости для стержня длинной L, шарнирно закрепленного по обоим торцам. Применяя к уравнению (3.2.2.9) процедуру метода разделения переменных: $w(x,t)=w_1(t)w_2(x)$, получаем:

$$\frac{P\left[\dot{w}_1(t)+kw_1(t)\left(1+\rho_D E\psi'(\sigma_0)\right)\right]+\dot{P}w_1(t)}{EJ\left[\dot{w}_1(t)+kw_1(t)\right]}=-\frac{w_2''(x)}{w_2(x)}=C \qquad (3.2.2.10)$$

где C — постоянная, не зависящая ни от t, ни от x. Второе из уравнений (3.2.2.10) при граничных условиях $w(0)=w(L)=w''(0)=w''(L)=0$, соответствующих шарнирному опиранию, представляет собой задачу на собственные значения, имеющую ненулевое решение только для случая $C=\frac{\pi^2 j^2}{L^2}$, где j — целое число. В результате получаются $w(x,t)=w_1(t)\sin\frac{\pi jx}{L}$, где функция $w_1(t)$ — своя для каждого значения j и должна удовлетворять уравнению:

$$\left(P-P_j^e\right)\dot{w}_1+kw_1\left[P\left(1+\rho_D E\psi'(\sigma_0)\right)-P_j^e\right]+\dot{P}w_1=0 \qquad (3.2.2.11)$$

Здесь $P_j^e = \dfrac{EJ\pi^2 j^2}{L^2}$ — Эйлерова критическая сила номер j для упругого стержня, а аргумент t у функции $w_1(t)$ для краткости опущен.

Пусть скорость изменения внешней нагрузки мала настолько, что слагаемым $\dot{P}w_1$ в (3.2.2.11) можно пренебречь. В этом случае для амплитуды прогиба $w_1(t)$ справедливо дифференциальное уравнение:

$$\frac{dw_1}{w_1} = -k\left[1 + \rho_D E\psi'(\sigma_0)\right]\frac{P_j(\sigma_0) - P}{P_j^e - P} \qquad (3.2.2.12)$$

где введено обозначение $P_j(\sigma_0) = P_j^e / \left[1 + \rho_D E\psi'(\sigma_0)\right]$.

3.2.3 Определение критического состояния

Решение (3.2.2.12), удовлетворяющее начальному условию $w_1(0) = w_0$ для $P \neq P_j^e$, имеет вид:

$$w_1(t) = w_0 \exp(-\lambda t) \qquad (3.2.3.1)$$

$$\lambda = k\left[1 + \rho_D E\psi'(\sigma_0)\right]\frac{P_j(\sigma_0) - P}{P_j^e - P} \qquad (3.2.3.2)$$

Величина $\psi(\sigma)$, обладающая свойствами функции распределения, не может убывать с ростом σ. Используемые при описании поведения СПФ материальные функции (соответствующие распределениям экспоненциальному, нормальному и Вейбулла) соответствуют монотонно возрастающим функциям распределения. Следовательно, $\psi'(\sigma_0) > 0$ (кроме нулевой точки для распределения Вейбулла, где соответствующая производная равна нулю), и поэтому $P_j(\sigma_0) < P_j^e$ для одного и того же значения j. Пусть нагрузка P монотонно возрастает от нулевого значения. До тех пор, пока $P < P_1(\sigma_0)$, поскольку $P_1(\sigma_0) < P_1^e$, согласно (3.2.3.2), выполняется $\lambda > 0$, и амплитуда начального возмущения прогиба $w_1(t)$ (3.2.3.1) монотонно убывает с ростом t. Если $P = P_1(\sigma_0)$, то $\lambda = 0$, и амплитуда прогиба сохраняет постоянное (начальное) значение. В обоих этих случаях тривиальный процесс квазистатического сжатия прямолинейного стержня следует признать устойчивым по Ляпунову. Если же $P_1(\sigma_0) < P < P_1^e$, то $\lambda < 0$, и амплитуда прогиба экспоненциально возрастает от начального значения с ростом t. Тривиальный процесс является неустойчивым. Следовательно, критическое значение нагрузки удовлетворяет уравнению:

$$P^* = P_1\left(P^* / F\right) \qquad (3.2.3.3)$$

Здесь учтено, что при $P = P^*$ выполняется $\sigma_0 = P^*/F$. Соотношение (3.2.3.3) можно представить в виде $P^* = \dfrac{E'(\sigma^*)\pi^2 J}{L^2}$, где величина E' определяется по формуле $\dfrac{1}{E'(\sigma^*)} = \dfrac{1}{E} + \rho_D \psi'(\sigma^*)$ и представляет собой значение касательного модуля, определяемого по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке, соответствующей потере устойчивости.

Соотношение (3.2.3.3) в случае использования материальных функций (2.1.1.12) — (2.1.1.14) представляет собой трансцендентное уравнение относительно критической нагрузки P^* с параметром в виде длины стержня L. Это уравнение можно явно разрешить относительно L, т. е. выразить критическую длину L^* через величину продольной силы P или действующее напряжение $\sigma = P/F$ (при явно заданном значении момента инерции J):

$$L^* = \pi \sqrt{\frac{EJ}{F\sigma\left[1 + \rho_D E \psi'(\sigma)\right]}} \qquad (3.2.3.4)$$

3.2.4 Исследование скачка критических напряжений

Далее, для определенности рассматривается стержень прямоугольного поперечного сечения $(b \times h)$, где h — высота сечения в плоскости изгиба. Для отношения $\xi = L^*/h$ критической длины стержня из СПФ к высоте сечения в случае функции $\psi(\sigma)$, соответствующей нормальному распределению (2.1.1.13), из (3.2.3.4) получаем:

$$\xi = \lambda \left\{ s + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{0.5} e\rho_D s \left[\exp\left(-\frac{(s+s_z)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(s-s_z)^2}{2}\right) \right] \right\}^{-0.5} \qquad (3.2.4.1)$$

где $s = \sigma/\sigma_0$ — безразмерное напряжение, $e = E/\sigma_0$ — величина, обратная упругой деформации, соответствующей напряжению σ_0, а $s_z = \sigma_1/\sigma_0$ — безразмерное значение порогового напряжения, $\lambda = \pi(e/12)^{0.5}$. Формула (3.2.4.1) аналогична формуле, полученной в [73] при решении задачи устойчивости стержня из СПФ в случае его нагружения в режиме мартенситной неупругости без учета реономных свойств СПФ. Совпадение результатов вполне естественно, поскольку, согласно полученному решению, момент потери устойчивости определяется свойствами предельно медленной диаграммы мартенситной неупругости СПФ, а для описания этой диаграммы взяты те же определяющие соотношения, что и в работе [73]. Необходимо отметить, что потеря устойчивости в [73] рассматривалась как бифуркация формы равновесия, т. е. с использованием совсем другого метода. Факт совпадения результатов свидетельствует об адекватности принимаемых в данном разделе гипотез.

Все приведенные ниже результаты построены для $e = 400$. На рис. 3.2.1 кривая 1 является графиком зависимости (3.2.4.1), полученным для $s_z = 2$, $\rho_D = 0.08$, что соответствует никелиду титана. Кривая 2 соответствует решению упругой задачи устойчивости для того же значения модуля Юнга и приведена для сравнения.

Как видно, зависимость критической длины стержня из СПФ от действующего напряжения не является монотонной, что объясняется немонотонной зависимостью касательного модуля диаграммы мартенситной неупругости от напряжения. В результате каждому значению критической длины, расположенному между минимумом и максимумом на кривой 1, соответствует не одно, а три значения действующих напряжений. Нагрузка, действующая на стержень из СПФ в процессе его испытания, растет с нулевого значения. Поэтому сначала будет достигнуто минимальное из трех значений напряжения, и произойдет потеря устойчивости. Следовательно, из трех значений напряжения, соответствующих заданной в рассматриваемом интервале длине стержня, физический смысл имеет лишь одно значение — наименьшее. Поэтому участок кривой 1 от точки минимума и до точки с той же ординатой, но лежащей на кривой 2, никогда не реализуется. Две эти точки необходимо соединить горизонтальным отрезком и заменить этим отрезком указанный выше участок кривой 1. Отсюда следует важный с практической точки зрения вывод: если уменьшающееся значение безразмерной длины стержня переходит через точку минимума на кривой 1 сверху вниз, то при весьма малом уменьшении длины критические напряжения могут многократно (почти в 20 раз) увеличиться. Таким образом, если в конструкции допустимо использовать работающий на сжатие стержень из СПФ, длина которого может быть близка к минимальному значению, изображенному на рис. 3.2.1, то лучше взять стержень, длина которого чуть меньше, а не чуть больше этого минимального значения. При этом за счет небольшого уменьшения длины стержня получается многократный выигрыш в значении критической силы. Необходимо отметить, что эффект повышенного сопротивления потери устойчивости коротких стержней из СПФ, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости, экспериментально обнаружен в [74].

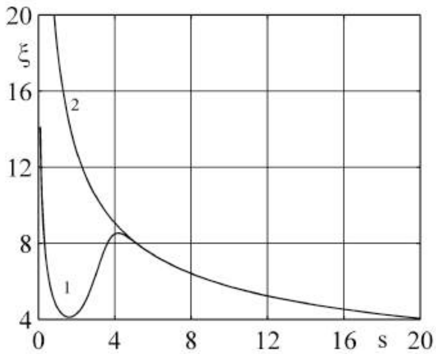


Рисунок 3.2.1

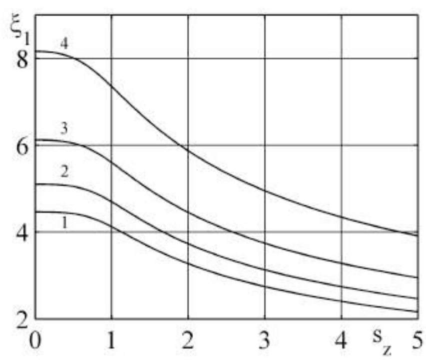


Рисунок 3.2.2

Величина безразмерной длины стержня, соответствующей точке минимума ξ_1, зависит от безразмерных параметров s_z, ρ_D и e. На рис. 3.2.2 изображены графики зависимости ξ_1 от s_z для различных значений ρ_D. Кривая 1 построена для $\rho_D = 0.08$, кривая 2 — для $\rho_D = 0.06$, кривая 3 — для $\rho_D = 0.04$, кривая 4 — для $\rho_D = 0.02$. Как видно, ξ_1 уменьшается с ростом ρ_D и s_z. С ростом значения параметра e величина ξ_1 несколько возрастает.

Для случая функции $\psi(\sigma)$, соответствующей экспоненциальной функции распределения, аналогичное (3.2.4.1) условие имеет вид:

$$\xi = \lambda\left\{s + 0.5e\rho_D s\left[\exp\left(-\left|s - s_1\right|\right) + \exp\left(-(s + s_1)\right)\right]\right\}^{-0.5} \qquad (3.2.4.2)$$

На рис. 3.2.3 приведены графики зависимости (3.2.4.2), построенные для $\rho_D = 0.08$ и различных значений безразмерного порогового напряжения s_z. Кривая 1 соответствует $s_z = 0$, кривая 2 — $s_z = 2$, кривая 3 — $s_z = 3$, кривая 4 — $s_z = 5$. Кривая 5 построена по упругому решению. Кривые для $s_z \ge 1$ содержат точку излома касательной при $s = s_z$, которая одновременно является и точкой минимума функции $\xi = \xi(s)$. На рис. 3.2.4 изображены графики зависимости минимальной относительной длины стержня от s_z для случая функции $\psi(\sigma)$, соответствующей экспоненциальному распределению (3.2.4.2). Обозначения кривых на рис. 3.2.2 и 3.2.4 совпадают. Согласно рис. 3.2.2 и 3.2.4, минимальные значения критической длины стержня в случае функции $\psi(\sigma)$, соответствующей экспоненциальному распределению, при прочих равных условиях имеют несколько большие значения, чем в случае, когда функция $\psi(\sigma)$ соответствует нормальному распределению.

Для случая функции $\psi(\sigma)$, соответствующей распределению Вейбулла, решение (3.2.3.4) принимает вид:

$$\xi = \lambda\left[s + \alpha e\rho_D s^{\alpha} \exp\left(-s^{\alpha}\right)\right]^{-0.5} \qquad (3.2.4.3)$$

Графики зависимости (3.2.4.3) для различных значений α при $\rho_D = 0.08$ приведены на рис. 3.2.5. Линия 1 соответствует $\alpha = 1$, т. е. фактически материальной функции, соответствующей экспоненциальному распределению без пороговых напряжений, линия 2 — $\alpha = 2$, линия 3 — $\alpha = 3$, линия 4 — $\alpha = 5$. Как видно, основные качественные особенности, характерные для функций $\psi(\sigma)$, соотвествующих нормальному и экспоненциальному распределениям, сохраняются и для функции $\psi(\sigma)$, соответствующей распределению Вейбулла. Чем больше значение параметра модели α, тем сильнее эффект немонотонности и скачок предельных напряжений при переходе безразмерной длины стержня через минимальное значение.

