МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 539.3

Емельянов Александр Николаевич

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Специальность 01.02.04 —
«механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Горбачев Владимир Иванович

Москва — 2016

Оглавление

Введение

В рамках классической механики сплошной среды и, в частности, теории упругости, реальное материальное тело ассоциируется с некоторой областью в трехмерном пространстве, а материальные частицы (атомы, молекулы, комплексы молекул, элементарные ячейки кристаллической решетки, зерна), формирующие тело, с точками в этой области. Принимается гипотеза сплошности, согласно которой в любом бесконечно малом объеме соднржится бесконечное число материальных частиц [1]. При этом происходит переход от конечного числа реальных материальных частиц к бесконечному множеству точек - континууму. После этого перехода деформация среды может быть описана векторным полем, определяющим перемещение материальных частиц. В такой модели упругого континуума связь нагрузок между обеими сторонами поверхностного элемента описывается исключительно главным векотором $\overrightarrow{p}\,d\Sigma$. Это предположение приводит к симметричному напряженному и деформированному состояниям. Такая модель хорошо совпадает с экспериментами, проводимыми с конструкционными материалами (сталь, бетон, алюминий) при напряжениях, остающихся в пределах упругости материала. Так что классическая теория упругости довольно хорошо объясняет поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда "зернистость" строения рассматриваемых тел не является для этих тел существенной, т.е $l/L \ll 1$, где l - внутренний характерный размер, например, характерный размер зерна, а L - характерный размер тела.

Значительное различие между теорией и экспериментом возникает в тех случаях, когда существенными являются градиенты напряжения. Это имеет основное значение при концентрации напряжений вокруг отверстий и выточек. Расхождение между экспериментом и теорией появляются также в задачах о колебаниях, при распространении волн и при вынужденных высокочастотных (ультразвуковых) колебаниях. Это происходит из-за того, что при высокочастотных колебаниях и достаточно малых длинах волн неизбежно сказывается влияние микростуктуры материала. С точки зрения теоретических решений задач классической теории упругости не удается объяснить и предсказать с необходимой точностью явления, происходящие в зернистых средах и при прохождении акустических волн через кристаллы, поликристаллические структуры и полимеры.

Причину указанных выше несогласований, очевидно, следует прежде всего искать в том, что сплошная модель твердого тела, лежащая в основе классической теории упругости, не в состоянии отобразить те свойства реальных тел, которые определяются их дискретной структурой. Для объяснения этих явлений, очевидно, нужна новая модель твердого тела механики сплошной среды, в которой свойства, вытекающие из дискретной структуры реальных тел, были бы явно отражены.

В качестве обобщения классической теории упругости, вводится предположение, что в каждый момент времени положение частицы тела описывается радиус-вектором, а ее ориентация задается при помощи трех ортонормированных векторов, которые называются директорами. Эти векторные поля и определяют все степени свободы частиц тела. Деформация среды описывается не только вектором перемещения $\overrightarrow{u}$, но также вектором поворота $\overrightarrow{\omega}$. Среду, моделируемую таким образом, сегодня часто называют средой Коссера, а за теорией в литературе закрепились названия моментной, несимметричной, микроструктурной, а также микрополярной теории упругости.

В этих моделях, в отличие от классической теории, напряженное состояние описывается несимметричным тензором напряжений, поэтому упругие тела в несимметричной теории характеризуются большим числом упругих констант. Необходимость подобного усложнения нередко оправдывают тем, что с помощью даваемых в классической теории упругих (и пьезоэлектрических) констант невозможны трактовки, например, аномального пьезоэффекта в кварце, дисперсии упругих волн в сплошной среде, а также упругих свойств кварца, алмаза, дигидрофосфата аммония и других кристаллов [2].

Истоки микроструктурных теорий восходят к трудам Voigt W. [3]. Он впервые рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием ее частиц при изучении упругих свойств кристаллов. Стараясь исправить недостатки классической теории упругости путем дополнительного предположения о передаче нагрузок через элемент поверхности $d\Sigma$ не только главным вектором $\overrightarrow{p}\,d\Sigma$, но и главным моментом $\overrightarrow{m}d\Sigma$. Он вывел уравнения равновесия для таких кристаллов (включая равновесие моментов) и исследовал свойства кристаллов.

Первая попытка построения теории упругости с несимметричным тензором напряжений принадлежит, по-видимому, братьям Коссера [4]. В своей работе братья Коссера развили теорию упругости, с помощью вариационного принципа, который они назвали "Евклидовым действием" ("L'Action Euclidienne"). Каждой частице деформированной среды ставится в соответствие ортогональный трехгранник. Таким образом частицы получают ориентирование (полярная среда). Каждая частица среды Коссера является бесконечно малым абсолютно твердым телом. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения $\overrightarrow{u}$, но и вектором поворота $\overrightarrow{\omega}$, т.е. величиной, являющейся функцией времени t и положения x. При таких предположениях в теле возникают не только напряжения σ_{ij}, но и моментные напряжения μ_{ij}, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Коссера получили уравнения равновесия моментов для динамического случая. Но они не дают ни конкретной микроинерции, ни закона сохранения тензора микроинерции, которые имеют ключевое значение для построения определяющих уравнений и динамических задач для твердых тел и жидких сред, например, жидких кристаллов, суспензий и т.д. Жесткий директор, используемый Коссера, а затем и другими для представления, жестких поворотов, не обладает метрическим значением. Таким образом, возникают трудности в определении законов симметрии материала в материальных уравнениях. Например, ни одна из работ, в которых был использован жесткий директор, не затрагивает изотропию, например, Э. и Ф. Коссера не привели никаких-либо конкретных материальных уравнений.

Работы Коссера были не востребованы на протяжении более полувека. В 1960-х годах предмет исследований был независимо переоткрыт несколькими авторами. Град [5] с помощью статистической механики получил некоторые законы сохранения. Gunther W. [6] и Schaefer [7] резюмировали теорию упругости Коссера и отметили ее связь с дислокациями. В это время была также популярна теория неопределенной пары сил, от которой сейчас в основном уже отказались. В этой теории, кососимметричная часть тензора напряжений является избыточной и остается неопределенной. Некоторые из этих ранних теорий, обсуждаются в различных обзорных статьях, Eringen A.C. [8], Ariman T., Turk M.A. и Sylvester N.D. [9; 10] и др...

Эти теории, также как и теория упругости Коссера, связаны с нелинейной теорией микроупругости, опубликованной Eringen A.C. и Suhubi E.S. [11].

В том же году, Eringen A.C. [12] опубликовал свою теорию микротекучести, открыв новый закон равновесия: закон сохранения микроинерции. Этого закона и не хватало во всех предыдущих работах. Без закона сохранения микроинерции, тензорные, основные уравнения поля являются неполными и изменение положения тела при движении не может быть определено.

Начиная с работы братьев Коссера [4], опубликованной в 1909 г., механика микрополярной среды (континуума Коссера) получила значительное развитие в основополагающих работах Э.Л. Аэро и соавторов [2; 13], В.И. Ерофеева [14], П.А. Жилина [15], Л.М. Зубова [16; 17], Koiter W.T. [18], Mindlin R.D. и Tierstin H.F. [19], В. Новацкого [20; 21], В.А. Пальмова [22], Р.А. Тупина [23], Л.И. Шкутина [24; 25], Eringen A.C. [26], а также в [27–33]. Более общие модели сред, содержащие большее число степеней свободы (микроморфные среды или среды с микродеформацией), изучались В.И. Ерофеевым [14], Л.М. Зубовым [17],Koiter W.T. [18], Mindlin R.D. [34], Р.А. Тупиным [23], Eringen A.C. [26; 35] и др. Механика сред с внутренними степенями свободы изучалась также М.А. Гузевым, И.А. Куниным, В.П. Мясниковым [36–38]. Практически важный случай моментной среды – жидкие кристаллы исследовались Э.Л. Аэро [39], П. де Женом [40], А.С. Сониным [41], Ф.М. Лесли [42], Дж. Эриксеном [43; 44], Eringen A.C. [45; 46]. Эта модель нашла значительные приложения в механике гранулированных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов, геоматериалов, а в последнее время – также и в наномеханике [47]. Модели типа Коссера оказалось полезной для построения неклассических моделей тонкостенных конструкций – стержней, пластин и оболочек (работы С.А. Амбарцумяна [48], В.А. Дудникова и С.А. Назарова [49], А. А. Атояна и С. О. Саркисяна [50], В. В. Елисеева [51], В. А. Еремеева и Л. М. Зубова [52], П.А. Жилина [15; 53], А. А. Илюхина [54], Я. Ф. Каюк и А. П. Жуковского [55], С. О. Саркисян [56], Л. И. Шкутина [24; 25; 57], S. S. Antman [58], V.A. Eremeyev и W. Pietraszkiewicz [59; 60], V. A. Eremeyev и L.M. Zubov [61], A.C. Eringen [26], J. Makowski и W. Pietraszkiewicz [62], W. Pietraszkiewicz, V. A. Eremeyev и V. Konopinska [63], M. B. Rubin [64], L. M. Zubov [17]).

По способам описания поворота частиц можно выделить несколько направлений развития несимметричной теории упругости. В своей диссертационной работе М.А.Кулеш [65] приводит описание наиболее распространенных:

1) Теория среды со "стесненным вращением". Такую среду часто называют псевдоупругой средой Коссера или средой псевдокоссера. В англоязычной литературе для обозначения этой теории используется термин "Couple stress elasticity". Описание основных положений данной теории можно найти в работах Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского [2; 13], Mindlin R.D. [66], Mindlin R.D. и Tierstin H.F. [19], Ю.Н.Немиша [67–69], Koiter W.T. [18], Н.Ф.Морозова [28; 70], Г.Н.Савина [71; 72], А.И.Каландии [73] и др. В теории среды псевдокоссера сохраняется концепция классической теории упругости, т.е. считается, что перемещения $\overrightarrow{u}$ точек этой среды и их жесткие малые повороты $\overrightarrow{\omega}$ связаны зависимостью

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2} rot \overrightarrow{u}$$

Таким образом, для среды псевдокоссера имеется одна независимая векторная кинематическая неизвестная - перемещения $\overrightarrow{u}$ и в рассмотрение вводятся несимметричные тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ и моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$. Причем [35] антисимметричная часть напряжения и симметричная часть моментного напряжения не определяются напрямую из физических уравнений, из-за чего А.К.Эринген называет теорию среды псевдокоссера теорией неопределенных моментных напряжений.

Этот вариант несимметричной теории понижает ее полноту, так как число физических констант для изотропного упругого тела сокращается до четырех. Например, часто используются E - модуль Юнга, γ - коэффициент Пуассона, l - постоянная, имеющая размерность длины и B - безразмерная постоянная, называемая модулем изгиба (работы R.D. Mindlin [66], Н.Ф. Морозова [28; 70], Г.Н. Савина [72], А.И. Каландия [73], A. Anthonie [74]). Кроме этого, получаемая структура уравнений такова [20], что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удается произвольно задать нормальную составляющую вектора поворота.

Несмотря на эти недостатки, теория среды псевдокоссера широко используется. Предложено несколько общих теорем, методов интегрирования и дано решение ряда задач. Так, Mindlin R.D. и Tierstin H.F. [19] обобщили представление Папковича-Нейбера для статических задач, а также получили фундаментальное решение в бесконечном упругом пространстве. Их теоретические выводы были проиллюстрированы несколькими примерами.

Bogy D.B. и Sternberg E. [75] занимались задачей плоского деформированного состояния. Были обобщены решения Файлона и задача о штампе на континуум псевдокоссера. Особенно интересными являются следствия, касающиеся сингулярных решений для плоского деформированного состояния.

Можно отметить также решение задачи об изгибе кругового цилиндра в работе A. Anthonie [74], плоской граничной задачи о действии сосредоточенной силы на бесконечной плоскости с круговым отверстием в работе Y.C. Hsu и W.J. Wang [76], задачи для бесконечной упругой изотропной области, ослабленной конечным числом произвольно расположенных несоприкасающихся круговых отверстий в работе Ю.Н. Немиша и В.П. Третяка [77], задачи о деформировании плоского кольца в работе Kobayashi Shoichi и Fukui Takio [78].

2) Теория среды Коссера. В англоязычной литературе используется термин "Cosserat (micropolar) elasticity". Эта теория развивалась в 60-70-х годах независимо несколькими исследователями: В.Новацким [20] и рядом его учеников, В.А.Пальмовым [22], H. Schaefer [7], Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинским [2] и др. В теории среды Коссера для описания перемещения частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений $\overrightarrow{u}$ вводится кинематически независимое поле векторов $\overrightarrow{\omega}$, характеризующих малые повороты частиц. Таким образом, в этой теории присутствуют две независимых кинематических неизвестных, а тензоры напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ и моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$ являются несимметричными. В этом варианте упругое поведение изотропной линейной среды характеризуется шестью упругими константами (работы В.Новацкого [20] и В.А.Пальмова [22; 79]): две постоянные Лямэ и 4 новые константы, характеризующие микроструктуру. В случае квадратично-нелинейной среды количество новых констант увеличивается до 9 (работа В.И. Ерофеева [14]). Во многих работах (например в работах В.А.Пальмова [79], N. Sandru [80], H.Neuber [81]) отмечается, что среда псевдокоссера является следствием среды Коссера при условии стремления одной из новых упругих констант к бесконечности. Известны точные аналитические решения ряда задач для среды Коссера, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений равновесия или движения. Например, найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия (в работе В.А.Пальмова [79]), решена задача о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве (в работах N. Sandru [80] и R.D. Mindlin [82]), задача о

равновесии полупространства (в работах Marinescu C. [83], Dhaliwal Ranjit S. и Chowdhury Kashmiri L. [84], J. Dyszlewicz [85]).

3) Континуум Леру (градиентная модель). К понятию моментных напряжений приводит и учет зависимости энергии деформаций от высших градиентов вектора перемещений. Впервые на целесообразность учета высших градиентов перемещений указал Леру [86]. Деформированное состояние при этом определяется двумя тензорами: тензором макродеформации второго порядка и градиентом микродисторсии третьего порядка. Градиент микродисторсии связан с вектором перемещений и не связан с вектором поворота. Следовательно, вращение частиц среды в этом случае является стесненным [14]. Напряженное состояние определяется объемной плотностью внутренней энергии, через которую вычисляются тензор напряжений и тензор третьего порядка "двойных напряжений", антисимметричная часть которого является тензором моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$ [87]. В случае физической нелинейности в определяющие соотношения этой модели входят помимо констант Лямэ 7 констант Ландау, определяющих нелинейность и 2 новые константы, характеризующие микроструктуру [14]. Для линейной среды общее количество констант сокращается, как и в случае среды псевдокоссера, до 4-х.

4) Микроморфная среда Миндлина-Эрингена ("Microstructure (micromorphic) elasticity"). Данная теория развита Mindlin R.D. в работе [34] и А.К.Эрингеном [35]. В качестве кинематических неизвестных в этой теории в общем случае принимаются вектор перемещения и несимметричный тензор микросмещений, деформированное состояние определяется тензором макродеформаций, характеризующим относительные перемещения центров масс макрообъемов (он совпадает с тензором деформации Грина), тензором относительной дисторсии, характеризующим перемещения структурных элементов относительно центра масс макрообъема и градиентом микродисторсии третьего порядка, характеризующим относительные перемещения структурных элементов одного и того же макрообъема. Для описания напряженного состояния вводятся тензоры напряжений первого и второго порядков и тензор моментных напряжений. Меры деформаций микроморфной среды являются обобщением деформационных характеристик двух вышеназванных моделей - континуума Коссера и континуума Леру. В этой теории упругое поведение материала характеризуется 18 физическими постоянными. В работе Koh Severino

L. [88] проведено упрощение этой теории, которое допускает сокращение числа констант до 10 и простую трактовку этих компонент.

5) Прочие теории. Среди прочих хотелось бы выделить работу Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского [2], где развита 45-константная теория. В работе A.C. Eringen и E.S. Suhubi [11] предлагается мультиполярная теория, количество физических констант которой определяется ее степенью. Обобщение несимметричной теории на случай анизотропии было сделано H.Neuber [81], где упругое поведение среды в самом общем случае анизотропии будет характеризоваться 171 упругой постоянной.

Различные аспекты моделей несимметричной среды можно найти также в работах С.М. Белоносова [89], Г.А. Ванина [90], А.А. Ильюшина и В.А. Ломакина [91], М.Р. Короткиной [92], И.А. Кунина [36], П.Ф. Сабодаш и И.Г. Филиппова [93], Л.И. Седова [94], Шоркина [95], В.С. Шоркина, Л.Ю. Фроленковой , А.С. Азарова [96], В.С. Шоркина, Л.Ю. Фроленковой, С.И. Якушиной [97]. Стоит отметить работы С.А. Лурье [98–101] и работы Г.Л. Бровко и О.А. Ивановой [102–108] Однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной работы, которая ограничивается областью статического состояния тел в рамках теории среды Коссера.

В данной диссертационной работе рассматривается проблема осреднения краевой задачи для неоднородного тела, обладающего моментными свойствами — исходная задача. Под осреднением понимается тот или иной способ представления решения исходной задачи через решение точно такой же задачи для тела с однородными свойствами. Задачу для тела с однородными свойствами будем называть сопутствующей задачей, а само тело — сопутствующим однородным телом. Конструктивная процедура осреднения, как правило, включает в себя три этапа: на первом этапе по свойствам неоднородного тела находятся свойства сопутствующего однородного тела (эффективные свойства); на втором этапе решается краевая задача для сопутствующего тела; на третьем этапе по решению сопутствующей задачи находится решение исходной задачи. Такой подход реализован в механике композиционных материалов, построенных из большого числа представительных элементов. Существенный вклад в развитие механики композитов внесен Ю.Н. Работновым [109–111] и его учениками. В последнее время широкое распространение получил метод осреднения задач для композитов регулярной структуры, основанный на разложении решения исходной задачи в ряд по степеням малого геометрического параметра, равного отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру всего тела. Первыми работами в этом направлении являются работы Н.С. Бахвалова [112–114] и Б.Е. Победри [115]. К настоящему времени вышло большое количество монографий, посвященных частично или полностью методу малого геометрического параметра (например работы В.Л.Бердичевского [116], Э. Санчес-Паленсия [117], И.В. Андрианова, В.А. Лесничой и Л.И. Маневич [118], Alexander L. Kalamkarov [119], A.B. Movchan, N.V. Movchan и C.G. Poulton [120], Д.И. Бардзокас и А.И. Зобнин [121], В.И. Большакова , И.В. Андрианова и В.В. Данишевского [122], В.С. Шоркина [123]).

Отдельные задачи для неоднородных тел при непериодической зависимости свойств от координат рассматривались во многих работах. Большинство таких работ, вышедших до 1973 года собраны в двух обширных библиографических указателях [124; 125], составленных Г.Б. Колчиным и Э.А. Фаверманом. В статьях В.А. Ломакина и в его фундаментальной монографии [126] рассмотрены общие методы и решено множество конкретных задач теории упругости непрерывно неоднородных тел. Теория кручения неоднородных анизотропных стержней рассмотрена в книге С.Г. Лехницкого [127], а также в работах Л.В. Олеховой [128] и [129]. Также стоит отметить работы Ю. И. Димитриенко [130–134], работы С.А. Лурье [135; 136].

Одним из существенных осложняющих обстоятельств для идентификации моделей несимметричной теории упругости является определение констант континуума Коссера. Методы, используемые при идентификации данных констант, описаны в работах А.А. Адамова [137] и И.Ю. Смолина [138]. Один из тпов таких методов - расчетные методы определения констант континуума Коссера, основанные на применении процедур осреднения для материалов с известной внутренней структурой, чаще всего, периодической [114; 139–143]. При этом на уровне структурных элементов (микроуровне) обычно используются модели простых классических материалов, для перехода на макроуровень к модели Коссера стандартно применяется осреднение по представительному объёму.

В 1991 году в докторской диссертации Горбачева В.И. [144] был предложен вариант метода осреднения, основанный на интегральной формуле представления решения исходной статической задачи неоднородной теории упругости через решение сопутствующей задачи [144; 145]. Позже были опубликована интегральная формула для динамической задачи теории упругости [146]. На основе этой интегральной формулы был разработан метод осреднения динамических задач неоднородной упругости, пригодный как при периодической, так и при непериодической неоднородности свойств [147]. Интегральная формула для случая моментной теории упругости была опубликована в 2009 году [148]. В нижеследующей работе кратко излагается конструктивная методика осреднения задач моментной упругости, основанная на интегральной формуле.

Целью данной работы является обобщение метода осреднения на краевые задачи для неоднородного упругого тела, обладающего моментными свойствами. Расчет эффективных характеристик для неоднородного тела, обладающего моментными свойствами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод осреднения задач моментной неоднородной упругости для тел периодической и непериодической структуры.
2. Специальные интегро-диффереціальные уравнения для вычисления эффективных характеристик композитов с компонентами, обладающими моментными свойствами.
3. Аналитические выражения для эффективных моментных характеристик бесконечного в плане неоднородного по толщине изотропного и анизотропного слоя.
4. Методика, алгоритм и программа численного расчета эффективных характеристик волокнистого композита, обладающими моментными свойствами.

Научная новизна: предложенный вариант метода осреднения может быть применен для краевых задач неоднородного как периодического, так непериодического упругого тела, обладающего моментными свойствами с различными типами анизотропии.

Научная и практическая значимость Результаты имеют теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения ряда практических задач, связанных с деформированием композиционных материалов с моментными свойствами, например, возникающих в строительной практике.

Степень достоверности теоретических результатов диссертации вытекают из использования классического аппарата механики сплошных сред и подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научном семинаре механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова “Актуальные проблемы геометрии и механики” под руководством профессоров Д.В. Георгиевского, М.В. Шамолина и С.А. Агафонова (26 сентября 2014 г., 27 ноября 2015 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Ломакина (3 октября 2016 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Д.В. Георгиевского (16 декабря 2016 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.И. Горбачева (26 октября 2015 г., 19 сентября 2016 г.)

Личный вклад. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах с научным руководителем принадлежат постановки задач. Разработка алгоритмов предлагаемых методов, их программные реализации и тестирование, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [149–154], 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [149; 150], 2 — в тезисах докладов [151; 152], 2 — в иных печатных изданиях [153; 154].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 155 страниц с 11 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 163 наименования.

Глава 1. Основные уравнения моментной теории упругости

Приведем основные соотношения несимметричной теории упругости [20]. Рассмотрим произвольную область тела объема V, ограниченную некоторой поверхностью Σ. Нагрузка извне передается посредством усилия $\overrightarrow{p}$ и момента $\overrightarrow{m}$, действующих на поверхностях Σ_p и Σ_m. Через $\overrightarrow{X}$ обозначим вектор массовых сил, через $\overrightarrow{Y}$ - вектор массовых моментов, а $\overrightarrow{r}$ - радиус-вектор, отсчитываемый от некоторой точки тела.

Каждая частица среды является малым абсолютно твердым телом и имеет ориентирование (полярная среда). Деформация такой среды описывается не только вектором перемещений $\overrightarrow{u}$, но также вектором поворота $\overrightarrow{\omega}$ частицы, являющимися функциями координат и времени.

1.1 Тензор моментных напряжений

Рассмотрим произвольную область тела, ограниченную ортогональным трехгранником (рис.(1.1)). Через поверхностный элемент $d\Sigma$ с нормалью $\overrightarrow{n}$ извне внутрь тела действуют $\overrightarrow{p}\,d\Sigma$ вектор сил, а через $\overrightarrow{m}d\Sigma$ - вектор моментов.

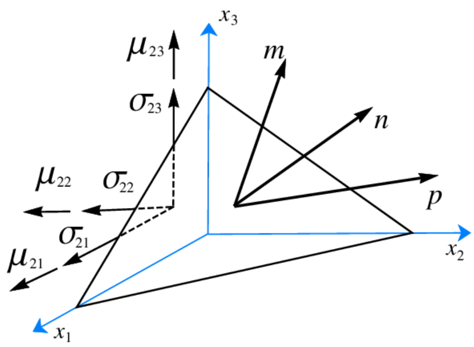

Рисунок 1.1 — вектор сил и вектор моментов на поверхностном элементе $d\Sigma$

По аналогии с теоремой Коши для вектора поверхностной нагрузки можно сформулировать аналогичное утверждение и для вектора поверхностных моментов: если $m_i(\overrightarrow{r};\overrightarrow{n})$ непрерывна по первому аргументу, то

$$\exists \mu_{ji} \, : \, \forall \overrightarrow{r} \; m_i(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) = n_j \mu_{ji}(\overrightarrow{r}).$$

Таким образом, для рассматриваемой частицы помимо тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ вводится также тензор моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$, который является дополнительной независимой характеристикой напряженного состояния, прчем

$$p_i = \sigma_{ji} n_j; \qquad m_i = \mu_{ji} n_j. \tag{1.1}$$

Тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ в общем случае несимметричен. Тензор $\underset{\sim}{\mu}$ является новой по отношению к классической теории упругости характеристикой напряженного состояния. Он также является несимметричным.

1.2 Уравнение равновесия и движения для напряжений и моментных напряжений

Для произвольного объема V тела уравнения равновесия запишем в виде:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Sigma} \overrightarrow{p} d\Sigma + \int_V \overrightarrow{X} dV = 0, \\ \int\limits_{\Sigma} (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} + \overrightarrow{m}) d\Sigma + \int\limits_{V} (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) dV = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Перепишем уравнения в виде:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Sigma} p_i d\Sigma + \int_V X_i dV = 0, \\ \int\limits_{\Sigma} \big(\epsilon_{ijk} x_j p_k + m_i\big) d\Sigma + \int\limits_{V} \big(\epsilon_{ijk} x_j X_k + Y_i\big) dV = 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Применим уравнения (1.2) к бесконечно малому элементу в виде тетраэдра с тремя гранями, ортогональным координатным осям (см.(1.1)).

Учитывая (1.1) и применяя теорему Остроградского - Гаусса, первое уравнение равновесия (1.2) примет вид:

$$\int\limits_V \big(\sigma_{ji,j} + X_i\big) dV = 0 \tag{1.4}$$

В силу произвольности выбора объема V, при условии непрерывности подынтегрального выражения, получаем, что уравнение

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \tag{1.5}$$

справедливо в каждой внутренней точке тела.

Аналогично второе уравнение равновесия (1.2) примет вид:

$$\int\limits_V \big[\epsilon_{ijk} x_j \big(\sigma_{lk,l} + X_k\big) + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i\big] dV = 0 \tag{1.6}$$

Первый член в подинтегральном выражении в силу уравнения (1.5) равен нулю. Так как объем V выбран произвольно, справедливо соотношение

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0 \tag{1.7}$$

Тензор напряжений σ_{ij} несимметричен. Этот тензор будет симметричен только при отсутствии массовых моментов Y_i и моментных напряжений μ_{ij}. В этом случае уравнение (1.7) сводится к виду $\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$, что обеспечивает в теории симметричной теории упругости симметрию тензора $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Уравнения (1.5) и (1.7) являются уравнениями равновесия внутри тела, уравнения (1.1) - на поверхности тела. Соотношения (1.1) можно трактовать и как граничные условия в напряжениях.

$$\sigma_{ji} n_j\big|_{\Sigma_p} = p_i^0\,; \qquad \mu_{ji} n_j\big|_{\Sigma_m} = m_i^0\,,$$

В случае динамических задач следует в силу принципа Даламбера добавить инерционные члены. Уравнения движения принимают вид:

$$\begin{gathered} \sigma_{ji,j} + X_i = \rho\ddot{u}, \\ \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\omega}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь ρ - плотность, J - динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении), ω - вектор поворота.

1.3 Закон сохранения энергии. Баланс энтропии.

Закон сохранения энергии, примененный к объему тела V, ограниченному поверхностью Σ, имеет вид [20]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \Big[\frac{1}{2}(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + J\dot{\omega}_i\dot{\omega}_i) + U\Big]dV =$$
$$= \int\limits_V \big(X_i\dot{u}_i + Y_i\dot{\omega}_i\big)dV + \int\limits_\Sigma \big(p_i\dot{u}_i + m_i\dot{\omega}_i\big)d\Sigma - \int\limits_\Sigma q_i n_i d\Sigma + \int\limits_V w dV. \tag{1.9}$$

Через U мы обозначили внутреннюю энергию, отнесенную к единице объема, через q_i - составляющие вектора мощности теплового потока извне через поверхность тела, а через w - мощность внутренних источников тепла.

Член в левой части уравнения (1.9) представляет возрастание кинетической энергии и внутренней энергии. Первый член в правой части представляет мощность массовых сил и моментов. Наконец, последний член выражает количество тепла, переданное объему V путем теплопроводности. Применяя к уравнению (1.9) теорему Гаусса-Остроградского и принимая во внимание уравнения движения

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i, \qquad \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\omega}_i, \tag{1.10}$$

получим уравнение баланса энергии в интегральной форме

$$\int\limits_V \Big[\dot{U} - \big[\sigma_{ji}(v_{i,j} - \epsilon_{kji}w_k) + \mu_{ji}w_{i,j}\big] + q_{i,i} - w\Big]dV = 0 \tag{1.11}$$

Это уравнение справедливо для произвольного объема V. Если подинтегральное выражение непрерывно, то соотношение

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\varepsilon}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\varkappa}_{ji} - q_{i,i} + w, \tag{1.12}$$

где

$$\varepsilon_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\omega_k, \qquad \varkappa_{ji} = \omega_{i,j} \tag{1.13}$$

представляет собой локальный закон сохранения энергии, или иначе, уравнение баланса внутренней энергии. Через ε_{ji} мы обозначили несимметричный тензор деформаций, через $\varkappa_{ji}$ - тензор искривлений.

Из уравнения баланса внутренней энергии (1.12) следует, что

$$dU = \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} + \mu_{ji} d\varkappa_{ji} - (q_{i,i} + w)dt, \tag{1.14}$$

В термодинамике постулируется, что объемная плотность свободной энергии является термодинамическим потенциалом. Это означает, что dU является полным дифференциалом. Отсюда следует , что последнее слагаемое должно иметь вид

$$w - q_{i,i} = T\dot{S}, \tag{1.15}$$

где S - новый термодинамический параметр (в дополнение к параметрам $\varepsilon_{ji}, \varkappa_{ji}, T$), который назван назван создателями термодинамики объемной плотностью энтропии или просто энтропией.

Заметим, что dU также будет полным дифференциалом, если положить

$$w - q_{i,i} = S\dot{T}, \tag{1.16}$$

Однако, исторически сложилось так, что был выбран вариант (1.15)

Итак

$$dU = \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} + \mu_{ji} d\varkappa_{ji} + TdS \quad \Rightarrow \quad U = U(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa}, S), \tag{1.17}$$

Введем новый термодинамический потенциал - потенциал Гельмгольца или свободную энергию следующим образом:

$$F = U - ST \quad \Rightarrow \quad dF = dU - TdS - SdT = \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} + \mu_{ji} d\varkappa_{ji} + SdT, \tag{1.18}$$

Отсюда следует , что

$$F(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa}, T) \quad \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ji}} d\varepsilon_{ji} + \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}} \varkappa_{ji} + \frac{\partial F}{\partial T} dT, \tag{1.19}$$

Сравнивая (1.18) и (1.19) получаем определяющие соотношения моментной термоупругости.

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ji}}, \qquad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{ji}}, \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{1.20}$$

Из опыта установлено, что поток тепла направлен в сторону меньшей температуры, следовательно

$$\overrightarrow{q}\, gradT = q_i T_{,i} \leq 0.$$

Это неравенство называется неравенством Фурье [155]. Фактически неравенство Фурье является одной из форм второго закона термодинамики. Это неравенство, при не слишком быстром изменении температуры, удовлетворяется линейным законом теплопроводности Фурье

$$q_i = -k_{ij} T_{,j}, \tag{1.21}$$

или

$$-q_i = k_{ij} \theta_{,j}, \qquad T = T_0 + \theta \tag{1.22}$$

где

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad k_{11} > 0.$$

Здесь мы ввели температуру естественного состояния T_0 и перепад температур θ.

Из уравнения (1.17), принимая во внимание соотношения (1.20) и (1.21), имеем

$$T\dot{S} = -q_{i,i} = k_{ij} \theta_{,ij}. \tag{1.23}$$

Для однородного изотропного тела соотношение (1.3) переходит в

$$T\dot{S} = k\theta_{,ii}. \tag{1.24}$$

где k - коэффициент теплопроводности - величина постоянная.

1.4 Определяющие уравнения

Разложим свободную энергию $F(\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\varkappa},T)$ в окрестности естественного состояния $\left(\varepsilon_{ij}=0, \varkappa_{ij}=0\right)$ в ряд Тейлора, пренебрегая величинами выше второго порядка. Такое пренебрежение возможно при малых отклонениях от начального состояния.

Для изотермических процессов получим разложение следующего вида:

$$F(\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\varkappa})=\frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}+D_{ijkl}\varkappa_{ji}\varkappa_{lk}+2B_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varkappa_{lk}) \tag{1.25}$$

Используя (1.20), получаем определяющие определяющие уравнения:

$$\sigma_{ji}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}+B_{ijkl}\varkappa_{kl}, \qquad \mu_{ji}=B_{ijkl}\varepsilon_{kl}+D_{ijkl}\varkappa_{kl}. \tag{1.26}$$

Поэтому для изотропного однородного и центрально-симметричного (не меняющегося при поворотах) тела определяющие уравнения примут вид [20]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ji}=(\mu+\alpha)\varepsilon_{ji}+(\mu-\alpha)\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij},\\ \mu_{ji}=(\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}+\beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

где λ, μ - постоянные Ламе,а $\alpha,\gamma,\varepsilon,\beta$ - физические постоянные материала в рамках среды Коссера несимметричной теории упругости. Эти величины относятся к изотермическому состоянию.