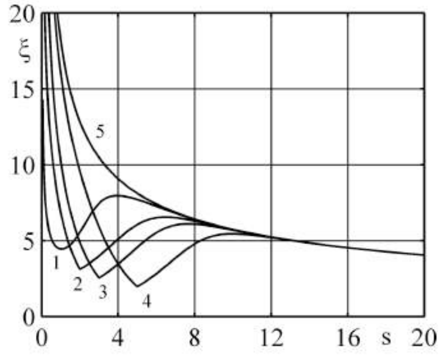


Рисунок 3.2.3

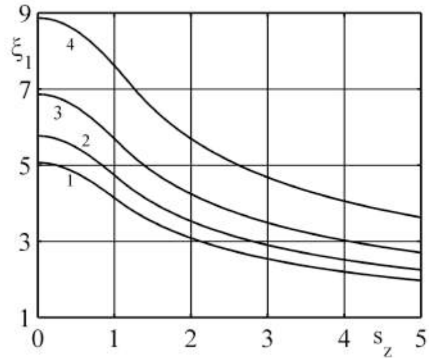


Рисунок 3.2.4

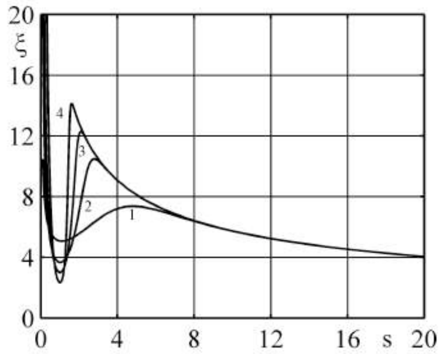


Рисунок 3.2.5

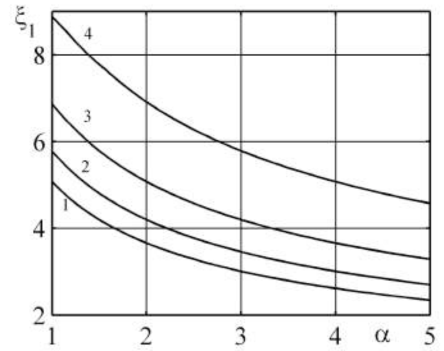


Рисунок 3.2.6

Само минимальное значение безразмерной длины убывает с ростом α. Этот факт иллюстрируется на рис. 3.2.6, где приведены графики зависимости минимального значения безразмерной длины стержня ξ_1 от величины α для ряда значений параметра ρ_D. Нумерации кривых на рис. 3.2.6 и 3.2.2 совпадают. Таким образом, с ростом параметра ρ_D величина ξ_1 падает так же, как и в случае функции $\psi(\sigma)$, соответствующей нормальному и экспоненциальному распределениям.

В связи с небольшими значениями параметра относительной длины ξ_1 возникает вопрос о корректности применения гипотезы плоских сечений для анализа устойчивости столь коротких стержней. Эта проблема исследована в [75].

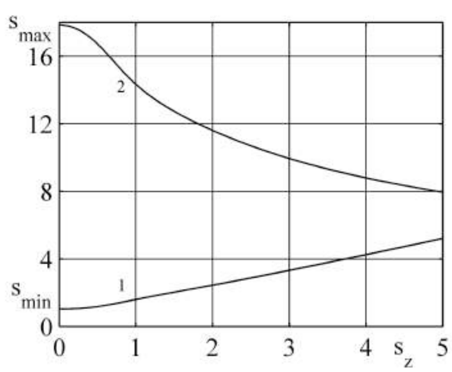


Рисунок 3.2.7

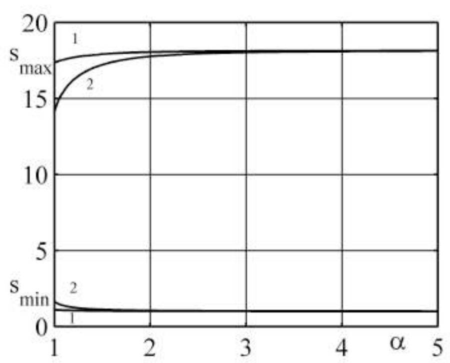


Рисунок 3.2.8

Рис. 3.2.7 и 3.2.8 позволяют оценить величину скачка, который претерпевает безразмерное критическое напряжение в тот момент, когда безразмерная длина стержня переходит через значение ξ_1. Рис. 3.2.7 построен для случая материальной функции, соответствующей нормальному распределению для $\rho_D = 0.08$. Кривая 1 определяет зависимость безразмерного значения минимального критического напряжения от s_z. Кривая 2 построена для безразмерных напряжений, обозначенных как $s_{\max}$ и соответствующих по кривой упругой устойчивости длине стержня $L_{\min}$. Расстояние по вертикали между нижней и верхней кривой соответствует скачку безразмерных критических напряжений при переходе длины стержня через минимальное значение. Как видно, в данном случае для нулевых пороговых напряжений этот скачок является 18-кратным. С ростом величины s_z скачок напряжений падает.

На рис. 3.2.8 аналогичные кривые построены для материальной функции $\psi(\sigma)$, соответствующей функции распределения Вейбулла. Здесь уже даны графики зависимости величин $s_{\min}$ и $s_{\max}$ от параметра функции распределения α. Кривые 1 соответствуют $\rho_D = 0.08$, кривые 2 — $\rho_D = 0.02$. В данном случае скачок критических напряжений растет с насыщением при увеличении α, достигая 18-кратной величины при $\alpha \geq 3$.

3.2.5 Выводы

В рамках модели реономного поведения СПФ, представленной в разделе 2.1, решена задача об устойчивости деформируемого стержня из СПФ, нагружаемого в режиме мартенситной неупругости. Показано, что критическое значение нагрузки может быть найдено по формуле Эйлера с заменой модуля Юнга на касательный модуль, вычисленный по диаграмме мартенситной неупругости в случае предельно медленного нагружения СПФ в точке потери устойчивости. В силу немонотонной зависимости этого касательного модуля от напряжений, критические нагрузки претерпевают скачкообразное увеличение при переходе снижающейся длиной стержня некоторого критического значения $L_{\min}$. Величина $L_{\min}$ уменьшается с ростом пороговых напряжений и параметра α функции $\psi(\sigma)$, которая соответствует распределению Вейбулла, а также с ростом предельной деформации ρ_D. Скачок напряжений может приводить к многократному увеличению предельной нагрузки. Величина скачка падает с ростом пороговых напряжений и растет с насыщением при росте параметра α.

3.3 Исследование влияния реономных свойств СПФ на устойчивость стойки Шенли в рамках вязкопластической модели со степенной зависимостью для скоростей изменения реономной деформации

3.3.1 Вывод уравнений равновесия и движения

Рассматривается задача потери устойчивости стойки Шенли, деформируемые стержни которой выполнены из СПФ, при монотонном нагружении продольным усилием в режиме мартенситной неупругости. В квазистатической постановке (постановке в форме Эйлера) будем рассматривать модельную систему, схема которой представлена на рис. 3.3.1. Считаем, что длина каждого деформируемого стержня, выполненного из СПФ, равна 2d, а расстояние между стержнями постоянно и равно 2h. Длина каждого из недеформируемых стержней равна l, а к концам недеформируемых стержней приложена вертикально направленная сила P. В тривиальном состоянии оба деформируемых стержня, каждый из которых имеет площадь поперечного сечения F, испытывают одинаковые деформации, и вся система находится в вертикальной плоскости. Отклонения возникают в тот момент, когда изменение длины первого стержня $2v_1$ становится отличным от изменения длины второго стержня $2v_2$. При этом недеформируемые стержни перестают быть вертикальными и поворачиваются на угол $\omega = arctg\dfrac{v_1 - v_2}{2h} \approx \dfrac{v_1 - v_2}{2h}$ относительно вертикальной оси. Этот поворот порождает отклонение прямой приложения внешней нагрузки от центра стержня на расстояние $w = l\sin(\omega) \approx l\omega$ (так как далее будем исследовать близкие нетривиальные положения равновесия, то все рассуждения будем вести в линеаризованной постановке по отношению к малым отклонениям от тривиального процесса). Для дальнейшего исследования удобно рассматривать безразмерное отклонение, задаваемое формулой $u = w / h = l\omega / h$ (в дальнейшем именно эту величину будем называть отклонением).

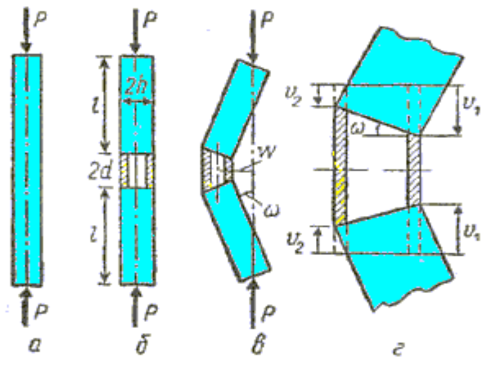


Рисунок 3.3.1

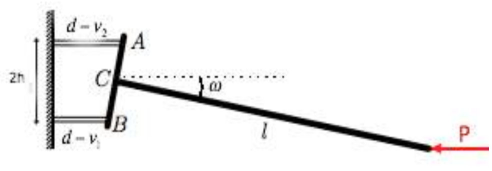


Рисунок 3.3.2

В тривиальном процессе $u = 0;\ 2P / F = 2\sigma_0;\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0,\ \sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2$, где σ_0 — напряжение в каждом из стержней. Для процессов, отличных от тривиального, уравнения равновесия, моментов и совместности деформаций в квазистатической постановке записываются в виде:

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=2P/F=2\sigma_0,\\ \sigma_1-\sigma_2=Pl\omega/Fh=2\sigma_0 u,\\ \varepsilon_1-\varepsilon_2=(v_1-v_2)/d=2\eta u\end{cases} \qquad (3.3.1.1)$$

В записи (3.3.1.1) было использовано обозначение $\eta=h^2/dl$. Для удобства также будем использовать обозначения $\Delta\sigma_i=\sigma_i-\sigma_0,\Delta\varepsilon_i=\varepsilon_i-\varepsilon_0$. Далее предлагается перейти к системе уравнений, характеризующих разность величин напряжения и деформации в возмущенном и тривиальном процессах:

$$\begin{cases}\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2=2\sigma_0 u,\\ \Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2=0,\\ \Delta\varepsilon_1-\Delta\varepsilon_2=2\eta u\end{cases} \qquad (3.3.1.2)$$

Согласно второму уравнению (3.3.1.2), возмущения внешней нагрузки не учитываются, т. е. речь идет о концепции «фиксированной нагрузки» для анализа устойчивости.

В динамической постановке с учетом сил инерции (постановка в форме Ляпунова) удобно обратиться к условиям задачи, схематично изображенной на рис. 3.3.2. В данном случае будем рассматривать систему, в которой центры стержней из СПФ закреплены неподвижно в горизонтальном направлении (при отклонении от тривиального процесса точка приложения внешней нагрузки будет изменять свое положение), а в остальном используются те же обозначения. Предположим, что стержень длины l имеет массу m, при этом стержни из СПФ и стержень АВ являются невесомыми. В тривиальном процессе уравнение движения центра масс системы будет записываться в виде:

$$\sigma_1^0F+\sigma_2^0F-2\sigma_0F=m\ddot{x}$$

Для процесса с выпучиванием, воспользовавшись формулой Ривальса для ускорения центра масс, получим (в случае малых отклонений):

$$\left(m\ddot{x}-\ddot{\omega}\sin\omega-\dot{\omega}^2\cos\omega;m\ddot{y}+\ddot{\omega}\cos\omega-\dot{\omega}^2\sin\omega\right)\approx$$
$$\approx\left(m\ddot{x}-\ddot{\omega}\omega-\dot{\omega}^2;m\ddot{y}+\ddot{\omega}-\dot{\omega}^2\omega\right)$$

Таким образом, в проекции на ось абсцисс уравнение движения, записанное для возмущенного процесса, имеет вид:

$$m\ddot{x}-\ddot{\omega}\omega-\dot{\omega}^2=\sigma_1F+\sigma_2F-2\sigma_0F$$

Так как слагаемое $\ddot{\omega}\omega+\dot{\omega}^2$, стоящее в правой части, имеет порядок старшего члена в разложении по степеням переменной отклонений u выше первого, то при исследовании устойчивости системы по первому приближению данным слагаемым можно пренебречь. В таком случае, как и прежде, уравнение движения для разности возмущенного и тривиального процессов записывается в виде: $\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 0$. Также неизменным в динамической постановке останется и уравнение совместности деформаций: $\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 = 2\eta u$. Третьим уравнением системы будет уравнение изменения количества движения, которое в точке С будет записано в виде:

$$-\sigma_1 Fh + \sigma_2 Fh + 2\sigma_0 Fl\omega = ml^2 / 12\ddot{\omega}$$

При введении обозначения $2\rho = ml/12F$ для разности возмущенного процесса и тривиального процесса это уравнение будет записываться в виде: $\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = 2\sigma_0 u - 2\rho\ddot{u}$.

Таким образом, итоговая система уравнений движения и совместности первого порядка приближения по переменной u в динамической постановке записывается в виде:

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = 2\sigma_0 u - 2\rho\ddot{u}, \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 0, \\ \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 = 2\eta u \end{cases} \qquad (3.3.1.3)$$

3.3.2 Решение задачи устойчивости в квазистатической постановке при постоянном уровне нагружения с использованием определяющих соотношений упрощенного вида

В данном параграфе речь пойдет о решении задачи устойчивости в квазистатической постановке, удовлетворяющей системе уравнений (3.3.1.2) в случае определяющих соотношений упрощенного вида относительно модели, представленной в разделе 2.4. Эти упрощения заключаются в следующем: в данном параграфе предполагается, что определяющие соотношения в виде (2.4.1.9) применимы как для случая активного нагружения, так и для случая разгрузки, то есть вместо упругой разгрузки постулируется наличие реономного поведения, удовлетворяющего аналогичному (2.4.1.9) определяющему соотношению во всех точках процесса. Это упрощение существенно облегчает процесс решения задачи устойчивости для стойки Шенли со стержнями из СПФ, так как в такой постановке не происходит эффективной смены дифференциального уравнения, и на всех этапах процесса может быть использовано одно и то же соотношение (2.4.1.9) в виде:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f\,\prime}(\sigma_i)\dot{\sigma}_i + k\Theta_i\left(\left|\psi^s(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{E} - \varepsilon_i\right|\right)^n \qquad (3.3.2.1)$$

В (3.3.2.1) индекс i используется для обозначения номера стержня ($i = 1,2$), а $\Theta_i = sign\left(\psi^s(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{E} - \varepsilon_i\right)$. Следует отметить, что в данном случае скорость изменения реономной деформации может быть как положительной, так и отрицательной (в отличие от исходных определяющих соотношений (2.4.1.9), для которых скорость реономной деформации всегда неотрицательна).

Рассматривается процесс, состоящий из двух фрагментов. На первом происходит монотонное возрастание приложенной нагрузки до некоторого максимального значения P_0, которому соответствует напряжение невозмущенного процесса σ_0. Предполагается, что на этом этапе потери устойчивости не происходит. На втором этапе (тривиальный процесс) нагрузка сохраняет постоянное значение P_0, развиваются реономные деформации, и может произойти потеря устойчивости (возмущенный процесс).

Для начала рассмотрим случай определяющих соотношений с n = 1 при постоянном нагружении, соответствующем напряжению σ_0 (достигнутому в результате активного монотонного нагружения) в тривиальном процессе. При n = 1 уравнения (3.3.2.1) сводятся к:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f\,\prime}(\sigma_i)\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^s(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{E} - \varepsilon_i\right) \tag{3.3.2.2}$$

Для тривиального процесса при постоянном напряжении ожидаем, что после фиксации внешнего напряжения будет изменяться только реономная компонента деформации:

$$\dot{\varepsilon}_0 = k\left(\psi^s(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0\right)$$

Вычитая это уравнение из уравнений (3.3.2.2), получаем:

$$\Delta\dot{\varepsilon}_i = \frac{\Delta\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f\,\prime}(\sigma_i)\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^s(\sigma_i) - \psi^s(\sigma_0) + \frac{\Delta\sigma_i}{E} - \Delta\varepsilon_i\right) \tag{3.3.2.3}$$

Так как в данном разделе речь идет о малых значениях переменной u (характеризующей отклонение системы) и, следовательно, о малых отклонениях напряжений в стержнях по отношению к напряжению в этих стержнях, наблюдаемых в тривиальном процессе, а также если исходить из возможности разложения в ряд Тейлора функций, зависящих от σ_i в точке σ_0, то каждый член с более высокой степенью $\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_0$ есть член более высокого порядка малости. Учитывая также то, что нагрузка постоянна, можем записать: $\Delta\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}_i - \dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}_i - 0 = \dot{\sigma}_i$. Пользуясь этим при разложении (3.3.2.3) в ряд Тейлора и отбрасывая члены порядка выше первого (для целей дальнейшего применения теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению), получаем:

$$\Delta\dot{\varepsilon}_i = \frac{\Delta\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f\,\prime}(\sigma_0)\Delta\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^{s\,\prime}(\sigma_0)\Delta\sigma_i + \frac{\Delta\sigma_i}{E} - \Delta\varepsilon_i\right) \tag{3.3.2.4}$$

Возвращаясь к системе уравнений (3.3.1.2) и продифференцировав по времени каждое из этих уравнений (учитывая, что нагружение постоянно, то есть $\dot{\sigma}_0 = 0$), получаем:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\sigma}_1 - \Delta\dot{\sigma}_2 = 2\sigma_0 \dot{u}, \\ \Delta\dot{\sigma}_1 + \Delta\dot{\sigma}_2 = 0, \\ \Delta\dot{\varepsilon}_1 - \Delta\dot{\varepsilon}_2 = 2\eta\dot{u} \end{cases} \tag{3.3.2.5}$$

Далее вычитаем уравнение (3.3.2.4), записанное для второго стержня, из уравнения (3.3.2.4), характеризующего поведение первого стержня, и в результат операции подставляем уравнения из систем (3.3.1.2) и (3.3.2.5). В итоге получаем дифференциальное уравнение изменения переменной u, характеризующей отклонение от тривиального процесса:

$$2\eta\dot{u} = \frac{2\sigma_0\dot{u}}{E} + 2\psi^f{}'(\sigma_0)\sigma_0\dot{u} + k\left(2\psi^s{}'(\sigma_0)\sigma_0 u + \frac{2\sigma_0 u}{E} - 2\eta u\right),$$

которое может быть переписано в виде:

$$\dot{u} = -k\frac{\left(1 - \frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^s{}'(\sigma_0) + \frac{1}{E}\right)\right)}{\left(1 - \frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^f{}'(\sigma_0) + \frac{1}{E}\right)\right)}u \tag{3.3.2.6}$$

Из однородности и линейности уравнения (3.3.2.6) следует существование тривиального решения $u \equiv 0$. Это решение соответствует тривиальному процессу, происходящему без возмущений. Далее проведем исследование этого решения уравнения (3.3.2.6) на устойчивость по Ляпунову. Для этого запишем общий вид решения уравнения (3.3.2.6):

$$u(t) = u_0 e^{-k\frac{\left(1-\frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^s{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)}{\left(1-\frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^f{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)}(t-t_0)} \tag{3.3.2.7}$$

Устойчивость нулевого решения уравнения (3.3.2.6) будет зависеть только от знака показателя экспоненты (3.3.2.7). Стоит отметить, что, исходя из условия (2.3.1.12), при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$, где $\sigma_{\lim}$ задается уравнением неявного вида:

$$\sigma_{\lim} = \frac{\eta}{\psi^s{}'(\sigma_{\lim}) + \frac{1}{E}} = \frac{Eh^2/dl}{\psi^s{}'(\sigma_{\lim})E + 1} \tag{3.3.2.8}$$

показатель экспоненты принимает только отрицательные значения для любого момента времени, то есть любое начальное возмущение u_0 будет монотонно убывать до нуля, что означает асимптотическую устойчивость нулевого решения при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$. В случае $\sigma_0 = \sigma_{\lim} + \varepsilon$ и при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, таком, что $\sigma_0 = \sigma_{\lim} + \varepsilon < \sigma^f_{\lim}$, где

$$\sigma^f_{\lim} = \eta / \left(\psi^{f\,\prime}\left(\sigma^f_{\lim}\right) + \frac{1}{E} \right) \qquad (3.3.2.9)$$

показатель экспоненты становится положительным, поэтому любое сколь угодно малое начальное возмущение будет экспоненциально возрастать (то есть, начиная с некоторого момента, выйдет из любой заданной ε-трубки), что доказывает неустойчивость нулевого решения при $\sigma_0 > \sigma_{\lim}, \sigma_0 < \sigma^f_{\lim}$. Таким образом, было доказано, что уравнение (3.3.2.8) в неявном виде определяет минимальный уровень критической силы, при которой происходит потеря устойчивости. Этот уровень напряжений и будем считать критическим. Уровень критической нагрузки, согласно первому из уравнений (3.3.1.1), в данном случае будет равен $P_{\lim} = \sigma_{\lim} F$. Следует отметить, что, согласно (3.3.2.8), критическая нагрузка вычисляется с использованием касательного модуля к диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости.

Исходя из полученных результатов, необходимо сделать ряд замечаний:

1) Несмотря на то, что при уровне $\sigma_0 = \sigma_{\lim}$ нулевое решение уравнения (3.3.2.6) является устойчивым (так как равно начальному отклонению в любой момент времени), нельзя утверждать, что исходная нелинеаризованная система при этом уровне напряжений будет устойчивой. Исследование устойчивости исходной нелинеаризованной системы при уровне нагружения $\sigma_0 = \sigma_{\lim}$ требует гораздо более трудоемкого анализа, при этом несет в себе незначительный практический смысл, поэтому в данной работе оно не приводится.

2) Следует обратить внимание на применяемый выше критерий устойчивости: в классическом случае применение критерия устойчивости Эйлера означает рассмотрение квазистатической постановки, при этом критерием устойчивости / неустойчивости является отсутствие / наличие (соответственно) смежной формы равновесия системы, отличной от тривиального равновесия. При решении рассматриваемой выше задачи применяется критерий, связанный с анализом возмущенных решений без учета сил инерции. В рамках данного критерия, если тривиальное решение уравнения развития отклонений является устойчивым по Ляпунову, то система является устойчивой, в противном же случае она является неустойчивой.

Далее переходим к рассмотрению задачи устойчивости стойки Шенли в квазистатической постановке и при постоянном уровне нагружения с использованием определяющих соотношений (3.3.2.1) при значениях параметра n > 1. В данном параграфе ограничимся рассмотрением случая достижения уровня напряжения σ_0 в тривиальном процессе вследствие нагружения с конечной скоростью или предельно быстрого нагружения. В ходе работы в рамках этого ограничения непротиворечивым будет наложение еще одного ограничения: предположим, что отклонение u и величины порядка u предельно малы (значительно меньше разницы предельно медленной неупругой и реальной неупругой деформации в тривиальном процессе в любой момент времени). В рамках таких ограничений выражение, стоящее под знаком модуля уравнения (3.3.2.1), будет неотрицательным во всех точках, поэтому для дальнейшего исследования достаточно рассматривать определяющие соотношения в виде:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_i)\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^{s}(\sigma_i) + \frac{\sigma_i}{E} - \varepsilon_i\right)^n \qquad (3.3.2.10)$$

Уравнение тривиального процесса может быть записано в виде:

$$\dot{\varepsilon}_0(t) = k\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^n$$

Это уравнение имеет решение (2.4.6.2):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \psi^{s}(\sigma_0) - \frac{1}{\sqrt[n-1]{k(n-1)(t-t_1) + \dfrac{1}{(\psi^{s}(\sigma_0) - \varepsilon_0 + \sigma_0/E)^{n-1}}}}$$

Пользуясь разложением (3.3.2.10) в ряд Тейлора и игнорируя члены порядка, выше первого по отношению к переменной u, характеризующей отклонения, получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i &= \frac{\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_0)\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^n + \\ &+kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^{n-1}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_i + \frac{\Delta\sigma_i}{E} - \Delta\varepsilon_i\right)\end{aligned}$$

Вычитая из данного семейства уравнений уравнение (3.3.2.10), получаем:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\varepsilon}_i &= \frac{\Delta\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_0)\Delta\dot{\sigma}_i + \\ &+kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^{n-1}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_i + \frac{\Delta\sigma_i}{E} - \Delta\varepsilon_i\right)\end{aligned} \qquad (3.3.2.11)$$

Далее вычитаем второе уравнение семейства (3.3.2.11) из первого и, пользуясь (3.3.1.2), (3.3.2.5), а также уравнением (2.4.6.2), получаем уравнение для переменной u, характеризующей отклонения от тривиального процесса, вида:

$$\dot{u} = -\frac{kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \dfrac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0\right)^{n-1}}{\left(k(n-1)(t-t_0)\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \dfrac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0\right)^{n-1} + 1\right)} \frac{\left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right)\right)}{\left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^{f}{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right)\right)} u$$

Следует отметить, что в полученном уравнении ε_0 является константой и обозначает деформацию в начальный момент времени t_0 в каждом из стержней, наблюдаемую в тривиальном процессе.

Решение данного уравнения записывается в виде:

$$u(t)=u_0 e^{-\frac{n}{n-1}\frac{\left(1-\frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)}{\left(1-\frac{\sigma_0}{\eta}\left(\psi^{f}{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)}\ln\left((t-t_0)k(n-1)\left(\psi^{s}(\sigma_0)+\frac{\sigma_0}{E}-\varepsilon_0\right)^{n-1}+1\right)} \qquad (3.3.2.12)$$

Из вида решения (3.3.2.12) можно сделать вывод, что (так как выражение под логарифмом всегда больше единицы) границы устойчивости по Ляпунову нулевого решения (соответствующего тривиальному процессу) идентичны границам устойчивости нулевого решения уравнения (3.3.2.6), то есть минимальное значение напряжения, при котором система перестает быть устойчивой, также определяется по (3.3.2.8). Таким образом, в случае модели с определяющими соотношениями при значениях параметра n > 1 и в рамках упомянутых выше ограничений, уравнение (3.3.2.8) в неявном виде определяет минимальное значение напряжения, переходя которое система перестает быть устойчивой в рамках критерия, связанного с анализом возмущенных решений без учета сил инерции.

3.3.3 Решение задачи устойчивости в квазистатической постановке при возмущении внешнего нагружения с использованием определяющих соотношений упрощенного вида

В данном параграфе будет рассмотрена квазистатическая постановка задачи устойчивости стойки Шенли при медленном монотонном росте возмущения нагрузки ($\delta\dot{P}\approx 0$) до уровня $\delta\tilde{P}+P$ ($\delta\tilde{P}<<P$, $P=const$). Рост внешней нагрузки в тривиальном процессе (без отклонений) порождает рост напряжения в обоих стержнях на малую величину $\delta\sigma_0$. При росте внешней нагрузки напряжение растет до уровня $\delta\tilde{\sigma}_0+\sigma_0, \delta\tilde{\sigma}_0<<\sigma_0$. Используя соотношения (3.3.1.1) и вычитая уравнения, записанные для исходной невозмущенной системы (под действием постоянной нагрузки), из уравнений, характеризующих равновесия в случае наличия ненулевого возмущения внешней нагрузки, получаем:

$$\begin{cases}\delta\sigma_1-\delta\sigma_2=2(\sigma_0+\delta\sigma_0)u,\\ \delta\sigma_1+\delta\sigma_2=2\delta\sigma_0,\\ \delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_2=2\eta u\end{cases} \qquad (3.3.3.1)$$

Наибольший интерес вызывает тот случай, когда в процессе с наличием отклонения от тривиального процесса оба стержня будут догружаться в результате роста напряжений (так как такой режим не реализуется в задаче при постоянном уровне нагружения). Тогда после возникновения возмущения внешней нагрузки определяющие соотношения для стержней можно записать в виде:

$$\dot{\varepsilon}_i+\delta\dot{\varepsilon}_i=\frac{\dot{\sigma}_i+\delta\dot{\sigma}_i}{E}+\psi^f{}'\left(\sigma_i+\delta\sigma_i\right)(\dot{\sigma}_i+\delta\dot{\sigma}_i)+$$
$$+k\left(\psi^s\left(\sigma_i+\delta\sigma_i\right)+\frac{\sigma_i+\delta\sigma_i}{E}-(\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i)\right) \qquad (3.3.3.2)$$

Для системы, находящейся в состоянии постоянного напряжения (до появления возмущения внешней нагрузки), определяющие соотношения записываются в уже известном виде (3.3.2.2). Вычитая из уравнений (3.3.3.2) уравнения (3.3.2.2), получаем (учитывая, что до возникновения возмущений наблюдался исключительно тривиальный процесс, для которого $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$):

$$\delta\dot{\varepsilon}_i=\frac{\delta\dot{\sigma}_i}{E}+\psi^f{}'\left(\sigma_0\right)\delta\dot{\sigma}_i+k\left(\psi^s{}'\left(\sigma_0\right)\delta\sigma_i+\frac{\delta\sigma_i}{E}-\delta\varepsilon_i\right) \qquad (3.3.3.3)$$

Если ввести обозначения $\Delta\varepsilon_1=\delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_0, \Delta\sigma_1=\delta\sigma_1-\delta\sigma_0$, то система уравнений (3.3.3.1) может быть переписана в виде:

$$\begin{cases}\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2=2(\sigma_0+\delta\sigma_0)u,\\ \Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2=0,\\ \Delta\varepsilon_1-\Delta\varepsilon_2=2\eta u\end{cases} \qquad (3.3.3.4)$$

Полученная система (3.3.3.4) отличается от системы (3.3.1.2) исключительно видом первого уравнения. Но, принимая во внимания тот факт, что $\delta\sigma_0<<\sigma_0$, $\delta\sigma_0+\sigma_0\approx\sigma_0$, в рамках теоремы об устойчивости по первому приближению система уравнений (3.3.3.4) может быть заменена системой (3.3.1.2) с достаточной точностью. Также, исходя из предельно медленного характера роста возмущения исходного напряжения ($\delta\dot{\sigma}_0\approx 0$), система, полученная при дифференцировании по времени уравнений (3.3.3.4), может быть заменена на (3.3.2.5).