В работе [156], используя условия положительности внутренней энергии, установлены следующие неравенства:

$$\begin{gathered}3\lambda+2\mu+\alpha\geq 0\,, \qquad 2\mu+\alpha\geq 0\,, \qquad \alpha\geq 0,\\ 3\beta+2\gamma\geq 0\,, \qquad |\gamma-\varepsilon|\leq\gamma+\varepsilon\,, \qquad \gamma+\varepsilon\geq 0\end{gathered} \tag{1.28}$$

В цитированной работе получены точные аналитические решения ряда плоских задач. Приведение этих решений к безразмерному виду позволило ввести три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного геометрического размера l исследуемой области (например, для круглой шайбы в одной из рассмотренных далее задач это может быть радиус внешнего контура, по отношению к которому проводится обезразмеривание величин размерности длины):

$$A = l\sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\varepsilon)}} \geq 0, \qquad B = \frac{\alpha+\mu}{\alpha}, \qquad C = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}. \tag{1.29}$$

Константу, аналогичную A, можно найти также в работе [80], где найдено точное аналитическое решение задачи о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве.

Используя (1.28), несложно выписать неравенства, ограничивающие значения данных величин:

$$B \geq 1\,, \qquad |C| \leq 1. \tag{1.30}$$

В работе [157] вводятся, так называемые, технические константы: G - модуль сдвига; ν - коэффициент Пуассона; l_t - характерный размер кручения; l_b - характерный размер изгиба; N - порядок несимметрии; Ψ - полярный коэффициент. Константы, приведенные выше, связаны с техническими константами следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \qquad \mu = G, \qquad \alpha = \frac{GN^2}{1-N^2}, \\ \gamma = Gl_t^2, \qquad \varepsilon = G(4l_b^2 - l_t^2), \qquad \beta = 2Gl_t^2(\Psi^{-1}-1).\end{gathered} \tag{1.31}$$

В той же работе приведены экспериментальные значения технических констант для некоторых материалов. Для расчетов использовались следующие значения свойств материалов:

Таблица 1.1

Экспериментальные значения технических констант

Материал	$\rho, \frac{}{3}$	G,МПа	ν	l_t,мм	l_b,мм	N	Ψ
Синтетический полиуретан	0.59	1033	0.335	0.063	0.032	0.316	1.5
Плотный пенистый полиуретан	0.34	104	0.4	0.62	0.33	0.2	1.5

Глава 2. Осреднение задач моментной теории упругости методом интегральных представлений.

2.1 Постановка смешанной краевой задачи

В моментной теории упругости кроме напряжений и деформаций присутствуют тензоры моментных напряжений и тензор искривлений. Все эти тензоры несимметричны. Постановка статической задачи моментной упругости [20] состоит из уравнений равновесия

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0\,; \qquad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i = 0\,, \tag{2.1}$$

определяющих соотношений

$$\sigma_{ji} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} + B_{ijkl}(x)\varkappa_{kl}\,; \quad \mu_{ji} = B_{klij}(x)\varepsilon_{kl} + D_{ijkl}(x)\varkappa_{kl}\,, \tag{2.2}$$

соотношений типа Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \epsilon_{kji}\omega_k\,; \qquad \varkappa_{ij} = \omega_{j,i}\,, \tag{2.3}$$

и граничных условий

$$\sigma_{ji}n_j\big|_{\Sigma_p} = p_i^0\,,\; u_i\big|_{\Sigma_u} = u_i^0\,; \qquad \mu_{ji}n_j\big|_{\Sigma_m} = m_i^0\,,\; \omega_i\big|_{\Sigma_\omega} = \omega_i^0 \tag{2.4}$$

Коэффициенты C_{ijkl}, D_{ijkl}, B_{ijkl} являются компонентами тензоров четвертого ранга. Они представляют собой коэффициенты разложения свободной энергии $F(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa})$ в ряд Тейлора в окрестности естественного состояния $\underset{\sim}{\varepsilon} = 0$, $\underset{\sim}{\varkappa} = 0$

$$F(\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\varkappa}) = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} + D_{ijkl}\varkappa_{ji}\varkappa_{lk} + 2B_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varkappa_{lk}) \tag{2.5}$$

Коэффициенты в выражении для свободной энергии симметричны по первой и второй парам индексов, но они не симметричны по индексам в парах. В изотропном случае [26])

$$
\begin{aligned}
&C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu + \varkappa)\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}\,,\\
&D_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}\,,\\
&B_{ijkl} = 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
(C_{ijkl}) =
\begin{array}{c|c}
\frac{kl\to}{ij\downarrow} & \begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 12 & 13 & 23 & 21 & 31 & 32 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 11\\22\\33\\12\\13\\23\\21\\31\\32 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
\lambda+2\mu+\varkappa & \lambda & \lambda & & & & & & \\
\lambda & \lambda+2\mu+\varkappa & \lambda & & & & & & \\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu+\varkappa & & & & & & \\
 & & & \mu+\varkappa & & & \mu & & \\
 & & & & \mu+\varkappa & & & \mu & \\
 & & & & & \mu+\varkappa & & & \mu \\
 & & & \mu & & & \mu+\varkappa & & \\
 & & & & \mu & & & \mu+\varkappa & \\
 & & & & & \mu & & & \mu+\varkappa
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
(D_{ijkl}) =
\begin{array}{c|c}
\frac{kl\to}{ij\downarrow} & \begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 12 & 13 & 23 & 21 & 31 & 32 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 11\\22\\33\\12\\13\\23\\21\\31\\32 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
\alpha+\beta+\gamma & \alpha & \alpha & & & & & & \\
\alpha & \alpha+\beta+\gamma & \alpha & & & & & & \\
\alpha & \alpha & \alpha+\beta+\gamma & & & & & & \\
 & & & \beta & & & \gamma & & \\
 & & & & \beta & & & \gamma & \\
 & & & & & \beta & & & \gamma \\
 & & & \gamma & & & \beta & & \\
 & & & & \gamma & & & \beta & \\
 & & & & & \gamma & & & \beta
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Уравнения моментной теории упругости легко сводятся к шести связанным дифференциальным уравнениям в частных производных относительно трёх перемещений $u_i(x)$ и трёх углов вращения $\omega_i(x)$.

2.2 Обобщение классических интегральных уравнений для моментной теории упругости.

Уравнения моментной теории упругости легко сводятся к шести связанным дифференциальным уравнениям в частных производных относительно трёх перемещений $u_i(x)$ и трёх углов вращения $\omega_i(x)$. Также как и в классической теории, в моментной теории имеет место локальное тождество типа тождества Бетти

$$\sigma_{ij}\varepsilon'_{ij} + \mu_{ij}\varkappa'_{ij} = \sigma'_{ij}\varepsilon_{ij} + \mu'_{ij}\varkappa_{ij}\,, \tag{2.7}$$

из которого выводится формула взаимности [20]

$$\int\limits_V \left(X_i u'_i + Y_i\omega'_i\right) dV + \int\limits_\Sigma \left(\sigma_{ji}n_j u'_i + \mu_{ji}n_j\omega'_i\right) d\Sigma = \\ = \int\limits_V \left(X'_i u_i + Y'_i\omega_i\right) dV + \int\limits_\Sigma \left(\sigma'_{ji}n_j u_i + \mu'_{ji}n_j\omega_i\right) d\Sigma \tag{2.8}$$

В статической задаче моментной теории упругости тензоры Грина можно ввести двумя различными способами. В первом случае в точке ξ тела задаётся единичная сосредоточенная сила, направленная по оси x_k, т.е. $X_i = \delta_{ik}\delta(x-\xi)$, $Y_i \equiv 0$.

Обозначим через $\overset{1}{u}{}_i^{(k)}(x,\xi)$ и $\overset{1}{\omega}{}_i^{(k)}(x,\xi)$ решение задачи (2.1)-(2.4) в точке x при однородных граничных условиях. В другом случае в точке ξ тела задаётся единичный сосредоточенный момент, направленный по оси x_k, т.е. $X_i \equiv 0$, $Y_i = \delta_{ik}\delta(x-\xi)$. Второму случаю соответствует решение $\overset{2}{u}{}_i^{(k)}(x,\xi)$ и $\overset{2}{\omega}{}_i^{(k)}(x,\xi)$, удовлетворяющее уравнениям (2.1)-(2.3) при однородных граничных условиях (2.4). Эти тензоры используем для получения аналогов формулы Грина [158] из формулы взаимности (2.8)

$$u_i(x) = \int\limits_V \left[X_k(\xi)\,\overset{1}{u}{}_k^{(i)}(\xi,x) + Y_k(\xi)\,\overset{1}{\omega}{}_k^{(i)}(\xi,x)\right] dV_\xi +$$

$$+\int\limits_{\Sigma_p}\Big[p_k^0(\xi)\overset{1}{u}{}_k^{(i)}(\xi,x)+m_k^0(\xi)\overset{1}{\omega}{}_k^{(i)}(\xi,x)\Big]d\Sigma_\xi-$$

$$-\int\limits_{\Sigma_u}\Big[u_k^0(\xi)\overset{1}{\sigma}{}_{jk}^{(i)}(\xi,x)\,n_j+\omega_k^0(\xi)\overset{1}{\mu}{}_{jk}^{(i)}(\xi,x)\,n_j\Big]d\Sigma_\xi \qquad (2.9)$$

$$\omega_i(x)=\int\limits_V\Big[X_k(\xi)\overset{2}{u}{}_k^{(i)}(\xi,x)+Y_k(\xi)\overset{2}{\omega}{}_k^{(i)}(\xi,x)\Big]dV_\xi+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_p}\Big[p_k^0(\xi)\overset{2}{u}{}_k^{(i)}(\xi,x)+m_k^0(\xi)\overset{2}{\omega}{}_k^{(i)}(\xi,x)\Big]d\Sigma_\xi-$$

$$-\int\limits_{\Sigma_u}\Big[u_k^0(\xi)\overset{2}{\sigma}{}_{jk}^{(i)}(\xi,x)\,n_j+\omega_k^0(\xi)\overset{2}{\mu}{}_{jk}^{(i)}(\xi,x)\,n_j\Big]d\Sigma_\xi \qquad (2.10)$$

2.3 Сопутствующая задача моментной упругости.

Под сопутствующей задачей будем понимать задачу аналогичную исходной задаче для тела той же самой формы и с теми же входными данными, но с постоянными материальными характеристиками C^0_{ijkl}, D^0_{ijkl} и B^0_{ijkl}. Обозначим через v_i, e_{ij}, τ_{ij} — перемещения, деформации и напряжения, а через ψ_i, π_{ij}, ν_{ij} — углы вращения, моментные деформации и моментные напряжения в сопутствующей задаче. Постановка сопутствующей задачи даётся следующими формулами:

$$\tau_{ji,j}+X_i=0\,;\qquad \nu_{ji,j}+\epsilon_{ijk}\tau_{jk}+Y_i=0\,, \qquad (2.11)$$

$$\tau_{ji}=C^o_{ijkl}e_{lk}+B^o_{ijkl}\pi_{lk}\,;\quad \nu_{ji}=B^o_{klij}e_{lk}+D^o_{ijkl}\pi_{lk}\,, \qquad (2.12)$$

$$e_{lk}=v_{k,l}+\epsilon_{kls}\psi_s\,;\qquad \pi_{lk}=\psi_{k,l}\,, \qquad (2.13)$$

$$\tau_{ji}n_j\big|_{\Sigma_p}=p_i^0\,,\ v_i\big|_{\Sigma_u}=u_i^0\,;\qquad \nu_{ji}n_j\big|_{\Sigma_m}=m_i^0\,,\ \psi_i\big|_{\Sigma_\omega}=\omega_i^0 \qquad (2.14)$$

Систему уравнений (2.11)–(2.13) можно записать в виде

$$\begin{cases} C^o_{ijmn}e_{nm,j} + B^o_{ijmn}\pi_{nm,j} + X_i = 0 \\ B^o_{ijmn}e_{nm,j} + D^o_{ijmn}\pi_{nm,j} + \epsilon_{ijr}\big(C^o_{rjmn}e_{nm} + B^o_{rjmn}\pi_{nm}\big) + Y_i = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

или

$$\begin{cases} C^o_{ijmn}v_{m,nj} + B^o_{ijmn}\psi_{m,nj} + C^o_{ijmn}\epsilon_{mns}\psi_{s,j} + X_i = 0 \\ B^o_{ijmn}v_{m,nj} + D^o_{ijmn}\psi_{m,nj} + \epsilon_{ijr}C^o_{rjmn}v_{m,n} + \epsilon_{ijr}B^o_{rjmn}\psi_{m,n} + \\ +\epsilon_{ijr}C^o_{rjmn}\epsilon_{mns}\psi_s + Y_i = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Система уравнений (2.16) является связанной системой уравнений. Связанность является следствием несимметрии материальных тензоров четвертого ранга, а также следствием наличия дополнительных слагаемых в уравнениях равновесия, в определяющих соотношениях и в соотношениях типа Коши. Даже в том случае, когда $B^o_{ijmn} = 0$ уравнения не перестают быть связанными из-за не симметрии коэффициентов C^o_{ijmn} по индексам в первой и второй парах индексов.

$$\begin{cases} C^o_{ijmn}v_{m,nj} + C^o_{ijmn}\epsilon_{mns}\psi_{s,j} + X_i = 0 \\ D^o_{ijmn}\psi_{m,nj} + \epsilon_{ijr}C^o_{rjmn}v_{m,n} + \epsilon_{ijr}C^o_{rjmn}\epsilon_{mns}\psi_s + Y_i = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

2.4 Интегральная формула в статической задаче.

Выведем основную формулу этой работы.Возьмем обобщение интегральной формулы Бетти и преобразуем ее:

$$\int\limits_V \big(\sigma_{ij} \overset{1}{\varepsilon}\,{}^{(k)}_{ij} + \mu_{ij} \overset{1}{\varkappa}\,{}^{(k)}_{ij}\big) dV_x = \int\limits_V \big(\overset{1}{\sigma}\,{}^{(k)}_{ij}\varepsilon_{ij} + \overset{1}{\mu}\,{}^{(k)}_{ij}\varkappa_{ij}\big) dV_x \tag{2.18}$$

Сначала распишем правую часть:

$$\int\limits_V \big(\overset{1}{\sigma}\,{}^{(k)}_{ij}\varepsilon_{ij} + \overset{1}{\mu}\,{}^{(k)}_{ij}\varkappa_{ij}\big) dV_x = \int\limits_V \big[\overset{1}{\sigma}\,{}^{(k)}_{ij}(u_{i,j} + \epsilon_{kji}\omega_k) + \overset{1}{\mu}\,{}^{(k)}_{ij}\omega_{j,i}\big] dV_x =$$

$$= \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} u_{j,i} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} \epsilon_{kji}\omega_k dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \omega_{j,i} dV_x = \int\limits_V \big(\overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} u_j \big)_{,i} dV_x -$$

$$- \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij,i} u_j dV_x + \int\limits_V \big(\overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \omega_j \big)_{,i} dV_x - \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij,i} \omega_j dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} \epsilon_{kji}\omega_k dV_x =$$

$$= \int\limits_\Sigma \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} n_i u_j d\Sigma_x + \int\limits_V \delta_{jk} u_j \delta(x-\xi) dV_x + \int\limits_\Sigma \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} n_i \omega_j d\Sigma_x + \int\limits_V \epsilon_{jik} \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ik} \omega_j dV_x +$$

$$+ \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} \epsilon_{kji}\omega_k dV_x = u_k(\xi) + \int\limits_{\Sigma_u} \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} n_i u^0_j d\Sigma_x + \int\limits_{\Sigma_\omega} \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} n_i \omega^0_j d\Sigma_x =$$

$$= u_k(\xi) + \int\limits_{\Sigma_u} \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} n_i v_j d\Sigma_x + \int\limits_{\Sigma_\omega} \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} n_i \psi_j d\Sigma_x = u_k(\xi) + \int\limits_\Sigma \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} n_i v_j d\Sigma_x +$$

$$\int\limits_\Sigma \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} n_i \psi_j d\Sigma_x = u_k(\xi) + \int\limits_V \big(\overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} v_j \big)_{,i} dV_x + \int\limits_V \big(\overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \psi_j \big)_{,i} dV_x =$$

$$= u_k(\xi) + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij,i} v_j dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} v_{j,i} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij,i} \psi_j dV_x +$$

$$+ \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \psi_{j,i} dV_x = u_k(\xi) - \int\limits_V \delta_{jk} \delta(x-\xi) v_j dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} v_{j,i} dV_x -$$

$$- \int\limits_V \epsilon_{jik}\, \sigma{}^{(k)}_{ik} \psi_j dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \pi_{ij} dV_x = \big[u_k(\xi) - v_k(\xi)\big] + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} \big(v_{j,i} + \epsilon_{kji}\psi_k\big) dV_x +$$

$$+ \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \pi_{ij} dV_x = \big[u_k(\xi) - v_k(\xi)\big] + \int\limits_V \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{ij} e_{ij} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij} \pi_{ij} dV_x.$$

Затем левую:

$$\int\limits_V \big(\overset{1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{ij} \sigma_{ij} + \overset{1}{\varkappa}{}^{(k)}_{ij} \mu_{ij} \big) dV_x = \int\limits_V \big[(\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j,i} + \epsilon_{kji} \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{k}) \sigma_{ij} + \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j,i} \mu_{ij} \big] dV_x =$$

$$= \int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j,i} \sigma_{ij} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{k} \epsilon_{kji} \sigma_{ij} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j,i} \mu_{ij} dV_x = \int\limits_V \big(\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j} \sigma_{ij} \big)_{,i} dV_x -$$

$$- \int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j} \sigma_{ij,i} dV_x + \int\limits_V \big(\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j} \mu_{ij} \big)_{,i} dV_x - \int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j} \mu_{ij,i} dV_x + \int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{k} \epsilon_{kji} \sigma_{ij} dV_x =$$

$$= \int\limits_\Sigma \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j} n_i \sigma_{ij} d\Sigma_x + \int\limits_V X_j \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j} dV_x + \int\limits_\Sigma \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j} n_i \mu_{ij} d\Sigma_x + \int\limits_V \big(Y_j + \epsilon_{jik}\sigma_{ik}\big) \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j} dV_x +$$

$$+\int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}\epsilon_{kji}\sigma_{ij}dV_x=\int\limits_\Sigma \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}n_i\sigma_{ij}d\Sigma_x+\int\limits_V X_j\,\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}dV_x+\int\limits_\Sigma \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}n_i\mu_{ij}d\Sigma_x+$$

$$+\int\limits_V Y_j\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_{\Sigma_p} \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}p^0_j d\Sigma_x-\int\limits_V \tau_{ij,i}\,\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}dV_x+\int\limits_{\Sigma_m} \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}m^0_j d\Sigma_x+$$

$$+\int\limits_V \big(-\nu_{ij,i}-\epsilon_{jik}\tau_{ik}\big)\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_{\Sigma_p} \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}\tau_{ij}n_i d\Sigma_x-\int\limits_V \tau_{ij,i}\,\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}dV_x+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_m} \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}\nu_{ij}n_i d\Sigma_x+\int\limits_V \big(-\nu_{ij,i}-\epsilon_{jik}\tau_{ik}\big)\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_{\Sigma} \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}\tau_{ij}n_i d\Sigma_x-$$

$$-\int\limits_V \tau_{ij,i}\,\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}dV_x+\int\limits_{\Sigma} \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}\nu_{ij}n_i d\Sigma_x+\int\limits_V \big(-\nu_{ij,i}-\epsilon_{jik}\tau_{ik}\big)\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=$$

$$=\int\limits_V \big(\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}\tau_{ij}\big)_{,i}dV_x-\int\limits_V \tau_{ij,i}\,\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}dV_x+\int\limits_V \big(\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}\nu_{ij}\big)_{,i}dV_x-$$

$$-\int\limits_V \big(\nu_{ij,i}+\epsilon_{jik}\tau_{ik}\big)\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j,i}\tau_{ij}dV_x+\int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}\tau_{ij,i}dV_x-\int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j}\tau_{ij,i}dV_x+$$

$$+\int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j,i}\nu_{ij}dV_x+\int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}\nu_{ij,i}dV_x-\int\limits_V \big(\nu_{ij,i}+\epsilon_{jik}\tau_{ik}\big)\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_V \overset{1}{u}{}^{(k)}_{j,i}\tau_{ij}dV_x+$$

$$\int\limits_V \overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j,i}\nu_{ij}dV_x-\int\limits_V \epsilon_{jik}\tau_{ik}\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{j}dV_x=\int\limits_V \big(\overset{1}{u}{}^{(k)}_{j,i}+\epsilon_{kji}\,\overset{1}{\omega}{}^{(k)}_{k}\big)\tau_{ij}dV_x+$$

$$+\int\limits_V \overset{1}{\varkappa}{}^{(k)}_{ij}\nu_{ij}dV_x=\int\limits_V \overset{1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{ij}\tau_{ij}dV_x+\int\limits_V \overset{1}{\varkappa}{}^{(k)}_{ij}\nu_{ij}dV_x.$$

Собрав обе части вместе, и поменяв x и ξ местами, получим первую формулу:

$$u_i(x)=v_i(x)+\int\limits_V \Big[\tau_{kl}(\xi)\,\overset{1}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)-e_{kl}(\xi)\,\overset{1}{\sigma}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\Big]dV_\xi+$$
$$+\int\limits_V \Big[\nu_{kl}(\xi)\,\overset{1}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)-\pi_{kl}(\xi)\,\overset{1}{\mu}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\Big]dV_\xi. \qquad (2.19)$$

Выведем вторую формулу:

$$\int\limits_V \big(\sigma_{ij}\,\overset{2}{\varepsilon}{}^{(k)}_{ij}+\mu_{ij}\,\overset{2}{\varkappa}{}^{(k)}_{ij}\big)dV_x=\int\limits_V \big(\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\varepsilon_{ij}+\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\varkappa_{ij}\big)dV_x \qquad (2.20)$$

Правая часть преобразуется так:

$$\int\limits_V \Big(\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\varepsilon_{ij}+\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\varkappa_{ij}\Big)dV_x=\int\limits_V\Big[\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}(u_{i,j}+\epsilon_{kji}\omega_k)+\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\omega_{j,i}\Big]dV_x=$$

$$\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}u_{j,i}dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\epsilon_{kji}\omega_k dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\omega_{j,i}dV_x=\int\limits_V\Big(\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}u_j\Big)_{,i}dV_x-$$

$$-\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij,i}u_j dV_x+\int\limits_V\Big(\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\omega_j\Big)_{,i}dV_x-\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij,i}\omega_j dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\epsilon_{kji}\omega_k dV_x=$$

$$=\int\limits_\Sigma \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}n_i u_j d\Sigma_x+\int\limits_\Sigma \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}n_i\omega_j d\Sigma_x+\int\limits_V \epsilon_{jik}\,\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ik}\omega_j dV_x+$$

$$+\int\limits_V \delta_{jk}\delta(x-\xi)\omega_j dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\epsilon_{kji}\omega_k dV_x=\omega_k(\xi)+\int\limits_{\Sigma_u}\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}n_i u^0_j d\Sigma_x+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_\omega}\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}n_i\omega^0_j d\Sigma_x=\omega_k(\xi)+\int\limits_{\Sigma_u}\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}n_i v_j d\Sigma_x+\int\limits_{\Sigma_\omega}\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}n_i\psi_j d\Sigma_x=$$

$$=\omega_k(\xi)+\int\limits_\Sigma \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}n_i v_j d\Sigma_x+\int\limits_\Sigma \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}n_i\psi_j d\Sigma_x=\omega_k(\xi)+$$

$$+\int\limits_V\Big(\overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}v_j\Big)_{,i}dV_x+\int\limits_V\Big(\overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\psi_j\Big)_{,i}dV_x=\omega_k(\xi)+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij,i}v_j dV_x+$$

$$+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}v_{j,i}dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij,i}\psi_j dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\psi_{j,i}dV_x=\omega_k(\xi)+$$

$$+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}v_{j,i}dV_x-\int\limits_V \epsilon_{jik}\,\sigma^{(k)}_{ik}\psi_j dV_x-\int\limits_V \delta_{jk}\delta(x-\xi)\psi_j dV_x+\int\limits_V \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\pi_{ij}dV_x=$$

$$=\big[\omega_k(\xi)-\psi_k(\xi)\big]+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}\big(v_{j,i}+\epsilon_{kji}\psi_k\big)dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\pi_{ij}dV_x=$$

$$=\big[\omega_k(\xi)-\psi_k(\xi)\big]+\int\limits_V \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{ij}e_{ij}dV_x+\int\limits_V \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{ij}\pi_{ij}dV_x.$$

А левая часть также как и при выводе первой формулы. Поэтому получаем:

$$\omega_i(x)=\psi_i(x)+\int\limits_V\Big[\tau_{kl}(\xi)\,\overset{2}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)-e_{kl}(\xi)\,\overset{2}{\sigma}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\Big]dV_\xi+$$

$$+\int\limits_V \Big[\nu_{kl}(\xi)\overset{2}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x) - \pi_{kl}(\xi)\overset{2}{\mu}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\Big]dV_\xi \tag{2.21}$$

Первая строка в формуле (2.21) в точности совпадает с формулой симметричной теории упругости. Воспользуемся далее определяющими соотношениями исходной и сопутствующей задач и заменим в формулах (2.19), (2.21) величины τ_{kl}, ν_{kl}, $\sigma^{(i)}_{kl}$, $\mu^{(i)}_{kl}$ на e_{kl}, π_{kl}, $\varepsilon^{(i)}_{kl}$, $\varkappa^{(i)}_{kl}$. После чего предыдущие формулы примут вид:

$$\begin{aligned} u_i(x) = v_i(x)+ \\ &+\int\limits_V \Big\{\overset{1}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[C^0_{klpq} - C_{klpq}(\xi)\big] + \overset{1}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq} - B_{klpq}(\xi)\big]\Big\}e_{pq}(\xi)dV_\xi + \\ &+\int\limits_V \Big\{\overset{1}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq} - B_{klpq}(\xi)\big] + \overset{1}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[D^0_{klpq} - D_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\pi_{pq}(\xi)dV_\xi \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \omega_i(x) = \psi_i(x)+ \\ &+\int\limits_V \Big\{\overset{2}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[C^0_{klpq} - C_{klpq}(\xi)\big] + \overset{2}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq} - B_{klpq}(\xi)\big]\Big\}e_{pq}(\xi)dV_\xi + \\ &+\int\limits_V \Big\{\overset{2}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq} - B_{klpq}(\xi)\big] + \overset{2}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[D^0_{klpq} - D_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\pi_{pq}(\xi)dV_\xi \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.5 Проверка интегральных формул.

Проверим интегральные формулы (2.22) и (2.23), подставив их в уравнения равновесия (2.1). Для простоты изложения будем считать, что $\Sigma = \Sigma_u$.

Из теоремы взаимности следует, что

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{u}{}^{(i)}_{j}(x,\xi) = \overset{1}{u}{}^{(j)}_{i}(\xi,x)\,,\\ \overset{1}{\omega}{}^{(i)}_{j}(x,\xi) = \overset{1}{\omega}{}^{(j)}_{i}(\xi,x)\,,\\ \overset{1}{u}{}^{(i)}_{j}(x,\xi) = \overset{2}{\omega}{}^{(j)}_{i}(\xi,x)\,,\\ \overset{1}{\omega}{}^{(i)}_{j}(x,\xi) = \overset{2}{u}{}^{(j)}_{i}(\xi,x)\end{array}\right. \tag{2.24}$$

Следовательно

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{\varepsilon}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{1}{u}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) + \epsilon_{qpm}\,\overset{1}{\omega}{}^{(l)}_{m}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\,,\\ \overset{1}{\varkappa}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{1}{\omega}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\,,\\ \overset{2}{\varepsilon}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{2}{u}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{\omega}{}^{(l)}_{m}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{\omega}{}^{(q)}_{l}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{\omega}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\,,\\ \overset{2}{\varkappa}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{2}{\omega}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\end{array}\right. \tag{2.25}$$

Подставим (2.25) в (2.22)

$$\begin{aligned} u_l(x) =& v_l(x) + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\right)\left[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\right]\right\} e_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\right)\left[B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)\right]\right\} e_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\right)\left[B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)\right]\right\} \pi_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\right)\left[D^0_{pqst} - D_{pqst}(\xi)\right]\right\} \pi_{st}(\xi)dV_\xi \;= \\ &= \int\limits_\Sigma \left\{\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)\left[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\right]\right\} e_{st}(\xi)dV_\xi - \\ &- \int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\left(\left[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\right] e_{st}(\xi)\right)\right\}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\epsilon_{qpm}\left[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\right] e_{st}(\xi)\right\}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)dV_\xi + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Sigma}\Big\{\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\Big\}e_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int_{\Sigma}\Big\{\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\Big\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int_{\Sigma}\Big\{\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\Big\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)dV_\xi\ =\\
=&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)dV_\xi+\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)dV_\xi-\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)dV_\xi-\\
&-\int_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)dV_\xi
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} \hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi](\bullet) = -\int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big([C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)]e_{st}(\xi)\Big)\right\}(\bullet)dV_\xi\,, \\ \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi](\bullet) = \int\limits_V \left\{\epsilon_{qpm}\big[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\right\}(\bullet)dV_\xi\,, \\ \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet) = -\int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big([B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)]\pi_{st}(\xi)\Big)\right\}(\bullet)dV_\xi\,, \\ \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet) = \int\limits_V \left\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\right\}(\bullet)dV_\xi \end{cases} \tag{2.27}$$

Получим

$$\begin{gathered} u_l(x) = v_l(x) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi]\overset{1}{u}{}^{(q)}_l(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi]\overset{2}{u}{}^{(m)}_l(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{2}{u}{}^{(q)}_l(x,\xi) + \\ +\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{1}{u}{}^{(q)}_l(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{2}{u}{}^{(m)}_l(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi]\overset{2}{u}{}^{(q)}_l(x,\xi) \end{gathered} \tag{2.28}$$

Заметим, что если $x \in \Sigma$, тогда $u_l(x) = v_l(x) = u^0_l$.

Аналогично подставим (2.25) в (2.23)

$$\begin{aligned} \omega_l(x) =& \psi_l(x) + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}^{(m)}_l(x,\xi)\right)\big[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\big]\right\}e_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_l(x,\xi)\right)\big[B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)\big]\right\}e_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}^{(m)}_l(x,\xi)\right)\big[B^0_{pqst} - B_{pqst}(\xi)\big]\right\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_l(x,\xi)\right)\big[D^0_{pqst} - D_{pqst}(\xi)\big]\right\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi = \\ &= \int\limits_\Sigma \left\{\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)\big[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\big]\right\}e_{st}(\xi)dV_\xi - \\ &- \int\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\right\}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi + \\ &+ \int\limits_V \left\{\epsilon_{qpm}\big[C^0_{pqst} - C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\right\}\overset{2}{\omega}{}^{(m)}_l(x,\xi)dV_\xi + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{\Sigma}\Big\{\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\Big\}e_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int\limits_{\Sigma}\Big\{\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\Big\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int\limits_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(m)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int\limits_{\Sigma}\Big\{\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\Big\}\pi_{st}(\xi)dV_\xi-\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)dV_\xi=\\
=&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int\limits_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(m)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)dV_\xi-\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{1}{\omega}{}^{(q)}(x,\xi)dV_\xi+\\
&+\int\limits_{V}\Big\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(m)}(x,\xi)dV_\xi-\\
&-\int\limits_{V}\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi)dV_\xi
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Используя обозначения (2.27), получим

$$\omega_l(x) = v_l(x) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{1}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{2}{\omega}{}_l^{(m)}(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi) +$$
$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{1}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\omega}{}_l^{(m)}(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi] \overset{2}{\omega}{}_l^{(q)}(x,\xi) \tag{2.30}$$

Заметим, что если $x \in \Sigma$, тогда $\omega_l(x) = v_l(x) = \omega_l^0$.

Теперь получим выражения для деформаций и искривлений, подставив (2.28) и (2.30) в (2.3)

$$\varepsilon_{kl}(x) = e_{kl}(x) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{1}{\varepsilon}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{2}{\varepsilon}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\varepsilon}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) +$$
$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{1}{\varepsilon}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\varepsilon}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi] \overset{2}{\varepsilon}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) \tag{2.31}$$

$$\varkappa_{kl}(x) = \pi_{kl}(x) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{1}{\varkappa}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{2}{\varkappa}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\varkappa}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) +$$
$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{1}{\varkappa}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\varkappa}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi] \overset{2}{\varkappa}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) \tag{2.32}$$

Теперь получим выражения для напряжений и моментных напряжений, подставив (2.31) и (2.32) в (2.2)

$$\begin{gathered}\sigma_{kl}(x) = C_{lkst}e_{st}(x) + B_{lkst}\pi_{st}(x) + \\ +\hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{1}{\sigma}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{2}{\sigma}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\sigma}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \\ +\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{1}{\sigma}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\sigma}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi] \overset{2}{\sigma}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi)\end{gathered} \tag{2.33}$$

$$\begin{gathered}\mu_{kl}(x) = B_{lkst}e_{st}(x) + D_{lkst}\pi_{st}(x) + \\ +\hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{1}{\mu}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi] \overset{2}{\mu}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\mu}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \\ +\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{1}{\mu}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi) + \hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi] \overset{2}{\mu}{}_{kl}^{(m)}(x,\xi) + \hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi] \overset{2}{\mu}{}_{kl}^{(q)}(x,\xi)\end{gathered} \tag{2.34}$$

Теперь подставим выражения для напряжений и моментных напряжений (2.33) и (2.34) в уравнения равновесия (2.1)

$$\Big[C_{lkst}e_{st}(x)+B_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+X_l+$$
$$+\hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi]\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi]\overset{2}{\sigma}{}^{(m)}_{kl,k}(x,\xi)+\hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+$$
$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{2}{\sigma}{}^{(m)}_{kl,k}(x,\xi)+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi]\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)=$$
$$=\Big[C_{lkst}e_{st}(x)+B_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}-\Big[C^0_{lkst}e_{st}(x)+B^0_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+$$
$$+\hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi]\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)=$$
$$=\Big[\big(C_{lkst}-C^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}+\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}-$$
$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}(\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi))dV_\xi-$$
$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}(\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi))dV_\xi=$$
$$=\Big[\big(C_{lkst}-C^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}+\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}-$$
$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}(-\delta(x-\xi)\delta_{lq})dV_\xi-$$
$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}(-\delta(x-\xi)\delta_{lq})dV_\xi=$$
$$=\Big[\big(C_{lkst}-C^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}+\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}-$$
$$-\Big[\big(C_{lkst}-C^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}-\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}\equiv 0$$

Первое уравнение равновесия выполняется тождественно. Теперь рассмотрим второе уравнение

$$\Big[B_{lkst}e_{st}(x)+D_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+\epsilon_{ljk}\Big[C_{jkst}e_{st}(x)+B_{jkst}\pi_{st}(x)\Big]+Y_l+$$
$$+\hat{E}_q[\underset{\sim}{C},\xi]\big(\overset{1}{\mu}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{jk}(x,\xi)\big)+$$
$$+\hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi]\big(\overset{2}{\mu}{}^{(m)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{2}{\sigma}{}^{(m)}_{jk}(x,\xi)\big)+$$
$$+\hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\big(\overset{2}{\mu}{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{jk}(x,\xi)\big)+$$

$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\big(\overset{1}{\mu}\,{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{1}{\sigma}\,{}^{(q)}_{jk}(x,\xi)\big)+$$

$$+\hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi]\big(\overset{2}{\mu}\,{}^{(m)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{2}{\sigma}\,{}^{(m)}_{jk}(x,\xi)\big)+$$

$$+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi]\big(\overset{2}{\mu}\,{}^{(q)}_{kl,k}(x,\xi)+\epsilon_{ljk}\overset{2}{\sigma}\,{}^{(q)}_{jk}(x,\xi)\big)=$$

$$=\Big[B_{lkst}e_{st}(x)+D_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+\epsilon_{ljk}\Big[C_{jkst}e_{st}(x)+B_{jkst}\pi_{st}(x)\Big]-$$

$$-\Big[B^0_{lkst}e_{st}(x)+D^0_{lkst}\pi_{st}(x)\Big]_{,k}-\epsilon_{ljk}\Big[C^0_{jkst}e_{st}(x)+B^0_{jkst}\pi_{st}(x)\Big]+$$

$$+\hat{G}_m[\underset{\sim}{C},\xi]\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lm}\big)+\hat{E}_q[\underset{\sim}{B},\xi]\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lq}\big)+$$

$$+\hat{Q}_m[\underset{\sim}{B},\xi]\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lm}\big)+\hat{\Pi}_q[\underset{\sim}{D},\xi]\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lq}\big)=$$

$$=\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}+\Big[\big(D_{lkst}-D^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+$$

$$+\epsilon_{ljk}\Big[\big(C_{jkst}-C^0_{jkst}\big)e_{st}(x)\Big]+\epsilon_{ljk}\Big[\big(B_{jkst}-B^0_{jkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]+$$

$$+\int\limits_V\Big\{\epsilon_{qpm}\big[C^0_{pqst}-C_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big\}\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lm}\big)dV_\xi-$$

$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]e_{st}(\xi)\Big)\Big\}\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lq}\big)dV_\xi+$$

$$+\int\limits_V\Big\{\epsilon_{qpm}\big[B^0_{pqst}-B_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big\}\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lm}\big)dV_\xi-$$

$$-\int\limits_V\Big\{\frac{\partial}{\partial\xi_p}\Big(\big[D^0_{pqst}-D_{pqst}(\xi)\big]\pi_{st}(\xi)\Big)\Big\}\big(-\delta(x-\xi)\delta_{lq}\big)dV_\xi=$$

$$=\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}+\Big[\big(D_{lkst}-D^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}+$$

$$+\epsilon_{ljk}\Big[\big(C_{jkst}-C^0_{jkst}\big)e_{st}(x)\Big]+\epsilon_{ljk}\Big[\big(B_{jkst}-B^0_{jkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]-$$

$$-\epsilon_{ljk}\Big[\big(C_{jkst}-C^0_{jkst}\big)e_{st}(x)\Big]-\Big[\big(B_{lkst}-B^0_{lkst}\big)e_{st}(x)\Big]_{,k}-$$

$$-\epsilon_{ljk}\Big[\big(B_{jkst}-B^0_{jkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]-\Big[\big(D_{lkst}-D^0_{lkst}\big)\pi_{st}(x)\Big]_{,k}\equiv 0$$

Второе уравнение равновесия также выполняется тождественно. Тем самым мы показали, что $u_l(x)$ и $\omega_l(x)$, вычисленные согласно интегральным формулам (2.22) и (2.23), являются решением исходной краевой задачи.

2.6 Разложение решения исходной статической задачи в ряд по производным от решения сопутствующей задачи.

Предположим, что деформации в сопутствующей задаче являются гладкими функциями координатx_i. Тогда в окрестности любой точки $x \in V$ их можно разложить в ряды Тейлора, так что в любой точке $\xi \in V$ справедливы следующие равенства:

$$e_{kl}(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \Pi_{i_1 \ldots i_q}(\xi,x) e_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) \tag{2.35}$$

$$\pi_{kl}(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \Pi_{i_1 \ldots i_q}(\xi,x) \pi_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) \, , \tag{2.36}$$

где

$$\Pi_{i_1 \ldots i_q}(\xi,x) \equiv \frac{1}{q!} (\xi_{i_1} - x_{i_1}) \ldots \left(\xi_{i_q} - x_{i_q}\right) \tag{2.37}$$

(Здесь сделано очень сильное предположение, что функции раскладываются в ряды Тейлора во всей области V, занимаемой телом.) Подставив эти выражения в формулы (2.22) и (2.23) мы получим представление решения исходной задачи моментной теории упругости в виде рядов по градиентам деформаций и искривлений в сопутствующей задаче

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} \left[N_{ikli_1 \ldots i_q}(x) \, e_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) + U_{ikli_1 \ldots i_q}(x) \, \pi_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) \right] \tag{2.38}$$

$$\omega_i(x) = \psi_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} \left[V_{ikli_1 \ldots i_q}(x) \, e_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) + M_{ikli_1 \ldots i_q}(x) \, \pi_{kl,i_1 \ldots i_q}(x) \right] \tag{2.39}$$

где

$$N_{ikli_1 \ldots i_q}(x) = \int_V \Big\{ \overset{1}{\varepsilon} \, {}^{(i)}_{kl}(\xi,x) \left[C^0_{klpq} - C_{klpq}(\xi) \right] +$$

$$+\overset{1}{\varkappa}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq}-B_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\Pi_{i_1\ldots i_q}(\xi,x)dV_\xi \quad (2.40)$$

$$U_{ikli_1\ldots i_q}(x)=\int\limits_V\Big\{\overset{1}{\varepsilon}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq}-B_{klpq}(\xi)\big]+$$
$$+\overset{1}{\varkappa}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[D^0_{klpq}-D_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\Pi_{i_1\ldots i_q}(\xi,x)dV_\xi \quad (2.41)$$

$$V_{ikli_1\ldots i_q}(x)=\int\limits_V\Big\{\overset{2}{\varepsilon}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[C^0_{klpq}-C_{klpq}(\xi)\big]+$$
$$+\overset{2}{\varkappa}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq}-B_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\Pi_{i_1\ldots i_q}(\xi,x)dV_\xi \quad (2.42)$$

$$M_{ikli_1\ldots i_q}(x)=\int\limits_V\Big\{\overset{2}{\varepsilon}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[B^0_{klpq}-B_{klpq}(\xi)\big]+$$
$$+\overset{2}{\varkappa}\,{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)\big[D^0_{klpq}-D_{klpq}(\xi)\big]\Big\}\Pi_{i_1\ldots i_q}(\xi,x)dV_\xi \quad (2.43)$$

2.7 Рекуррентные уравнения для коэффициентов разложения.

Дифференцируя по x_j выражения (2.38) и (2.39), получим

$$u_{i,j}=v_{i,j}+\sum_{q=0}^{\infty}\ \left\{\left[N_{ikl(q),j}+\delta_{ji_q}N_{ikl(q-1)}\right]\partial_q e_{lk}+\left[U_{ikl(q),j}+\delta_{ji_q}U_{ikl(q-1)}\right]\partial_q\pi_{lk}\right\}, \quad (2.44)$$

$$\omega_{i,j}=\psi_{i,j}+\sum_{q=0}^{\infty}\ \left\{\left[V_{ikl(q),j}+\delta_{ji_q}V_{ikl(q-1)}\right]\partial_q e_{lk}+\left[M_{ikl(q),j}+\delta_{ji_q}M_{ikl(q-1)}\right]\partial_q\pi_{lk}\right\} \quad (2.45)$$

Здесь и ниже применен сокращенный способ записи формул, так что, например,

$$\delta_{ji_q} N_{ikl(q-1)}\, \partial_q e_{lk} \;=\; \delta_{ji_q} N_{ikli_1\ldots i_{(q-1)}}\, e_{lk,i_1\ldots i_q}$$

Выражения для деформаций и искривлений имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ji} = e_{ji} + \sum_{q=0}^{\infty} \; \Big\{ \big[N_{imn(q),j} + \delta_{ji_q} N_{imn(q-1)} + \epsilon_{ijs} V_{smn(q)} \big]\, \partial_q e_{nm} + \\ + \big[U_{imn(q),j} + \delta_{ji_q} U_{imn(q-1)} + \epsilon_{ijs} M_{smn(q)} \big]\, \partial_q \pi_{nm} \Big\}\,, \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\varkappa_{ji} = \pi_{ji} + \sum_{q=0}^{\infty} \; \Big\{ \big[V_{imn(q),j} + \delta_{ji_q} V_{imn(q-1)} \big]\, \partial_q e_{nm} + \big[M_{imn(q),j} + \delta_{ji_q} M_{imn(q-1)} \big]\, \partial_q \pi_{nm} \Big\} \tag{2.47}$$

После этого запишем ряды для напряжений

$$\sigma_{ji} = \sum_{q=0}^{\infty} \; \big[\tilde{C}_{ijmn(q)}\, \partial_q e_{nm} + \tilde{B}_{ijmn(q)}\, \partial_q \pi_{nm} \big]\,, \tag{2.48}$$

$$\mu_{ji} = \sum_{q=0}^{\infty} \; \big[\tilde{\tilde{B}}_{ijmn(q)}\, \partial_q e_{nm} + \tilde{D}_{ijmn(q)}\, \partial_q \pi_{nm} \big]\,, \tag{2.49}$$

где для случая $q = 0$ (индекс 0 опущен)

$$\tilde{C}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijkl}\big(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls} V_{smn} \big) + B_{ijkl} V_{kmn,l}\,, \tag{2.50}$$

$$\tilde{B}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijkl}\big(U_{kmn,l} + \epsilon_{kls} M_{smn} \big) + B_{ijkl} M_{kmn,l}\,, \tag{2.51}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{ijmn} = B_{ijmn} + B_{ijkl}\big(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls} V_{smn} \big) + D_{ijkl} V_{kmn,l}\,, \tag{2.52}$$

$$\tilde{D}_{ijmn} = D_{ijmn} + B_{ijkl}\big(U_{kmn,l} + \epsilon_{kls} M_{smn} \big) + D_{ijkl} M_{kmn,l}\,, \tag{2.53}$$

а при $q \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ijmn(q)} = C_{ijkl}\big[N_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} N_{kmn(q-1)} + \epsilon_{kls} V_{smn(q)} \big] + \\ + B_{ijkl}\big[V_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} V_{kmn(q-1)} \big]\,, \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\tilde{B}_{ijmn(q)} = C_{ijkl}\big[U_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} U_{kmn(q-1)} + \epsilon_{kls} M_{smn(q)} \big] +$$

$$+ B_{ijkl}\big[M_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} M_{kmn(q-1)}\big]\,, \quad (2.55)$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{ijmn(q)} = B_{ijkl}\big[N_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} N_{kmn(q-1)} + \epsilon_{kls} V_{smn(q)}\big] + \\ + D_{ijkl}\big[V_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} V_{kmn(q-1)}\big]\,, \quad (2.56)$$

$$\tilde{D}_{ijmn(q)} = B_{ijkl}\big[U_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} U_{kmn(q-1)} + \epsilon_{kls} M_{smn(q)}\big] + \\ + D_{ijkl}\big[M_{kmn(q),l} + \delta_{li_q} M_{kmn(q-1)}\big] \quad (2.57)$$

Подставив выражения (2.48) и (2.49) в уравнения равновесия, получаем

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \left[\tilde{C}_{ijmn(q),j} + \tilde{C}_{ii_qmn(q-1)}\right] \partial_q e_{nm} + \left[\tilde{B}_{ijmn(q),j} + \tilde{B}_{ii_qmn(q-1)}\right] \partial_q \pi_{nm} \right\} + X_i = 0 \quad (2.58)$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \big[\tilde{\tilde{B}}_{ijmn(q),j} + \tilde{\tilde{B}}_{ii_qmn(q-1)} + \epsilon_{ijr}\tilde{C}_{rjmn(q)}\big]\partial_q e_{nm} + \right. \\ \left. + \big[\tilde{D}_{ijmn(q),j} + \tilde{D}_{ii_qmn(q-1)} + \epsilon_{ijr}\tilde{B}_{rjmn(q)}\big]\partial_q \pi_{nm} \right\} + Y_i = 0 \quad (2.59)$$

Сравнивая уравнения (2.58) и (2.59) с уравнениями (2.15) получаем, что коэффициенты при производных от e_{ij} и π_{ij} в уравнениях (2.58) и (2.59) должны быть следующими:

Первая группа равенств

$$q = 0 \qquad \begin{cases} \tilde{C}_{ijmn,j} = 0\,, \\ \tilde{\tilde{B}}_{ijmn,j} + \epsilon_{ijr}\tilde{C}_{rjmn} = \epsilon_{ijr} C^o_{rjmn}\,; \end{cases} \quad (2.60)$$

$$q = 1 \qquad \begin{cases} \tilde{C}_{ijmni_1,j} + \tilde{C}_{ii_1mn} = C^o_{ii_1mn}\,, \\ \tilde{\tilde{B}}_{ijmni_1,j} + \tilde{\tilde{B}}_{ii_1mn} + \epsilon_{ijr}\tilde{C}_{rjmni_1} = B^o_{ii_1mn}\,; \end{cases} \quad (2.61)$$

$$q \geqslant 2 \qquad \begin{cases} \tilde{C}_{ijmni_1\ldots i_q,j} + \tilde{C}_{ii_qmni_1\ldots i_{q-1}} = 0\,, \\ \tilde{\tilde{B}}_{ijmni_1\ldots i_q,j} + \tilde{\tilde{B}}_{ii_qmni_1\ldots i_{q-1}} + \epsilon_{ijr}\tilde{C}_{rjmni_1\ldots i_q} = 0\,; \end{cases} \quad (2.62)$$

Вторая группа равенств

$$q = 0 \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{ijmn,j} = 0\,, \\ \tilde{D}_{ijmn,j} + \epsilon_{ijr}\tilde{B}_{rjmn} = \epsilon_{ijr}B^{o}_{rjmn}\,; \end{cases} \tag{2.63}$$

$$q = 1 \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{ijmni_1,j} + \tilde{B}_{ii_1mn} = B^{o}_{ii_1mn}\,, \\ \tilde{D}_{ijmni_1,j} + \tilde{D}_{ii_1mn} + \epsilon_{ijr}\tilde{B}_{rjmni_1} = D^{o}_{ii_1mn}\,; \end{cases} \tag{2.64}$$

$$q \geqslant 2 \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{ijmni_1\ldots i_q,j} + \tilde{B}_{ii_qmni_1\ldots i_{q-1}} = 0\,, \\ \tilde{D}_{ijmni_1\ldots i_q,j} + \tilde{D}_{ii_qmni_1\ldots i_{q-1}} + \epsilon_{ijr}\tilde{B}_{rjmni_1\ldots i_q} = 0\,; \end{cases} \tag{2.65}$$

Из первой группы уравнений (2.60)–(2.62) после подстановки в них выражений (2.50)–(2.57) получаем системы рекуррентных уравнений для функций $N_{kmn(q)}$, $V_{kmn(q)}$. Началом рекурсии в первой группе являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} \left[C_{ijmn} + C_{ijkl}\left(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls}V_{smn}\right) + B_{ijkl}V_{kmn,l}\right]_{,j} = 0 \\ \left[B_{ijmn} + B_{ijkl}\left(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls}V_{smn}\right) + D_{ijkl}V_{kmn,l}\right]_{,j} = \epsilon_{ijr}\left(C^{o}_{rjmn} - \tilde{C}_{rjmn}\right) \end{cases} \tag{2.66}$$

Из второй группы рекуррентных уравнений находятся функции $M_{kmn(q)}$ и $U_{kmn(q)}$. Началом рекурсии во второй группе будут уравнения:

$$\begin{cases} \left[B_{ijmn} + C_{ijkl}\left(U_{kmn,l} + \epsilon_{kls}M_{smn}\right) + B_{ijkl}M_{kmn,l}\right]_{,j} = 0 \\ \left[D_{ijmn} + B_{ijkl}\left(U_{kmn,l} + \epsilon_{kls}M_{smn}\right) + D_{ijkl}M_{kmn,l}\right]_{,j} = \epsilon_{ijr}\left(B^{o}_{rjmn} - \tilde{B}_{rjmn}\right), \end{cases} \tag{2.67}$$

Решение уравнений (2.66) и (2.67) должно удовлетворять однородным граничным условиям. Например, в том случае, когда в исходной задаче на всей границе тела заданы перемещения и углы поворота, имеем

$$N_{kmn(q)}\big|_{\Sigma} = 0\,,\; U_{kmn(q)}\big|_{\Sigma} = 0\,,\; V_{kmn(q)}\big|_{\Sigma} = 0\,,\; M_{kmn(q)}\big|_{\Sigma} = 0\,,\; q \geqslant 0 \tag{2.68}$$

Если же на всей границе тела заданы распределенные усилия и моменты, тогда

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_{ijmn} n_j \big|_\Sigma = C^0_{ijmn} n_j \, , \, \tilde{D}_{ijmn} n_j \big|_\Sigma = D^0_{ijmn} n_j \, , \\
\tilde{B}_{ijmn} n_j \big|_\Sigma = \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} n_j \big|_\Sigma = B^0_{ijmn} n_j \, ;
\end{gathered}
\tag{2.69}
$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_{ijmn(q)} n_j \big|_\Sigma = 0 \, , \, \tilde{B}_{ijmn(q)} n_j \big|_\Sigma = 0 \, , q \geqslant 0 \\
\tilde{D}_{ijmn(q)} n_j \big|_\Sigma = 0 \, , \, \tilde{\tilde{B}}_{ijmn(q)} n_j \big|_\Sigma = 0 \, , \, q \geqslant 0.
\end{gathered}
\tag{2.70}
$$

2.8 Выбор материальных констант в определяющих соотношениях сопутствующей задачи.

Компоненты $C^0_{ijmn}, D^0_{ijmn}, B^0_{ijmn}$ материальных тензоров сопутствующей задачи должны удовлетворять определенным условиям симметрии и положительной определенности. В остальном они произвольны. Устраним этот произвол, связав их величин с неоднородностью исходного тела. Для этого положим

$$
C^0_{ijmn} = \big\langle \tilde{C}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle C_{ijmn} + C_{ijkl} \big(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls} V_{smn} \big) + B_{ijkl} V_{kmn,l} \big\rangle \, , \tag{2.71}
$$

$$
D^0_{ijmn} = \big\langle \tilde{D}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle D_{ijmn} + B_{ijkl} \big(U_{kmn,l} + \epsilon_{kls} M_{smn} \big) + D_{ijkl} M_{kmn,l} \big\rangle \, , \tag{2.72}
$$

$$
\begin{aligned}
B^0_{ijmn} &= \big\langle \tilde{B}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle B_{ijmn} + C_{ijkl} \big(U_{kmn|l} + \epsilon_{kls} M_{smn} \big) + B_{ijkl} M_{kmn,l} \big\rangle = \\
&= \big\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle B_{ijmn} + B_{ijkl} \big(N_{kmn,l} + \epsilon_{kls} V_{smn} \big) + D_{ijkl} V_{kmn,l} \big\rangle .
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Угловые скобки обозначают среднее значение функции в области

$$
\big\langle f \big\rangle \equiv \frac{1}{V} \int\limits_V f(x_1, x_2, x_3) dV.
$$

Покажем, что $\big\langle \tilde{B}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle \tilde{\tilde{B}}_{mnij} \big\rangle$. Для простоты изложения будем считать, что $\Sigma = \Sigma_u$.

В силу однородности граничных условий тензоров Грина

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \overset{1}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)dV_\xi = 0\,, \quad \int\limits_V \overset{1}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)dV_\xi = 0\,, \\ &\int\limits_V \overset{2}{\varepsilon}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)dV_\xi = 0\,, \quad \int\limits_V \overset{2}{\varkappa}{}^{(i)}_{kl}(\xi,x)dV_\xi = 0\,; \end{aligned} \tag{2.74}$$

Поэтому выражения (2.40) - (2.43) примут вид

$$N_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{ \overset{1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)C_{pqmn}(\xi) + \overset{1}{\varkappa}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\Big\langle \overset{1}{\sigma}{}^{(k)}_{mn}(\xi,x)\Big\rangle_\xi \tag{2.75}$$

$$U_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{ \overset{1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)B_{pqmn}(\xi) + \overset{1}{\varkappa}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\Big\langle \overset{1}{\mu}{}^{(k)}_{mn}(\xi,x)\Big\rangle_\xi \tag{2.76}$$

$$V_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{ \overset{2}{\varepsilon}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)C_{pqmn}(\xi) + \overset{2}{\varkappa}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\Big\langle \overset{2}{\sigma}{}^{(k)}_{mn}(\xi,x)\Big\rangle_\xi \tag{2.77}$$

$$M_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{ \overset{2}{\varepsilon}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)B_{pqmn}(\xi) + \overset{2}{\varkappa}{}^{(k)}_{pq}(\xi,x)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\Big\langle \overset{2}{\mu}{}^{(k)}_{mn}(\xi,x)\Big\rangle_\xi \tag{2.78}$$

Как было показано ранее, из теоремы взаимности следует, что

$$\begin{cases} \overset{1}{\varepsilon}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{1}{u}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) + \epsilon_{qpm}\,\overset{1}{\omega}{}^{(l)}_{m}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\,, \\ \overset{1}{\varkappa}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{1}{\omega}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{l}(x,\xi)\,, \\ \overset{2}{\varepsilon}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{2}{u}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{\omega}{}^{(l)}_{m}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{\omega}{}^{(q)}_{l}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{\omega}{}^{(m)}_{l}(x,\xi)\,, \\ \overset{2}{\varkappa}{}^{(l)}_{pq}(\xi,x) = \overset{2}{\omega}{}^{(l)}_{q,p}(\xi,x) = \frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{l}(x,\xi) \end{cases}$$

Подставим эти выражения в (2.75) – (2.78)

$$N_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{ \Big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\,\overset{1}{u}{}^{(q)}_{k}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\,\overset{2}{u}{}^{(m)}_{k}(x,\xi)\Big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\epsilon_{qpm}\overset{2}{u}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi - \int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi;$$

$$U_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\overset{2}{u}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\epsilon_{qpm}\overset{2}{u}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi - \int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi;$$

$$V_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)C_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi - \int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi;$$

$$M_{kmn}(x) = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi = -\int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi -$$

$$-\int\limits_V \Big\{\big(\epsilon_{qpm}\overset{2}{\omega}{}_k^{(m)}(x,\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi - \int\limits_V \Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big)D_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi;$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi](\bullet) \;=\; -\int\limits_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p}(\bullet) \right) C_{pqmn}(\xi) \right\} dV_\xi \\ \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet) \;=\; -\int\limits_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p}(\bullet) \right) B_{pqmn}(\xi) \right\} dV_\xi \\ \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi](\bullet) \;=\; -\int\limits_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \xi_p}(\bullet) \right) D_{pqmn}(\xi) \right\} dV_\xi \\ \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi](\bullet) \;=\; -\int\limits_V \left\{ \left(\epsilon_{qpm}(\bullet) \right) C_{pqmn}(\xi) \right\} dV_\xi \\ \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet) \;=\; -\int\limits_V \left\{ \left(\epsilon_{qpm}(\bullet) \right) B_{pqmn}(\xi) \right\} dV_\xi \end{cases} \tag{2.79}$$

В таком случае выражения для $N_{kmn}, U_{kmn}, V_{kmn}, M_{kmn}$ примут вид

$$N_{kmn}(x) = \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi]\, \overset{1}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi]\, \overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) \tag{2.80}$$

$$U_{kmn}(x) = \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{1}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\, \overset{2}{u}{}_k^{(q)}(x,\xi) \tag{2.81}$$

$$V_{kmn}(x) = \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi]\, \overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{C},\xi]\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) \tag{2.82}$$

$$M_{kmn}(x) = \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) + \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi) \tag{2.83}$$

В силу того, что операторы $\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet)$ и $\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi](\bullet)$ не зависят от координат x_i, следует

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(x)U_{kmn,l}(x) &= \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\, \overset{1}{u}{}_{k,l}^{(q)}(x,\xi)\big) + \\ &+ \hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\, \overset{2}{u}{}_{k,l}^{(q)}(x,\xi)\big) + \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\, \overset{2}{u}{}_{k,l}^{(q)}(x,\xi)\big)\,, \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(x)\epsilon_{kls}M_{smn}(x) &= \hat{F}_{smn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\epsilon_{kls}\, \overset{1}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big) + \\ &+ \hat{G}_{smn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\epsilon_{kls}\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big) + \hat{F}_{smn}[\underset{\sim}{D},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\epsilon_{kls}\, \overset{2}{\omega}{}_k^{(q)}(x,\xi)\big) \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{gathered}
B_{ijkl}(x)M_{kmn,l}(x)=\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(B_{ijkl}(x)\,\overset{1}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)+\\
+\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(B_{ijkl}(x)\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)+\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\big(B_{ijkl}(x)\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)\,, \quad (2.86)
\end{gathered}$$

Следовательно

$$\begin{gathered}
\big\langle \tilde{B}_{ijmn}(x)\big\rangle_x=\big\langle B_{ijmn}+C_{ijkl}\big(U_{kmn|l}+\epsilon_{kls}M_{smn}\big)+B_{ijkl}M_{kmn,l}\big\rangle_x=\big\langle B_{ijmn}\big\rangle_x+\\
+\big\langle \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\big(\,\overset{1}{u}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)+\epsilon_{kls}\,\overset{1}{\omega}{}^{(q)}_{k}(x,\xi)\big)+B_{ijkl}(x)\,\overset{1}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)+\\
+\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\big(\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)+\epsilon_{kls}\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k}(x,\xi)\big)+B_{ijkl}(x)\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)+\\
+\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\big(C_{ijkl}(x)\big(\,\overset{2}{u}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)+\epsilon_{kls}\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k}(x,\xi)\big)+B_{ijkl}(x)\,\overset{2}{\omega}{}^{(q)}_{k,l}(x,\xi)\big)\big\rangle_x=\\
=\big\langle B_{ijmn}\big\rangle_x+\big\langle \hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\,\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)+\\
+\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\,\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)+\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\,\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)\big\rangle_x=\\
=\big\langle B_{ijmn}\big\rangle_x+\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big\langle\,\overset{1}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)\big\rangle_x+\\
+\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]\big\langle\,\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)\big\rangle_x+\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]\big\langle\,\overset{2}{\sigma}{}^{(q)}_{ij}(x,\xi)\big\rangle_x=\\
=\big\langle B_{ijmn}\big\rangle_x-\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]N_{qij}(\xi)-\\
-\hat{G}_{qmn}[\underset{\sim}{B},\xi]V_{qij}(\xi)-\hat{F}_{qmn}[\underset{\sim}{D},\xi]V_{qij}(\xi)=\\
=\big\langle B_{ijmn}\big\rangle_x+\int\limits_V\Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}N_{qij}(\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}\,dV_\xi+\\
+\int\limits_V\Big\{\big(\epsilon_{qpm}V_{qij}(\xi)\big)B_{pqmn}(\xi)\Big\}dV_\xi+\int\limits_V\Big\{\big(\frac{\partial}{\partial\xi_p}V_{qij}(\xi)\big)D_{pqmn}(\xi)\Big\}\,dV_\xi=\\
=\big\langle B_{ijmn}(x)\big\rangle_x+\int\limits_V\big\{B_{klij}(\xi)\big(N_{kmn,l}(\xi)+\epsilon_{kls}V_{smn}(\xi)\big)+D_{klij}(\xi)V_{kmn,l}(\xi)\big\}\,dV_\xi=\\
=\big\langle B_{ijmn}(\xi)+B_{klij}(\xi)\big(N_{kmn,l}(\xi)+\epsilon_{kls}V_{smn}(\xi)\big)+D_{klij}(\xi)V_{kmn,l}(\xi)\big\rangle_\xi=\big\langle \tilde{\tilde{B}}_{mnij}(x)\big\rangle_x
\end{gathered}$$

Глава 3. Эффективные характеристики в моментной теории упругости

Эффективными коэффициентами неоднородного моментного материала, составленного из одинаковых представительных объемов называются такие коэффициенты, которые позволяют связать средние по любому представительному объему силовые и моментные напряжения $<\sigma_{ij}>$ и $<\mu_{ij}>$ со средними по этому же представительному объему деформациями $<\varepsilon_{ij}>$ и искривлениями $<\varkappa_{ij}>$. Такое определение эффективных свойств моментного упругого тела является распространением определения данного в работе Хашина и Розена [159] 1964 года на случай тела, составленного из представительных объемов вещества, обладающего моментными свойствами.

Для простоты вначале рассмотрим периодически неоднородный материал с ячейкой периодичности в виде куба Ω с ребром ℓ. В данном случае куб Ω представляет собой представительный объем, а его ребро ℓ является структурным параметром. В периодически неоднородном материале материальные тензоры $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{D}$ являются однопериодическими функциями локальных переменных $0 \leqslant \zeta_i = \{x_i/\ell\} = x_i/\ell - [x_i/\ell] \leqslant 1$. Здесь фигурные скобки означают дробную часть числа, а квадратные — целую часть числа. Переменные ζ_i иначе называют быстрыми переменными [114], а функции быстрых переменных — быстроосцилирующими функциями глобальных координат x_i [126].

Введем новые материальные коэффициенты следующим образом

$$C_{ijmn}(x) = \ell^0 C_{ijmn}(\zeta)\,, \qquad B_{ijmn}(x) = \ell^1 B_{ijmn}(\zeta)\,, \qquad D_{ijmn}(x) = \ell^2 D_{ijmn}(\zeta) \tag{3.1}$$

Также введем новые структурные функции

$$\begin{aligned} N_{imn(q)}(x) &= \ell^{q+1} N_{imn(q)}(\zeta)\,, \qquad U_{imn(q)}(x) = \ell^{q+2} U_{imn(q)}(\zeta)\,, \\ V_{imn(q)}(x) &= \ell^{q} V_{imn(q)}(\zeta)\,, \qquad M_{imn(q)}(x) = \ell^{q+1} M_{imn(q)}(\zeta)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Новые функции зависят от локальных переменных ζ_i. Причем $N_{imn(q)}$, $U_{imn(q)}$, $V_{imn(q)}$, $M_{imn(q)}$ являются безразмерными функциями, а новые материальные коэффициенты C_{ijmn}, B_{ijmn} и D_{ijmn} получают размерность напряжений.