Стоит также отметить, что для тривиального процесса уравнение (3.3.3.3) может быть записано в виде:

$$\delta\dot{\varepsilon}_0=\frac{\delta\dot{\sigma}_0}{E}+\psi^f{}'\left(\sigma_0\right)\delta\dot{\sigma}_0+k\left(\psi^s{}'\left(\sigma_0\right)\delta\sigma_0+\frac{\delta\sigma_0}{E}-\delta\varepsilon_0\right) \qquad (3.3.3.5)$$

Вычитая из (3.3.3.3) уравнение (3.3.3.5), получаем уравнение вида (3.3.2.4), поэтому закон изменения параметра u, характеризующего отклонения системы от тривиального процесса, также будет записываться в виде (3.3.2.6). В итоге задача устойчивости в случае вариации внешнего нагружения в рамках текущей модели полностью сводится к задаче устойчивости стойки Шенли в квазистатической постановке в случае постоянного уровня нагружения. Из этого можно сделать вывод, что критическая нагрузка для данной задачи в случае достаточно медленного роста возмущения внешней нагрузки в рамках критерия, связанного с анализом возмущенных решений без учета сил инерции, как и ранее, задается соотношением (3.3.2.8). Аналогичным образом исследуются случаи, когда один из стержней разгружается, получая то же значение критической нагрузки.

Так же обстоят дела и при значениях параметра n > 1 в рамках рассмотрения случая, в котором оба стержня догружаются. Уравнение (3.3.3.3) для этого случая переписывается в линеаризованном виде:

$$\delta\dot{\varepsilon}_i = \frac{\delta\dot{\sigma}_i}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_0)\delta\dot{\sigma}_i + kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^{n-1}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)\delta\sigma_i + \frac{\delta\sigma_i}{E} - \delta\varepsilon_i\right)$$

и после вычитания линеаризованного уравнения для тривиального процесса:

$$\delta\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\delta\dot{\sigma}_0}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_0)\delta\dot{\sigma}_0 + kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^{n-1}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)\delta\sigma_0 + \frac{\delta\sigma_0}{E} - \delta\varepsilon_0\right)$$

оно также сводится к уже решенной ранее задаче устойчивости для уравнения (3.3.2.11). Таким образом, для случая исследования в рамках определяющих соотношений с параметром n > 1 математическая задача устойчивости по Ляпунову аналогична уже исследованной в параграфе 2.3.2 задаче. Из этого можно сделать вывод о том, что критическая нагрузка для данной задачи в рамках критерия, связанного с анализом возмущенных решений без учета сил инерции, как и ранее, задается соотношением (3.3.2.8): при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$ тривиальный процесс является асимптотически устойчивым, а при $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$ — неустойчивым.

Резюмируя результаты параграфов 2.3.2 и 2.3.3, необходимо отметить, что при использовании упрощенной версии определяющих соотношений модели, представленной в разделе 2.4 (без учета упругой разгрузки), как для случая значения параметра n = 1, так и для случая n > 1, при постоянном или изменяющемся уровне внешнего нагружения, было доказано, что в рамках критерия, связанного с анализом возмущенных решений без учета сил инерции, границей устойчивости всех вышеперечисленных задач является уровень напряжений (3.3.2.8) (при этом критическая сила потери устойчивости равна $P_{\lim} = \sigma_{\lim} F$).

3.3.4 Решение задачи устойчивости в динамической постановке при постоянном уровне нагружения в рамках определяющих соотношений упрощенного вида

В данном параграфе воспользуемся полученной в 2.3.1 системой уравнений движения и совместности (3.3.1.3), которая после дифференцирования по времени каждого из уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\sigma}_1 - \Delta\dot{\sigma}_2 = 2\sigma_0\dot{u} - 2\ddot{u}\rho, \\ \Delta\dot{\sigma}_1 + \Delta\dot{\sigma}_2 = 0, \\ \Delta\dot{\varepsilon}_1 - \Delta\dot{\varepsilon}_2 = 2\eta\dot{u} \end{cases} \tag{3.3.4.1}$$

Теперь для вывода уравнения изменения переменной u, характеризующей отклонения от тривиального процесса, достаточно вычесть уравнение для второго стержня в (3.3.2.4) из уравнений для первого и воспользоваться уравнениями систем (3.3.1.3) и (3.3.4.1). В итоге получаем следующее линейное однородное ОДУ 3 порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &u^{(3)}\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)+\ddot{u}k\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)+ \\ &\dot{u}\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)\right)+uk\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)\right)=0 \end{aligned} \tag{3.3.4.2}$$

Так как данное уравнение является линейным, а его коэффициенты постоянны, то для исследования нулевого решения данного уравнения необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} &\lambda^3\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)+\lambda^2k\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)+ \\ &\lambda\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)\right)+k\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)\right)=0 \end{aligned} \tag{3.3.4.3}$$

имели отрицательные вещественные части. Для асимптотической устойчивости нулевого решения (3.3.4.2) достаточно воспользоваться критерием устойчивости Гурвица, исходя из которого для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (3.3.4.3) были положительны, и при этом:

$$k\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)\right)-k\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)\right)>0$$

После раскрытия скобок, приведения подобных и деления на положительную константу, это неравенство сводится к хорошо известному и выполненному при идентификации параметров модели неравенству (2.3.1.12), переписанному в виде:

$$\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)-\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)>0$$

Таким образом, для выполнения критерия Гурвица (так как коэффициенты при двух старших членах всегда положительны, а, исходя из (2.3.1.12), коэффициент при первой степени становится отрицательным только при таких уровнях напряжений, для которых коэффициент при свободном члене будет отрицательным) необходимо, чтобы:

$$k\left(\eta-\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)\right)>0$$

Это неравенство сводится к неравенству $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$(где критическая нагрузка задается уравнением (3.3.2.8) и равна критической нагрузке, полученной в квазистатической постановке). В том случае, когда $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$, а свободный член характеристического уравнения (3.3.4.3) становится отрицательным, появляется корень с положительной вещественной частью, и, следовательно, нулевое решение (3.3.4.2) перестает быть устойчивым. Таким образом, критический уровень нагружения по критерию, связанному с анализом возмущенных решений без учета сил инерции, и по динамическому критерию Ляпунова для значения параметра n = 1 совпадает.

Следует отметить, что в динамической постановке задачи при $\sigma_0 > \sigma^f_{\lim}$ ($\sigma^f_{\lim}$ определяется уравнением (3.3.2.9)) два последних коэффициента характеристического уравнения (3.3.4.3) становятся отрицательными, что по критерию Гурвица означает неустойчивость нулевого решения уравнения (3.3.4.2). То есть в рамках динамического критерия Ляпунова при всех $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$ система неустойчива.

Далее рассмотрим случай параметра n > 1. Для этого достаточно вычесть уравнение для второго стержня в (3.3.2.11) из уравнения для первого стержня и в получившееся выражение подставить (3.3.1.3), (3.3.4.1) и (2.4.6.2). В итоге получаем линейное однородное ОДУ 3 порядка, но уже с переменными коэффициентами:

$$u^{(3)}\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{f}{}'(\sigma_0)\right)+\ddot{u}kn\frac{\Omega}{k(n-1)(t-t_0)\Omega+1}\rho\left(\frac{1}{E}+\psi^{s}{}'(\sigma_0)\right)+$$
$$+\dot{u}\left(\eta-\sigma_0\left(\psi^{f}{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)+ukn\frac{\Omega}{k(n-1)(t-t_0)\Omega+1}\left(\eta-\sigma_0\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)=0$$

где $\Omega=\left(\psi^{s}(\sigma_0)+\dfrac{\sigma_0}{E}-\varepsilon_0\right)^{n-1}$. Для удобства сделаем замену переменной времени:

$$\tau=\frac{1}{k(n-1)\Omega}+t-t_0,\ \ \tau\in[\frac{1}{k(n-1)\Omega};+\infty)$$

Тогда представленное дифференциальное уравнение может быть переписано в более простом и понятном виде (снова возвращаясь к обозначению временной переменной t вместо τ):

$$au^{(3)}+bt^{-1}\ddot{u}+c\dot{u}+dt^{-1}u=0 \qquad (3.3.4.4)$$

где $a,b,c,d>0, bc-ad>0$ при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$ (величина $\sigma_{\lim}$ задана согласно (3.3.2.8)). При этом если $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$, то константа d при крайнем члене будет отрицательной.

Уравнение (3.3.4.4) уже не является линейным уравнением с постоянными коэффициентами, поэтому для его исследования на устойчивость нулевого решения критерий Гурвица применяться не может. Тем не менее, исследование устойчивости нулевого решения уравнения (3.3.4.4) можно провести методом построения функций Ляпунова и Четаева. Для этого перепишем уравнение (3.3.4.4) третьего порядка в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\frac{b}{a}t^{-1}z - \frac{c}{a}y - \frac{d}{a}t^{-1}x \end{cases} \tag{3.3.4.5}$$

Для системы уравнений (3.3.4.5) функцию Ляпунова будем искать в виде:

$$V(x,y,z,t) = l_1\frac{x^2}{2} + l_2\frac{y^2}{2} + l_3\frac{z^2}{2} + l_4xz \tag{3.3.4.6}$$

Тогда ее производная по путям системы равна:

$$\begin{aligned} &\frac{dV(x,y,z,t)}{dt} = l_1x\dot{x} + l_2y\dot{y} + l_3z\dot{z} + l_4x\dot{z} + +l_4\dot{x}z = \\ &l_1xy + (l_2+l_4)yz + (l_3z + l_4x)(-\frac{b}{a}t^{-1}z - \frac{c}{a}y - \frac{d}{a}t^{-1}x) = \\ &(l_3z + l_4x)(-\frac{b}{a}t^{-1}z - \frac{d}{a}t^{-1}x) + (l_1 - l_4\frac{c}{a})xy + (l_2 + l_4 - l_3\frac{c}{a})yz \end{aligned} \tag{3.3.4.7}$$

Для отрицательной определенности этой квадратичной формы достаточно взять:

$$l_3 = \frac{b}{a}, l_4 = \frac{d}{a}, l_1 = l_4\frac{c}{a} = \frac{cd}{a^2}, l_2 = l_3\frac{c}{a} - l_4 = \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} = \frac{1}{a^2}(bc - ad)$$

Таким образом, искомая функция Ляпунова записывается в виде:

$$V(x,y,z,t) = \frac{cd}{a^2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{a^2}(bc - ad)\frac{y^2}{2} + \frac{b}{a}\frac{z^2}{2} + \frac{d}{a}xz \tag{3.3.4.8}$$

Производная функции (3.3.4.8) по путям системы (3.3.4.5) равна $\frac{dV(x,y,z,t)}{dt} = -t^{-1}(\frac{b}{a}z + \frac{d}{a}x)^2$ и является отрицательно определенной квадратичной формой. При этом сама квадратичная форма (3.3.4.8), задаваемая матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{cd}{2a^2} & 0 & \frac{d}{2a} \\ 0 & \frac{bc - ad}{2a^2} & 0 \\ \frac{d}{2a} & 0 & \frac{b}{2a} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет критерию Сильвестра для положительной определенности (так как все угловые миноры имеют определитель больше нуля при $a,b,c,d > 0, bc - ad > 0$). Таким образом, предложенная функция (3.3.4.8) действительно является функцией Ляпунова для (3.3.4.5) при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$, поэтому по теореме Ляпунова при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$ нулевое решение системы (3.3.4.5) будет асимптотически устойчивым, как следует из [76].

Аналогичным образом, в случае $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$ ($d < 0;\ a,b,c,bc-ad > 0$ при $\sigma^f_{\lim} > \sigma_0 > \sigma_{\lim}$, $d,c < 0;\ a,b,bc-ad > 0$ при $\sigma_0 > \sigma^f_{\lim}$ или $d < 0;\ a,b,-ad > 0, c = 0$ при $\sigma_0 = \sigma^f_{\lim}$) будем искать функцию Четаева в том же виде (3.3.4.6), при этом в результате подбора коэффициентов необходимо, чтобы производная по путям системы (3.3.4.7) была положительно определенной. Для этого достаточно взять функцию (3.3.4.8) с обратным знаком:

$$V(x,y,z,t) = -\left(\frac{cd}{a^2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{a^2}(bc-ad)\frac{y^2}{2} + \frac{b}{a}\frac{z^2}{2} + \frac{d}{a}xz\right) \qquad (3.3.4.9)$$

Тогда ее производная по путям системы задается положительно определенной квадратичной формой: $\dfrac{dV(x,y,z,t)}{dt} = t^{-1}\left(\dfrac{b}{a}z + \dfrac{d}{a}x\right)^2$.