Дифференцирование функций локальных переменных ζ_i по глобальным координатам x_i осуществляется по правилу:

$$f_{,i}(\zeta) \equiv \frac{\partial f(\zeta)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_k}\,\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} = \frac{1}{l}\,\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \equiv \frac{1}{l}\,f_{|i}$$

В большинство формул предыдущего раздела будет явно входить структурный параметр ℓ, например определяющие соотношения (2.2) исходной задачи примут вид:

$$\sigma_{ji} = C_{ijmn}(\zeta)\varepsilon_{nm} + \ell B_{ijmn}(\zeta)\varkappa_{nm}\,; \qquad \mu_{ji} = \ell B_{ijmn}(\zeta)\varepsilon_{nm} + \ell^2 D_{ijmn}(\zeta)\varkappa_{nm}\,, \quad (3.3)$$

а эффективные определяющие соотношения типа

$$(<\underset{\sim}{\sigma}>\,,<\underset{\sim}{\mu}>)\;\sim\;(<\underset{\sim}{\varepsilon}>\,,<\underset{\sim}{\varkappa}>)$$

записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \big\langle\sigma_{ji}\big\rangle_\Omega &= C^{eff}_{ijmn}\big\langle\varepsilon_{nm}\big\rangle_\Omega + \ell B^{eff}_{ijmn}\big\langle\varkappa_{nm}\big\rangle_\Omega \\ \big\langle\mu_{ji}\big\rangle_\Omega &= \ell B^{eff}_{mnij}\big\langle\varepsilon_{nm}\big\rangle_\Omega + \ell^2 D^{eff}_{ijmn}\big\langle\varkappa_{nm}\big\rangle_\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ряды (2.38) и (2.39) в соответствии с новыми структурными функциями примут вид:

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty}\,\left[\ell^{q+1} N_{imn(q)}(\zeta)\,\partial_q e_{nm}(x) + \ell^{q+2}\,U_{imn(q)}(\zeta)\,\partial_q \pi_{nm}(x)\right], \quad (3.5)$$

$$\omega_i(x) = \psi_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty}\,\left[\ell^{q} V_{imn(q)}(\zeta)\,\partial_q e_{nm}(x) + \ell^{q+1}\,M_{imn(q)}(\zeta)\,\partial_q \pi_{nm}(x)\right], \quad (3.6)$$

Выражения деформаций и искривлений (2.46) и (2.47) примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ji} = {} & \big(\delta_{jn}\delta_{im} + N_{imn|j} + \epsilon_{ijs}V_{smn}\big)e_{nm} + \ell\big(U_{imn|j} + \epsilon_{ijs}M_{smn}\big)\pi_{mn} + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty}\,\Big[\ell^q\big(N_{imn(q)|j} + N_{imn(q-1)}\delta_{ji_q} + \epsilon_{ijs}V_{smn(q)}\big)\partial_q e_{nm} + \\ & + \ell^{q+1}\big(U_{imn(q)|j} + U_{imn(q-1)}\delta_{ji_q} + \epsilon_{ijs}M_{smn(q)}\big)\partial_q \pi_{nm}\Big]\,, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\varkappa_{ji} = \frac{1}{\ell} V_{imn|j} e_{nm} + \big(\delta_{jn}\delta_{im} + M_{imn|j}\big)\pi_{nm} +$$
$$+ \sum_{q=1}^{\infty} \Big[l^{q-1}\big(V_{imn(q)|j} + V_{imn(q-1)}\delta_{ji_q}\big)\partial_q e_{nm} +$$
$$+ \ell^{q}\big(M_{imn(q)|j} + M_{imn(q-1)}\delta_{ji_q}\big)\partial_q \pi_{nm} \Big], \tag{3.8}$$

Выражения напряжений и моментных напряжений (2.48) и (2.49) примут вид:

$$\sigma_{ji} = \sum_{q=0}^{\infty} \left[\ell^{q} \tilde{C}_{ijmn(q)}\, \partial_q e_{nm} + \ell^{q+1} \tilde{B}_{ijmn(q)}\, \partial_q \pi_{nm} \right], \tag{3.9}$$

$$\mu_{ji} = \sum_{q=0}^{\infty} \left[\ell^{q+1} \tilde{\tilde{B}}_{ijmn(q)}\, \partial_q e_{nm} + \ell^{q+2} \tilde{D}_{ijmn(q)}\, \partial_q \pi_{nm} \right] \tag{3.10}$$

Рекуррентные уравнения для новых функций $N_{imn(q)}$, $U_{imn(q)}$, $V_{imn(q)}$, $M_{imn(q)}$ по виду останутся такими же как и уравнения (2.60)–(2.67), за исключением того, что производная по глобальной координате, обозначенная в (2.60)–(2.67) индексом после запятой поменяется на производную по локальной переменной, которую мы условились обозначать индексом после вертикальной черты. В общем случае для нахождения функций $N_{imn(q)}$, $U_{imn(q)}$, $V_{imn(q)}$, $M_{imn(q)}$ нужно решать краевые задачи для уравнений (2.60)–(2.67) с однородными условиями на границе всего тела. Коэффициенты в этих уравнениях являются периодическими функциями локальных переменных. При удалении от границы тела на расстояние порядка характерного размера ячейки периодичности искомые функции также стремятся к периодическим функциям [128], которые являются непрерывными и периодическими решениями уравнений (2.60)–(2.67) в кубе Ω. Это обстоятельство подчеркивается в работах Григолюка Э.И. и Фильштинского А.А. [160], [161], в работах Ванина [162], а также численно подтверждается в диссертационной работе Олеховой Л.В. [129]. Периодические решения уравнений (2.60)–(2.67) в кубе определены с точность до постоянных величин [114], которые находятся из условий нормировки $\langle N_{imn(q)} \rangle_\Omega = 0$, $\langle U_{imn(q)} \rangle_\Omega = 0$, $\langle V_{imn(q)} \rangle_\Omega = 0$, $\langle M_{imn(q)} \rangle_\Omega = 0$.

Пусть L — характерный размер всего тела, а $\ell/L \ll 1$, т.е. тело составлено из большого числа ячеек по всем направлениям. В этом случае гладкие функции $\partial_q e_{nm}(x)$ и $\partial_q \pi_{nm}(x)$ практически не меняются в любом ℓ-кубе, т.е. при усреднении по ℓ-кубу они ведут себя как константы. Тогда

$$\langle f_{(q)}(\zeta)\partial_q e_{nm}(x)\rangle_\Omega \approx \langle f_{(q)}(\zeta)\rangle_\Omega \partial_q e_{nm}(x)\,,$$
$$\langle f_{(q)}(\zeta)\partial_q \pi_{nm}(x)\rangle_\Omega \approx \langle f_{(q)}(\zeta)\rangle_\Omega \partial_q \pi_{nm}(x)$$

В свете вышесказанного, усреднение по любой ячейке выражений (3.5), (3.6) для компонент векторов перемещений и вращений, а также выражений (3.7), (3.10) для деформаций и искривлений дает:

$$\langle u_i\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} v_i\,, \qquad \langle \omega_i\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} \psi_i\,, \tag{3.11}$$

$$\langle \varepsilon_{ij}\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} e_{ij}\,, \qquad \langle \varkappa_{ij}\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} \pi_{ij} \tag{3.12}$$

где $\alpha \equiv \frac{\ell}{L}$ - малый геометрический параметр.

Усредненные по ячейке периодичности выражения (3.9), (3.10) для силовых и моментных напряжений представим следующим образом:

$$\langle \sigma_{ji}\rangle_\Omega = \langle \tilde{C}_{ijmn}\rangle_\Omega\, e_{nm} + \ell\langle \tilde{B}_{ijmn}\rangle_\Omega\, \pi_{nm} + O(\alpha)\,, \tag{3.13}$$
$$\langle \mu_{ji}\rangle_\Omega = \ell\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\rangle_\Omega\, e_{nm} + \ell^2\langle \tilde{D}_{ijmn}\rangle_\Omega\, \pi_{nm} + O(\alpha^2) \tag{3.14}$$

Тогда

$$\langle \sigma_{ji}\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} \langle \tilde{C}_{ijmn}\rangle_\Omega \langle \varepsilon_{ij}\rangle_\Omega + \ell\langle \tilde{B}_{ijmn}\rangle_\Omega \langle \varkappa_{ij}\rangle_\Omega\,, \tag{3.15}$$
$$\langle \mu_{ji}\rangle_\Omega \xrightarrow{\alpha\to 0} \ell\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\rangle_\Omega \langle \varepsilon_{ij}\rangle_\Omega + \ell^2\langle \tilde{D}_{ijmn}\rangle_\Omega \langle \varkappa_{ij}\rangle_\Omega \tag{3.16}$$

Отсюда и в соответствии с определением (3.4) получаем выражения для эффективных характеристик композита с моментными свойствами

$$C^{eff}_{ijmn} = \langle \tilde{C}_{ijmn}\rangle_\Omega = \langle C_{ijmn} + C_{ijkl}\big(N_{kmn|l} + \epsilon_{kls}V_{smn}\big) + B_{ijkl}V_{kmn|l}\rangle_\Omega\,, \tag{3.17}$$
$$D^{eff}_{ijmn} = \langle \tilde{D}_{ijmn}\rangle_\Omega = \langle D_{ijmn} + B_{ijkl}\big(U_{kmn|l} + \epsilon_{kls}M_{smn}\big) + D_{ijkl}M_{kmn|l}\rangle_\Omega\,, \tag{3.18}$$
$$\begin{aligned} B^{eff}_{ijmn} &= \langle \tilde{B}_{ijmn}\rangle_\Omega = \langle B_{ijmn} + C_{ijkl}\big(U_{kmn|l} + \epsilon_{kls}M_{smn}\big) + B_{ijkl}M_{kmn|l}\rangle_\Omega = \\ &= \langle \tilde{\tilde{B}}_{mnij}\rangle_\Omega = \langle B_{mnij} + B_{mnkl}\big(N_{kij|l} + \epsilon_{kls}V_{sij}\big) + D_{mnkl}V_{kij|l}\rangle_\Omega. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Таким образом, для нахождения эффективных характеристик регулярных композитов нужно усреднить по ячейке периодичности функции $\tilde{C}_{ijkl}(\zeta)$,

$\tilde{B}_{ijkl}(\zeta)$, $\tilde{\tilde{B}}_{ijkl}(\zeta)$, $\tilde{D}_{ijkl}(\zeta)$. Отметим, что $\tilde{B}_{ijkl}(\zeta) \neq \tilde{\tilde{B}}_{ijkl}(\zeta)$. Однако, как было показано в прошлой главе $\left\langle \tilde{B}_{ijkl}(\zeta) \right\rangle_{\Omega} = \left\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijkl}(\zeta) \right\rangle_{\Omega}$. Входящие в формулы (3.17)–(3.19) функции $N_{imn(q)}$, $U_{imn(q)}$, $V_{imn(q)}$, $M_{imn(q)}$ определяются из решения связанных систем уравнений (2.66), (2.67) в ячейке периодичности. Единственное решение этих систем выбирается из условий периодичности

$$N_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=0} = N_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=1}\,, \qquad (i=1,2,3) \tag{3.20}$$

$$V_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=0} = V_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=1}\,, \qquad (i=1,2,3) \tag{3.21}$$

$$U_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=0} = U_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=1}\,, \qquad (i=1,2,3) \tag{3.22}$$

$$M_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=0} = M_{kmn}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=1}\,, \qquad (i=1,2,3) \tag{3.23}$$

и условий нормировки

$$\left\langle N_{kmn} \right\rangle = 0\,, \qquad \left\langle V_{kmn} \right\rangle = 0\,, \qquad \left\langle U_{kmn} \right\rangle = 0\,, \qquad \left\langle M_{kmn} \right\rangle = 0 \tag{3.24}$$

В общем случае неоднородности т.е. когда коэффициенты упругости являются произвольными интегрируемыми функциями глобальных координат x, эффективные характеристики находятся по тем же формулам (3.17)–(3.19), только в них усреднение проводится по всему телу, то есть по формулам (2.71)–(2.73). Функции $N_{imn(q)}$, $U_{imn(q)}$, $V_{imn(q)}$, $M_{imn(q)}$ зависят от x и находятся из решения тех же уравнений (2.66), (2.67) во всем неоднородном теле при нулевых значениях искомых функций на границе тела.

В том частном случае, когда коэффициенты упругости периодичны, функции $N_{imn(q)}(x)$, $U_{imn(q)}(x)$, $V_{imn(q)}(x)$, $M_{imn(q)}(x)$ существенно отличаются от периодических лишь в пограничном слое, толщина которого составляет несколько характерных размеров ячейки и стремится к нулю с дроблением структуры. Следовательно упругие характеристики, определяемые по разным формулам отличаются на величины порядка $O(\alpha)$.

Отдельно стоит отметить тот факт, что в качестве материальных, констант в определяющих соотношениях сопутствующей задачи мы берем не что иное как эффективные характеристики

$$C^0_{ijmn} = C^{eff}_{ijmn}\,, \qquad D^0_{ijmn} = C^{eff}_{ijmn}\,, \qquad B^0_{ijmn} = C^{eff}_{ijmn}\,.$$

Глава 4. Случай неоднородного по толщине слоя

Обозначим через L толщину слоя. Пусть ось x_3 перпендикулярна лицевым поверхностям слоя и нижняя лицевая поверхность соответствует значению $x_3 = 0$. В этом случае коэффициенты C_{ijkl}, D_{ijkl} и B_{ijkl} являются функциями координаты x_3. Считаем, что все искомые функции $N_{kmn(q)}$, $U_{kmn(q)}$, $V_{kmn(q)}$, $M_{kmn(q)}$ также зависят только от x_3. Рекуррентные уравнения (2.66) и (2.67) становятся обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями.

$$\left\{\begin{array}{l} \left[C_{i3mn} + C_{i3k3}N'_{kmn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{i3k3}V'_{kmn}\right]' = 0\,, \\ \left[B_{i3mn} + B_{i3k3}N'_{kmn} + B_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + D_{i3k3}V'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}_{rjmn}\Big)\,, \\ \tilde{C}_{rjmn} = C_{rjk3}N'_{kmn} + C_{rjmn} + C_{rjkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{ijk3}V'_{kmn}\,; \end{array}\right. \tag{4.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[B_{i3mn} + C_{i3k3}U'_{kmn,l} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}M'_{kmn}\right]' = 0\,, \\ \left[D_{i3mn} + B_{i3k3}U'_{kmn,l} + B_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + D_{i3k3}M'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{B}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}_{rjmn}\Big) \\ \tilde{B}_{rjmn} = C_{ijk3}U'_{kmn} + B_{ijmn} + C_{ijkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + D_{i3k3}M'_{kmn}\,; \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Штрихом обозначена производная по x_3, а угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине плиты, т.е.

$$\big\langle f\big\rangle \equiv \frac{1}{L}\int\limits_0^L f(x_3)dx_3$$

4.1 Случай неоднородного по толщине изотропного слоя.

В изотропном материале $B_{ijkl} \equiv 0$, поэтому вместо систем уравнений (4.1) и (4.2) имеем:

$$\begin{cases} \left[C_{i3k3}N'_{kmn} + C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn}\right]' = 0\,, \\ \left[D_{i3k3}V'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}_{rjmn}\Big)\,, \\ \tilde{C}_{rjmn} = C_{rjk3}N'_{kmn} + C_{rjmn} + C_{rjkl}\epsilon_{kls}V_{smn}\,; \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \left[C_{i3k3}U'_{kmn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn}\right]' = 0\,, \\ \left[D_{i3k3}M'_{kmn} + D_{i3mn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{B}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}_{rjmn}\Big)\,, \\ \tilde{B}_{rjmn} = C_{rjk3}U'_{kmn} + C_{rjkl}\epsilon_{kls}M_{smn}\,; \end{cases} \tag{4.4}$$

Через L обозначена толщина плиты. Условия на границах плиты принимают вид

$$\tilde{C}_{i3mn(q)}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\ \tilde{B}_{i3mn(q)}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\ \tilde{D}_{i3mn(q)}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\ \tilde{\tilde{B}}_{i3mn(q)}\big|_{x_3=0;L} = 0\,, \tag{4.5}$$

что соответствует свободным от силовых и моментных нагрузок лицевым поверхностям плиты.

4.1.1 Эффективные упругие модули и коэффициенты взаимного влияния.

Под эффективными модулями и коэффициентами взаимного влияния неоднородного по толщине слоя будем понимать величины

$$C^o_{ijmn} = \big\langle\tilde{C}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle C_{ijmn} + C_{ijk3}N'_{kmn} + C_{ijkl}\epsilon_{kls}V_{smn}\big\rangle \tag{4.6}$$

$$B^o_{ijmn} = \big\langle\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle D_{ijk3}V'_{kmn}\big\rangle \tag{4.7}$$

Для их нахождения нужно решать системы уравнений (4.3) и (4.4). Рассмотрим уравнения (4.3). Из первого уравнения находим

$$C_{i3k3}N'_{kmn} + C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} = K_{imn} = const.\ \Rightarrow$$
$$N'_{kmn} = C^{-1}_{k3i3}K_{imn} - C^{-1}_{k3i3}\big(C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn}\big)$$

Учитывая, что $\langle N'_{kmn} \rangle = 0$, найдём константы интегрирования K_{imn}

$$K_{imn} = \langle C^{-1}_{i3k3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{k3l3} C_{l3mn} \rangle + \langle C^{-1}_{i3k3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{k3l3} C_{l3ab} \epsilon_{abs} V_{smn} \rangle$$

Здесь под C^{-1}_{i3k3} понимается матрица обратная к матрице C_{i3k3}

$$(C^{-1}_{i3k3}) = \begin{pmatrix} C_{1313} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{2313} & C_{2323} & C_{2333} \\ C_{3313} & C_{3323} & C_{3333} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu+\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \mu+\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\mu+\varkappa \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/(\mu+\varkappa) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\mu+\varkappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\lambda+2\mu+\varkappa) \end{pmatrix}$$

Выражение для N'_{kmn} через функции V_{kmn} имеет вид:

$$\begin{gathered} N'_{kmn} = C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \rangle - C^{-1}_{k3q3} C_{q3mn} + \\ + C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} V_{smn} \rangle - C^{-1}_{k3l3} C_{l3ab} \epsilon_{abs} V_{smn} \end{gathered} \tag{4.8}$$

Подставив это выражение в последнюю формулу системы уравнений (4.3), получим:

$$\tilde{C}_{ijmn} = \tilde{C}^*_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}^*_{ijab} \epsilon_{abs} V_{smn} \tag{4.9}$$

здесь $\tilde{C}^*_{ijmn}$ выражается через модули упругости точно также как и в симметричной механике упругих слоистых композитов [115]

$$\tilde{C}^*_{ijmn} = C_{ijmn} - C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3mn} + C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \rangle , \tag{4.10}$$

а $\hat{\tilde{C}}^*_{ijab}$ — тензор четвертого ранга — интегральный оператор вида

$$\hat{\tilde{C}}^*_{ijab} = C_{ijab} - C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} + C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} (\bullet) \rangle \tag{4.11}$$

При свёртке этого оператора с тензором ранга $\geqslant 2$ последний подставляется под угловые скобки вместо $(\bullet)$, например

$$\hat{\tilde{C}}^*_{ijab}T_{ab} = C_{ijab}T_{ab} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}T_{ab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}T_{ab}\rangle$$

После подстановки выражения (4.9) во второе уравнение системы (4.3) это уравнение примет вид:

$$\left[D_{i3k3}V'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) + \epsilon_{ijr}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} \quad (4.12)$$

Полученное уравнение является интегро-дифференциальным уравнением второго порядка, поскольку в правую часть уравнения (4.12) входит как сама искомая функция, так и интегралы по периоду структуры от неё в комбинации с модулями упругости. Из структуры уравнения (4.12) видно, что искомая функция пропорциональна свободному члену, представляющему собой отклонение функции от своего среднего значения. Второе слагаемое в правой части уравнения (4.12) будет порядка квадрата отклонения. Поэтому при слабой неоднородности свойств слоёв можно пренебречь вторым слагаемым, т.е.

$$\left[D_{i3k3}V'_{kmn}\right]' \approx A_{imn}\,, \qquad A_{imn} \equiv \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) \quad (4.13)$$

Единственное решение будем искать из условий

$$\langle V'_{kmn}\rangle = 0\,, \qquad \langle V_{kmn}\rangle = 0 \quad (4.14)$$

В итоге получаем:

$$V'_{kmn} \approx D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\langle D^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy\Big\rangle\,, \quad (4.15)$$

$$V_{kmn} \approx \int\limits_0^{x_3}\Big[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\langle D^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy\Big\rangle\Big]dx_3-\,,$$
$$\Big\langle\int\limits_0^{x_3}\Big[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\langle D^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy\Big\rangle\Big]dx_3\Big\rangle \quad (4.16)$$

Теперь можно найти эффективные коэффициенты C^o_{ijmn} и B^o_{ijmn}

$$
\begin{gathered}
C^o_{ijmn} = \big\langle \tilde{C}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle \tilde{C}^*_{ijmn} \big\rangle + \big\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab} \epsilon_{abs} V_{smn} \big\rangle = \\
= \big\langle C_{ijmn} \big\rangle - \big\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3mn} \big\rangle + \big\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\rangle \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \big\rangle + \\
+ \big\langle C_{ijab} \epsilon_{abs} V_{smn} \big\rangle - \big\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} V_{smn} \big\rangle + \\
+ \big\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\rangle \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} V_{smn} \big\rangle
\end{gathered}
\tag{4.17}
$$

Последнюю формулу несложно преобразовать к следующему виду:

$$
\boxed{
\begin{gathered}
C^o_{ijmn} = \Big\langle \Big(C_{ijab} - C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} + \\
+ \big\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\rangle \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \Big) \Big(\delta_{ma} \delta_{nb} + \epsilon_{abs} V_{smn} \Big) \Big\rangle
\end{gathered}
}
\tag{4.18}
$$

$$
\begin{gathered}
B^o_{ijmn} = \big\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \big\rangle = \big\langle D_{ijk3} V'_{kmn} \big\rangle = \\
= \Big\langle D_{ijk3} D^{-1}_{k3q3} \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{qsr} \Big(\big\langle \tilde{C}^*_{rsmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{rsmn}(y) \Big) dy \Big\rangle - \\
- \big\langle D_{ijk3} D^{-1}_{k3l3} \big\rangle \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \Big\langle D^{-1}_{p3q3} \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{qsr} \Big(\big\langle \tilde{C}^*_{rsmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{rsmn}(y) \Big) dy \Big\rangle ,
\end{gathered}
\tag{4.19}
$$

или

$$
\boxed{
\begin{gathered}
B^o_{ijmn} = \Big\langle \Big(D_{ijk3} D^{-1}_{k3q3} - \big\langle D_{ijk3} D^{-1}_{k3l3} \big\rangle \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} D^{-1}_{p3q3} \Big) \times \\
\times \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{qsr} \Big(\big\langle \tilde{C}^*_{rsmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{rsmn}(y) \Big) dy \Big\rangle
\end{gathered}
}
\tag{4.20}
$$

4.1.2 Эффективные моментные модули.

Эффективные моментные модули D^o_{ijkl} находятся по формулам (4.9)

$$
D^o_{ijmn} = \big\langle D_{ijmn} + D_{ijk3} M_{kmn,l} \big\rangle = \big\langle \tilde{D}_{ijmn} \big\rangle
\tag{4.21}
$$

Кроме этого необходимо проверить, что

$$\left\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \right\rangle = \left\langle \tilde{B}_{ijmn} \right\rangle = \left\langle C_{ijk3} U'_{kmn} + C_{ijkl} \epsilon_{kls} M_{smn} \right\rangle \tag{4.22}$$

Функции U'_{kmn} и M_{kmn} находятся из решения связанной системы интегро-дифференциальных уравнений (4.4) при условиях

$$\left\langle U'_{kmn} \right\rangle = 0\,, \quad \left\langle U_{kmn} \right\rangle = 0\,, \qquad \left\langle M'_{kmn} \right\rangle = 0\,, \quad \left\langle M_{kmn} \right\rangle = 0 \tag{4.23}$$

Из первого уравнения системы (4.4) найдём связь между функциями U'_{kmn} и M_{kmn}

$$C_{i3k3} U'_{kmn} + C_{i3kl} \epsilon_{kls} M_{smn} = K_{imn} = const \;\Rightarrow$$
$$U'_{kmn} = C^{-1}_{k3i3} K_{imn} - C^{-1}_{k3i3} C_{i3ab} \epsilon_{abs} M_{smn}$$

Далее определяем константы K_{imn}

$$K_{imn} = \left\langle C^{-1}_{k3i3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{k3i3} C_{i3ab} \epsilon_{abs} M_{smn} \right\rangle ,$$

следовательно

$$U'_{kmn} = C^{-1}_{k3l3} \left\langle C^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} M_{smn} \right\rangle - C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} M_{smn} \tag{4.24}$$

Подставим найденное выражение в последнюю формулу системы (4.4) и найдем функции $\tilde{B}_{ijmn}$

$$\tilde{B}_{ijmn} = \hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab} \epsilon_{abs} M_{smn}\,, \tag{4.25}$$

где оператор $\hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab}$ найден в предыдущем разделе и задаётся выражением (4.11). В соответствии с (4.25) второе уравнение системы (4.4) примет вид

$$\left[D_{i3k3} M'_{kmn} + D_{i3mn} \right]' = R_{imn}\,, \qquad R_{imn} \equiv \epsilon_{ijr} \left(\left\langle \hat{\tilde{C}}^{*}_{rjab}(\bullet) \right\rangle - \hat{\tilde{C}}^{*}_{rjab} \right) \epsilon_{abs} M_{smn} \tag{4.26}$$

Интегрируя уравнение (4.26) при условии $\left\langle M'_{kmn} = 0 \right\rangle$, получаем

$$M'_{kmn} = D^{-1}_{k3l3} \left\langle D^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle D^{-1}_{p3q3} D_{q3mn} \right\rangle - D^{-1}_{k3q3} D_{q3mn} -$$
$$- \left(D^{-1}_{k3l3} \left\langle D^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle D^{-1}_{p3q3}(\bullet) \right\rangle - D^{-1}_{k3q3} \right) \int\limits_0^{x_3} R_{qmn}(y) dy \tag{4.27}$$

Уравнение (4.27) является интегро-дифференциальным уравнением, в котором основной вклад в решение даёт свободный член. Найдём приближенное решение этого уравнения, учитывая в правой части только свободный член

$$M_{kmn} \approx \int\limits_0^{x_3} D^*_{k3mn} dy - \left\langle \int\limits_0^{x_3} D^*_{k3mn} dy \right\rangle \tag{4.28}$$

где

$$D^*_{k3mn} \equiv D^{-1}_{k3l3} \left\langle D^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle D^{-1}_{p3q3} D_{q3mn} \right\rangle - D^{-1}_{k3q3} D_{q3mn} \tag{4.29}$$

Используя формулу (4.25) вычислим коэффициенты $\tilde{B}_{ijmn}$

$$\begin{gathered}
\left\langle \tilde{B}_{ijmn} \right\rangle = \left\langle \hat{\tilde{C}}^*_{ijab} \epsilon_{abs} M_{smn} \right\rangle = \\
= \Big\langle C_{ijab} \epsilon_{abs} M_{smn} - C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} M_{smn} + \\
+ C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \left\langle C^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} M_{smn} \right\rangle \Big\rangle = \\
= \left\langle \left(C_{ijab} - C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} + \left\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \right) \epsilon_{abs} M_{smn} \right\rangle = \\
= \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \epsilon_{abs} \left(\int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy - \left\langle \int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy \right\rangle \right) \right\rangle = \\
= \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy \right\rangle - \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \epsilon_{abs} \right\rangle \left\langle \int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy \right\rangle = \\
= \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy - \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \epsilon_{abs} \right\rangle \int\limits_0^{x_3} D^*_{s3mn} dy \right\rangle = \\
= \left\langle \left(\tilde{C}^*_{ijab} - \left\langle \tilde{C}^*_{ijab} \right\rangle \right) \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{abs} D^*_{s3mn} dy \right\rangle = -\left\langle D^*_{ijs3} \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{abs} \left(\tilde{C}^*_{abmn} - \left\langle \tilde{C}^*_{abmn} \right\rangle \right) dy \right\rangle = \\
= \left\langle D^*_{ijs3} \int\limits_0^{x_3} \epsilon_{sab} \left(\left\langle \tilde{C}^*_{abmn} \right\rangle - \tilde{C}^*_{abmn} \right) dy \right\rangle = \left\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \right\rangle
\end{gathered} \tag{4.30}$$

Здесь использована формула

$$\left\langle \left(\varphi(x)-\langle\varphi\rangle\right)\int\limits_0^x\left(\psi(y)-\langle\psi\rangle\right)dy\right\rangle = -\left\langle \left(\psi(x)-\langle\psi\rangle\right)\int\limits_0^x\left(\varphi(y)-\langle\varphi\rangle\right)dy\right\rangle \tag{4.31}$$

Таким образом доказано, что в случае неоднородного по толщине изотропного слоя верно равенство

$$\left\langle B^0_{ijmn}\right\rangle = \left\langle \tilde{B}_{ijmn}\right\rangle = \left\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\right\rangle$$

Найдём далее эффективные коэффициенты D^o_{ijmn}

$$\boxed{\begin{gathered} D^o_{ijmn} = \langle \tilde{D}_{ijmn}\rangle = \langle D_{ijmn} + D_{ijk3}M_{kmn,l}\rangle = \\ = \langle D_{ijmn}\rangle - \langle D_{ijk3}D^{-1}_{k3q3}D_{q3mn}\rangle + \langle D_{ijk3}D^{-1}_{k3l3}\rangle\langle D^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle D^{-1}_{p3q3}D_{q3mn}\rangle \end{gathered}} \tag{4.32}$$

4.2 Случай неоднородного по толщине анизотропного слоя.

В анизотропном материале $B_{ijkl} \neq 0$. Поэтому рассмотрим уравнения (4.1) и (4.2)

$$\begin{cases} \left[C_{i3k3}N'_{kmn} + C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{i3k3}V'_{kmn}\right]' = 0 \\ \left[D_{i3k3}V'_{kmn} + B_{i3mn} + B_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{i3k3}N'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\langle\tilde{C}_{rjmn}\rangle - \tilde{C}_{rjmn}\Big) \\ \tilde{C}_{rjmn} = C_{rjk3}N'_{kmn} + C_{rjmn} + C_{rjkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{ijk3}V'_{kmn} \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\begin{cases} \left[C_{i3k3}U'_{kmn} + B_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}M'_{kmn}\right]' = 0 \\ \left[D_{i3k3}M'_{kmn} + D_{i3mn} + B_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}U'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\langle\tilde{B}_{rjmn}\rangle - \tilde{B}_{rjmn}\Big) \\ \tilde{B}_{rjmn} = C_{ijk3}U'_{kmn} + B_{ijmn} + C_{ijkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + D_{i3k3}M'_{kmn} \end{cases} \tag{4.34}$$

Условия на границах плиты принимают вид:

$$N_{imn}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\; V_{imn}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\; M_{imn}\big|_{x_3=0;L} = 0\,,\; U_{imn}\big|_{x_3=0;L} = 0 \tag{4.35}$$

4.2.1 Эффективные упругие модули и коэффициенты взаимного влияния.

Проинтегрируем первое уравнение системы (4.33):

$$C_{i3k3}N'_{kmn} + C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{i3k3}V'_{kmn} = K_{imn} = const. \;\Rightarrow$$
$$N'_{kmn} = C^{-1}_{k3i3}K_{imn} - C^{-1}_{k3i3}\big(C_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{i3k3}V'_{kmn}\big)$$

Учитывая, что $\big\langle N'_{imn}\big\rangle = 0$, найдём константы интегрирования K_{imn}

$$K_{imn} = \big\langle C^{-1}_{i3k3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn}\big\rangle + \big\langle C^{-1}_{i3k3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{k3l3}C_{l3ab}\epsilon_{abs}V_{smn}\big\rangle +$$
$$+\big\langle C^{-1}_{i3k3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3}V'_{smn}\big\rangle$$

Выражение для N'_{kmn} через функции V_{kmn} и V'_{kmn} имеет вид:

$$\begin{gathered}
N'_{kmn} = \Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn}\Big] + \\
+\Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}V_{smn} + \\
+\Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3}\Big]V'_{smn}
\end{gathered} \tag{4.36}$$

В двух последних квадратных скобках вместо $(\bullet)$ подставляется то, что стоит после закрывающей скобки. Заметим, что среднее значение каждой скобки равно нулю. Далее находим по формулам (2.50) - (2.52) $\tilde{C}_{ijmn}$

$$\begin{gathered}
\tilde{C}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn} + \\
+\Big[C_{ijab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}V_{smn} + \\
+\Big[B_{ijs3} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\Big]V'_{smn}
\end{gathered} \tag{4.37}$$

и $\tilde{\tilde{\hat{B}}}_{ijmn}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\hat{B}}}_{ijmn} &= B_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn}+\\
&+\Big[B_{ijab} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}V_{smn}+\\
&+\Big[D_{ijs3} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\Big]V'_{smn}
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Формулу (4.36) представим в виде:

$$
\tilde{C}_{ijmn} = \tilde{C}^{*}_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3}V'_{smn} \tag{4.39}
$$

где

$$
\tilde{C}^{*}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn} \tag{4.40}
$$

$$
\hat{\tilde{C}}^{*}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \tag{4.41}
$$

$$
\hat{\tilde{S}}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn} \tag{4.42}
$$

После однократного интегрирования второго уравнения системы (4.33) и получаем:

$$
\begin{aligned}
V'_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\Bigg[&B_{l3mn} + B_{l3ab}\epsilon_{abs}V_{smn} + B_{l3s3}N'_{smn}-\\
&-\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\Big(B_{q3mn} + B_{q3ab}\epsilon_{abs}V_{smn} + B_{q3s3}N'_{smn}\Big)\Big\rangle\Bigg]+\\
&+D^{-1}_{k3l3}\Bigg[\epsilon_{ljr}\int\limits_{0}^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{C}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}_{rjmn}(y)\Big)dy-\\
&-\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}(z)\epsilon_{qjr}\int\limits_{0}^{z}\Big(\big\langle\tilde{C}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}_{rjmn}(y)\Big)dy\Big\rangle\Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Среднее значение правой части этого выражения равно нулю. Учитывая, что выражение (4.36) имеет вид $N'_{smn} = r_{smn} + \hat{r}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}V_{kmn} + \hat{r}^{(2)}_{sk3}V'_{kmn}$ имеем:

$$\begin{gathered}V'_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\Bigg[B_{l3mn} + B_{l3ab}\epsilon_{abs}V_{smn} + B_{l3s3}(r_{smn} + \hat{r}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}V_{kmn} + \hat{r}^{(2)}_{sk3}V'_{kmn}) - \\ -\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\Big(B_{q3mn} + B_{q3ab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \\ +B_{q3s3}(r_{smn} + \hat{r}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}V_{kmn} + \hat{r}^{(2)}_{sk3}V'_{kmn})\Big)\Big\rangle\Bigg] + \\ +D^{-1}_{k3l3}\Bigg[\epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) + \Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} + \\ +\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)V'_{smn}\Big)dy - \big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\epsilon_{qjr}\int\limits_0^{z}\Big(\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) + \\ +\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} + \Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)V'_{smn}\Big)dy\Big\rangle\Bigg]\end{gathered} \tag{4.44}$$

От сюда следует, что правую часть формулы (4.43) можно будет записать в такой же форме что и правая часть формулы (4.36)

$$V'_{kmn} = e_{kmn} + \hat{g}_{kab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \hat{f}_{ks3}V'_{smn}\,, \tag{4.45}$$

где

$$\begin{gathered}e_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\Big(B_{l3mn} + B_{l3s3}r_{smn} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big)dy\Big) + \\ + D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\Big\langle D^{-1}_{p3l3}\Big(B_{l3mn} + B_{l3s3}r_{smn} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big)dy\Big)\Big\rangle\,,\end{gathered} \tag{4.46}$$

$$\hat{g}_{kab} = -D^{-1}_{k3l3}\Big(B_{l3ab} + B_{l3s3}\hat{r}^{(1)}_{sab} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)dy\Big) +$$

$$+ D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3l3}\big(B_{l3ab} + B_{l3s3}\hat{r}^{(1)}_{sab} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)dy\big)\big\rangle\,, \quad (4.47)$$

$$\hat{f}_{ks3} = -D^{-1}_{k3l3}\big(B_{l3s3}\hat{r}^{(2)}_{rs3} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)dy\big) +$$

$$+ D^{-1}_{k3t3}\big\langle D^{-1}_{t3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3l3}\big(B_{l3s3}\hat{r}^{(2)}_{rs3} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)dy\big)\big\rangle\,, \quad (4.48)$$

где

$$\tilde{C}^*_{ijmn} \equiv C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn} \quad (4.49)$$

$$\hat{\tilde{C}}^*_{ijmn} \equiv C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \quad (4.50)$$

$$\hat{\tilde{S}}^*_{ijmn} \equiv B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn} \quad (4.51)$$

$$r_{kmn} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \quad (4.52)$$

$$\hat{r}^1_{kab} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} \quad (4.53)$$

$$\hat{r}^2_{ks3} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3} \quad (4.54)$$

Перепишем (4.46) в более удобной форме:

$$e_{kmn} = D^{-1}_{k3s3}T_{smn} - D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3q3}T_{qmn}\big\rangle\,, \quad (4.55)$$

$$T_{imn} = \epsilon_{ijr}\int\limits_0^{x_3}\Big[\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}(y)\Big]dy - \Big(B_{i3mn} + B_{i3k3}r_{kmn}\Big) \quad (4.56)$$

$$\tilde{C}^*_{ijmn} \equiv C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn} \quad (4.57)$$

$$r_{kmn} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \quad (4.58)$$

Величины $\hat{g}_{kab}$ и $\hat{f}_{ks3}$ являются довольно громоздкими операторами. Отметим, что среднее значение каждого из слагаемых в формуле (4.49) равно нулю. То есть эти слагаемые представляют собой отклонение от среднего значения, причем второе и третье слагаемые будут величинами порядка квадрата первого слагаемого. Основной вклад в выражение для функции V_{kmn} дает первое слагаемое. Аналогичная ситуация имеет место и для функции N_{kmn}.

Для нахождения приближенных аналитических выражений эффективных характеристик неоднородного по толщине слоя из моментного материала ограничимся в выражениях для функций V_{kmn} только первыми слагаемыми, т.е. положим

$$V'_{kmn} \approx e_{kmn} \quad \Rightarrow \quad V_{kmn} \approx \int\limits_0^{x_3} e_{kmn}(y)dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{kmn}(y)dy \rangle \tag{4.59}$$

$$N'_{kmn} = \hat{R}_{kmn} \quad \Rightarrow \quad N_{kmn} = \int\limits_0^{x_3} \hat{R}_{kmn}(y)dy - \langle \int\limits_0^{x_3} \hat{R}_{kmn}(y)dy \rangle \, , \tag{4.60}$$

где $\hat{R}_{kmn}$ вычисляется по формуле (4.36) т.е. $\hat{R}_{kmn} = N'_{kmn} = r_{kmn} + \hat{r}^{(1)}_{kab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \hat{r}^{(2)}_{ks3}V'_{smn}$, а e_{kmn} - по формуле (4.55).

4.2.2 Эффективные моментные модули.

Аналогично интегрируется система уравнений (4.35) для функций U_{kmn} и M_{kmn}. Проинтегрируем первое уравнение системы (4.35)

$$\left[C_{i3k3}U'_{kmn} + B_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}M'_{kmn}\right]' = 0$$

$$C_{i3k3}U'_{kmn} + B_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}M'_{kmn} = L_{imn} = const. \ \Rightarrow$$
$$U'_{kmn} = C^{-1}_{k3i3}L_{imn} - C^{-1}_{k3i3}\big(B_{i3mn} + C_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}M'_{kmn}\big)$$

Учитывая, что $\langle U'_{imn} \rangle = 0$, найдём константы интегрирования L_{imn}

$$L_{imn} = \langle C^{-1}_{i3k3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn}\rangle + \langle C^{-1}_{i3k3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{k3l3}C_{l3ab}\epsilon_{abs}M_{smn}\rangle +$$
$$+ \langle C^{-1}_{i3k3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3}M'_{smn}\rangle$$

Выражение для U'_{kmn} через функции U_{kmn} и M'_{kmn} имеет вид:

$$\begin{aligned} U'_{kmn} = &\Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\Big]+ \\ &+\Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}M_{smn}+ \\ &+\Big[C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3}\Big]M'_{smn} \end{aligned} \tag{4.61}$$

В двух последних квадратных скобках вместо $(\bullet)$ подставляется то, что стоит после закрывающей скобки. Заметим, что среднее значение каждой скобки равно нулю. Далее по формулам (2.50) - (2.52) находим $\tilde{B}_{ijmn}$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ijmn} = &B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn}+ \\ &+\Big[C_{ijab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}M_{smn}+ \\ &+\Big[B_{ijs3} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\Big]M'_{smn} \end{aligned} \tag{4.62}$$

и $\tilde{D}_{ijmn}$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ijmn} = &D_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn}+ \\ &+\Big[B_{ijab} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\Big]\epsilon_{abs}M_{smn}+ \\ &+\Big[D_{ijs3} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\Big]M'_{smn} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Запишем (4.62) в виде:

$$\tilde{B}_{ijmn} = \tilde{B}^{*}_{ijmn} + \hat{\tilde{B}}^{*}_{ijab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{\tilde{T}}^{*}_{ijs3}M'_{smn} \tag{4.64}$$

где

$$\tilde{B}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn} \tag{4.65}$$

$$\hat{\tilde{B}}^{*}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \tag{4.66}$$

$$\hat{\tilde{T}}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn} \tag{4.67}$$

Заметим, что $\hat{\tilde{B}}^*_{ijmn} = \hat{\tilde{C}}^*_{ijmn}$, а $\hat{\tilde{T}}^*_{ijmn} = \hat{\tilde{S}}^*_{ijmn}$, где $\hat{\tilde{S}}^*_{ijmn}$ и $\hat{\tilde{C}}^*_{ijmn}$ определяются по формулам (4.41) и (4.42). Поэтому формула (4.64) примет вид:

$$\tilde{B}_{ijmn} = \tilde{B}^*_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}^*_{ijab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}M'_{smn} \tag{4.68}$$

Проинтегрируем второе уравнение системы (4.35):

$$\left[D_{i3k3}M'_{kmn} + D_{i3mn} + B_{i3kl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{i3k3}U'_{kmn}\right]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle \tilde{B}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}_{rjmn}\Big)$$

Имеем

$$\begin{gathered}
M'_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\Bigg[D_{l3mn} + B_{l3ab}\epsilon_{abs}M_{smn} + D_{l3s3}U'_{smn} - \\
-\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\Big(D_{q3mn} + B_{q3ab}\epsilon_{abs}M_{smn} + D_{q3s3}U'_{smn}\Big)\Big\rangle\Bigg] + \\
+D^{-1}_{k3l3}\Bigg[\epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{B}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}_{rjmn}(y)\Big)dy - \\
-\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}(z)\epsilon_{qjr}\int\limits_0^{z}\Big(\big\langle\tilde{B}_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}_{rjmn}(y)\Big)dy\Big\rangle\Bigg]
\end{gathered} \tag{4.69}$$

Среднее значение правой части этого выражения равно нулю. Учитывая, что выражение (4.61) имеет вид $U'_{smn} = d_{smn} + \hat{d}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}M_{kmn} + \hat{d}^{(2)}_{sk3}M'_{kmn}$, имеем:

$$\begin{gathered}
M'_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\Bigg[D_{l3mn}+B_{l3ab}\epsilon_{abs}M_{smn}+D_{l3s3}(d_{smn}+\hat{d}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}M_{kmn}+\hat{d}^{(1)}_{sk3}M'_{kmn}) - \\
-\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}\Big(D_{q3mn} + B_{q3ab}\epsilon_{abs}M_{smn} + D_{q3s3}(d_{smn} + \hat{d}^{(1)}_{sab}\epsilon_{abk}M_{kmn} + \\
+\hat{d}^{(1)}_{sk3}M'_{kmn})\Big)\Big\rangle\Bigg] + +D^{-1}_{k3l3}\Bigg[\epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{B}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}\Big) + \Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}M_{smn} + \\
+\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)M'_{smn}\Big)dy - \big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\Big\langle D^{-1}_{p3q3}(z)\epsilon_{qjr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{B}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}\Big) + \\
+\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}M_{smn} + \Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)M'_{smn}\Big)dy\Big\rangle\Bigg]
\end{gathered} \tag{4.70}$$

От сюда следует, что правую часть формулы (4.70) можно будет записать в такой же форме что и правая часть формулы (4.61)

$$M'_{kmn} = h_{kmn} + \hat{k}_{kab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{l}_{ks3}M'_{smn}\,, \tag{4.71}$$

где

$$\begin{gathered} h_{kmn} = -D^{-1}_{k3l3}\big(D_{l3mn} + B_{l3s3}d_{smn} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{B}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}\Big)dy\big) + \\ + D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3l3}\big(D_{l3mn} + B_{l3s3}d_{smn} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\tilde{B}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}\Big)dy\big)\big\rangle\,, \end{gathered} \tag{4.72}$$

$$\begin{gathered} \hat{k}_{kab} = -D^{-1}_{k3l3}\big(B_{l3ab} + D_{l3s3}\hat{d}^{(1)}_{sab} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)dy\big) + \\ + D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3l3}\big(B_{l3ab} + D_{l3s3}\hat{d}^{(1)}_{sab} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)dy\big)\big\rangle\,, \end{gathered} \tag{4.73}$$

$$\begin{gathered} \hat{l}_{ks3} = -D^{-1}_{k3p3}\big(D_{l3s3}\hat{d}^{(2)}_{rs3} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)dy\big) + \\ + D^{-1}_{k3t3}\big\langle D^{-1}_{t3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3l3}\big(D_{l3s3}\hat{d}^{(2)}_{rs3} - \epsilon_{ljr}\int\limits_0^{x_3}\Big(\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\big\rangle - \hat{\tilde{S}}^*_{rjs3}\Big)dy\big)\big\rangle\,, \end{gathered} \tag{4.74}$$

где

$$\tilde{B}^*_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn} \tag{4.75}$$

$$\hat{\tilde{C}}^*_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \tag{4.76}$$

$$\hat{\tilde{S}}^*_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn} \tag{4.77}$$

$$d_{kmn} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\,, \tag{4.78}$$

$$\hat{d}^{(1)}_{kab} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} \tag{4.79}$$

$$\hat{d}^{(2)}_{ks3} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle - C^{-1}_{k3l3}B_{l3s3} \tag{4.80}$$

Перепишем (4.72) в более удобной форме:

$$h_{kmn} = D^{-1}_{k3s3}\Theta_{smn} - D^{-1}_{k3s3}\big\langle D^{-1}_{s3p3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3q3}\Theta_{qmn}\big\rangle\,, \tag{4.81}$$

$$\Theta_{imn} = \epsilon_{ijr}\int\limits_0^{x_3}\Big[\big\langle\tilde{B}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}(y)\Big]dy - \Big(D_{i3mn} + B_{i3k3}d_{kmn}\Big)\,, \tag{4.82}$$

$$\tilde{B}^*_{ijmn} \equiv B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn} \tag{4.83}$$

$$d_{kmn} \equiv C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\,, \tag{4.84}$$

Величины $\hat{k}_{kab}$ и $\hat{l}_{ks3}$ являются довольно громоздкими операторами. Среднее значение каждого из слагаемых в формуле (4.71) равно нулю. То есть эти слагаемые представляют собой отклонение от среднего значения, причем второе и третье слагаемые будут величинами порядка квадрата первого слагаемого. Основной вклад в выражение для функции U_{kmn} дает первое слагаемое. Аналогичная ситуация имеет место и для функции M_{kmn}. Таким образом, получаем следующие приближенные выражения для функций M_{kmn}

$$M'_{kmn} \approx h_{kmn} \quad\Rightarrow\quad M_{kmn} \approx \int\limits_0^{x_3} h_{kmn}(y)dy - \Big\langle\int\limits_0^{x_3} h_{kmn}(y)dy\Big\rangle \tag{4.85}$$

$$U'_{kmn} = \hat{G}_{kmn} \quad\Rightarrow\quad U_{kmn} = \int\limits_0^{x_3} U'_{kmn}(y)dy - \Big\langle\int\limits_0^{x_3} U'_{kmn}(y)dy\Big\rangle\,, \tag{4.86}$$

где $\hat{G}_{kmn}$ вычисляется по формуле (4.61) т.е. $\hat{G}_{kmn} = d_{kmn} + \hat{d}^{(1)}_{kab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{d}^{(2)}_{ks3}M'_{smn}$, а h_{kmn} - по формуле (4.75)

4.2.3 Доказательство равенства $\left\langle\tilde{B}_{ijmn}\right\rangle = \left\langle\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\right\rangle$.

Введем обозначения:

$$\tilde{B}^{**}_{ijmn} = B_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\right\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn}\,, \tag{4.87}$$

$$\hat{\tilde{P}}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\right\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn}\,, \tag{4.88}$$

$$\hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijmn} = D_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\right\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\,, \tag{4.89}$$

Используя обозначения (4.87)–(4.89), запишем $\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}$ в виде:

$$\tilde{\tilde{B}}_{ijmn} = \tilde{B}^{**}_{ijmn} + \hat{\tilde{P}}^{*}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3}V'_{smn} \tag{4.90}$$

А используя ранее введенные обозначения (4.65) – (4.67)

$$\tilde{B}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\right\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn} \tag{4.91}$$

$$\hat{\tilde{B}}^{*}_{ijmn} = \hat{\tilde{C}}^{*}_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\right\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} \tag{4.92}$$

$$\hat{\tilde{T}}^{*}_{ijmn} = \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\right\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn} \tag{4.93}$$

Выражение (4.64) можно переписать в виде:

$$\tilde{B}_{ijmn} = \tilde{B}^{*}_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3}M'_{smn} \tag{4.94}$$

Из (4.87) и (4.91) и в силу симметрии тензоров $\underset{\sim}{B}$ и $\underset{\sim}{C}$ по первой и второй парам индексов получаем:

$$\left\langle\tilde{B}^{*}_{ijmn}\right\rangle = \left\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\right\rangle \tag{4.95}$$

Следовательно:

$$\left\langle\tilde{B}_{ijmn}\right\rangle = \left\langle\tilde{B}^{*}_{ijmn}\right\rangle + \left\langle\hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab}\right\rangle\epsilon_{abs}M_{smn} + \left\langle\hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3}\right\rangle M'_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle \hat{\tilde{C}}^{*}_{ijab} \rangle \epsilon_{abs} \Big(\int_0^{x_3} M'_{smn} dy - \langle \int_0^{x_3} M'_{smn} dy \rangle \Big) + \langle \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3} \rangle M'_{smn}$$

Воспользуемся обозначением (4.85) $M'_{smn} = h_{smn}$, тогда

$$\langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijab}(\bullet) + C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab}(\bullet) \rangle -$$

$$- C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab}(\bullet) \rangle \epsilon_{abs} \Big(\int_0^{x_3} h_{smn} dy - \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle \Big) + \langle \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3} \rangle h_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijab} \epsilon_{abs} \Big(\int_0^{x_3} h_{smn} dy - \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle \Big) \rangle +$$

$$+ \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \Big(\int_0^{x_3} h_{smn} dy - \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle \Big) \rangle -$$

$$- \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \Big(\int_0^{x_3} h_{smn} dy - \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle \Big) \rangle + \langle \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3} \rangle h_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijab} \epsilon_{abs} \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle - \langle C_{ijab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle -$$

$$- \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle -$$

$$- \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle + \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle \hat{\tilde{S}}^{*}_{ijs3} \rangle h_{smn} = \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle \big(C_{ijab} - \langle C_{ijab} \rangle \big) \epsilon_{abs} \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle \Big(\langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} -$$

$$- \langle C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \rangle \Big) \epsilon_{abs} \int_0^{x_3} h_{smn} dy \rangle -$$

$$-\big\langle\big(C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\big\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3}h_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn}=$$

$$=\big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle+\big\langle\epsilon_{sab}\big(\tilde{C}^*_{abij}-\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle\big)\int\limits_0^{x_3}h_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn}=$$

$$=\big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle+\big\langle\epsilon_{sba}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{C}^*_{abij}\big)\int\limits_0^{x_3}h_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn}$$

Используя $\big\langle h_{smn}\big\rangle=\big\langle M'_{smn}\big\rangle=0$ и формулу (4.31) запишем $\big\langle\tilde{B}_{ijmn}\big\rangle$ в следующем виде:

$$\big\langle\tilde{B}_{ijmn}\big\rangle=\big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\epsilon_{sba}h_{smn}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{C}^*_{abij}\big)dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn}\,, \tag{4.96}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{\Delta C}^*_{sij}=\epsilon_{sba}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{C}^*_{abij}\big)dy\,, \tag{4.97}$$

$$\mathbf{\Delta B}^*_{sij}=\epsilon_{sba}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{B}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{B}^*_{abij}\big)dy\,, \tag{4.98}$$

$$\hat{\mathcal{D}}_{ks}=D^{-1}_{k3s3}(\bullet)-D^{-1}_{k3q3}\big\langle D^{-1}_{q3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3s3}(\bullet)\big\rangle\,, \tag{4.99}$$

В силу того, что тензор $\underset{\sim}{D}$ симметричен по паре индексов (т.е. $D_{ijmn}=D_{mnij}$) можно показать, что оператор $\hat{\mathcal{D}}_{ks}$ обладает следующим свойством:

$$\big\langle A_{i_1\ldots i_nk}\hat{\mathcal{D}}_{ks}B_{i_1\ldots i_ns}\big\rangle=\big\langle B_{i_1\ldots i_nk}\hat{\mathcal{D}}_{ks}A_{i_1\ldots i_ns}\big\rangle \tag{4.100}$$

Докажем данное свойство. *Пусть $\underset{\sim}{D}$ симметричен по паре индексов (т.е. $D_{ijmn}=D_{mnij}$), а оператор $\hat{\mathcal{D}}_{ks}$ определяется по формуле $\hat{\mathcal{D}}_{ks}=D^{-1}_{k3s3}(\bullet)-D^{-1}_{k3q3}\big\langle D^{-1}_{q3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3s3}(\bullet)\big\rangle$, тогда для любых тензоров $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ справедливо равенство:*

$$\big\langle A_{i_1\ldots i_nk}\hat{\mathcal{D}}_{ks}B_{i_1\ldots i_ns}\big\rangle=\big\langle B_{i_1\ldots i_nk}\hat{\mathcal{D}}_{ks}A_{i_1\ldots i_ns}\big\rangle$$

Доказательство:

$$\big\langle A_{i_1\dots i_n k}\hat{\mathcal{D}}_{ks}B_{i_1\dots i_n s}\big\rangle = \big\langle A_{i_1\dots i_n k}\big(D^{-1}_{k3s3}B_{i_1\dots i_n s} - D^{-1}_{k3q3}\big\langle D^{-1}_{q3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3s3}B_{i_1\dots i_n s}\big\rangle\big)\big\rangle =$$
$$= \big\langle A_{i_1\dots i_n k}D^{-1}_{k3s3}B_{i_1\dots i_n s}\big\rangle - \big\langle A_{i_1\dots i_n k}D^{-1}_{k3q3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{q3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3s3}B_{i_1\dots i_n s}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\big(A_{i_1\dots i_n k}D^{-1}_{k3s3} - \big\langle A_{i_1\dots i_n k}D^{-1}_{k3q3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{q3p3}\big\rangle^{-1}D^{-1}_{p3s3}\big)B_{i_1\dots i_n s}\big\rangle =$$
$$= \big\langle B_{i_1\dots i_n s}\big(D^{-1}_{s3k3}A_{i_1\dots i_n k} - \big\langle D^{-1}_{q3k3}A_{i_1\dots i_n k}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{p3q3}\big\rangle^{-1}D^{-1}_{s3p3}\big)\big\rangle = \big\langle B_{i_1\dots i_n k}\hat{\mathcal{D}}_{ks}A_{i_1\dots i_n s}\big\rangle$$

Используя обозначения (4.97) - (4.99) и формулы (4.81) - (4.84), (4.85) получим:

$$M'_{smn} = h_{smn} = \hat{\mathcal{D}}_{si}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{imn} - D^*_{i3mn}\big)\,, \tag{4.101}$$
$$\Theta_{imn} = \mathbf{\Delta B}^*_{imn} - D^*_{i3mn}\,, \tag{4.102}$$
$$D^*_{ijmn} = D_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\big\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\,, \tag{4.103}$$

Продолжим преобразовывать:

$$\big\langle\tilde{B}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\epsilon_{sba}h_{smn}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle - \tilde{C}^*_{abij}\big)dy\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn} =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}h_{smn}\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn} =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle h_{smn} =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle + \big\langle B_{ijs3}h_{smn}\big\rangle +$$
$$+\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}h_{smn}\big\rangle - \big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}h_{smn}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle +$$
$$+\big\langle\big(B_{ijs3} + \big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\big)h_{smn}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle + \big\langle B^{**}_{s3ij}h_{smn}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle + \big\langle B^{**}_{s3ij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\big(\mathbf{\Delta C}^*_{sij} - B^{**}_{s3ij}\big)\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - D^*_{t3mn}\big)\big\rangle\,,$$

Аналогично сделаем преобразования с другой частью доказываемого равенства:

$$\big\langle\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{P}}^*_{ijab}\big\rangle\epsilon_{abs}V_{smn} + \big\langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\big\rangle V'_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle \hat{\tilde{P}}^{*}_{ijab} \rangle \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} V'_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} V'_{smn} dy \rangle) + \langle \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3} \rangle V'_{smn}$$

Воспользуемся обозначением $V'_{smn} = e_{smn}$ (4.59), тогда

$$\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle \hat{\tilde{P}}^{*}_{ijab} \rangle \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle) + \langle \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle B_{ijab}(\bullet) + B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab}(\bullet) \rangle -$$

$$- B_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab}(\bullet) \rangle \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle) + \langle \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle B_{ijab} \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle) \rangle +$$

$$+ \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle) \rangle -$$

$$- \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} (\int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle) \rangle + \langle \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$

$$= \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle B_{ijab} \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle - \langle B_{ijab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle -$$

$$- \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle -$$

$$- \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle + \langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3q3} C_{q3ab} \epsilon_{abs} \rangle \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle \hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3} \rangle e_{smn} = \langle \tilde{B}^{**}_{ijmn} \rangle + \langle (B_{ijab} - \langle B_{ijab} \rangle) \epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn} dy \rangle +$$

$$+ \langle ((\langle B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3ab} -$$

$$-\left\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\right\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle -$$

$$-\big\langle\big(B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} - \left\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\right\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3}\big\rangle e_{smn} =$$

$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle + \big\langle\epsilon_{sba}\big(\big\langle\tilde{B}^{*}_{abij}\big\rangle - \tilde{B}^{*}_{abij}\big)\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3}\big\rangle e_{smn}$$

Воспользовавшись свойствами (4.31) и (4.100), а также введенными обозначениями (4.97) и (4.99), получаем:

$$V'_{smn} = e_{smn} = \hat{\mathcal{D}}_{si}\big(\mathbf{\Delta C}^{*}_{imn} - B^{**}_{i3mn}\big)\,, \tag{4.104}$$

$$T_{imn} = \mathbf{\Delta C}^{*}_{imn} - B^{**}_{i3mn}\,, \tag{4.105}$$

$$\tilde{B}^{**}_{ijmn} = B_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\right\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn}\,, \tag{4.106}$$

Продолжим преобразовывать:

$$\big\langle\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle + \big\langle\epsilon_{sba}\big(\big\langle\tilde{B}^{*}_{abij}\big\rangle - \tilde{B}^{*}_{abij}\big)\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3}\big\rangle e_{smn} =$$

$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\epsilon_{sba}e_{smn}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{B}^{*}_{abij}\big\rangle - \tilde{B}^{*}_{abij}\big)dy\big\rangle + \big\langle\hat{\tilde{Q}}^{*}_{ijs3}\big\rangle e_{smn} =$$

$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij}e_{smn}\big\rangle + \big\langle D_{ijs3}(\bullet) + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\right\rangle -$$
$$-B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}(\bullet)\big\rangle e_{smn} = \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij}e_{smn}\big\rangle +$$
$$+\big\langle\big(D_{ijs3} + \left\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3} - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\big)e_{smn}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij}e_{smn}\big\rangle + \big\langle D^{*}_{s3ij}e_{smn}\big\rangle = \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\big(\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij} - D^{*}_{s3ij}\big)e_{smn}\big\rangle =$$
$$= \big\langle\tilde{B}^{**}_{ijmn}\big\rangle - \big\langle\big(\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij} - D^{*}_{s3ij}\big)\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta C}^{*}_{tmn} - B^{**}_{t3mn}\big)\big\rangle\,,$$

Учитывая свойство (4.100) оператора $\hat{\mathcal{D}}_{st}$, легко можно убедиться, что

$$\big\langle\big(\mathbf{\Delta B}^{*}_{sij} - D^{*}_{s3ij}\big)\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta C}^{*}_{tmn} - B^{**}_{t3mn}\big)\big\rangle = \big\langle\big(\mathbf{\Delta C}^{*}_{sij} - B^{**}_{s3ij}\big)\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta B}^{*}_{tmn} - D^{*}_{t3mn}\big)\big\rangle\,,$$

а следовательно $\big\langle\tilde{\tilde{B}}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle\tilde{B}_{ijmn}\big\rangle$.

4.2.4 Аналитические формулы для нахождения эффективных характеристик.

После того, как было доказано равенство $\langle \tilde{\tilde{B}}_{ijmn} \rangle$ и $\langle \tilde{B}_{ijmn} \rangle$, найдем оставшиеся операторы $\langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle$ и $\langle \tilde{D}_{ijmn} \rangle$. Согласно формуле (4.37) найдем $\langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle$:

$$\tilde{C}_{ijmn} = \tilde{C}^*_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}^*_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} + \hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}V'_{smn}$$

где

$$\tilde{C}^*_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}C_{l3mn}$$
$$\hat{\tilde{C}}^*_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn}$$
$$\hat{\tilde{S}}^*_{ijmn} = B_{ijmn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\rangle - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}$$

Преобразуем:

$$\langle \tilde{C}_{ijmn} \rangle = \langle \tilde{C}^*_{ijmn} \rangle + \langle \hat{\tilde{C}}^*_{ijab} \rangle \epsilon_{abs}V_{smn} + \langle \hat{\tilde{S}}^*_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$
$$= \langle \tilde{C}^*_{ijmn} \rangle + \langle \hat{\tilde{C}}^*_{ijab} \rangle \epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle \Big) + \langle \hat{\tilde{S}}^*_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$
$$= \langle \tilde{C}^*_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle \Big) \rangle +$$
$$+ \langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle \Big) \rangle -$$
$$- \langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy - \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle \Big) \rangle + \langle \hat{\tilde{S}}^*_{ijs3} \rangle e_{smn} =$$
$$= \langle \tilde{C}^*_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijab}\epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle - \langle C_{ijab}\epsilon_{abs} \rangle \langle \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle +$$
$$+ \langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3} \rangle \langle C^{-1}_{l3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs} \int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy \rangle -$$

$$-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\big\rangle\big\langle\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle-$$

$$-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\big\rangle\big\langle\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+$$

$$+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle M'_{smn}=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle+\big\langle\big(C_{ijab}-\big\langle C_{ijab}\big\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+$$

$$+\big\langle\big(\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}-$$

$$-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\big\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle-$$

$$-\big\langle\big(C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\big\rangle\big)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle e_{smn}=$$

$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle+\big\langle\epsilon_{sab}\big(\tilde{C}^*_{abij}-\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle\big)\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle e_{smn}=$$

$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle+\big\langle\epsilon_{sba}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{C}^*_{abij}\big)\int\limits_0^{x_3} e_{smn}dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle e_{smn}$$

Воспользовавшись свойствами (4.31) и (4.100), а также введенными обозначениями (4.97) и (4.99), получаем:

$$\big\langle\tilde{C}_{ijmn}\big\rangle=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\epsilon_{sba}e_{smn}\int\limits_0^{x_3}\big(\big\langle\tilde{C}^*_{abij}\big\rangle-\tilde{C}^*_{abij}\big)dy\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle e_{smn}=$$

$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}e_{smn}\big\rangle+\big\langle\hat{\tilde{S}}^*_{ijs3}\big\rangle e_{smn}=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}e_{smn}\big\rangle+\big\langle B_{ijs3}e_{smn}\big\rangle+$$
$$+\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}e_{smn}\big\rangle-\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}e_{smn}\big\rangle=$$
$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}e_{smn}\big\rangle+$$
$$+\big\langle\big(B_{ijs3}+\big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}-C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\big)e_{smn}\big\rangle=$$
$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\mathbf{\Delta C}^*_{sij}e_{smn}\big\rangle+\big\langle B^{**}_{s3ij}e_{smn}\big\rangle=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\big(\mathbf{\Delta C}^*_{sij}-B^{**}_{s3ij}\big)e_{smn}\big\rangle=$$
$$=\big\langle\tilde{C}^*_{ijmn}\big\rangle-\big\langle\big(\mathbf{\Delta C}^*_{sij}-B^{**}_{s3ij}\big)\hat{\mathcal{D}}_{st}\big(\mathbf{\Delta C}^*_{tmn}-B^{**}_{t3mn}\big)\big\rangle,$$

Аналогично распишем $\langle\tilde{D}_{ijmn}\rangle$, используя формулу (4.63)

$$\tilde{D}_{ijmn} = \tilde{D}^*_{ijmn} + \hat{\tilde{P}}^*_{ijab}\epsilon_{abs}M_{smn} + \hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}M'_{smn}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^*_{ijmn} &= D_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}B_{l3mn}\,,\\
\hat{\tilde{P}}^*_{ijmn} &= B_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}(\bullet)\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn}\,,\\
\hat{\tilde{Q}}^*_{ijmn} &= D_{ijmn} + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3mn}(\bullet)\rangle - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3mn}\,,
\end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\langle\tilde{D}_{ijmn}\rangle = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle\hat{\tilde{P}}^*_{ijab}\rangle\epsilon_{abs}M_{smn} + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle\hat{\tilde{P}}^*_{ijab}\rangle\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy - \langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle\Big) + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle B_{ijab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy - \langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle\Big)\rangle +$$

$$+\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy - \langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle\Big)\rangle -$$

$$-\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\Big(\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy - \langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle\Big)\rangle + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle B_{ijab}\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle - \langle B_{ijab}\epsilon_{abs}\rangle\langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle +$$

$$+\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle -$$

$$-\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\rangle\langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle -$$

$$-\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle + \langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\epsilon_{abs}\rangle\langle\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle +$$

$$+\langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle\left(B_{ijab} - \langle B_{ijab}\rangle\right)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} M'_{smn}dy\rangle +$$

$$+\langle\left(\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab} -\right.$$

$$\left.-\langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}\rangle\right)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle -$$

$$-\langle\left(B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} - \langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}\rangle\right)\epsilon_{abs}\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle\epsilon_{sba}\left(\langle\tilde{B}^*_{abij}\rangle - \tilde{B}^*_{abij}\right)\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn}$$

Воспользовавшись свойствами (4.31) и (4.100), а также введенными обозначениями (4.97) и (4.99), получаем:

$$\langle\tilde{D}_{ijmn}\rangle = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle + \langle\epsilon_{sba}\left(\langle\tilde{B}^*_{abij}\rangle - \tilde{B}^*_{abij}\right)\int\limits_0^{x_3} h_{smn}dy\rangle + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\epsilon_{sba}h_{smn}\int\limits_0^{x_3}\left(\langle\tilde{B}^*_{abij}\rangle - \tilde{B}^*_{abij}\right)dy\rangle + \langle\hat{\tilde{Q}}^*_{ijs3}\rangle h_{smn} =$$

$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\mathbf{\Delta B}^*_{sij}h_{smn}\rangle + \langle D_{ijs3}(\bullet) + B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3}(\bullet)\rangle -$$
$$-B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}(\bullet)\rangle h_{smn} = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\mathbf{\Delta B}^*_{sij}h_{smn}\rangle +$$
$$+\langle\left(D_{ijs3} + \langle B_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\rangle\langle C^{-1}_{l3p3}\rangle^{-1}C^{-1}_{p3q3}B_{q3s3} - B_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}B_{q3s3}\right)h_{smn}\rangle =$$
$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\mathbf{\Delta B}^*_{sij}h_{smn}\rangle + \langle D^*_{s3ij}h_{smn}\rangle = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\left(\mathbf{\Delta B}^*_{sij} - \tilde{D}^*_{s3ij}\right)h_{smn}\rangle =$$
$$= \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\left(\mathbf{\Delta B}^*_{sij} - \tilde{D}^*_{s3ij}\right)\hat{\mathcal{D}}_{st}\left(\mathbf{\Delta B}^*_{tmn} - \tilde{D}^*_{t3mn}\right)\rangle,$$

Таким образом явные приближенные выражения для эффективных характеристик неоднородного по толщине слоя примут вид:

$$C^{eff}_{ijmn} \approx \langle\tilde{C}_{ijmn}\rangle = \langle\tilde{C}^*_{ijmn}\rangle - \langle T_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}T_{tmn}\rangle, \tag{4.107}$$
$$D^{eff}_{ijmn} \approx \langle\tilde{D}_{ijmn}\rangle = \langle\tilde{D}^*_{ijmn}\rangle - \langle\Theta_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\Theta_{tmn}\rangle, \tag{4.108}$$
$$B^{eff}_{ijmn} \approx \langle\tilde{B}_{ijmn}\rangle = \langle\tilde{B}^*_{ijmn}\rangle - \langle T_{sij}\hat{\mathcal{D}}_{st}\Theta_{tmn}\rangle = \tag{4.109}$$
$$= \langle\tilde{\tilde{B}}_{mnij}\rangle = \langle\tilde{B}^{**}_{mnij}\rangle - \langle\Theta_{smn}\hat{\mathcal{D}}_{st}T_{tij}\rangle \tag{4.110}$$

где

$$T_{imn} = \epsilon_{ijr} \int\limits_0^{x_3} \Big[\big\langle \tilde{C}^*_{rjmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}(y) \Big] dy - \tilde{B}^*_{i3mn}\,, \tag{4.111}$$

$$\Theta_{imn} = \epsilon_{ijr} \int\limits_0^{x_3} \Big[\big\langle \tilde{B}^*_{rjmn} \big\rangle - \tilde{B}^*_{rjmn}(y) \Big] dy - \tilde{D}^*_{i3mn}\,, \tag{4.112}$$

$$\tilde{C}^*_{ijmn} = C_{ijmn} + C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \big\rangle - C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} C_{l3mn}\,, \tag{4.113}$$

$$\tilde{B}^*_{ijmn} \equiv B_{ijmn} + C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} B_{q3mn} \big\rangle - C_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} B_{l3mn}\,, \tag{4.114}$$

$$\tilde{B}^{**}_{ijmn} = B_{ijmn} + B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3mn} \big\rangle - B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} C_{l3mn}\,, \tag{4.115}$$

$$\tilde{D}^*_{ijmn} = D_{ijmn} + B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} \big\langle C^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle C^{-1}_{p3q3} B_{q3mn} \big\rangle - B_{ijk3} C^{-1}_{k3l3} B_{l3mn}\,, \tag{4.116}$$

$$\hat{\mathcal{D}}_{ks} = D^{-1}_{k3s3}(\bullet) - D^{-1}_{k3q3} \big\langle D^{-1}_{q3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{p3s3}(\bullet) \big\rangle\,, \tag{4.117}$$

Обратим внимание на тот факт, что если предположить, что каждый слой изотропен, а следовательно $\underset{\sim}{B} \equiv 0$, то данные формулы примут соответствующий вид уже выведенных форму в п.4.1.1 и 4.1.2

Глава 5. Случай волокнистого композита

Рассматривается бесконечное в одном направлении упругое тело с моментными свойствами, ограниченное в двух других направлениях цилиндрической поверхностью и неоднородное в поперечном сечении.