Для завершения доказательства необходимо представить открытую область, содержащую нулевую точку, для всех внутренних точек которой выражение (3.3.4.9) будет положительным.

Для случая $\sigma^f_{\lim} > \sigma_0 > \sigma_{\lim}$ (при $d < 0;\ a,b,c,bc-ad > 0$) видим, что коэффициент при x^2 функции (3.3.4.9) положителен, поэтому искомая область строится в окрестности прямой $(x,y,z) = (x,0,0)$. Для случая $\sigma_0 > \sigma^f_{\lim}$ (при $d,c < 0;\ a,b,bc-ad > 0$) в качестве образующей прямой берем прямую $(x,y,z) = (-za/c,0,z)$. Подставляя уравнение прямой в соотношение (3.3.4.9) получаем:

$$V(-az/c,0,z,t) = -\frac{1}{2}z^2\left(\frac{cd}{a^2}\frac{a^2}{c^2} + \frac{b}{a} - 2\frac{d}{a}\frac{a}{c}\right) = -\frac{1}{2}z^2\left(\frac{d}{c} + \frac{b}{a} - 2\frac{d}{c}\right) = -\frac{1}{2}z^2\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) > 0$$

при ненулевом z, исходя из $c < 0;\ a,bc-ad > 0$. Для случая $\sigma_0 = \sigma^f_{\lim}$ (при $d < 0;\ a,b,-ad > 0, c = 0$) в качестве образующей прямой достаточно взять прямую $(x,y,z) = (-zb/d,0,z)$. После подстановки в (3.3.4.9) в данном случае получаем:

$$V(-bz/d,0,z,t) = -\frac{1}{2}z^2\left(\frac{b}{a} - 2\frac{d}{a}\frac{b}{d}\right) = -\frac{1}{2a}z^2\left(b-2b\right) = \frac{b}{2a}z^2 > 0$$

Таким образом, для функции (3.3.4.9) выполнены все условия теоремы Четаева, что (как следует из [76]) доказывает неустойчивость нулевого решения системы (3.3.4.5) при $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$, где величина $\sigma_{\lim}$ задана с помощью (3.3.2.8). Следует также отметить, что в рамках динамического критерия Ляпунова при значении параметра n > 1 неустойчивость была доказана для всех $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$.

3.3.5 Решение задачи устойчивости в квазистатической постановке при постоянном уровне нагружения в рамках модели с учетом упругой разгрузки

В данном параграфе вернемся к задаче в квазистатической постановке, но, в отличие от задачи, рассмотренной в параграфе 2.3.2, в данном параграфе будем предполагать, что деформируемые стержни из СПФ подчиняются определяющим соотношениям модели, представленной в разделе 2.4 (с учетом упругой разгрузки), которые могут быть переписаны в следующем виде (где $i=1,2$ — номер стержня):

$$\dot{\varepsilon}_i=\frac{\dot{\sigma}_i}{E}+\Theta_i\psi^{f}{}'(\sigma_i)\dot{\sigma}_i+k\left(\psi^s\left(\sigma_{i\_\max}\right)+\frac{\sigma_i}{E}-\varepsilon_i\right) \qquad (3.3.5.1)$$

Здесь $\Theta_i=1$ при активном нагружении i-го стержня, и $\Theta_i=0$ в остальных случаях, $\sigma_{i\_\max}$ — максимальное напряжение, которое испытывал стержень i с момента перехода в мартенситное фазовое состояние.

Сначала рассмотрим задачу в квазистатической постановке с постоянным уровнем нагружения, предполагая, что этот уровень нагружения был достигнут в результате предельно медленного процесса. Также предполагаем, что отклонения от тривиального процесса возникли после достижения этого уровня напряжения. Тогда в тривиальном процессе деформация в обоих стержнях равна:

$$\varepsilon_0=\psi^s\left(\sigma_0\right)+\frac{\sigma_0}{E} \qquad (3.3.5.2)$$

Необходимо отметить, что в случае постоянного нагружения (т. е. в рамках концепции «фиксированной нагрузки») в квазистатической постановке, согласно второму уравнению системы (3.3.1.2), в возмущенном процессе невозможна догрузка обоих стержней одновременно (так как в таком случае $\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2>0$). Без ограничения общности будем считать, что стержень с индексом $i=1$ догружается, а с индексом $i=2$ — разгружается.

Исходя из того условия, что отклонения возникают после достижения напряжения σ_0 в результате предельно медленного процесса, можем сделать вывод, что $\sigma_{2\_\max}=\sigma_0$. Тогда для второго стержня неупругая компонента деформации, как и в тривиальном процессе, будет равна $\psi^s\left(\sigma_0\right)$, а при разгрузке будет изменяться только упругая компонента деформации. Закон изменения деформации для стержня с индексом i = 2 имеет вид:

$$\varepsilon_2=\psi^s\left(\sigma_0\right)+\frac{\sigma_2}{E},\Delta\varepsilon_2=\frac{\Delta\sigma_2}{E} \qquad (3.3.5.3)$$

(второе уравнение получено в результате вычитания из (3.3.5.3) соотношения (3.3.5.2)). При этом первый стержень догружается до напряжения σ_1, а его полная деформация ε_1 не должна быть больше значения деформации, соответствующей уровню напряжений σ_1 в предельно медленном процессе, то есть:

$$\varepsilon_1 \le \psi^s\left(\sigma_1\right) + \frac{\sigma_1}{E}, \Delta\varepsilon_1 \le \psi^s\left(\sigma_1\right) - \psi^s\left(\sigma_0\right) + \frac{\Delta\sigma_1}{E} \tag{3.3.5.4}$$

Вычитая (3.3.5.3) из (3.3.5.4), получим:

$$\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 \le \psi^s\left(\sigma_1\right) - \psi^s\left(\sigma_0\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} = \psi^{s}{}'\left(\sigma_0\right)\Delta\sigma_1 + \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2}{E} + O\left(\Delta\sigma_1^2\right)$$

Будем рассматривать это неравенство в момент возникновения отклонения u_0. Подставляя уравнения системы (3.3.1.2), получаем (учитывая, что каждое уравнение системы (3.3.1.2) содержит член $O(u^2)$, опущенный для удобства записи, так как этот член не влияет на устойчивость по Ляпунову в рамках исследования на устойчивость по первому приближению):

$$2\eta u_0 \le \psi^{s}{}'\left(\sigma_0\right)\sigma_0 u_0 + \frac{2\sigma_0 u_0}{E} + O\left(u_0^2\right)$$

Это неравенство может быть переписано в виде:

$$2u_0\left(\eta - \frac{\sigma_0}{E} - \psi^{s}{}'\left(\sigma_0\right)\frac{\sigma_0}{2}\right) \le O\left(u_0^2\right) \tag{3.3.5.5}$$

Для решения задачи устойчивости в рамках критерия устойчивости Эйлера необходимо найти минимальную из величин внешней нагрузки, при которой возможна бесконечно близкая нетривиальная форма равновесия. Допустим, что в рассматриваемой задаче возможно бесконечно близкое нетривиальное равновесие, то есть для некоторого малого $u_0 > 0$ неравенство (3.3.5.5) будет выполнено. Тогда, разделив на u_0 обе части (3.3.5.5), получим:

$$2\left(\eta - \frac{\sigma_0}{E} - \psi^{s}{}'\left(\sigma_0\right)\frac{\sigma_0}{2}\right) \le O\left(u_0\right) \tag{3.3.5.6}$$

Так как это соотношение должно быть выполнено при любом сколь угодно малом u_0, при этом левая часть неравенства не зависит от u_0, то неравенство может быть выполнено исключительно в случае $\left(\eta - \frac{\sigma_0}{E} - \psi^{s}{}'\left(\sigma_0\right)\frac{\sigma_0}{2}\right) \le 0$, то есть при $\sigma_0 > \sigma_{\lim,E}$, где:

$$\sigma_{\lim,E} = \frac{\eta}{0.5\psi^{s}{}'\left(\sigma_{\lim,E}\right) + \frac{1}{E}} = \frac{Eh^2 / dl}{0.5\psi^{s}{}'\left(\sigma_{\lim,E}\right)E + 1} \tag{3.3.5.7}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ бесконечно близкая нетривиальная форма равновесия, удовлетворяющая (3.3.5.4), не существует, то есть при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ в рамках квазистатического критерия Эйлера при постоянном уровне нагружения система является устойчивой.

Заметим, что неравенство (3.3.5.6) превращается в равенство, если рассматриваем задачу устойчивости в рамках критерия Эйлера в квазистатической постановке после предельно медленного развития деформаций в первом стержне в процессе, отличном от тривиального (тогда полная деформация первого стержня равна $\varepsilon_1 = \psi^s(\sigma_1) + \sigma_1 / E$ при $\sigma_1 > \sigma_0$). В таком случае, вычитая из уравнения для деформаций в первом стержне уравнение (3.3.5.3), проводя линеаризацию и используя уравнения системы (3.3.1.2), получаем условие $2\left(\eta - \dfrac{\sigma_0}{E} - \psi^{s}{}'(\sigma_0)\dfrac{\sigma_0}{2}\right) = O(u_0)$. Это уравнение при предельно малом u_0 сводится к $\eta - \dfrac{\sigma_0}{E} - \psi^{s}{}'(\sigma_0)\dfrac{\sigma_0}{2} = 0$, решением которого является $\sigma_0 = \sigma_{\lim,E}$, где $\sigma_{\lim,E}$ определена по (3.3.5.7). Принимая во внимание тот факт, что при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ система устойчива, можем сделать вывод о том, что $\sigma_{\lim,E}$ задает минимальный уровень критического напряжения, то есть является границей устойчивости в квазистатической постановке Эйлера при постоянном уровне внешнего нагружения, достигнутом в результате предельно медленного процесса.

В (3.3.5.7) дополнительный индекс Е означает, что напряжение $\sigma_{\lim,E}$ вычислено с учетом упругой разгрузки одного из стержней (в отличие от критической нагрузки для стойки Шенли в рамках упрощенной модели (3.3.2.8), для которой считалось, что неупругие деформации наблюдаются в обоих стержнях). Следует отметить, что $\sigma_{\lim} < \sigma_{\lim,E}$, поэтому величину $\sigma_{\lim}$ можно считать консервативной оценкой критической силы, полученной в рамках концепции «повсеместного дополнительного структурного перехода», которая была представлена в разделе 3.2.

Заслуживает внимания и тот факт, что устойчивость при напряжениях $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$, где $\sigma_{\lim,E}$ определена соотношением (3.3.5.7), для случая постоянного уровня напряжения, который был достигнут в предельно медленном процессе, была получена, исходя из общих, согласующихся с экспериментальными наблюдениями соображений об упругой разгрузке после предельно медленного процесса и того предположения, что деформация для процесса с конечной скоростью не может быть больше деформации предельно медленного процесса при одинаковом значении напряжения (то есть определенный вид определяющих соотношений не предполагался). Исходя из этого, можем сделать вывод, что устойчивость в рамках критерия Эйлера при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ была доказана модельно независимо, то есть этот результат справедлив в рамках любой модели, описывающей упругую разгрузку после предельно медленного процесса, в рамках которой в любой точке выполняется неравенство (3.3.5.4). В частности, этот результат справедлив для модели (3.3.5.1) при $n \geq 1$.

Далее рассмотрим случай предельно быстрого предварительного нагружения или предварительного нагружения с конечной скоростью до уровня σ_0 в тривиальном процессе (то есть мы рассматриваем все случаи предварительного нагружения кроме предельно медленного, который был рассмотрен выше). Предполагаем, что отклонение u_0 от тривиального положения равновесия возникает в этот момент мгновенно, так что:

$$\varepsilon_0^r = \varepsilon_1^r = \varepsilon_2^r \tag{3.3.5.8}$$

Так как для модели, представленной в разделах 2.3 и 2.4, по построению выполняется неравенство (2.3.1.12), то при $\sigma_1 > \sigma_0$ также выполняется:

$$\psi^s(\sigma_1) - \psi^f(\sigma_1) \geq \psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \tag{3.3.5.9}$$

Используя (3.3.5.9) и (3.3.5.8), а также следующую цепь рассуждений:

$$\psi^s(\sigma_1) + \frac{\sigma_1}{E} - \varepsilon_1 = \psi^s(\sigma_1) - \psi^f(\sigma_1) - \varepsilon_1^r = \psi^s(\sigma_1) - \psi^f(\sigma_1) - \varepsilon_0^r \geq$$

$$\geq \psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) - \varepsilon_0^r = \psi^s(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0$$

переходим к неравенству (3.3.5.4):

$$\Delta\varepsilon_1 \leq \psi^s\left(\sigma_1\right) - \psi^s\left(\sigma_0\right) + \frac{\Delta\sigma_1}{E}$$

Для второго стержня, исходя из (3.3.5.8), будет справедливо второе из уравнений (3.3.5.3):

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{E}$$

Таким образом, математически рассматриваемая задача поиска области устойчивости эквивалентна задаче поиска критической нагрузки в случае предельно медленного предварительного нагружения, решенной ранее в данном параграфе. Из этого делаем вывод, что в рамках подхода Эйлера и при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ (где $\sigma_{\lim,E}$ определяется по (3.3.5.7)) система является устойчивой. То есть для всего класса задач было доказано, что $\sigma_{\lim,E}$ определяет критический уровень напряжений, при этом при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ система является устойчивой, из чего следует, что $\sigma_{\lim,E}$ — это минимальная критическая нагрузка в рамках концепции Эйлера.