Примем прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3. Ось x_3 направим параллельно оси цилиндра, а плоскость x_1, x_2 совместим с одним из нормальных поперечных сечений цилиндра

При таком выборе системы координат x_1, x_2

$$\left\{\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijkl}(x_1,x_2)\,, \\ B_{ijkl} &= B_{ijkl}(x_1,x_2)\,, \\ D_{ijkl} &= D_{ijkl}(x_1,x_2) \end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

Искомые функции $(N,U,V,M)_{kmn}$ также будут зависеть только от координат x_1, x_2, а задача (2.66) примет вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\left[C_{iJmn} + C_{iJkL}N_{kmn,L} + C_{iJkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + B_{iJkL}V_{kmn,L}\right]_{,J} = 0 \\ &\left[B_{iJmn} + B_{iJkL}N_{kmn,L} + B_{iJkl}\epsilon_{kls}V_{smn} + D_{iJkL}V_{kmn,L}\right]_{,J} = \epsilon_{ijr}\left(C^o_{rjmn} - \tilde{C}_{rjmn}\right) \end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

Здесь

$$C^o_{rjmn} = \left\langle \tilde{C}_{rjmn} \right\rangle = \left\langle C_{rjmn} + C_{rjkL}\left(N_{kmn,L} + \epsilon_{kls}V_{smn}\right) + B_{rjkL}V_{kmn,L} \right\rangle \tag{5.3}$$

Система уравнений для функций M_{kmn}, U_{kmn} образуется из уравнений (2.67)

$$\left\{\begin{aligned} &\left[B_{iJmn} + C_{iJkL}U_{kmn,L} + C_{iJkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + B_{iJkL}M_{kmn,L}\right]_{,J} = 0 \\ &\left[D_{iJmn} + B_{iJkL}U_{kmn,L} + B_{iJkl}\epsilon_{kls}M_{smn} + D_{iJkL}M_{kmn,L}\right]_{,J} = \epsilon_{ijr}\left(B^o_{rjmn} - \tilde{B}_{rjmn}\right), \end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

где

$$B^{o}_{rjmn} = \left\langle \tilde{B}_{rjmn} \right\rangle = \left\langle B_{rjmn} + C_{rjkL}\left(U_{kmn,L} + \epsilon_{kls} M_{smn}\right) + B_{rjkL} M_{kmn,L} \right\rangle \qquad (5.5)$$

5.1 Плоская задача моментной теории упругости

Аналогично тому, как вводятся понятии плоской и антиплоской задачи классической теории упругости, можно ввести такие же понятия для моментной теории упругости.

Рассмотрим постановку смешанной краевой задачи моментной теории упругости:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0\,; \qquad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i = 0\,, \qquad (5.6)$$

$$\sigma_{ji} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}\,; \quad \mu_{ji} = B_{ijkl}\varepsilon_{kl} + D_{ijkl}\varkappa_{kl}\,, \qquad (5.7)$$

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + \epsilon_{kji}\omega_k\,; \qquad \varkappa_{ij} = \omega_{j,i}\,, \qquad (5.8)$$

$$\sigma_{ji}n_j\big|_{\Sigma_p} = p_i^0\,,\ u_i\big|_{\Sigma_u} = u_i^0\,; \qquad \mu_{ji}n_j\big|_{\Sigma_m} = m_i^0\,,\ \omega_i\big|_{\Sigma_\omega} = \omega_i^0 \qquad (5.9)$$

Согласно [26], плоская задача определяется из следующих предположений:

$$\begin{cases} u_3 = \omega_1 = \omega_2 \equiv 0\,, \\ X_3 = Y_1 = Y_2 \equiv 0\,, \\ u_J = u_J(x_1,x_2)\,, \\ \omega_3 = \omega_3(x_1,x_2)\,; \end{cases} \qquad (5.10)$$

а на коэффициенты C_{ijkl}, D_{ijkl}, B_{ijkl} наложены условия (5.1).

В таком случае тензоры деформаций и искривлений будут выглядеть так:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad (\varkappa_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varkappa_{13} \\ 0 & 0 & \varkappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.11)$$

а тензоры напряжений и моментных напряжений так:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \qquad (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{cases} \left[C_{IJKL}\big(u_{L,K} + \epsilon_{LK3}\omega_3\big) + B_{IJK3}\omega_{3,K}\right]_{,J} + X_I = 0 \\ \\ \left[B_{3JKL}\big(u_{L,K} + \epsilon_{LK3}\omega_3\big) + D_{3JK3}\omega_{3,K}\right]_{,J} + \\ +\epsilon_{3JI}\Big(C_{IJKL}\big(u_{L,K} + \epsilon_{LK3}\omega_3\big) + B_{IJK3}\omega_{3,K}\Big) + Y_3 = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

а граничные условия:

$$\sigma_{JI}n_J\big|_{\Sigma_p} = p_I^0\,,\; u_I\big|_{\Sigma_u} = u_I^0\,; \qquad \mu_{ji}n_j\big|_{\Sigma_m} = m_i^0\,,\; \omega_3\big|_{\Sigma_\omega} = \omega_3^0 \tag{5.14}$$

5.2 Антиплоская задача моментной теории упругости

Аналогично можно ввести понятие антиплоской задачи моментной теории упругости. Рассмотрим постановку смешанной краевой задачи моментной теории упругости (2.1) - (2.4).

Согласно [109] и [26] антиплоская задача определяется из следующих предположений:

$$\begin{cases} \omega_3 = u_1 = u_2 \equiv 0\,, \\ Y_3 = X_1 = X_2 \equiv 0\,, \\ \omega_J = \omega_J(x_1,x_2)\,, \\ u_3 = u_3(x_1,x_2)\,; \end{cases} \tag{5.15}$$

а на коэффициенты C_{ijkl}, D_{ijkl}, B_{ijkl} наложены условия (5.1).

В таком случае тензоры деформаций и искривлений будут выглядеть так:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\varkappa_{ij}) = \begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & 0 \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

а тензоры напряжений и моментных напряжений так:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

а уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{cases} \Big[C_{3JK3}\big(u_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega_S\big) + B_{3JKL}\omega_{L,K}\Big]_{,J} + X_3 = 0 \\ \\ \Big[B_{IJK3}\big(u_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega_S\big) + D_{IJKL}\omega_{L,K}\Big]_{,J} + \\ +\epsilon_{Imn}\Big(C_{nmK3}\big(u_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega_S\big) + B_{nmKL}\omega_{L,K}\Big) + Y_I = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

а граничные условия:

$$\sigma_{ji}n_j\big|_{\Sigma_p} = p_i^0\,,\ u_3\big|_{\Sigma_u} = u_3^0\,; \qquad \mu_{JI}n_J\big|_{\Sigma_m} = m_I^0\,,\ \omega_I\big|_{\Sigma_\omega} = \omega_I^0 \tag{5.19}$$

5.3 Вариационный подход к решению задачи моментной теории упругости

Также как и в классической теории упругости, постановку смешанной краевой задачи моментной теории упругости (2.1) - (2.4) можно заменить на эквивалентную задачу минимизации функционала [20]:

$$\Pi = \mathcal{W}_\varepsilon - \int\limits_V \big(X_i u_i + Y_i\omega_i\big)dV - \int\limits_{\Sigma_\sigma} \big(p_i u_i + m_i\omega_i\big)d\Sigma \tag{5.20}$$

где

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \int\limits_V \Big(C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} + 2B_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varkappa_{lk} + D_{ijkl}\varkappa_{ji}\varkappa_{lk} \Big) dV \tag{5.21}$$

Таким образом, плоскую и антиплоскую задачи можно заменить на задачу минимизации функционалов:

$$\begin{gathered} \Pi_1 = \int\limits_\Omega \Big(C_{IJKL}\varepsilon_{IJ}\varepsilon_{KL} + 2B_{IJK3}\varepsilon_{IJ}\varkappa_{K3} + D_{I3K3}\varkappa_{I3}\varkappa_{K3} \Big) d\Omega - \\ - \int\limits_\Omega \big(X_I u_I + Y_3\omega_3 \big) d\Omega \, , \end{gathered} \tag{5.22}$$

$$\begin{gathered} \Pi_2 = \int\limits_\Omega \Big(C_{I3K3}\varepsilon_{I3}\varepsilon_{K3} + 2B_{I3KL}\varepsilon_{I3}\varkappa_{KL} + D_{IJKL}\varkappa_{IJ}\varkappa_{KL} \Big) d\Omega - \\ - \int\limits_\Omega \big(X_3 u_3 + Y_I\omega_I \big) d\Omega \end{gathered} \tag{5.23}$$

5.4 Сведение задачи на ячейке к плоским и антиплоским задачам моментной теории упругости

Пусть в выбранной системе координат плоскость перпендикулярная x_3 является плоскостью симметрии упругих свойств, следовательно, $C_{IJ3L} = C_{IJK3} = 0$, $D_{IJ3L} = D_{IJK3} = 0$, $B_{IJKL} = B_{3JK3} = B_{3J3L} = 0$. Тогда уравнения (5.2) и (5.3) удается разбить на несколько независимых систем интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнение (5.2) примет вид:

$$\begin{cases} \big[C_{IJmn} + C_{IJKL}\big(N_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}V_{3mn}\big) + B_{IJK3}V_{3mn,K}\big]_{,J} = 0 \\[2ex] \big[B_{3Jmn} + B_{3JKL}\big(N_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}V_{3mn}\big) + D_{3JK3}V_{3mn,K}\big]_{,J} + \\ +\epsilon_{3JI}\Big(C_{IJmn} + C_{IJKL}\big(N_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}V_{3mn}\big) + B_{IJK3}V_{3mn,K}\Big) = \epsilon_{3JI}C^o_{IJmn} \end{cases} \tag{5.24}$$

и

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[C_{3Jmn} + C_{3JK3}\left(N_{3mn,K} + \epsilon_{3KS}V_{Smn}\right) + B_{3JKL}V_{Lmn,K}\right]_{,J} = 0 \\
\\
&\left[B_{IJmn} + B_{IJK3}\left(N_{3mn,K} + \epsilon_{3KS}V_{Smn}\right) + D_{IJKL}V_{Lmn,K}\right]_{,J} + \\
&+\epsilon_{Iqp}\Big(C_{pqmn} + C_{pqK3}\left(N_{3mn,K} + \epsilon_{3KS}V_{Smn}\right) + B_{pqKL}V_{Lmn,K}\Big) = \epsilon_{Iqp}C^{o}_{pqmn}
\end{aligned}
\right.
\tag{5.25}
$$

Для каждой пары $(mn) \in \{(11);(12);\ldots;(33)\}$ (9 вариантов) мы получаем две независимые системы. Первая состоит из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и одного интегро-дифференциального уравнения с частными производными второго порядка, относительно трех неизвестных функций N_{Lmn} и V_{3mn}. Вторая состоит из одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка и двух интегро-дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, относительно трех неизвестных функций N_{3mn} и V_{Smn}.

Уравнения (5.24) по сути дела являются уравнениями плоской задачи моментной теории упругости (плоская деформация), а уравнения (5.25) представляют собой уравнения антиплоской задачи моментной теории упругости (антиплоская деформация).

В самом деле, зафиксируем (mn) и обозначим через $u_I^{(mn)}(x_1,x_2) = N_{lmn}(x_1,x_2)$, а $\omega_l^{(mn)}(x_1,x_2) = V_{lmn}(x_1,x_2)$. Введем объемные нагрузки

$$
\left\{
\begin{aligned}
&X_I^{(mn)} = \left[C_{IJmn}\right]_{,J}, \\
\\
&Y_3^{(mn)} = \left[B_{3Jmn}\right]_{,J} + \epsilon_{3JI}\Big(C_{IJmn} - C^{o}_{IJmn}\Big)
\end{aligned}
\right.
\tag{5.26}
$$

В таком случае система уравнений (5.24) примет вид:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[C_{IJKL}\left(u_{L,K}^{(mn)} + \epsilon_{LK3}\omega_3^{(mn)}\right) + B_{IJK3}\omega_{3,K}^{(mn)}\right]_{,J} + X_I^{(mn)} = 0 \\
\\
&\left[B_{3JKL}\left(u_{L,K}^{(mn)} + \epsilon_{LK3}\omega_3^{(mn)}\right) + D_{3JK3}\omega_{3,K}^{(mn)}\right]_{,J} + \\
&+\epsilon_{3JI}\Big(C_{IJKL}\left(u_{L,K}^{(mn)} + \epsilon_{LK3}\omega_3^{(mn)}\right) + B_{IJK3}\omega_{3,K}^{(mn)}\Big) + Y_3^{(mn)} = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{5.27}
$$

Данные уравнения соответствуют уравнениям плоской задачи моментной теории упругости (5.13).

Аналогично введем объемные нагрузки

$$\begin{cases} X_3^{(mn)} = \left[C_{3Jmn}\right]_{,J}, \\ \\ Y_I^{(mn)} = \left[B_{IJmn}\right]_{,J} + \epsilon_{Iqp}\Big(C_{pqmn} - C^o_{pqmn}\Big) \end{cases} \tag{5.28}$$

В таком случае система уравнений (5.25) примет вид:

$$\begin{cases} \left[C_{3JK3}\big(u_{3,K}^{(mn)} + \epsilon_{3KS}\omega_S^{(mn)}\big) + B_{3JKL}\omega_{L,K}^{(mn)}\right]_{,J} + X_3^{(mn)} = 0 \\ \\ \left[B_{IJK3}\big(u_{3,K}^{(mn)} + \epsilon_{3KS}\omega_S^{(mn)}\big) + D_{IJKL}\omega_{L,K}^{(mn)}\right]_{,J} + \\ +\epsilon_{Iqp}\Big(C_{pqK3}\big(u_{3,K}^{(mn)} + \epsilon_{3KS}\omega_S^{(mn)}\big) + B_{pqKL}\omega_{L,K}^{(mn)}\Big) + Y_I^{(mn)} = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

Данные уравнения соответствуют уравнениям антиплоской задачи моментной теории упругости (5.18).

Таким образом, решая системы уравнений (5.27) и (5.29) для всех вариантов $(mn) \in \{(11);(12);\ldots;(33)\}$ мы получим структурные функции $N_{lmn}(x_1,x_2)$ и $V_{lmn}(x_1,x_2)$. Которые далее могут быть использованы для вычисления эффективных модулей C^{eff}_{ijkl} и B^{eff}_{ijkl}.

Таким же способом можно искать структурные функции $U_{lmn}(x_1,x_2)$ и $M_{lmn}(x_1,x_2)$. Уравнение (5.3) представляется в виде:

$$\begin{cases} \left[B_{IJmn} + C_{IJKL}\big(U_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}M_{3mn}\big) + B_{IJK3}M_{3mn,K}\right]_{,J} = 0 \\ \\ \left[D_{3Jmn} + B_{3JKL}\big(U_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}M_{3mn}\big) + D_{3JK3}M_{3mn,K}\right]_{,J} + \\ +\epsilon_{3JI}\Big(B_{IJmn} + C_{IJKL}\big(U_{Lmn,K} + \epsilon_{LK3}M_{3mn}\big) + B_{IJK3}M_{3mn,K}\Big) = \epsilon_{3JI}B^o_{IJmn} \end{cases} \tag{5.30}$$

и

$$\left\{\begin{aligned}&\Big[B_{3Jmn}+C_{3JK3}\big(U_{3mn,K}+\epsilon_{3KS}M_{Smn}\big)+B_{3JKL}M_{Lmn,K}\Big]_{,J}=0\\ \\&\Big[D_{IJmn}+B_{IJK3}\big(U_{3mn,K}+\epsilon_{3KS}M_{Smn}\big)+D_{IJKL}M_{Lmn,K}\Big]_{,J}+\\&+\epsilon_{Iqp}\Big(B_{pqmn}+C_{pqK3}\big(U_{3mn,K}+\epsilon_{3KS}M_{Smn}\big)+B_{pqKL}M_{Lmn,K}\Big)=\epsilon_{Iqp}B^{o}_{pqmn}\end{aligned}\right. \tag{5.31}$$

Для каждой пары $(mn) \in \{(11);(12);\ldots;(33)\}$ (9 вариантов) мы получаем две независимые системы. Первая состоит из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и одного интегро-дифференциального уравнения с частными производными второго порядка, относительно трех неизвестных функций U_{Lmn} и M_{3mn}. Вторая состоит из одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка и двух интегро-дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, относительно трех неизвестных функций U_{3mn} и M_{Smn}.

Уравнения (5.30) по сути дела являются уравнениями плоской задачи моментной теории упругости (плоская деформация), а уравнения (5.31) представляют из себя уравнения антиплоской задачи моментной теории упругости (антиплоская деформация).

В самом деле, зафиксируем (mn) и обозначим через $u^{(mn)}_I(x_1,x_2) = U_{lmn}(x_1,x_2)$, а $\omega^{(mn)}_l(x_1,x_2) = M_{lmn}(x_1,x_2)$. Введем объемные нагрузки

$$\left\{\begin{aligned}&X^{(mn)}_I=\big[B_{IJmn}\big]_{,J},\\ \\&Y^{(mn)}_3=\big[D_{3Jmn}\big]_{,J}+\epsilon_{3JI}\Big(B_{IJmn}-B^{o}_{IJmn}\Big)\end{aligned}\right. \tag{5.32}$$

В таком случае система уравнений (5.30) примет вид:

$$\left\{\begin{aligned}&\big[C_{IJKL}\big(u^{(mn)}_{L,K}+\epsilon_{LK3}\omega^{(mn)}_3\big)+B_{IJK3}\omega^{(mn)}_{3,K}\big]_{,J}+X^{(mn)}_I=0\\ \\&\big[B_{3JKL}\big(u^{(mn)}_{L,K}+\epsilon_{LK3}\omega^{(mn)}_3\big)+D_{3JK3}\omega^{(mn)}_{3,K}\big]_{,J}+\\&+\epsilon_{3JI}\Big(C_{IJKL}\big(u^{(mn)}_{L,K}+\epsilon_{LK3}\omega^{(mn)}_3\big)+B_{IJK3}\omega^{(mn)}_{3,K}\Big)+Y^{(mn)}_3=0\end{aligned}\right. \tag{5.33}$$

Данные уравнения соответствуют уравнениям плоской задачи моментной теории упругости (5.13).

Аналогично введем объемные нагрузки

$$\begin{cases} X_3^{(mn)} = \left[B_{3Jmn}\right]_{,J}, \\ \\ Y_I^{(mn)} = \left[D_{IJmn}\right]_{,J} + \epsilon_{Iqp}\Big(B_{pqmn} - B^o_{pqmn}\Big) \end{cases} \tag{5.34}$$

В таком случае система уравнений (5.31) примет вид:

$$\begin{cases} \left[C_{3JK3}\big(u^{(mn)}_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega^{(mn)}_S\big) + B_{3JKL}\omega^{(mn)}_{L,K}\right]_{,J} + X_3^{(mn)} = 0 \\ \\ \left[B_{IJK3}\big(u^{(mn)}_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega^{(mn)}_S\big) + D_{IJKL}\omega^{(mn)}_{L,K}\right]_{,J} + \\ +\epsilon_{Iqp}\Big(C_{pqK3}\big(u^{(mn)}_{3,K} + \epsilon_{3KS}\omega^{(mn)}_S\big) + B_{pqKL}\omega^{(mn)}_{L,K}\Big) + Y_I^{(mn)} = 0 \end{cases} \tag{5.35}$$

Данные уравнения соответствуют уравнениям антиплоской задачи моментной теории упругости (5.18).

Таким образом, решая системы уравнений (5.33) и (5.35) для всех вариантов $(mn) \in \{(11);(12);\ldots;(33)\}$ мы получим структурные функции $U_{lmn}(x_1,x_2)$ и $M_{lmn}(x_1,x_2)$. Которые далее могут быть использованы для вычисления эффективных модулей B^{eff}_{ijkl} и D^{eff}_{ijkl}.

В композитах обычно принимается, что модули упругости меняются скачком от одной постоянной величины до другой при переходе через границу Γ раздела фаз. Поэтому производные от компонент тензора модулей упругости необходимо понимать в обобщенном смысле [163].

$$\begin{cases} X_I^{(mn)} = \big(C^+_{IJmn} - C^-_{IJmn}\big)\, n_J\, \delta(\Gamma)\,, \\ \\ Y_3^{(mn)} = \big(B^+_{3Jmn} - B^-_{3Jmn}\big)\, n_J\, \delta(\Gamma) + \epsilon_{3JI}\Big(C_{3Jmn} - C^o_{3Jmn}\Big) \end{cases} \tag{5.36}$$

где C^{+}_{ijmn} и C^{+}_{ijmn} - тензоры модулей упругости включения и матрицы, $\overrightarrow{n}(n_1,n_2)$ - вектор единичной внешней нормали к границе Γ включения, $\delta(\Gamma)$ - дельта-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности раздела фаз.

Объемные нагрузки $\left(C^{+}_{IJmn} - C^{-}_{IJmn}\right) n_J\, \delta(\Gamma)$ и $\left(B^{+}_{3Jmn} - B^{-}_{3Jmn}\right) n_J\, \delta(\Gamma)$ будем трактовать как обычные нагрузки, распределенные по границам раздела фаз. Интенсивность этих нагрузок равна

$$\begin{cases} \phi_I^{(mn)} = \left(C^{+}_{IJmn} - C^{-}_{IJmn}\right) n_J, \\ \psi_3^{(mn)} = \left(B^{+}_{3Jmn} - B^{-}_{3Jmn}\right) n_J \end{cases} \tag{5.37}$$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан метод осреднения задач моментной неоднородной упругости для тел периодической и непериодической структуры.
2. Получены специальные интегро-диффереciальные уравнения для вычисления эффективных характеристик композитов с компонентами, обладающими моментными свойствами.
3. Найдены аналитические выражения для эффективных моментных характеристик бесконечного в плане неоднородного по толщине изотропного и анизотропного слоя.
4. Разработана методика, алгоритм и программа численного расчета эффективных характеристик волокнистого композита, обладающими моментными свойствами.

Список литературы

1. *Л.И. Седов*. Механика сплошных сред, т.1. — Москва: Наука, 1970. — Т. 492.
2. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения. // *ФТТ.* — 1964. — Т. 6, № 9. — С. 2689–2699.
3. *W. Voigt*. Theoretische Studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle. — Abh.Kgl.Ges.Wiss.Gottingen, 1887. — Vol. Math.Kl. — 3–51.
4. *Cosserat E.,Cosserat F.* Theorie des Corps Deformable. — Paris: Hermann, 1909.
5. *H. Grad*. Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitary Number of Integrals // *Comm.Pure Appl.* — 1952. — Vol. Math, no. 5. — Pp. 455–494.
6. *W. Gunther*. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* — 1958. — no. 10. — P. 195.
7. *Schaefer*. Das Cosserat-Kontinuum // *Z. Angew.* — 1967. — Vol. Math. Mech., no. 47. — P. 34.
8. *A.C. Eringen*. Linear Theory of Micropolar Viscoelasticity // *Int.J.Engng.Sci.* — 1967. — no. 5. — Pp. 191–204.
9. *Ariman T., Turk M.A., Sylvester N.D.* Microcontinuum Fluid Mechanics - A Review // *Int. J. Engng. Sci.* — 1973. — no. 11. — P. 905.
10. *Ariman T., Turk M.A., Sylvester N.D.* Applications of Microcontinuum Fluid Mechanics // *Int. J. Engng. Sci.* — 1973. — no. 12. — P. 273.
11. *Eringen A.C.,Suhubi E.S.* Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids I, II // *Int.J.Engng.Sci.* — 1964. — no. 2. — Pp. 189–203 and 389–404.
12. *A.C. Eringen*. Simple Micro-Fluids // *Int.J.Engng.Sci.* — 1964. — Pp. 205–217.

13. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц. // *ФТТ.* — 1960. — Т. 2, № 9. — С. 1399–1409.

14. *В.И. Ерофеев*. Волновые процессы в твердых телах с микровструктурой. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — Т. 328.

15. *А. Жилин П.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та.* — 1982. — Т. 386. — С. 29–42.

16. *М. Зубов Л.* Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно-упругих тел с моментными напряжениями // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1990. — no. 6. — Pp. 10–16.

17. *M. Zubov L.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. — Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag., 1997. — Vol. 205.

18. *W.T. Koiter*. Couple-stress in the theory of elasticity // *Proc. Koenicl. Acad. Wet.* — 1964. — Vol. B67, no. 17.

19. *Mindlin R.D.,Tierstin H.F.* Effects of couple-stress in linear elasticity. // *Experimental Mechanics*. — 1962. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 415–488.

20. *В. Новацкий*. Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — С. 872.

21. *W. Nowacki*. Theory of Asymmetric Elasticity. — Oxford, New-York, Toronto et al: Pergamon-Press., 1986. — P. 383.

22. *В.А. Пальмов*. Основные уравнения теории несимметричной упругости. // *Прикладная математика и механика.* — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 401–408.

23. *A. Toupin R.* Theories of elasticity with couple–stress. // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1964. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 85–112.

24. *И. Шкутин Л.* Нелинейные модели деформируемых моментных сред // *ПМТФ.* — 1980. — № 6. — С. 111–117.

25. *И. Шкутин Л.* Механика деформаций гибких тел. — Наука, 1988. — Т. 127.

26. *A.C. Eringen*. Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids. — Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag., 1999.

27. *Грекова Е. Ф., Жилин П. А.* Уравнения нелинейных упругих полярных сред // *Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред.* — 2000. — С. 24–46.

28. *Н.Ф. Морозов*. Математические вопросы теории трещин. — Москва: Наука, 1984. — Т. 256.

29. *F. Grekova E.* Ferromagnets and Kelvin's medium: basic equations and wave processes // *J. Computational Acoustics.* — 2001. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 427–446.

30. *Grekova E., Zhilin P.* Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // *J. Elasticity.* — 2001. — Vol. 64. — Pp. 29–70.

31. *A. Maugin G.* Material inhomogeneities in elasticity. — London et al.: Chapman Hall., 1993. — Vol. 276.

32. *Nikitin E. N., Zubov L. M.* Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // *J. Elasticity.* — 1998. — Vol. 51. — Pp. 1–22.

33. *Pietraszkiewicz W., Badur J.* Finite rotations in the description of continuum deformation // *Int. J. Engng. Sci.* — 1983. — Vol. 21, no. 9. — Pp. 1097–1115.

34. *R.D. Mindlin*. Microstructure in Linear Elasticity. // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1964. — Vol. 16. — Pp. 51–78.

35. *А.К. Эринген*. Разрушение. Т.2. Математические основы теории разрушения. — М.: Мир, 1975. — С. 646–751.

36. *И.А. Кунин*. Теория упругих сред с микроструктурой. — Москва: Наука, 1975. — С. 416.

37. *Мясников В. П., Гузев М. А.* Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // Докл. РАН (Россия). 2001. Т. 380. — 2001. — № 5. — С. 1–3.

38. *Мясников В. П., Гузев М. А., Ушаков А. А.* Структурное описание материалов // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред.* — С. 256–265.

39. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н.* Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 7. М.: ВИНИТИ. — 1973. — С. 106–213.

40. *П. Жен де*. Физика жидких кристаллов. — М.: Мир, 1982. — Т. 304.

41. *С. Сонин А.* Введение в физику жидких кристаллов. — М.: Наука, 1987. — Т. 320.

42. *Leslie F. M., Laverty J. C., Carlsson N.* Continuum theory for biaxial nematic liquid crystals // *In: Nonlinear Elasticity and Theoretical Mechanics. In honour of A.E.Green. Eds. Naghdi P.M., Spencer A.J.M., England A.H. Oxford, New York, Tokyo: Oxford University Press.* — 1994. — Pp. 79–89.

43. *Дж Эриксен*. Статика жидких кристаллов // *В кн. Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир*. — 1997. — С. 46–123.

44. *J.L. Eriksen*. Anisotropic fluids // *Archives Ration. Mech. Analysis.* — 1960. — Vol. 4. — Pp. 231–237.

45. *A.C. Eringen*. Microcontinuum field theories. II. Fluent media. — Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag., 2001.

46. *C. Eringen A.* A unified continuum theory of liquid crystals. // *ARI.* — 1997. — Vol. 50. — Pp. 73–84.

47. *Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф., Фирсова А. Д.* Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // Докл. РАН. 2003. Т. 391. — № 6. — С. 764–768.

48. *С.А. Амбарцумян*. Микрополярная теория оболочек и пластин. — Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. — С. 214.

49. *Дудников В.А., Назаров С.А.* Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. — № 2. — С. 306–309.

50. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. — № 2. — С. 18–33.

51. *В. Елисеев В.* Механика упругих тел. — СПб: СПбГТУ, 1999. — Т. 341.

52. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек. — М.: Наука, 2008. — Т. 288.

53. *П Жилин П. А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. — Т. 167.

54. *А. Илюхин А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. — Киев: Наукова думка, 1979. — Т. 216.

55. *Каюк Я. Ф., Жуковский А. П.* К теории пластин и оболочек на основе концепции поверхностей Коссера // Прикладн. механика. 1981. Т. XVII. — № 10. — С. 80–85.

56. *О. Саркисян С.* Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Изв. НАН Армении. 2005. Т. 58. — № 2. — С. 84–94.

57. *И. Шкутин Л.* Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // *ПМТФ.* — 1996. — № 3. — С. 120–132.

58. *S. Antman S.* Nonlinear problems of elasticity. — Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag., 1995. — Vol. 751.

59. *Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.* The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // *J. Elasticity.* — 2004. — Vol. 74. — Pp. 67–86.