В дополнение к представленному выше исследованию рассмотрим характер роста возникающих отклонений от тривиального процесса при:

$$\sigma_{\lim,E} < \sigma_0 < \sigma_{\lim,E}^f \tag{3.3.5.10}$$

где верхняя граница неравенства задана с помощью уравнения:

$$\sigma_{\lim,E}^f = \eta \Big/ \left(0.5\psi^{f\,\prime}\left(\sigma_{\lim,E}^f\right) + \frac{1}{E}\right) \tag{3.3.5.11}$$

Допустим, что при (3.3.5.10) отклонение от тривиального процесса возможно. При значении параметра n = 1 уравнения изменения деформации записываются в виде:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\dot{\sigma}_1}{E} + \psi^f{}'(\sigma_1)\dot{\sigma}_1 + k\left(\psi^s(\sigma_1) + \dfrac{\sigma_1}{E} - \varepsilon_1\right) \\ \dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\dot{\sigma}_2}{E} + k\left(\psi^s(\sigma_0) + \dfrac{\sigma_2}{E} - \varepsilon_2\right) \end{cases} \qquad (3.3.5.12)$$

Для тривиального процесса при постоянном нагружении уравнение эволюции полной деформации принимает вид:

$$\dot{\varepsilon}_0 = k\left(\psi^s(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0\right) \qquad (3.3.5.13)$$

Вычитая уравнение (3.3.5.13) из каждого уравнения системы (3.3.5.12), раскладывая полученные уравнения в ряд Тейлора и отбрасывая члены порядка малости по отклонениям выше первого (что допустимо по теореме Ляпунова об исследовании системы на устойчивость по первому приближению), получаем:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\Delta\dot{\sigma}_1}{E} + \psi^f{}'(\sigma_0)\Delta\dot{\sigma}_1 + k\left(\psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_1 + \dfrac{\Delta\sigma_1}{E} - \Delta\varepsilon_1\right) \\ \Delta\dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\Delta\dot{\sigma}_2}{E} + k\left(\dfrac{\Delta\sigma_2}{E} - \Delta\varepsilon_2\right) \end{cases}$$

Вычитаем второе уравнение полученной системы из первого, подставляя (3.3.1.2), (3.3.2.5) и принимая во внимание неравенство (3.3.5.10), и получаем:

$$\dot{u} = au, a = k\frac{\left(\dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(0.5*\psi^s{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right) - 1\right)}{\left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(0.5*\psi^f{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right)\right)} > 0 \qquad (3.3.5.14)$$

Решением данного уравнения будет функция $u(t) = u_0 e^{a(t-t_0)}$ с положительным показателем экспоненты, из чего можно сделать вывод о том, что при выполнении (3.3.5.10) и при наличии сколь угодно малых отклонений от тривиального процесса в начальный момент времени эти отклонения будут неограниченно возрастать с течением времени, то есть нулевое решение уравнения (3.3.5.14) при условиях (3.3.5.10) является неустойчивым по Ляпунову.

Аналогично, для случая n > 1 при постоянном уровне нагружения, достигнутом в результате предельно быстрого процесса или процесса нагружения с конечной скоростью, система уравнений в отклонениях записывается в виде:

$$\begin{cases}\Delta\dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\Delta\dot{\sigma}_1}{E} + \psi^{f}{}'(\sigma_0)\Delta\dot{\sigma}_1 + kn\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \dfrac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0(t)\right)^{n-1}\left(\psi^{s}{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_1 + \dfrac{\Delta\sigma_1}{E} - \Delta\varepsilon_1\right) \\ \Delta\dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\Delta\dot{\sigma}_2}{E} + k\left(\dfrac{\Delta\sigma_2}{E} - \Delta\varepsilon_2\right)\end{cases}$$

Вычитаем второе уравнение полученной системы из первого, пользуясь (3.3.1.2), (3.3.2.5), (2.4.6.2) и неравенством (3.3.5.10), и получаем:

$$\dot{u} = \frac{nb}{\left((n-1)(t-t_0)b+1\right)} au, a = \frac{\left(\dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(0.5*\psi^{s}{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right) - 1\right)}{\left(1 - \dfrac{\sigma_0}{\eta}\left(0.5*\psi^{f}{}'(\sigma_0) + \dfrac{1}{E}\right)\right)} > 0,$$

$$b = k\left(\psi^{s}(\sigma_0) + \frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon_0\right)^{n-1} > 0$$

Решением данного уравнения будет функция $u(t) = u_0 e^{\frac{n}{n-1} a \ln\left((t-t_0)(n-1)b+1\right)}$, которая возрастает с ростом t при уровнях напряжений, для которых выполнено (3.3.5.10). Таким образом, для случая n > 1 также можно сделать вывод о том, что при выполнении (3.3.5.10) и при наличии сколь угодно малых отклонений от тривиального процесса в начальный момент времени эти отклонения также будут неограниченно возрастать с течением времени, то есть нулевое решение уравнения (3.3.5.14) при условии (3.3.5.10) является неустойчивым по Ляпунову.

3.3.6 Решение задачи устойчивости в квазистатической постановке при учете возмущения внешнего нагружения в рамках модели с учетом упругой разгрузки

Как и в параграфе 2.3.3, рассмотрим задачу устойчивости стойки Шенли, находящейся в тривиальном равновесии под действием силы P, после чего внешняя нагрузка начинает предельно медленно и монотонно ($\delta\dot{P} \approx 0$) расти (в результате чего возникает отклонение от тривиального равновесия) до уровня $\delta\tilde{P} + P, \delta\tilde{P} << P$. Рост внешней нагрузки в тривиальном процессе (без отклонений) порождает рост напряжения в обоих стержнях на величину $\delta\sigma_0$ до уровня $\delta\tilde{\sigma}_0 + \sigma_0, \delta\tilde{\sigma}_0 << \sigma_0$. Как и ранее, наибольший интерес в данной задаче представляет тот случай, когда оба стержня догружаются (так как случай догрузки обоих стержней не реализуется в случае постоянного уровня нагружения). Такой подход соответствует рассмотрению задачи в рамках концепции «варьируемой нагрузки».

При догрузке обоих стержней данная задача устойчивости как при значении параметра n = 1, так и для n > 1 идентична задаче, решенной в параграфе 2.3.3, для упрощенной модели (так как единственное отличие моделей — учет упругой разгрузки, которая не наблюдается при активном нагружении обоих стержней), то есть из доказанного в параграфе 2.3.3 следует, что в рамках критерия, связанного с анализом возмущенных решений без учета сил инерции, критическая нагрузка задается соотношением (3.3.2.8): при $\sigma_0 < \sigma_{\lim}$ тривиальный процесс является асимптотически устойчивым, а при $\sigma_0 > \sigma_{\lim}$ — неустойчивым. Таким образом, формально критическая нагрузка при малом возмущении внешнего напряжения значительно снижается (от величины $\sigma_{\lim,E}$ до величины $\sigma_{\lim} < \sigma_{\lim,E}$), и вопрос устойчивости системы для напряжений $\sigma_0 \in (\sigma_{\lim}, \sigma_{\lim,E})$ необходимо рассмотреть более детально. Если конкретнее, то необходимо проверить выполняемость условий, означающих активное нагружение обоих стержней. Из двух первых уравнений системы (3.3.1.2) получаем $\Delta\sigma_2 = \delta\sigma_2 - \delta\tilde{\sigma}_0 = -\sigma_0 u$ (в момент достижения нагрузки $\delta\tilde{\sigma}_0 + \sigma_0$). То есть второй стержень будет догружаться только в случае $\delta\sigma_2 = \delta\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0 u \geq 0$ (в терминах деформаций второй стержень догружается только до уровня отклонений $u \leq \delta\tilde{\sigma}_0 / \sigma_0$). Из этого можем сделать вывод, что при $\sigma_{\lim} < \sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$ отклонения будут расти до тех пор, пока не будет достигнут уровень $u = \delta\tilde{\sigma}_0 / \sigma_0$. После достижения этого уровня отклонений и при дальнейшем их росте второй стержень будет разгружаться, то есть задача в таком режиме может быть сведена к задаче устойчивости при разгрузке одного из стержней при $\sigma_0 < \sigma_{\lim,E}$, при котором уровень отклонений будет убывать. Таким образом, если сформулировать критерий устойчивости в модифицированном виде (нулевое решение системы будем считать устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $u_0 < \delta_1, \delta\tilde{\sigma}_0 < \delta_2$ соответствующее им решение уравнения в отклонениях удовлетворяет условию $|u(t)| < \varepsilon$ в любой момент времени), то в рамках данного критерия границей устойчивости будет напряжение $\sigma_{\lim,E}$, заданное по (3.3.5.7).

3.3.7 Решение задачи устойчивости в динамической постановке при постоянном уровне нагружения в рамках модели с учетом упругой разгрузки

В динамической постановке при постоянном нагружении задача существенно усложняется, так как реализуются три режима:

1) Активное нагружение первого стержня, разгрузка второго стержня;
2) Активное нагружение второго стержня, разгрузка первого стержня;
3) Отсутствие активного нагружения в обоих стержнях.

В общем виде определяющие соотношения, характеризующие поведение стержней, записываются в виде (3.3.5.1). После линеаризации в окрестности напряжения σ_0 и вычитания уравнения для тривиального процесса в терминах отклонений получаем:

$$\Delta\dot{\varepsilon}_i = \frac{\Delta\dot{\sigma}_i}{E} + \Theta_i \psi^f{}'(\sigma_0)\dot{\sigma}_i + k\left(\psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_{i\_\max} + \frac{\Delta\sigma_i}{E} - \Delta\varepsilon_i\right) \tag{3.3.7.1}$$

Тогда, вычитая определяющее соотношение для второго стержня (3.3.7.1) из соотношения для первого стержня и используя (3.3.1.3), (3.3.4.1), получаем уравнение изменения отклонений в общем виде, которое после приведения подобных членов для каждого из представленных выше случаев будет иметь вид:

1) При активном нагружении первого стержня:

$$\begin{gathered}\dddot{u}\left(\frac{2\rho}{E} + \psi^f{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + \ddot{u}k\left(\frac{2\rho}{E} + \psi^s{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + \\ \dot{u}\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E} - \psi^f{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + uk\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E} - \psi^s{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) = -k\psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_{2\max}\end{gathered} \tag{3.3.7.2}$$

2) При активном нагружении второго стержня:

$$\begin{gathered}\dddot{u}\left(\frac{2\rho}{E} + \psi^f{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + \ddot{u}k\left(\frac{2\rho}{E} + \psi^s{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + \\ \dot{u}\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E} - \psi^f{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) + uk\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E} - \psi^s{}'(\sigma_0)\sigma_0\right) = k\psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_{1\max}\end{gathered} \tag{3.3.7.3}$$

3) В случае отсутствия активного нагружения в обоих стержнях:

$$\begin{gathered}\dddot{u}\left(\frac{2\rho}{E}\right) + \ddot{u}k\frac{2\rho}{E} + \dot{u}\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E}\right) + uk\left(2\eta - \frac{2\sigma_0}{E}\right) = \\ k\left(\psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_{1\max} - \psi^s{}'(\sigma_0)\Delta\sigma_{2\max}\right)\end{gathered} \tag{3.3.7.4}$$

Для определения возможных начальных условий воспользуемся неравенствами (3.3.5.3) и (3.3.5.4) (так как они получены из фундаментальных свойств СПФ, наблюдаемых в эксперименте, поэтому должны быть выполнены и для задачи в динамической постановке). Будем рассматривать случай, когда отклонения от тривиального процесса возникли мгновенно (то есть реономная компонента деформации не меняется), тогда:

$$\begin{cases}\varepsilon_1 = \psi^f(\sigma_1) + \dfrac{\sigma_1}{E} + \varepsilon_0^r \\ \varepsilon_2 = \psi^f(\sigma_0) + \dfrac{\sigma_2}{E} + \varepsilon_0^r\end{cases} \Rightarrow \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 = \psi^f(\sigma_1) - \psi^f(\sigma_0) + \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2}{E}$$

После линеаризации и при использовании условия (3.3.1.3) получаем условие на вторую производную в начальной точке:

$$2\eta u(t_0) = \left(0.5\psi^f(\sigma_0) + \frac{1}{E}\right)\left(2\sigma_0 u(t_0) - 2\rho\ddot{u}(t_0)\right)$$

что сводится к:

$$\ddot{u}(t_0) = \frac{u(t_0)}{\rho}\left(\sigma_0 - \eta \Big/ \left(0.5\psi^f(\sigma_0) + \frac{1}{E}\right)\right) \tag{3.3.7.5}$$

Основной сложностью решения данной задачи в аналитическом виде является контроль режимов нагружения, смена которых влечет за собой смену дифференциального уравнения, задающего закон изменения отклонений в каждом из режимов.

Далее приводятся результаты численного исследования задачи моделирования изменения отклонений, подчиняющихся уравнениям (3.3.7.2), (3.3.7.3), (3.3.7.4) (при контроле зон активного нагружения для каждого из стержней) с начальными условиями вида:

$$u(t_0)=u_0;\ddot{u}(t_0)=0;\ddot{u}(t_0)=\frac{u_0}{\rho}\left(\sigma_0-\eta/\left(0.5\psi^f(\sigma_0)+\frac{1}{E}\right)\right)$$

На рис. 3.3.3 — 3.3.6 представлены результаты численного анализа. Сплошной линией представлены реальные кривые, пунктирной — кривые без учета активного нагружения (т. е. построенные по (3.3.7.4) без учета смены режима). Участки, для которых красная (синяя) кривая больше (меньше) нуля, отвечают за активное нагружение первого (второго) стержня соответственно. Диаграммы, проиллюстрированные на рис. 3.3.3 и 3.3.4, построены при $\sigma_0<\sigma_{\lim,E}$ ($\sigma_0=50MPa$ на рис. 3.3.3 и $\sigma_0=250MPa$ на рис. 3.3.4 соответственно при $\eta=0.03$). Несмотря на то, что на каждом из периодов происходит активное нагружение, кривые не выходят из некоторой ε-трубки в окрестности нуля (при этом к нулю они не стремятся). Таким образом, вид полученных в результате численного анализа кривых подтверждает вывод относительно устойчивости системы при $\sigma_0<\sigma_{\lim,E}$, сделанный при анализе задачи в квазистатической постановке. Стоит отметить, что тривиальное решение в этом случае будет устойчивым по Ляпунову, но не будет асимптотически устойчивым (так как амплитуда колебаний до нуля не уменьшается).

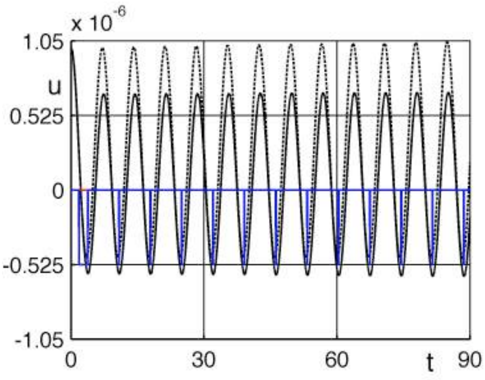


Рисунок 3.3.3

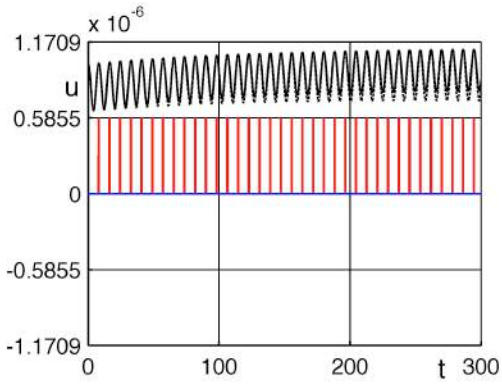


Рисунок 3.3.4

На рис. 3.3.5 представлена кривая изменений переменной u, характеризующей отклонение системы от тривиального процесса с течением времени для случая $\sigma_0>\sigma^f_{\lim,E}$ ($\sigma_0=360MPa$). Необходимо отметить, что из $\sigma_0>\sigma^f_{\lim,E}$ следует, что начальное значение второй производной (3.3.7.5) положительно, то есть отклонения начнут возрастать сразу после возникновения и продолжат увеличиваться на всем временном интервале. Из этого можно сделать вывод, что при $\sigma_0 > \sigma^f_{\lim,E}$ система не является устойчивой. Результаты численного моделирования при $\sigma^f_{\lim} < \sigma_0 < \sigma^f_{\lim,E}$ ($\sigma_0 = 320MPa$) представлены на рис. 3.3.6. Несмотря на отрицательный знак второй производной и наличие колебаний в окрестности начального момента времени, с течением времени эти колебания будут затухать. В результате существует точка, в которой первая производная функции изменения отклонений равна нулю, а вторая неотрицательна. Начиная с этого момента, отклонения будут монотонно и неограниченно возрастать, что подтверждает неустойчивость системы в данном режиме.

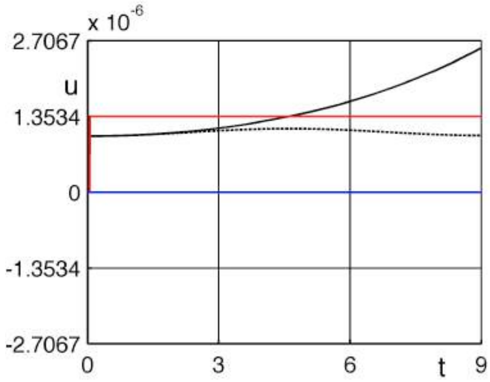


Рисунок 3.3.5

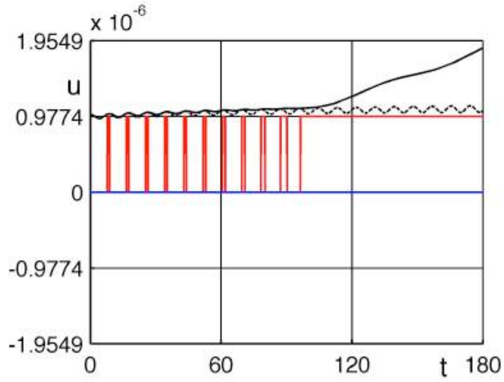


Рисунок 3.3.6

Таким образом, численный анализ задачи устойчивости стойки Шенли в динамической постановке Ляпунова при постоянном уровне нагружения с учетом упругой разгрузки может служить подтверждением того, что $\sigma_{\lim,E}$, определенная по (3.3.5.7) как критический уровень напряжений для задачи в квазистатической постановке, также является критическим уровнем напряжений для задачи в форме Ляпунова. Поскольку в численных экспериментах наличие возмущения внешней нагрузки никак не моделировалось, то данный вывод соответствует концепции «фиксированной нагрузки».

3.3.8 Влияние реономных свойств СПФ на устойчивость

Одной из главных целей данной работы является оценка влияния реономных свойств сплавов с памятью формы на величину критической нагрузки.

Как было показано ранее, критическими уровнями напряжений потери устойчивости являются уровни:

$\sigma_{\lim} = \dfrac{\eta}{\psi^{s\,\prime}(\sigma_{\lim}) + 1/E}$ — при неупругом деформировании обоих стержней (или в рамках концепции «варьируемой нагрузки»);

$\sigma_{\lim} = \dfrac{\eta}{0.5\psi^{s\,\prime}(\sigma_{\lim}) + 1/E}$ — при учете неупругого деформирования одного и упругой разгрузки второго стрежня (обозначаемая ранее $\sigma_{\lim,E}$). В данных соотношениях $\eta = h^2 / dl$.

То есть и в том, и в другом случае критическая нагрузка задается в неявном виде с использованием касательного модуля диаграммы мартенситной неупругости при предельно медленном нагружении в точке потери устойчивости (во втором случае используется среднее гармоническое касательных модулей полностью упругого процесса разгрузки и предельно медленного процесса активного нагружения в точке потери устойчивости). Для того чтобы оценить величину возможной ошибки, необходимо сравнить корректную величину критического напряжения, вычисленную с помощью приведенных выше формул, и величину критического напряжения, найденного по касательному модулю к кривой процесса мягкого нагружения в режиме мартенситной неупругости с конечной или предельно большой скоростью (так как это сравнение моделирует сценарий неучета реономных свойств и расчет критической нагрузки, исходя из полученной в результате эксперимента реальной кривой мягкого нагружения в режиме мартенситной неупругости). В качестве варианта, обеспечивающего наибольшую разность с уровнями критических напряжений, представленными выше, предлагается рассмотреть случай, когда критическая нагрузка рассчитывается с использованием касательного модуля к кривой предельно быстрого процесса.

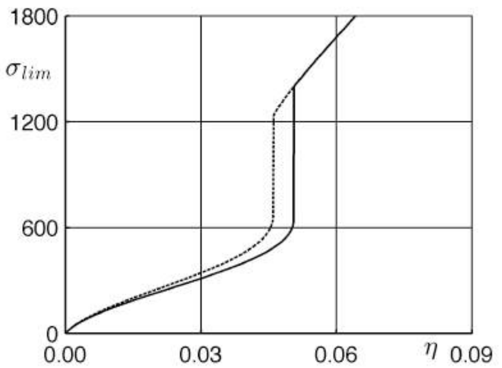


Рисунок 3.3.7

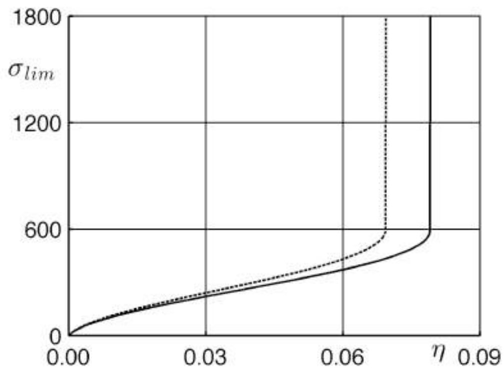


Рисунок 3.3.8

На рис. 3.3.7 и 2.3.8 (в осях η — $\sigma_{\lim}$ [МПа]) приведены результаты построения кривых критического напряжения в зависимости от параметра $\eta = h^2 / dl$, найденные по модели с набором параметров (2.4.2.6) и показателем степени материальных функций, соответствующих распределению Вейбулла, $\alpha = 2$. Пунктирная линия получена с использованием касательного модуля к кривой предельно быстрого процесса, сплошная линия — к кривой предельно медленного процесса.

Рис. 3.3.7 соответствует случаю расчета критического напряжения с учетом упругой разгрузки одного из стержней, рис. 3.3.8 — без учета упругой разгрузки. Результаты построения кривых свидетельствуют о том, что для некоторых уровней параметра стержня $\eta = h^2 / dl$ ординаты сплошной и пунктирной кривой отличаются значительно (т. е. критическое напряжение, полученное с использованием кривой предельно быстрого процесса, завышено в 2 и более раза по отношению к реальному критическому напряжению). Таким образом, можно сделать вывод о том, что реономные свойства сплавов с памятью формы существенно влияют на определение критического уровня напряжений. Неучитывание реономного поведения в задаче устойчивости приводит к существенному (кратному) завышению уровня критической нагрузки потери устойчивости.

3.3.9 Выводы

В рамках модели реономного поведения СПФ, представленной в разделах 2.3, 2.4 и их упрощенной версии, не учитывающей упругую разгрузку, решена задача об устойчивости стойки Шенли с деформируемыми стержнями из СПФ, нагружаемыми в режиме мартенситной неупругости. Проведенное исследование влияния реономных свойств, характерных для СПФ, на устойчивость данной системы позволяет сделать следующие выводы:

1. Для всех рассматриваемых реономых моделей имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале;
2. Критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на касательный, вычисленный по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного нагружения (в случае использования модели без упругой разгрузки, или в рамках концепции «варьируемой нагрузки»), или на среднее гармоническое между касательным модулем, вычисленным по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного нагружения, и упругим модулем (в рамках концепции «фиксированной нагрузки»);
3. Реономные свойства СПФ существенно влияют на устойчивость: уровень критического напряжения, вычисленный не по кривой предельно медленного процесса, может кратно отличаться от реальной величины критической нагрузки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации впервые предложены модели, описывающие реономное поведение сплава с памятью формы в процессах изотермического нагружения и разгрузки в режиме мартенситной неупругости, а также влияние реономных свойств на устойчивость модельных систем, содержащих элементы из СПФ. Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- Предложен ряд моделей, призванных описать реономное поведение сплавов с памятью формы, наблюдаемое в эксперименте;
- Предложена процедура идентификации параметров модели;
- Показано хорошее качественное согласование модельных данных и экспериментальных наблюдений;
- Установлено, что для модельных систем, содержащих элементы из СПФ, с учетом реономных свойств имеет смысл постановка задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале;
- Установлено, что квазистатическая (Эйлерова) и динамическая (Ляпунова) постановки задачи устойчивости в рамках разных моделей при консервативных нагрузках дают одинаковое значение критической силы;
- Установлено, что критическая сила потери устойчивости может быть определена с помощью касательного модуля к кривой мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости. Приведена точная формула вычисления этой критической силы;
- Доказано, что реономные свойства СПФ могут оказывать существенное влияние на устойчивость модельных систем, содержащих СПФ (в частности, на величину критической нагрузки потери устойчивости). Показано, что при определении критического уровня нагрузки по кривой, отличной от кривой предельно медленного процесса, возможны существенные ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении. // ДАН СССР. 1949. Т. 66. Вып. 2. С. 211–215.
2. Беляев С.П., Волков А.Е., Ермолаев В.А., Каменцева З.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Мозгунов В.Ф., Разов А.И., Хайров Р.Ю. Материалы с эффектом памяти формы. Т.4. — СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. — 268 с.
3. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменева З.П. Эффект памяти формы. — Л.: Изд. ЛГУ, 1987. — 216 с.
4. Хачин В.Н., Гюнтер В.Э., Монасевич Л.А., Паскаль Ю.И. Обратимые изменения формы при мартенситных превращениях. Изв. Вузов. Физика 1977. № 5 С. 95–101.
5. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck, Delaey L. Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys. // Scripta Materialla. 1999. Vol. 41. No. 12., pp. 1273–1281.
6. Mukherjee K., Sircar S., Dahotre N.B. Thermal effect associated with stress-induced martensitic transformation in TiNi alloy // Mater. Sci. Eng. — 1985. — Vol. 74. — Pp. 75–84.
7. J.A. Shaw, S. Kyriakides. Thermomechanical aspects of TiNi. // J. Mech. Phys. Solids. — 1995. — Vol. 43. — No. 8. — Pp. 1243–1281.
8. J.A. Shaw, S. Kyriakides. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a TiNi alloy. // Acta Mater. — 1997. — Vol. 45. — No.2. – Pp. 683–700.
9. Leo P.H., Shield T.W., Bruno O.P. Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape memory wires. // Acta Metall. Mater. — 1993. — Vol. 41. — No. 8. — Pp. 2477–2485.
10. Попов Н.Н., Мартьянов В.А. Сопротивление деформированию никелида титана ТН1К при скоростях деформации 10^{-3}—10^{3} c^{-1}. // Металловедение и термическая обработка металлов. — 1993. — № 11. – С. 26–28.
11. Chen W.W., Wu Q.P., Kang J.H., Winfree N.A. Compressive superelastic behavior of TiNi shape memory alloy at strain rates 0.001–750 s. // Int. J. Solids and Structure. — 2001. — Vol. 38. — No. 50–51. – Pp. 8989–8998.
12. Попов Н.Н., Брагов А.М., Каганова И.И., Ломунов А.К., Поляков Л.В. Влияние температурно-скоростных условий деформирования на механические характеристики сплава с памятью формы системы Ti-Ni-Fe. // Материалы XLVII Международной конференции «Актуальные проблемы прочности». — 2008. — Нижний Новгород. — Ч. 2. — С. 114–116.