60. *Eremeyev V. A., Pietraszkiewicz W.* Local symmetry group in the general theory of elastic shells // *J. Elasticity.* — 2006. — Vol. 85, no. 2. — Pp. 125–152.

61. *Eremeyev V. A., Zubov L.M.* On constitutive inequalities in nonlinear theory of elastic shells // *ZAMM.* — 2007. — Vol. 87, no. 2. — Pp. 94–101.

62. *Makowski J., Pietraszkiewicz W.* Thermomechanics of shells with singular curves. // *Gdansk: Institute of Fluid-Flow Machinery, PAS, 2002. Zesz. Nauk.* — Vol. 528/1487/2002. — P. 100.

63. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A., Konopinska V.* Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions // *ZAMM.* — 2007. — Vol. 87, no. 2. — Pp. 150–159.

64. *B. Rubin M.* Cosserat theories: shells, rods and points. (Ser.: Solid Mechanics and its applications. Vol. 79., Ed. G. M. L. Gladwell). — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000. — Vol. 480.

65. *М.А. Кулеш*. Построение и анализ аналитических решений некоторых двумерных статических задач несимметричной теории упругости. Диссертация кандитата физико-математических наук. // *Master's thesis, Институтом механики сплошных сред УрО РАН.* — 2001.

66. *R.D. Mindlin*. Influence of couple-stress on stress concentrations // *Experimental Mechanics*. — 1963. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 1–7.

67. *Ю.Н. Немиш*. Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием. // *Прикл. мех.* — 1965. — Т. 1, № 5.

68. *Ю.Н. Немиш*. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. // *Прикл. мех.* — 1966. — Т. 2, № 4.

69. *Ю.Н. Немиш*. Подкрепленное круговое отверстие в упругом поле несимметричным тензором напряжений. // *Прикл. мех.* — 1966. — Т. 2, № 7.

70. *Н.Ф. Морозов*. Избранные двумерные задачи теории упругости. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. — Т. 182.

71. *Г.Н. Савин*. Механика деформируемых тел. — Киев: Киев: Наук. думка, 1979. — С. 465.

72. *Г.Н. Савин*. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Киев: Наук. думка, 1968. — С. 887.

73. *А.И. Каландия*. Математические методы двумерной упругости. — Москва: Наука, 1973. — Т. 303.

74. *A. Anthonie*. Effect of couple-stress on the elastic bening of beams. // *Int. J. of Solid and Structures.* — 2000. — Vol. 37. — Pp. 1003–1018.

75. *Bogy D.B. Sternberg E.* The effict of couple-stress on the corner singularity due to an asymmetric shear loading. // *Int. J. of Solid and Structures.* — 1968. — Vol. 4. — Pp. 159–174.

76. *Hsu Y.C.,Wang W.J.* Couple-stress effects near an interior hole of an infinite elastic plane subjected to a concentated force. // *J. Franklin Inst.* — 1973. — Vol. 295, no. 5. — Pp. 411–421.

77. *Немиш Ю.Н., Третяк В.П.* Концентрация напряж. Вып. 3. — Киев: Наук. думка, 1971. — С. 94–100.

78. *Kobayashi Shoichi, Fukui Takio*. Effects of couple stresses on stress distribution in a ring test specimen. // *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* — 1971. — Vol. 33, no. 4. — Pp. 233–242.

79. *В.А. Пальмов*. Плоская задача теории несимметричной упругости. // *Прикладная математика и механика.* — 1964. — Т. 28, № 6. — С. 1117–1120.

80. *N. Sandru*. On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity // *Int. J. Engng. Sci.* — 1966. — Vol. 4. — Pp. 81–94.

81. *H. Neuber*. Lecture at the 11-th International congress of Applied Mechanics. — Munchen: Technical University of Munich, 1964. — Pp. 153–158.

82. *R.D. Mindlin*. Stress function for a cosserat continuum. // *Int. J.Engng. Sci.* — 1965. — Vol. 1. — Pp. 265–271.

83. *C. Marinescu*. O problema la limita deelasticitate asimetrica plana // *Bul. Univ. Brasov.* — 1972. — Vol. C14. — Pp. 25–28.

84. *Dhaliwal Ranjit S., Chowdhury Kashmiri L.* The axisymmetric Reissner-Sagoci problem in the linear micropolar elasticity // *Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci techn.* — 1971. — Vol. 19, no. 9. — Pp. 661–668.

85. *J. Dyszlewicz*. Stress formulation of the second axially symmetric problem of micropolar theory of elasticity. // *Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci techn.* — 1973. — Vol. 21, no. 2. — Pp. 87–97.

86. *Roux. Le*. Etude geometrique de la torsion et de la flexion. — Paris: Ann. Scient. de L’rEcole Normale Sup., 1911. — Vol. 28.

87. *Савин Г.Н., Лукашов А.А., Лыско Е.М.* Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой. // *Прикл. механика*. — 1970. — Т. 6, № 7. — С. 48–52.

88. *L. Koh Severino*. A special theory of microelasticity. // *Int. J. Eng. Sci.* — 1970. — Vol. 8, no. 7. — Pp. 583–593.

89. *С.М. Белоносов*. Моментная теория упругости. — Владивосток: Дальнаука, 1983.

90. *Г.А. Ванин*. Градиентная теория упругости. // *Изв. РАН. МТТ*. — 1999. — № 1. — С. 46–53.

91. *Ильюшин А.А. Ломакин В.А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. // *Прочность и пластичность. М.: Наука*. — 1971. — С. 54–61.

92. *М.Р. Короткина*. Моментные теории упругости и их связь с полевыми теориями, построенными на дискретных структурах. // *Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та*. — 1975. — № 4. — С. 225–240.

93. *Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г.* О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений. // *Прочность и пластичность. М.: Наука*. — 1971. — № 4. — С. 317–321.

94. *Л.И. Седов*. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. // *ПММ, 1968. Т. 32*. — № 5. — С. 771–785.

95. *В.С. Шоркин*. Нелинейные дисперсионные свойства высокочастотных волн в градиентной теории упругости // *Механика твердого тела*. — 2011. — № 6. — С. 104–121.

96. *Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Азаров А.С.* Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел // *Материаловедение*. — 2011. — № 2. — С. 2–7.

97. *Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С., Якушина С.И.* Вариант подхода к моделированию линейной упругой среды // *Известия Тульского государственного университета Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч.2.* — С. 284–296.

98. *С.А. Лурье*. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения // *Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т.2.* — № 2. — С. 84–104.

99. *S. Lurie*. Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects // *Analysis and Simulation of Multifield Problems, Springer.* — 2003. — Vol. 12. — P. 101–110.

100. *S. Lurie*. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites // *Int. J. Comp Mater Scs. 2003. 28(3–4)*. — P. 529–539.

101. *С.А. Лурье*. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро–Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // *Современные проблемы механики гетерогенных сред: Сб. науч. тр. Инст. прикладной механики РАН. 2006. Вып.1.* — С. 235–267.

102. *Бровко Г. Л.* Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 1996. — № 5. — С. 55–63.

103. *Бровко Г. Л.* Об одной конструкционной модели среды Коссера // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2002. — № 1. — С. 75–91.

104. *Бровко Г. Л.* Основные понятия и законы рациональной механики сред Коссера. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. — С. 104–105.

105. *Бровко Г. Л., Иванова О. А., Лознев С. С.* Механическая структура и уравнения движения простейших моделей среды Коссера // Ломоносовские чтения. Тез. докл. научн. конф. Ломоносовские чтения. Секц. механики. 17-27 апреля 2003, Москва, МГУ им. М.В. Ломо-носова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. — Издательство Московского университета Москва, 2003. — С. 30–31.

106. *Бровко Г. Л., Иванова О. А.* Плоские колебания оснащенного стержня Коссера в потоке газа // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 17-27 апреля 2006, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. — Изд-во Московского университета Москва, 2006. — С. 33–33.

107. *Бровко Г. Л., Иванова О. А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера //

Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2008. — № 1. — С. 22–36.

108. *Бровко Г. Л., Иванова О. А.* Изгибные формы равновесия стержня Коссера с частично пластическими свойствами // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2008. — Издательство Московского университета Москва, 2008. — С. 39–40.

109. *Ю.Н. Работнов*. Механика деформируемого твердого тела. — Москва: Наука, 1979. — С. 744.

110. *Ю.Н. Работнов*. Элементы наследственной механики твердых тел. — Москва: Наука, 1977.

111. *Ю.Н. Работнов*. Ползучесть элементов конструкций. — Москва: Наука, 1966.

112. *Н.С. Бахвалов*. Осредненные характеристики тел с периодической структурой // *ДАН СССР*. — 1974. — Т. 218, № 5. — С. 1040–1048.

113. *Н.С. Бахвалов*. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осцилирующими коэффициентами // *ДАН СССР*. — 1975. — Т. 221, № 3. — С. 516–519.

114. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Вариационные принципы механики сплошной среды. — Москва: Наука, 1984.

115. *Б.Е. Победря*. Механика композиционных материалов. — Москва: МГУ, 1984. — С. 336.

116. *В.Л. Бердичевский*. Вариационные принципы механики сплошной среды. — Мир, 1983.

117. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — Москва: Мир, 1984. — С. 472.

118. *Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. — Москва: Наука, 1985. — С. 221.

119. *Kalamkarov Alexander L.* Composite and reinforced elements of construction. — Baffins Lane, Chechester, West Sussex PO19, England: John wiley & Sons Ltd., 1992. — P. 290.

120. *A.B. Movchan, N.V. Movchan, C.G. Poulton*. Asymptotic Models of Fields in Dilute and Densely Packed Composites. // *Imperial College Press*. — 2002.

121. *Бардзокас Д.и., Зобнин А.И.* Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. — Москва: Едиториал УРСС, 2003. — С. 376.

122. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. — Днепропетровск: Пороги, 2008.

123. *В.С. Шоркин*. Определение и изменение механических свойств композитных материалов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* — 2010. — № 5. — С. 25–26.

124. *Колчин Г.Б., Фаверман Э.А.* Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы. — Кишинев: Штиинца, 1972.

125. *Колчин Г.Б., Фаверман Э.А.* Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1970-1973 г. — Кишинев: Штиинца, 1977.

126. *В.А. Ломакин*. Теория упругости неоднородных тел. — Москва: МГУ, 1976. — P. 367.

127. *С.Г. Лехницкий*. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — Москва: Наука, 1971.

128. *Горбачев В.И., Олехова Л.В.* Эффективные свойства при кручении неоднородного стержня // *Вестник МГУ*. — 2007. — № 5. — С. 41–48.

129. *Л.В. Олехова*. Кручение неоднородного анизотропного стержня. Диссертация кандитата физико-математических наук. — 2009.

130. *Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов*. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // *Матем. моделирование, 24:5*. — 2012. — № 10. — С. 3–20.

131. *Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов*. Об упругих свойствах композиционных материалов // *Матем. моделирование, 21:4*. — 2009. — № 10. — С. 96–110.

132. *Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, С. В. Сборщиков*. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов // *Мат. моделир. и числ. методы*. — 2014. — № 2. — С. 28–48.

133. *Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, С. В. Сборщиков*. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости // *Мат. моделир. и числ. методы*. — 2016. — № 10. — С. 3–23.

134. *Димитриенко Ю. И.* Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. — Механика сплошной среды.Т.2.- Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана., 2011. — Т. 560.

135. *S. Lurie*. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites // *Computational Materials Science. A*. — 2005. — Vol. 36(2). — P. 145–152.

136. *S. Lurie*. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // *Journal of Materials Science, Springer Netherlands (принята к публикации)*. — 2006. — Vol. 1. — P. 1–15.

137. *А.А. Адамов*. О гепотизе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континууюма Коссера // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2006. — № 3. — С. 329–346.

138. *И.Ю. Смолин*. Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // *Межвуз. сб. науч. трудов Матем. моделир. систем и процессов*. — 2006. — № 14. — С. 189–204.

139. *И.С. Павлов*. Гранулированная среда с вращением частиц. Двумерная модель // *Проблемы прочности и пластичности*. — 2003. — № 65. — С. 53–64.

140. *Б.Е. Победря*. Элементы структурной механики деформируемого твердого тела // *Межвуз. сб. науч. трудов Матем. моделир. систем и процессов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та*. — 1996. — № 4. — С. 66–74.

141. *Победря Б.Е. Омаров С.Е.* Омаров С.Е. Определение материальных функций линейной моментной теории вязкоупругости // *Вестник МГУ. Сер. Математика и механика*. — 2007. — № 5. — С. 36–41.

142. *Forest S.* Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continua. Part 2 // *Theoretical and Applied Mechanics*. — 2002. — Vol. 28-29. — P. 113–143.

143. *Bigoni D.* Analytical Derivation of Cosserat Moduli via Homogenization of Heterogeneous Elastic Materials // *Journal of Applied Mechanics*. — 2007. — Vol. 74. — P. 741–753.

144. *В.И. Горбачев*. Вариант метода осреднения для решения краевыхзадач неоднородной упругости. Диссертация доктора физико-математических наук. — 1991.

145. *В.И. Горбачев*. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // *Вычислительная механика деформируемого твердого тела*. — 1991. — № 2. — С. 61–76.

146. *Горбачев В.И., Кокарев А. Е.* Интегральная формула в динамической задаче неоднородной упругости // *Вестник МГУ*. — 2005. — no. 2. — Pp. 62–66.

147. *В.И. Горбачев*. Динамические задачи механики композитов // *Известия РАН, Серия физическая*. — 2011. — Т. 75, № 1. — С. 117–122.

148. *В.И. Горбачев*. Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости // *Вестник МГУ*. — 2009. — № 6. — С. 57–60.

149. *Горбачев В.И. Емельянов А.Н.* Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. — 2014. — № 1. — С. 95–107.

150. *А.Н. Емельянов*. Эффективные материальные функции слоистых композитов в линейной моментной теории упругости // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 2015. — № 1. — С. 40–45.

151. *Горбачёв, В. И., Емельянов, А. Н.* Об эффективных характеристиках композита с моментными свойствами компонентов // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. — Издательство Московского университета Москва, 2010. — С. 66–66.

152. *Горбачев, В. И., Емельянов, А. Н.* Об эффективных характеристиках композита с моментными свойствами компонентов // Научная конференция Ломоносовские чтения, секция механики, 14-23 апреля 2014г., Москва. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета Москва, 2014. — С. 56–56.

153. *Горбачев В.И., Емельянов А.Н.* Осреднение задач моментной упругости // Упругость и неупругость. Дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемем механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. — Москва: Издательство Московского университета, Москва, 2011. — С. 81–88.

154. *А.Н. Емельянов*. Эффективные характеристики слоистых композитов, состоящих из анизотропных слоев, в моментной теории упругости // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2016 года). — Москва: Издательство Московского университета, Москва, 2016. — С. 303–307.

155. *К. Трусдел*. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Под ред. А.И. Лурье П.А. Жилин. — Москва: Мир, 1975. — Книга для подготовленного читателя.

156. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants // *Trans. ASME*. — 1975. — Vol. E42, no. 2. — Pp. 369–374.

157. *R. Lakes*. Cosserat micromechanics of structured media experimental methods // Third technical conference 'Proceedings of the American society for composites'. — Seatle, Washington: 1988. — September 25-29. — Pp. 505–516.

158. *Б.Е. Победря*. Численные методы в теории упругости и пластичности. — Москва: МГУ, 1995. — С. 366.

159. *Hashin Z., Rosen B.W.* The elastic moduli of fiber-reinforced materials // *J. Appl. Mech*. — 1964. — Vol. 31, no. 2. — P. 223.

160. *Григолюк Э.И., Фильштинский А.А.* Перфорированные пластины и оболочки. — Москва: Наука, 1970. — P. 556.

161. *Григолюк Э.И., Фильштинский А.А.* Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. — Москва: Физико-математическая литература, 1994.

162. *Г.А. Ванин*. Микромеханика композиционных материалов. — Киев: Наукова думка, 1985.

163. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — Москва: Мир, 1978. — P. 518.

Список рисунков

Список таблиц

Приложение А

Случай неоднородного по толщине слоя

В приложении А приведены формулы для эффективных характеристик в изотропном случае.

Считая что каждый из слоев изотропен выпишем упругие константы в явном виде.

По определению:

$$\begin{gathered} C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu-\alpha)\delta_{ik}\delta_{jl} + (\mu+\alpha)\delta_{il}\delta_{jk}\,, \\ D_{ijkl} = \beta\delta_{ij}\delta_{kl} + (\gamma-\varepsilon)\delta_{ik}\delta_{jl} + (\gamma+\varepsilon)\delta_{il}\delta_{jk} \end{gathered} \tag{A.1}$$

где λ,μ,α,β,γ,ε кусочно-постоянные функции от x_3

$(C_{ijkl}(x_1,x_2)) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	$\lambda+2\mu$	λ	λ						
22	λ	$\lambda+2\mu$	λ						
33	λ	λ	$\lambda+2\mu$						
12				$\mu-\alpha$			$\mu+\alpha$		
13					$\mu-\alpha$			$\mu+\alpha$	
23						$\mu-\alpha$			$\mu+\alpha$
21				$\mu+\alpha$			$\mu-\alpha$		
31					$\mu+\alpha$			$\mu-\alpha$	
32						$\mu+\alpha$			$\mu-\alpha$

$(D_{ijkl}(x_1,x_2)) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	$\beta+2\gamma$	β	β						
22	β	$\beta+2\gamma$	β						
33	β	β	$\beta+2\gamma$						
12				$\gamma-\varepsilon$			$\gamma+\varepsilon$		
13					$\gamma-\varepsilon$			$\gamma+\varepsilon$	
23						$\gamma-\varepsilon$			$\gamma+\varepsilon$
21				$\gamma+\varepsilon$			$\gamma-\varepsilon$		
31					$\gamma+\varepsilon$			$\gamma-\varepsilon$	
32						$\gamma+\varepsilon$			$\gamma-\varepsilon$

А.1 Формулы для вычисления C^0_{ijkl}

Для начала найдем $\tilde{C}^*_{ijkl}$.

$$\tilde{C}^*_{ijmn} = C_{ijmn} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3mn} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\left\langle C^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\right\rangle , \qquad (A.2)$$

Покомпонентно $\tilde{C}^*_{ijkl}$ выглядит следующим образом:

$$\tilde{C}^*_{1111} = \big(\lambda + 2\mu\big) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle , \qquad (A.3)$$

$$\tilde{C}^*_{1122} = \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle , \qquad (A.4)$$

$$\tilde{C}^*_{2222}\big(\lambda + 2\mu\big) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle , \qquad (A.5)$$

$$\tilde{C}^*_{1133} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1} , \tilde{C}^*_{2233} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1} , \tilde{C}^*_{3333} = \Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1} , \qquad (A.6)$$

$$\tilde{C}^*_{1112} = \tilde{C}^*_{2212} = \tilde{C}^*_{3312} = 0 \, , \tilde{C}^*_{1212} = \big(\mu - \alpha\big) \, , \qquad (A.7)$$

$$\tilde{C}^*_{1113} = \tilde{C}^*_{2213} = \tilde{C}^*_{3313} = \tilde{C}^*_{1213} = 0 \, , \tilde{C}^*_{1313} = \Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \qquad (A.8)$$

$$\tilde{C}^*_{1123} = \tilde{C}^*_{2223} = \tilde{C}^*_{3323} = \tilde{C}^*_{1223} = \tilde{C}^*_{1323} = 0 \, , \tilde{C}^*_{2323} = \Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \qquad (A.9)$$

$$\tilde{C}^*_{1121} = \tilde{C}^*_{2221} = \tilde{C}^*_{3321} = 0 \, , \tilde{C}^*_{1221} = \big(\mu + \alpha\big) \, , \tilde{C}^*_{1321} = \tilde{C}^*_{2321} = 0 \, , \tilde{C}^*_{2121} = \big(\mu - \alpha\big) \, , \qquad (A.10)$$

$$\tilde{C}^*_{1131} = \tilde{C}^*_{2231} = \tilde{C}^*_{3331} = \tilde{C}^*_{1231} = 0 \, , \tilde{C}^*_{1331} = \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \qquad (A.11)$$

$$\tilde{C}^*_{2331} = \tilde{C}^*_{2123} = 0 \, , \tilde{C}^*_{3131} = \big(\mu - \alpha\big) - \frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha} + \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle , \qquad (A.12)$$

$$\tilde{C}^*_{1132} = \tilde{C}^*_{2232} = \tilde{C}^*_{3332} = \tilde{C}^*_{1232} = \tilde{C}^*_{1332} = 0 \, , \tilde{C}^*_{2332} = \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \qquad (A.13)$$

$$\tilde{C}^*_{2132} = \tilde{C}^*_{3132} = 0\,, \tilde{C}^*_{3232} = \big(\mu - \alpha\big) - \frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha} + \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\,, \tag{A.14}$$

Покомпонентно $\big\langle\tilde{C}^*_{ijkl}\big\rangle$ выглядит следующим образом:

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1111}\big\rangle = \big\langle\lambda + 2\mu\big\rangle - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^2\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.15}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1122}\big\rangle = \big\langle\lambda\big\rangle - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^2\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.16}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{2222}\big\rangle = \big\langle\lambda + 2\mu\big\rangle - \Big\langle\frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^2\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.17}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1133}\big\rangle = \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}, \big\langle\tilde{C}^*_{2233}\big\rangle = \Big\langle\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.18}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{3333}\big\rangle = \Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}, \big\langle\tilde{C}^*_{1112}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2212}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3312}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{1212}\big\rangle = \big\langle\mu - \alpha\big\rangle\,, \tag{A.19}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1113}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2213}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3313}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1213}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{1313}\big\rangle = \Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.20}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1123}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2223}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3323}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1223}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1323}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{2323}\big\rangle = \Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.21}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1121}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2221}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3321}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{1221}\big\rangle = \big\langle\mu + \alpha\big\rangle\,, \tag{A.22}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1321}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2321}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{2121}\big\rangle = \big\langle\mu - \alpha\big\rangle\,, \tag{A.23}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1131}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2231}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3331}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1231}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{1331}\big\rangle = \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.24}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{2331}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2123}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{3131}\big\rangle = \big\langle\mu - \alpha\big\rangle - \Big\langle\frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle^2\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.25}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{1132}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{2232}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3332}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1232}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{1332}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{2332}\big\rangle = \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.26}$$

$$\big\langle\tilde{C}^*_{2132}\big\rangle = \big\langle\tilde{C}^*_{3132}\big\rangle = 0\,, \big\langle\tilde{C}^*_{3232}\big\rangle = \big\langle\mu - \alpha\big\rangle - \Big\langle\frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha}\Big\rangle + \Big\langle\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle^2\Big\langle\frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\,, \tag{A.27}$$

Используя это можно определить вид A_{pmn}:

$$A_{pmn} = \epsilon_{pji}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{ijmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{ijmn}\big) \tag{A.28}$$

Определим ненулевые компоненты:

$$\begin{gathered} A_{1mn} = \epsilon_{1ji}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{ijmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{ijmn}\big) = \epsilon_{123}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{32mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{32mn}\big) + \epsilon_{132}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{23mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{23mn}\big) = \\ = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{32mn} - \tilde{C}^*_{23mn}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{32mn} - \tilde{C}^*_{23mn}\big) \end{gathered} \tag{A.29}$$

$$\begin{gathered} A_{2mn} = \epsilon_{2ji}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{ijmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{ijmn}\big) = \epsilon_{231}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{13mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{13mn}\big) + \epsilon_{213}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{31mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{31mn}\big) = \\ = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{13mn} - \tilde{C}^*_{31mn}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{13mn} - \tilde{C}^*_{31mn}\big) \end{gathered} \tag{A.30}$$

$$\begin{gathered} A_{3mn} = \epsilon_{3ji}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{ijmn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{ijmn}\big) = \epsilon_{312}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{21mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{21mn}\big) + \epsilon_{321}\big(\big\langle \tilde{C}^*_{12mn} \big\rangle - \tilde{C}^*_{12mn}\big) = \\ = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{21mn} - \tilde{C}^*_{12mn}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{21mn} - \tilde{C}^*_{12mn}\big) \end{gathered} \tag{A.31}$$

Ненулевые компоненты:

$$\begin{cases} A_{123} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{3223} - \tilde{C}^*_{2323}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{3223} - \tilde{C}^*_{2323}\big), \\ A_{132} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{3232} - \tilde{C}^*_{2332}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{3232} - \tilde{C}^*_{2332}\big), \\ A_{213} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{1313} - \tilde{C}^*_{3113}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{1313} - \tilde{C}^*_{3113}\big), \\ A_{231} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{1331} - \tilde{C}^*_{3131}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{1331} - \tilde{C}^*_{3131}\big), \\ A_{312} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{2112} - \tilde{C}^*_{1212}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{2112} - \tilde{C}^*_{1212}\big), \\ A_{321} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{2121} - \tilde{C}^*_{1221}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{2121} - \tilde{C}^*_{1221}\big). \end{cases} \tag{A.32}$$

Компонента A_{312} выглядит следующим образом:

$$A_{312} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{2112} - \tilde{C}^*_{1212}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{2112} - \tilde{C}^*_{1212}\big) = \big\langle 2\alpha \big\rangle - 2\alpha \tag{A.33}$$

Компонента A_{321} выглядит следующим образом:

$$A_{321} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{2121} - \tilde{C}^*_{1221}\big) \big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{2121} - \tilde{C}^*_{1221}\big) = -\big\langle 2\alpha \big\rangle + 2\alpha \tag{A.34}$$

Компонента A_{213} выглядит следующим образом:

$$A_{213} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{1313} - \tilde{C}^*_{3113}\big)\big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{1313} - \tilde{C}^*_{3113}\big) = 0 \tag{A.35}$$

Компонента A_{231} выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} A_{231} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{1331} - \tilde{C}^*_{3131}\big)\big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{1331} - \tilde{C}^*_{3131}\big) = \\ = \Big\langle \frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle - \frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha} - \Big(\Big\langle \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle - \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\Big)\Big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle \end{gathered} \tag{A.36}$$

Компонента A_{123} выглядит следующим образом:

$$A_{123} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{3223} - \tilde{C}^*_{2323}\big)\big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{3223} - \tilde{C}^*_{2323}\big) = 0 \tag{A.37}$$

Компонента A_{132} выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} A_{132} = \big\langle \big(\tilde{C}^*_{3232} - \tilde{C}^*_{2332}\big)\big\rangle - \big(\tilde{C}^*_{3232} - \tilde{C}^*_{2332}\big) = \\ = -\Big\langle \frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle + \frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha} + \Big(\Big\langle \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle - \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\Big)\Big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle \end{gathered} \tag{A.38}$$

Таким образом ненулевыми компонентами A_{pmn} будут A_{312} ,A_{321} ,A_{132} ,A_{231}. Причем $A_{312} = -A_{321}$ и $A_{132} = -A_{231}$.

Теперь напишем выражение для V_{smn}, рассчитывая их по приближенным формулам.

$$\begin{gathered} V_{smn} = \int\limits_0^{x_3} \big(D^{-1}_{s3p3} \int\limits_0^{\xi} A_{pmn}(y)dy - D^{-1}_{s3p3}\big\langle D^{-1}_{p3k3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{k3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\big)d\xi - \\ -\big\langle \int\limits_0^{x_3} \big(D^{-1}_{s3p3} \int\limits_0^{\xi} A_{pmn}(y)dy - D^{-1}_{s3p3}\big\langle D^{-1}_{p3k3}\big\rangle\big\langle D^{-1}_{k3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\big)d\xi\big\rangle \end{gathered} \tag{A.39}$$

Здесь под D^{-1}_{i3k3} понимается матрица обратная к матрице D_{i3k3}

$$(D^{-1}_{i3k3}) = \begin{pmatrix} D_{1313} & D_{1323} & D_{1333} \\ D_{2313} & D_{2323} & D_{2333} \\ D_{3313} & D_{3323} & D_{3333} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \gamma-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \beta+2\gamma \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/(\gamma-\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\gamma-\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\beta+2\gamma) \end{pmatrix}$$

В силу вида D^{-1}_{i3k3}, ненулевыми компонентами V_{pmn} будут V_{312} ,V_{321} ,V_{132} ,V_{231}. Причем $V_{312} = -V_{321}$ и $V_{132} = -V_{231}$.

В предыдущих пунктах мы вывели формулы для эффективных характеристик, теперь можно найти эффективные коэффициенты C^{o}_{ijmn} и B^{o}_{ijmn}.

$$C^{o}_{ijmn} = \left\langle \tilde{C}_{ijmn} \right\rangle = \left\langle \tilde{C}^{*}_{ijmn} + \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} \right\rangle = \left\langle \tilde{C}^{*}_{ijmn} \right\rangle + \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} \right\rangle \quad \text{(A.40)}$$

Обозначим

$$\tilde{d}_{ijmn} = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{smn} \right\rangle \quad \text{(A.41)}$$

Так как ненулевыми компонентами V_{smn} будут V_{312} ,V_{321} ,V_{132} ,V_{231} , тогда ненулевыми компонентами $\tilde{d}_{ijmn}$ будут следующие:

$$\tilde{d}_{ij12} = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{s12} \right\rangle = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{ab3}V_{312} \right\rangle = \left\langle \left(\hat{\tilde{C}}_{ij12} - \hat{\tilde{C}}_{ij21}\right)V_{312} \right\rangle \quad \text{(A.42)}$$

$$\tilde{d}_{ij21} = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{s21} \right\rangle = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{ab3}V_{321} \right\rangle = \left\langle \left(\hat{\tilde{C}}_{ij12} - \hat{\tilde{C}}_{ij21}\right)V_{321} \right\rangle \quad \text{(A.43)}$$

$$\tilde{d}_{ij31} = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{s31} \right\rangle = \left\langle \hat{\tilde{C}}_{ijab}\epsilon_{ab2}V_{231} \right\rangle = \left\langle \left(\hat{\tilde{C}}_{ij31} - \hat{\tilde{C}}_{ij13}\right)V_{231} \right\rangle \quad \text{(A.44)}$$

$$\tilde{d}_{ij32} = \big\langle \hat{\hat{C}}_{ijab}\epsilon_{abs}V_{s32}\big\rangle = \big\langle \hat{\hat{C}}_{ijab}\epsilon_{ab1}V_{132}\big\rangle = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{ij23} - \hat{\hat{C}}_{ij32}\big)V_{132}\big\rangle \tag{A.45}$$

Данные выражения примут вид:

$$\begin{gathered} \tilde{d}_{1212} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{1212} - \hat{\hat{C}}_{1221}\big)V_{312}\big\rangle = \big\langle \big[\big(\mu-\alpha\big)(\bullet) - \big(\mu+\alpha\big)(\bullet)\big]V_{312}\big\rangle = -\big\langle 2\alpha V_{312}\big\rangle\,, \\ \tilde{d}_{2112} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{2112} - \hat{\hat{C}}_{2121}\big)V_{312}\big\rangle = \big\langle \big[\big(\mu+\alpha\big)(\bullet) - \big(\mu-\alpha\big)(\bullet)\big]V_{312}\big\rangle = \big\langle 2\alpha V_{312}\big\rangle \end{gathered} \tag{A.46}$$

$$\begin{gathered} \tilde{d}_{1221} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{1212} - \hat{\hat{C}}_{1221}\big)V_{321}\big\rangle = \big\langle \big[\big(\mu-\alpha\big)(\bullet) - \big(\mu+\alpha\big)(\bullet)\big]V_{321}\big\rangle = -\big\langle 2\alpha V_{321}\big\rangle\,, \\ \tilde{d}_{2121} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{2112} - \hat{\hat{C}}_{2121}\big)V_{321}\big\rangle = \big\langle \big[\big(\mu+\alpha\big)(\bullet) - \big(\mu-\alpha\big)(\bullet)\big]V_{321}\big\rangle = \big\langle 2\alpha V_{321}\big\rangle \end{gathered} \tag{A.47}$$

$$\begin{gathered} \tilde{d}_{1331} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{1331} - \hat{\hat{C}}_{1313}\big)V_{231}\big\rangle = \\ = \Big\langle \Big[\big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}(\bullet)\big\rangle \big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\big\rangle^{-1} - \big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\big\rangle^{-1}\big\langle(\bullet)\big\rangle\Big]V_{231}\Big\rangle = \\ = \big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\big\rangle^{-1}\Big\langle \Big[\big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}(\bullet)\big\rangle - \big\langle(\bullet)\big\rangle\Big]V_{231}\Big\rangle = \Big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}V_{231}\Big\rangle\,, \\ \tilde{d}_{3131} = \big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{3131} - \hat{\hat{C}}_{3113}\big)V_{231}\big\rangle = \\ = \Big\langle \Big[\big(\mu-\alpha\big)(\bullet) - \frac{\big(\mu+\alpha\big)^2}{\mu-\alpha}(\bullet) + \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\big\rangle^{-1}\big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}(\bullet)\big\rangle - \\ -\big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}(\bullet)\big\rangle\big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\big\rangle^{-1}\Big]V_{231}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\big(\mu-\alpha\big)^2 - \big(\mu+\alpha\big)^2}{\mu-\alpha}V_{231}\Big\rangle + \\ +\Big\langle \Big(\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha} - 1\Big)\Big\rangle\Big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}V_{231}\Big\rangle = \\ = \Big\langle \frac{-4\mu\alpha}{\mu-\alpha}V_{231}\Big\rangle + \Big\langle \frac{2\alpha}{\mu-\alpha}\Big\rangle\Big\langle \frac{1}{\mu-\alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}V_{231}\Big\rangle \end{gathered} \tag{A.48}$$

$$\tilde{d}_{2332} = \Big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{2323} - \hat{\hat{C}}_{2332}\big) V_{132} \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \Big[\big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \big\rangle^{-1} \big\langle (\bullet) \big\rangle - \big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} (\bullet) \big\rangle \big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \big\rangle^{-1} \Big] V_{132} \Big\rangle =$$
$$= \big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \big\rangle^{-1} \Big\langle \Big[\big\langle (\bullet) \big\rangle - \big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} (\bullet) \big\rangle \Big] V_{132} \Big\rangle = \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \Big\rangle^{-1} \Big\langle - \frac{2\alpha}{\mu - \alpha} V_{132} \Big\rangle,$$
$$\tilde{d}_{3232} = \Big\langle \big(\hat{\hat{C}}_{3223} - \hat{\hat{C}}_{3232}\big) V_{132} \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \Big[\big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} (\bullet) \big\rangle \big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \big\rangle^{-1} - \big(\mu - \alpha\big)(\bullet) + \frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha} (\bullet) -$$
$$- \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} \big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \big\rangle^{-1} \big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} (\bullet) \big\rangle \Big] V_{132} \Big\rangle = - \Big\langle \frac{\big(\mu - \alpha\big)^2 - \big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha} V_{132} \Big\rangle -$$
$$- \Big\langle \Big(\frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} - 1 \Big) \Big\rangle \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} V_{132} \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha} V_{132} \Big\rangle - \Big\langle \frac{2\alpha}{\mu - \alpha} \Big\rangle \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} V_{132} \Big\rangle \tag{A.49}$$