13. Helm D., Haupt P. Thermomechanical representation of the multiaxial behavior of shape memory alloys. // Proc. SPIE. Smart Structure and Materials; Active Materials: Behavior and Mechanics. — 2002. — Vol. 4699. – Pp. 343–354.
14. Helm D., Haupt P. Shape memory behavior: modeling within continuum thermodynamics. // Int. J. Solids Struct. — 2003. — Vol. 40. — Pp. 827–849.
15. Nemat-Nasser S., Choi J.Y., Guo W.G., Isaacs J.B. High strain-rate, small strain response of NiTi shape-memory alloy. // J. Eng. Mater. Technol. — 2005. — Vol. 127. — Pp. 83–89.
16. Grabe C., Bruhns O.T. On the viscous and strain rate dependent behavior of polycrystalline NiTi // Int. J. Solids and Structure. — 2008. — Vol. 45. — Pp. 1876–1895.
17. Iadicola M.A., Shaw J.A. Rate and thermal sensitivities of unstable transformation behavior in a shape memory alloy. // Int. J. of Plasticity. — 2004. — Vol. 20. — Pp. 577–605.
18. Van Humbeeck J., Delaey L. The influence of strain-rate amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal. // J. Phys. — 1981. — Vol. 42. — Pp. 1005–1007.
19. Vitiello A., Giorleo G., Morace R.E. Analysis of thermomechanical behaviors of Nitinol wires with high strain rates. // Smart Mater. Struct. — 2005. — Vol. 14. – Pp. 215–221.
20. Zhang X.H., Feng P., He Y.J., Yu T.X., Sun Q.P. Experimental study on rate dependence of macroscopic domain and stress hysteresis in TiNi shape memory alloy strips. // Int. J. Mech. Sci. — 2010. — Vol. 52. — Pp. 1660–1670.
21. Schmidt I. A phenomenological model for superelastic NiTi wires based on plasticity with focus on strain-rate dependency caused by temperature. // J. Eng. Mater. Technol. — 2006. — Vol. 128. — Pp. 279–284.
22. Daunanda G.N., Subba Rao M. Effect of strain rate on properties of superelastic NiTi thin wires. // Mater. Sci. Eng. — 2008. — A. — Vol. 486. — Pp. 96–103.
23. Lin P., Tobushi H., Tanaka K., Hattori T., Ikai A. Influence of strain rate on deformation properties of TiNi shape memory alloy. // JSME Int. J. Ser. A — Mech Mater. Eng. — 1996. — Vol. 39. — No. 1. — Pp. 117–123.
24. Tobushi H., Shimeno Y., Hashisuka T., Tanaka K. Influence of strain rate on superelastic properties of TiNi shape memory alloy. // Mech. Mater. — 1998. — Vol. 30. — Pp. 141–150.
25. Tobushi H., Takata K., Shimeno Y., Nowacki W.K., Gadaj S.P. Influence of strain rate on superelastic behavior of TiNi shape memory alloy. // Proc. Inst. Mech. Eng. Part L. J. Mater.: Design. Appl. — 1999. — Vol. 213. — No. 2. – Pp. 93–102.
26. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг. Экспериментальное исследование и феноменологическое моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. Вестник Тамбовского

университета. Серия «Естественные и технические науки». 2010. Т. 15. Вып. 3. С. 860–861

27. Мовчан А.А., Казарина С.А., Тант Зин Аунг. Реономные свойства сплавов с памятью формы, проявляемые в опытах на мартенситную неупругость и сверхупругость. // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2010. — Т.16. — № 3. — С. 305–311.
28. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений. // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2002. — № 6. - С. 82–89.
29. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Казарина С.А., Жаворонок С.И., Сильченко Т.Л. Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости. // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2012. — № 3. — С. 72–80.
30. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений. // Изв. РАН. МТТ. — 2004. — № 2 – С. 132–144.
31. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситные превращения под действием сжимающих напряжений. // ПМТФ. — 2003. — Т. 4. — № 3. — С. 169–178.
32. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении. // ПММ. — 2004. — Т. 68. — Вып. 1. — С. 60–72.
33. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении. // Изв. РАН. МТТ. — 2004. — № 5. – С. 153–167.
34. А.А. Мовчан, Л.Г. Сильченко. Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении. // ПММ. — 2006. — Т. 70. — Вып. 5. — С. 869–881.
35. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Потеря устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы, вызванная обратным термоупругим мартенситным превращением. // Изв. РАН. МТТ. — 2008. — № 1. — С. 117–130.
36. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы. // Изв. РАН. МТТ. — 2010. — № 6. — С. 137–147.

37. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы. // Изв. РАН. МТТ. — 2011. — № 2. — С. 44–56.
38. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы. // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2010. — № 5. — С. 57–65.
39. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы. // ПМТФ. — 2011. — Т. 52. — № 2. — С. 144–155.
40. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А. Устойчивость вала из сплава с памятью формы, находящегося под воздействием кручения и растяжения-сжатия при термоупругих фазовых превращениях. // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2009. — № 2. – С. 52–59.
41. Сильченко Л.Г., Мовчан И.А. Устойчивость цилиндрической пластины из сплава с памятью формы при термоупругих мартенситных превращениях в условиях сжатия и сдвига. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. — Т. 15. № 2. — С. 221–241.
42. Сильченко Л.Г., Мовчан И.А. Устойчивость цилиндрической оболочки из сплава с памятью формы при сжатии и кручении. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 4. С. 486–496.
43. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. Анализ устойчивости элементов из сплавов с памятью формы в рамках различных моделей деформирования этих материалов. // Материалы XLVII Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» 01–05 июля 2008 года. Нижний Новгород. Россия. Часть 1. С. 168–171.
44. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1994. — № 6. — С. 47–53.
45. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы. // ПМТФ. — 1995. —Т. 36. — № 2. — С. 173–181.
46. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — № 1. — С. 197–205.
47. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях. // Изв. РАН. МТТ. — 2010. — № 3. — С. 118–130.

48. Ржаницин А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких материалов. // ДАН СССР. —1946. — Т. 52. — № 1. — С. 25–28.
49. Ржаницын А.Р., Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. // М.: Гостехиздат. — 1949. — 252 с.
50. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. // ПММ. — 1957. — Т. 21. — С. 406–412.
51. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость. — М.: Физматлит, 2007. — 448 с.
52. Зубчанинов В.Г. Устойчивость. Ч. 2. // 1996. — Тверь, Изд.-во ТГТУ. — 190 с.
53. Мовчан А.А., Казарина С.А. Релаксация напряжений в сплавах с памятью формы после нагружения в режиме мартенситной неупругости. // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 2. С. 17–23.
54. Мовчан А.А., Мовчан И.А. Одномерная микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при прямом и обратном термоупругих превращениях. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т.13. № 3. С. 297–322.
55. Мовчан А.А., Мовчан И.А. Модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы в активных процессах прямого превращения и структурного перехода. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 1. С. 75–87.
56. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях. // Деформации и разрушение материалов. 2009. № 8, С. 2–9.
57. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. // М.: «Наука». 1966. 752 с.
58. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести. // Известия РАН. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
59. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
60. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, поврежденности и разрушения неупругих материалов и конструкций. Учебное пособие. // М.: МФТИ, 2008. 212 с.
61. Соколовский В.В. Распределение упруго-вязкопластических волн в стержнях. // ПММ. 1948. Т. 12. № 3. С. 261–280.
62. Соколовский В.В. Распространение циллиндрических волн сдвига в упруго-вязкопластической среде. // Докл. АН СССР, 60 (1948).

63. Malvern L.E. The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar materials exhibiting the strain rate effect // J. Appl. Mech. 1952.
64. Perzina P. The constitutive equation for rate sensitive plastic materials // Quart. Appl. Math. 1963.
65. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. // Ереван. Изд.-во Ереванского университета, 2007.
66. Helm D. Formgedachtnislegierunden — experimentelle untersuchung, phanomenologische modellierung und numerische simulation der thermomechanischen materialeigenschaften. // Ph.D. thesis. Universitat Gesamthochschule Kassel.
67. Lim T.J., McDowell D.L. Mechanical behavior of a TiNi shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading. // J. Eng. Mater. Technol. 1999. V. 121. No. 1. P. 8–18.
68. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. Asymmetry of stress-strains curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys. // Acta Mater. 1998. V. 46. No 12. P. 4325–4338.
69. Wasilevski R.J. The effect of applied stress on the martensitic transformation in TiNi. // Metall. Trans. 1971. V. 2. No.11. P. 2973–2981
70. G. Airoldi, T. Ranucci, G. Riva, A. Sciacca. The two-way memory effect by the pre-strain training method in a 20Ti40Ni10Cu(at.%) alloy. // Scripta Materialia. 1996. V. 34. No. 2. P. 287–292.
71. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений. // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 37–53.
72. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы. // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 78–95.
73. Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. О потере устойчивости элементов из сплавов с памятью формы при структурном превращении с учетом пороговых напряжений. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 4. С. 455–467.
74. Urushiyama Y., Lewinnek D. Qiu J., Tani J. Bucling of shape memory alloy columns. // JMSE International Journal. 2003. Ser. A. Solid. Mech. Mater. Eng. 2003. V. 46 (1). P. 60–67.
75. Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня из сплава с памятью формы при термоупругих фазовых превращениях с учетом деформаций поперечного сдвига. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. Т. 12. № 4. С. 459–472.
76. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

77. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязко - пластических тел. М.: «УРСС», 1998. 176 с.
78. Волков А.Е., Сахаров В.Ю. Термомеханическая макромодель сплавов с эффектом памяти формы // Изв. РАН. Сер. физ. – 2003. – Т. 67, № 6. – С. 845–851.
79. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях. // Изв. Академии наук. Сер. Физическая. 2002. Т. 66 № 9. С. 1290 – 1297.
80. Волков А.Е., Евард М.Е. Моделирование пластической деформации монокристалла никелида титана. // Механизмы деформации и разрушения перспективных материалов: Сб. трудов XXXV Семинара «Актуальные проблемы прочности» (15–18 сентября 1999 г. Псков). Псков. 1999. С. 321–325.
81. Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А., Сахаров В.Ю., Ушаков В.В. Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы. // ЖТФ. 1996. Т. 66, Вып. 11. С. 3–34
82. Волков А.Е., Иночкина И.В. Исследование эффектов памяти формы в пластически продеформированном сплаве TiNi. // Вестник молодых ученых. Серия: Технические науки, 2001. № 2. С. 37–41
83. Волков А.Е., Лихачев В.А., Рогачевская М.Ю. Численное моделирование мартенситной неупругости. // Материалы с новыми функциональными свойствами: Материалы XXII Семинара «Актуальные проблемы прочности» (14–19 мая 1990 г., Новгород–Боровичи), Новгород–Боровичи, 1990. С. 18 –20.
84. Думанский А.М., Таирова Л.П., Смердов А.А. Экспериментальное исследование деформативных и прочностных характеристик углепластика на плоских и трехслойных образцах. // Научные материалы II Международной научно-практической конференции «Аэрокосмические технологии». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. С. 245–246.
85. Dumansky A.M., Tairova L.P. The prediction of viscoelastic properties of layered composites on example of cross ply carbon reinforced plastic. // World Congress on Engineering, 2007. V. II. London, UK 2–4 July, 2007. P. 1346–1351.
86. Думанский А.М., Таирова Л.П., Горлач И., Алимов М.А., Расчетно-экспериментальное исследование нелинейных свойств углепластика. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011, № 5 С. 91-97.
87. Думанский А.М., Русланцев А.Н., Таирова Л.П. Модель нелинейного деформирования углепластиков. // Конструкции из композитных материалов № 4, 2013. С. 6–12.

Публикации автора

88. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 2. С. 255–267.
89. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Модель реономного поведения сплавов с памятью формы, использующая гипотезы о склерономности предельно медленных и предельно быстрых процессов нагружения. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 4. С. 508–522.
90. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Устойчивость жесткого стержня на вязкопластическом шарнире. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18. № 3. С. 384–399.
91. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Сильченко Т.Л. Влияние реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость стержня из этих материалов. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19. № 2. С. 262–277.
92. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Аналог вязкопластических определяющих соотношений для описания реономных свойств сплавов с памятью формы. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 159–176.
93. Климов К.Ю. Вязкопластическая модель реономного поведения сплавов с памятью формы со степенной зависимостью для скорости изменения реономной деформации. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 3. С. 378–401.
94. A.A. Movchan, K.Yu. Klimov. Simulation of rheonomic properties of shape memory alloys. // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2011. 2(3). P. 171–185.
95. Мовчан А.А., Сильченко Т.Л., Климов К.Ю., Казарина С.А. Сплавы с памятью формы: реономные свойства и устойчивость. // Сборник трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Х. Арутюняна. 08–12 октября 2012 г., Цахкадзор (Армения). С. 60–64.
96. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Две модели реономного поведения сплавов с памятью формы. // Тезисы докладов Всероссийской конференции «Механика наноструктурированных материалов и систем». ИПРИМ РАН. 2011. С. 48–49.
97. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Сильченко Т.Л. Влияние реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость. // Тезисы докладов Международной конференции «Современные проблемы механики», посвященной 100-летию Л.А. Галина. Москва. 20-21 сентября 2012 г. С. 56–57.

98. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Учет мгновенных неупругих деформаций при описании реономных свойств сплавов с памятью формы. // II Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, ИПРИМ РАН, 2013 г.
99. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Реономные свойства сплавов с памятью формы и их влияние на устойчивость элементов из этих материалов. // Тезисы докладов конференции «Ломоносовские чтения». Секция механики. Апрель 2013. Издательство Московского Университета, 2013 г.
100. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. // Тезисы докладов конференции «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю.Н. Работнова». 24–26 февраля 2014 г., ИМАШ РАН. Москва, 2014. С.69–70.
101. Климов К.Ю. Моделирование реономного поведения сплавов с памятью формы. // «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник материалов Всероссийской научной конференции. Москва, 15–17 декабря 2015 г. — М.: ИПРИМ РАН, 2015 г. С. 172–173.