В силу того, что $V_{312} = -V_{321}$ и $V_{132} = -V_{231}$, получаем:

$$\tilde{d}_{1212} = \tilde{d}_{2121} = -\big\langle 2\alpha V_{312} \big\rangle,$$
$$\tilde{d}_{2112} = \tilde{d}_{1221} = \big\langle 2\alpha V_{312} \big\rangle,$$
$$\tilde{d}_{1331} = \tilde{d}_{2332} = \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{2\alpha}{\mu - \alpha} V_{231} \Big\rangle, \tag{A.50}$$
$$\tilde{d}_{3131} = \tilde{d}_{3232} = \Big\langle \frac{-4\mu\alpha}{\mu - \alpha} V_{231} \Big\rangle + \Big\langle \frac{2\alpha}{\mu - \alpha} \Big\rangle \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} V_{231} \Big\rangle$$

Используя все полученные ранее выражения, распишем как будет выглядеть тензор C^0_{ijkl}:

$$
(\langle C^0_{ijkl} \rangle) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 & 23 & 31 & 12 & 32 & 13 & 21 \\
\hline
11 & c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & & & & & & \\
\hline
22 & c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & & & & & & \\
\hline
33 & c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & & & & & & \\
\hline
23 & & & & c_{2323} + \tilde{d}_{2323} & & & c_{2332} + \tilde{d}_{2332} & & \\
\hline
31 & & & & & c_{3131} + \tilde{d}_{3131} & & & c_{3113} + \tilde{d}_{3113} & \\
\hline
12 & & & & & & c_{1212} + \tilde{d}_{1212} & & & c_{1221} + \tilde{d}_{1221} \\
\hline
32 & & & & c_{3223} + \tilde{d}_{3223} & & & c_{3232} + \tilde{d}_{3232} & & \\
\hline
13 & & & & & c_{1331} + \tilde{d}_{1331} & & & c_{1313} + \tilde{d}_{1313} & \\
\hline
21 & & & & & & c_{2112} + \tilde{d}_{2112} & & & c_{2121} + \tilde{d}_{2121}
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}^*_{1111} = \tilde{C}^*_{2222} = \big(\lambda + 2\mu\big) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle , \\
\tilde{C}^*_{1122} = \tilde{C}^*_{2211} = \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle , \\
\tilde{C}^*_{1133} = \tilde{C}^*_{2233} = \tilde{C}^*_{3311} = \tilde{C}^*_{3322} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1} , \\
\tilde{C}^*_{3333} = \Big\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle^{-1} , \tilde{C}^*_{1313} = \tilde{C}^*_{2323} = \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \\
\tilde{C}^*_{1221} = \tilde{C}^*_{2112} = \big(\mu + \alpha\big) , \tilde{C}^*_{1212} = \tilde{C}^*_{2121} = \big(\mu - \alpha\big) , \\
\tilde{C}^*_{1331} = \tilde{C}^*_{2332} = \tilde{C}^*_{3113} = \tilde{C}^*_{3223} = \Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1} , \\
\tilde{C}^*_{3131} = \tilde{C}^*_{3232} = \big(\mu - \alpha\big) - \frac{\big(\mu + \alpha\big)^2}{\mu - \alpha} + \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle
\end{gathered}
\tag{A.51}
$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{d}_{1212} = \tilde{d}_{2121} = -\big\langle 2\alpha V_{312}\big\rangle , \tilde{d}_{2112} = \tilde{d}_{1221} = \big\langle 2\alpha V_{312}\big\rangle , \\
\tilde{d}_{1331} = \tilde{d}_{2332} = \Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{2\alpha}{\mu - \alpha} V_{231}\Big\rangle , \\
\tilde{d}_{3131} = \tilde{d}_{3232} = \Big\langle \frac{-4\mu\alpha}{\mu - \alpha} V_{231}\Big\rangle + \Big\langle \frac{2\alpha}{\mu - \alpha}\Big\rangle\Big\langle \frac{1}{\mu - \alpha}\Big\rangle^{-1}\Big\langle \frac{\mu + \alpha}{\mu - \alpha} V_{231}\Big\rangle
\end{gathered}
\tag{A.52}
$$

A.2 Формулы для вычисления D^0_{ijkl}.

По своей структуре тензоры C^0_{ijkl} и D^0_{ijkl} схожи, поэтому получаем:

$$
(\langle D^0_{ijkl} \rangle) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\frac{kl\to}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 & 23 & 31 & 12 & 32 & 13 & 21 \\
\hline
11 & D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & & & & & & \\
\hline
22 & D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & & & & & & \\
\hline
33 & D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & & & & & & \\
\hline
23 & & & & D_{2323} & & & D_{2332} & & \\
\hline
31 & & & & & D_{3131} & & & D_{3113} & \\
\hline
12 & & & & & & D_{1212} & & & D_{1221} \\
\hline
32 & & & & D_{3223} & & & D_{3232} & & \\
\hline
13 & & & & & D_{1331} & & & D_{1313} & \\
\hline
21 & & & & & & D_{2112} & & & D_{2121}
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{D}^*_{1111} = \tilde{D}^*_{2222} = \big(\beta + 2\gamma\big) - \frac{\beta^2}{\beta + 2\gamma} + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \Big\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle \,, \\
\tilde{D}^*_{1122} = \tilde{D}^*_{2211} = \beta - \frac{\beta^2}{\beta + 2\gamma} + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \Big\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle \,, \\
\tilde{D}^*_{1133} = \tilde{D}^*_{2233} = \tilde{D}^*_{3311} = \tilde{D}^*_{3322} = \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \Big\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle^{-1} \,, \\
\tilde{D}^*_{3333} = \Big\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \Big\rangle^{-1} , \tilde{D}^*_{1313} = \tilde{D}^*_{2323} = \Big\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \Big\rangle^{-1} \,, \\
\tilde{D}^*_{1221} = \tilde{D}^*_{2112} = \big(\gamma + \varepsilon\big) , \tilde{D}^*_{1212} = \tilde{D}^*_{2121} = \big(\gamma - \varepsilon\big) \,, \\
\tilde{D}^*_{1331} = \tilde{D}^*_{2332} = \tilde{D}^*_{3113} = \tilde{D}^*_{3223} = \Big\langle \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \Big\rangle \Big\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \Big\rangle^{-1} \,, \\
\tilde{D}^*_{3131} = \tilde{D}^*_{3232} = \big(\gamma - \varepsilon\big) - \frac{\big(\gamma + \varepsilon\big)^2}{\gamma - \varepsilon} + \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \Big\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \Big\rangle^{-1} \Big\langle \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \Big\rangle
\end{gathered}
\tag{A.53}
$$

A.3 Формулы для вычисления B^0_{ijkl}.

Теперь распишем формулу для тензора B^0_{ijkl}. Как было получено раньше:

$$B^0_{ijkl} = \left\langle \left(D_{ijk3} D^{-1}_{k3q3} - \left\langle D_{ijk3} D^{-1}_{k3l3} \right\rangle \left\langle D^{-1}_{l3p3} \right\rangle^{-1} D^{-1}_{p3q3} \right) \int\limits_0^{x_3} A_{qmn} dy \right\rangle \tag{A.54}$$

Введем обозначение:

$$Q_{qmn} = \int\limits_0^{x_3} A_{qmn} dy \tag{A.55}$$

В силу того, что ненулевыми являются только V_{312} ,V_{321} ,V_{132} ,V_{231} и $V_{312} = -V_{321}$ и $V_{132} = -V_{231}$, получаем, что ненулевыми являются только Q_{312} ,Q_{321} ,Q_{132} ,Q_{231} причем $Q_{312} = -Q_{321}$ и $Q_{132} = -Q_{231}$.

$$\begin{gathered}
B_{1112} = B_{2212} = \left\langle \left(\frac{\beta}{\beta + 2\gamma} - \left\langle \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right) Q_{312} \right\rangle, \\
B_{3312} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right) Q_{312} \right\rangle, \\
B_{1121} = B_{2221} = \left\langle \left(\frac{\beta}{\beta + 2\gamma} - \left\langle \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right) Q_{321} \right\rangle, \\
B_{3321} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta + 2\gamma} \right) Q_{321} \right\rangle, \\
B_{1332} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right) Q_{132} \right\rangle, \\
B_{3132} = \left\langle \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} - \left\langle \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right) Q_{132} \right\rangle, \\
B_{2331} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right) Q_{231} \right\rangle, \\
B_{3231} = \left\langle \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} - \left\langle \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \right) Q_{231} \right\rangle
\end{gathered} \tag{A.56}$$

$$
(\langle B^0_{ijkl}\rangle) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
{}^{kl\rightarrow}_{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 & 23 & 31 & 12 & 32 & 13 & 21 \\
\hline
11 & & & & & & B_{1112} & & & B_{1121} \\
\hline
22 & & & & & & B_{2212} & & & B_{2221} \\
\hline
33 & & & & & & B_{3312} & & & B_{3321} \\
\hline
23 & & & & & B_{2331} & & & B_{2313} & \\
\hline
31 & & & & B_{3123} & & & B_{3132} & & \\
\hline
12 & & & & & & & & & \\
\hline
32 & & & & & B_{3231} & & & B_{3213} & \\
\hline
13 & & & & B_{1323} & & & B_{1332} & & \\
\hline
21 & & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{gathered}
B_{1112} = B_{2212} = -B_{1121} = -B_{2221} = \\
= \left\langle \left(\frac{\beta}{\beta+2\gamma} - \left\langle \frac{\beta}{\beta+2\gamma} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\beta+2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta+2\gamma} \right) Q_{312} \right\rangle, \\
B_{3312} = -B_{3321} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\beta+2\gamma} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\beta+2\gamma} \right) Q_{312} \right\rangle, \\
B_{1332} = -B_{2331} = \left\langle \left(1 - \left\langle \frac{1}{\gamma-\varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma-\varepsilon} \right) Q_{132} \right\rangle, \\
B_{3132} = -B_{3231} = \left\langle \left(\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} - \left\langle \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\gamma-\varepsilon} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\gamma-\varepsilon} \right) Q_{132} \right\rangle
\end{gathered}
\tag{A.57}
$$

A.4 Вид анизотропии эффективных характеристик в нулевом приближении

Представим тензор C^0_{ijkl} в виде матрицы 9×9, используя

$$
\begin{gathered}
w_\alpha M_{\alpha\beta} w_\beta = \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\
w_1 = \varepsilon_{11}, w_2 = \varepsilon_{22}, w_3 = \varepsilon_{33}, w_4 = \varepsilon_{(23)}, w_5 = \varepsilon_{(31)}, w_6 = \varepsilon_{(12)}, \\
w_7 = \varepsilon_{[23]}, w_8 = \varepsilon_{[31]}, w_9 = \varepsilon_{[12]}, \\
\text{где } \varepsilon_{(ij)} = \tfrac{1}{2}\big(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}\big), \varepsilon_{[ij]} = \tfrac{1}{2}\big(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}\big)
\end{gathered}
\tag{A.58}
$$

Определим вид анизотропии (отнесем к какой-либо группе симметрий). В нашем случае это будет трансверсально-изотропный случай как для C^0_{ijkl}, так и для D^0_{ijkl} (или $R_3(\theta)\big(0 \le \theta \le 2\pi\big)$,$R_1(\pi)$). Это означает по 8 независимых констант для каждого. А для тензора B^0_{ijkl} получим симметрию чуть более общего случая

$R_3(\theta)\big(0 \leq \theta \leq 2\pi\big)$, где соответственно должно быть 13 констант, но у нас многие из них нулевые.

A.5 Формулы для эффективных характеристик в общем случае

Выражения для эффективных характеристик выглядят так:

$$\begin{cases} C^o_{ijmn} = \Big\langle \Big(C_{ijab} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} + \big\langle C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\rangle \big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1} C^{-1}_{p3q3}C_{q3mn}\Big) * \\ * \Big(\delta_{ma}\delta_{nb} + \epsilon_{abs}V_{smn}\Big)\Big\rangle, \\ B^o_{ijmn} = \Big\langle D_{ijk3}V'_{kmn}\Big\rangle, \\ D^o_{ijmn} = \big\langle \tilde{D}_{ijmn}\big\rangle = \big\langle D_{ijmn} + D_{ijk3}M'_{kmn}\big\rangle \end{cases} \tag{A.59}$$

Они зависят от функций V_{imn} и M_{imn}, которые находятся из соответствующих интегро-дифференциальных уравнений. При слабой неоднородности эти уравнения становятся простыми дифференциальными уравнениями второго порядка, у которых есть аналитические решения. Эти решения - решения в нулевом приближении. Посмотрим почему это так и как найти решения более высокого порядка.

A.5.1 Вспомогательные операторы

Введем вспомогательные операторы. Будем считать, что:

$$\hat{\hat{C}}_{is}\big(M_{smn}\big) = \epsilon_{ijr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}M_{smn} \tag{A.60}$$

где $\hat{\hat{C}}^*_{ijab}$ — тензор четвертого ранга — интегральный оператор вида

$$\hat{\hat{C}}^*_{ijab} = C_{ijab} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle \tag{A.61}$$

При свёртке этого оператора с тензором ранга $\geqslant 2$ последний подставляется под угловые скобки вместо $(\bullet)$, например

$$\hat{\hat{C}}^*_{ijab}T_{ab} = C_{ijab}T_{ab} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab}T_{ab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}T_{ab}\big\rangle \tag{A.62}$$

Введем еще такой оператор:

$$\hat{L}_{kq}\big(A_{qmn}\big) = \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi -$$
$$-\Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi\Big\rangle \tag{A.63}$$

Рассмотрим теперь, как действует оператор $\hat{L}_{kq}(\,\bullet\,)$:

$$\hat{L}_{1q}\big(A_{qmn}\big) =$$
$$= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{13q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{13l3}\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi -$$
$$-\Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{13q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{13l3}\big\langle D^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi\Big\rangle =$$
$$= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{1313}\int\limits_0^{\xi} A_{1mn}(y)dy - D^{-1}_{1313}\big\langle D^{-1}_{1313}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{1313}\int\limits_0^{\xi} A_{1mn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi -$$
$$-\Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{1313}\int\limits_0^{\xi} A_{1mn}(y)dy - D^{-1}_{1313}\big\langle D^{-1}_{1313}\big\rangle^{-1}\big\langle D^{-1}_{1313}\int\limits_0^{\xi} A_{1mn}(y)dy\big\rangle\Big]d\xi\Big\rangle =$$
$$= \hat{L}_{11}\big(A_{1mn}\big) \tag{A.64}$$

$$
\begin{gathered}
\hat{L}_{2q}\big(A_{qmn}\big) = \\
= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{23q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{23l3} \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{p3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi - \\
- \Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{23q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{23l3} \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{p3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi \Big\rangle = \\
= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{2323} \int\limits_0^{\xi} A_{2mn}(y)dy - D^{-1}_{2323} \big\langle D^{-1}_{2323} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{2323} \int\limits_0^{\xi} A_{2mn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi - \\
- \Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{2323} \int\limits_0^{\xi} A_{2mn}(y)dy - D^{-1}_{2323} \big\langle D^{-1}_{2323} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{2323} \int\limits_0^{\xi} A_{2mn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi \Big\rangle = \\
= \hat{L}_{22}\big(A_{2mn}\big)
\end{gathered}
\tag{A.65}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{L}_{3q}\big(A_{qmn}\big) = \\
= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{33q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{33l3} \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{p3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi - \\
- \Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{33q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{33l3} \big\langle D^{-1}_{l3p3} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{p3q3} \int\limits_0^{\xi} A_{qmn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi \Big\rangle = \\
= \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{3333} \int\limits_0^{\xi} A_{3mn}(y)dy - D^{-1}_{3333} \big\langle D^{-1}_{3333} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{3333} \int\limits_0^{\xi} A_{3mn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi - \\
- \Big\langle \int\limits_0^{x_3} \Big[D^{-1}_{3333} \int\limits_0^{\xi} A_{3mn}(y)dy - D^{-1}_{3333} \big\langle D^{-1}_{3333} \big\rangle^{-1} \big\langle D^{-1}_{3333} \int\limits_0^{\xi} A_{3mn}(y)dy \big\rangle \Big] d\xi \Big\rangle = \\
= \hat{L}_{33}\big(A_{3mn}\big)
\end{gathered}
\tag{A.66}
$$

Таким образом оператор $\hat{L}_{ij}(\bullet)$ действует на каждую компоненту подоператорного выражения. И следовательно можно сделать вывод.

Вывод 1. Оператор $\hat{L}_{ij}(\bullet)$ не меняет вид подоператорного выражения.

Рассмотрим теперь, как действует оператор $\hat{\hat{C}}_{is}(\ \bullet\ )$:

$$\hat{\hat{C}}_{is}\big(V_{smn}\big) = \epsilon_{ijr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} \tag{A.67}$$

где

$$\hat{\hat{C}}^{*}_{ijab}(\bullet) = C_{ijab} - C_{ijk3}C^{-1}_{k3q3}C_{q3ab} + C_{ijk3}C^{-1}_{k3l3}\big\langle C^{-1}_{l3p3}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3ab}(\bullet)\big\rangle \tag{A.68}$$

Этот оператор разлагается на две части. Первая часть действует на подоператорное выражение просто как умножение на коэффициент. А вторая часть уже является интегральным опрератором.

$$\begin{gathered}
\hat{\hat{C}}_{1s}\big(V_{smn}\big) = \epsilon_{1jr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} = \\
= \Big[\epsilon_{123}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{32ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{32ab}(\bullet)\Big) + \epsilon_{132}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{23ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{23ab}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{abs}V_{smn} = \\
= \Big[\epsilon_{123}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{3223}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{3223}(\bullet)\Big) + \epsilon_{132}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{2323}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{2323}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{23s}V_{smn} + \\
+\Big[\epsilon_{123}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{3232}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{3232}(\bullet)\Big) + \epsilon_{132}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{2332}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{2332}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{32s}V_{smn} = \\
= \epsilon_{1jr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{ab1}V_{1mn} = \hat{\hat{C}}_{11}\big(V_{1mn}\big)
\end{gathered} \tag{A.69}$$

$$\begin{gathered}
\hat{\hat{C}}_{2s}\big(V_{smn}\big) = \epsilon_{2jr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} = \\
= \Big[\epsilon_{231}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{13ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{13ab}(\bullet)\Big) + \epsilon_{213}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{31ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{31ab}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{abs}V_{smn} = \\
= \Big[\epsilon_{231}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{1313}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{1313}(\bullet)\Big) + \epsilon_{213}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{3113}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{3113}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{13s}V_{smn} + \\
+\Big[\epsilon_{231}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{1331}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{1331}(\bullet)\Big) + \epsilon_{213}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{3131}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{3131}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{31s}V_{smn} = \\
= \epsilon_{2jr}\Big(\Big\langle \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\hat{C}}^{*}_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{ab2}V_{2mn} = \hat{\hat{C}}_{22}\big(V_{2mn}\big)
\end{gathered} \tag{A.70}$$

$$\hat{\tilde{C}}_{3s}\big(V_{smn}\big) = \epsilon_{3jr}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} =$$
$$= \Big[\epsilon_{312}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{21ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{21ab}(\bullet)\Big) + \epsilon_{321}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{12ab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{12ab}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{abs}V_{smn} =$$
$$= \Big[\epsilon_{312}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{2112}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{2112}(\bullet)\Big) + \epsilon_{321}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{1212}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{1212}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{12s}V_{smn} +$$
$$+ \Big[\epsilon_{312}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{2121}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{2121}(\bullet)\Big) + \epsilon_{321}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{1221}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{1221}(\bullet)\Big)\Big]\epsilon_{21s}V_{smn} =$$
$$= \epsilon_{3jr}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big)\epsilon_{ab3}V_{3mn} = \hat{\tilde{C}}_{33}\big(V_{3mn}\big) \tag{A.71}$$

Таким образом оператор $\hat{\tilde{C}}_{is}(\bullet)$ действует на каждую компоненту подоператорного выражения. И следовательно можно сделать вывод.

Вывод 2. Оператор $\hat{\tilde{C}}_{is}(\bullet)$ не меняет общий вид подоператорных выражений.

A.5.2 Нахождение V - функций

Было выведено следущее уравнение

$$\big[D_{i3k3}V'_{kmn}\big]' = \epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) + \epsilon_{ijr}\Big(\Big\langle\hat{\tilde{C}}^*_{rjab}(\bullet)\Big\rangle - \hat{\tilde{C}}^*_{rjab}\Big)\epsilon_{abs}V_{smn} \tag{A.72}$$

обозначим

$$\epsilon_{ijr}\Big(\big\langle\tilde{C}^*_{rjmn}\big\rangle - \tilde{C}^*_{rjmn}\Big) = A_{imn} \tag{A.73}$$

тогда следуя нашим обозначениям, уравнение принимает вид

$$\big[D_{i3k3}V'_{kmn}\big]' = A_{imn} + \hat{\tilde{C}}_{is}\big(V_{smn}\big) \tag{A.74}$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом возмущений
шаг первый: ко второму слагаемому в правой части припишем $\varkappa$ и будем считать, что V_{imn} раскладывается в ряд по этому $\varkappa$

$$V_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty}\varkappa^q V^{(q)}_{imn} \tag{A.75}$$

шаг второй: подставим это представление V_{imn} в наше уравнение (A.74), и получим рекуррентную систему уравнений для нахождения $V_{imn}^{(q)}$

$$\begin{cases} \left[D_{i3k3}(V_{kmn}^{(0)})'\right]' = A_{imn} \\ \\ \left[D_{i3k3}(V_{kmn}^{(q)})'\right]' = \hat{\hat{C}}_{is}\left(V_{smn}^{(q-1)}\right) \end{cases} \tag{A.76}$$

Первое уравнение мы уже нашли предыдущих пунктах. Теперь напишем общий вид. Следует отметить, что решением уравнения вида $\left[D_{i3k3}f'_{kmn}\right]' = k_{imn}$ есть тензор $f_{kmn} = \hat{L}_{kq}\left(k_{qmn}\right)$, где $\hat{L}_{kq}(\,\bullet\,)$, введенный ранее таким образом:

$$\hat{L}_{kq}\left(A_{qmn}\right) = \int\limits_0^{x_3}\left[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\left\langle D^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy\right\rangle\right]dx_3 -$$
$$-\left\langle\int\limits_0^{x_3}\left[D^{-1}_{k3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy - D^{-1}_{k3l3}\left\langle D^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle D^{-1}_{p3q3}\int\limits_0^{x_3} A_{qmn}(y)dy\right\rangle\right]dx_3\right\rangle \tag{A.77}$$

шаг третий: получаем общий вид решения системы уравнений

$$\begin{cases} V_{imn}^{(0)} = \hat{L}_{iq}\left(A_{qmn}\right) \\ V_{imn}^{(1)} = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(V_{i_2mn}^{(0)}\right)\right) \\ V_{imn}^{(2)} = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(V_{i_2mn}^{(1)}\right)\right) = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\hat{L}_{i_2i_3}\left(\hat{\hat{C}}_{i_3i_4}\left(V_{i_4mn}^{(0)}\right)\right)\right) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{A.78}$$

$$V_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(\dots\hat{L}_{i_{2(q-1)}i_{2q-1}}\left(\hat{\hat{C}}_{i_{2q-1}i_{2q}}\left(V_{i_{2q}mn}^{(0)}\right)\right)\right)\right) \tag{A.79}$$

шаг четвертый: приравниваем $\varkappa$ к единицы $\varkappa \equiv 1$ и получаем решение исходного уравнения

$$\boxed{V_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty} \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(\dots\hat{L}_{i_{2(q-1)}i_{2q-1}}\left(\hat{\hat{C}}_{i_{2q-1}i_{2q}}\left(V_{i_{2q}mn}^{(0)}\right)\right)\right)\right)} \tag{A.80}$$

А.5.3 Нахождение М - функций

Было выведено следущее уравнение

$$\left[D_{i3k3}M'_{kmn} + D_{i3mn}\right]' = \epsilon_{ijr}\left(\left\langle \hat{\hat{C}}^*_{rjab}(\bullet)\right\rangle - \hat{\hat{C}}^*_{rjab}\right)\epsilon_{abs}M_{smn} \tag{A.81}$$

Следуя введеным ранее обозначениям, наше уравнение принимает вид

$$\left[D_{i3k3}M'_{kmn} + D_{i3mn}\right]' = \hat{\hat{C}}_{is}\left(M_{smn}\right) \tag{A.82}$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом возмущений
шаг первый: в правой части припишем $\varkappa$ и будем считать, что M_{imn} раскладывается в ряд по этому $\varkappa$

$$M_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q M^{(q)}_{imn} \tag{A.83}$$

шаг второй: подставим это представление M_{imn} в наше уравнение (A.82), и получим рекуррентную систему уравнений для нахождения $V^{(q)}_{imn}$

$$\left\{\begin{aligned} &\left[D_{i3k3}(M^{(0)}_{kmn})' + D_{i3mn}\right]' = 0 \\ \\ &\left[D_{i3k3}(M^{(q)}_{kmn})'\right]' = \hat{\hat{C}}_{is}\left(M^{(q-1)}_{smn}\right) \end{aligned}\right. \tag{A.84}$$

Первое приближение мы уже нашли предыдущих пунктах. Теперь напишем общий вид. шаг третий: получаем общий вид решения системы упавнений

$$\left\{\begin{aligned} &M^{(0)}_{imn} = \int_0^{x_3} D^*_{k3mn}dy - \left\langle \int_0^{x_3} D^*_{k3mn}dy\right\rangle \\ &D^*_{k3mn} \equiv D^{-1}_{k3l3}\left\langle D^{-1}_{l3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle D^{-1}_{p3q3}D_{q3mn}\right\rangle - D^{-1}_{k3q3}D_{q3mn} \\ \\ &M^{(1)}_{imn} = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(M^{(0)}_{i_2mn}\right)\right) \\ &M^{(2)}_{imn} = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\left(M^{(1)}_{i_2mn}\right)\right) = \hat{L}_{ii_1}\left(\hat{\hat{C}}_{i_1i_2}\hat{L}_{i_2i_3}\left(\hat{\hat{C}}_{i_3i_4}\left(M^{(0)}_{i_4mn}\right)\right)\right) \\ \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{A.85}$$

$$M_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q \hat{L}_{ii_1}\big(\hat{\hat{C}}_{i_1 i_2}\big(\dots \hat{L}_{i_{2(q-1)} i_{2q-1}}\big(\hat{\hat{C}}_{i_{2q-1} i_{2q}}\big(M^{(0)}_{i_{2q}mn}\big)\big)\big)\big) \tag{A.86}$$

шаг четвертый: приравниваем $\varkappa$ к единицы $\varkappa \equiv 1$ и получаем решение исходного уравнения

$$\boxed{M_{imn} = \sum_{q=0}^{\infty} \hat{L}_{ii_1}\big(\hat{\hat{C}}_{i_1 i_2}\big(\dots \hat{L}_{i_{2(q-1)} i_{2q-1}}\big(\hat{\hat{C}}_{i_{2q-1} i_{2q}}\big(M^{(0)}_{i_{2q}mn}\big)\big)\big)\big)} \tag{A.87}$$

A.6 Результаты расчетов

Рассматривается двухслойный композит с различными объемными долями. Для расчетов использовались следующие значения свойств материалов:

Таблица A.1

Материальные константы для расчетов

Материал	λ,МПа	μ,МПа	α,МПа	β,Н	γ,Н	ε,Н
Syntatic foam (полые стеклянные сферы в эпоксидной смоле)	2096	1033	115	-2.73	4.1	0.13
Dense polyuretane (пенополиуретан высокой плотности)	763	104	4.33	-26.6	40	4.5

Объемная доля $k = 0{,}2; 03; \dots 0{,}9;$.

Ниже в таблице представлены значения эффективных упругих характеристик в зависимости от объемной доли.

k	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
C_{1111}	1,162604	1,446653	1,735531	2,031379	2,337826	2,661547	3,016315	3,435838
C_{1122}	0,601520	0,705704	0,814718	0,930701	1,057284	1,201141	1,376044	1,615703
C_{1133}	0,461494	0,500948	0,550567	0,614859	0,701462	0,824431	1,012755	1,337395
C_{2222}	1,162604	1,446653	1,735531	2,031379	2,337826	2,661547	3,016315	3,435838
C_{2233}	0,461494	0,500948	0,550567	0,614859	0,701462	0,824431	1,012755	1,337395
C_{3333}	0,727811	0,810865	0,915317	1,050658	1,232967	1,491827	1,888267	2,571665

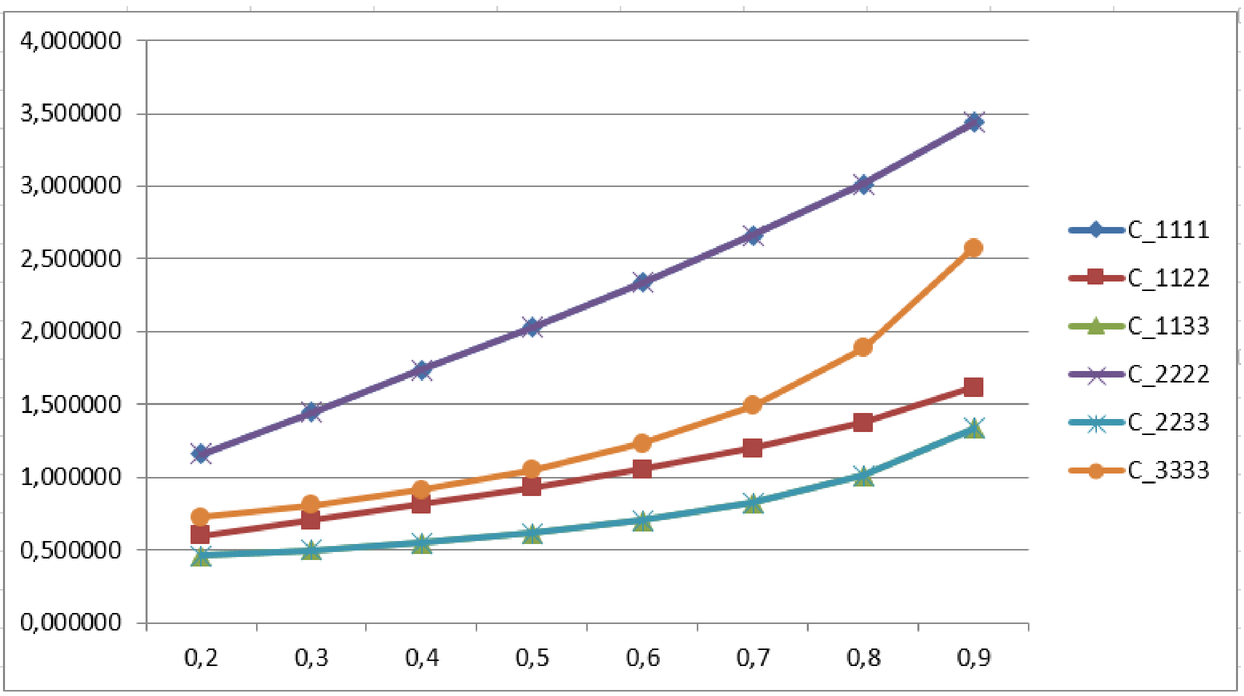

Рисунок А.1 — Зависимость эффективных упругих характеристик от объемной доли

Ниже в таблице представлены значения эффективных моментных характеристик в зависимости от объемной доли.

k	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
D_{1111}	0,036445	0,03184	0,027674	0,02374	0,01993	0,01619	0,01252	0,00889
D_{1122}	−0,02706	−0,0247	−0,02194	−0,0189	−0,0157	−0,01257	−0,0093	−0,0059
D_{1133}	−0,00938	−0,0071	−0,00573	−0,0048	−0,00413	−0,003621	−0,00323	−0,00291
D_{2222}	0,036445	0,03184	0,027674	0,0237	0,01992	0,016199	0,012528	0,008896
D_{2233}	−0,00938	−0,00711	−0,00573	−0,0048	−0,00413	−0,0036	−0,0032	−0,0029
D_{3333}	0,018763	0,01423	0,011466	0,00960	0,0082	0,007242	0,006450	0,0058

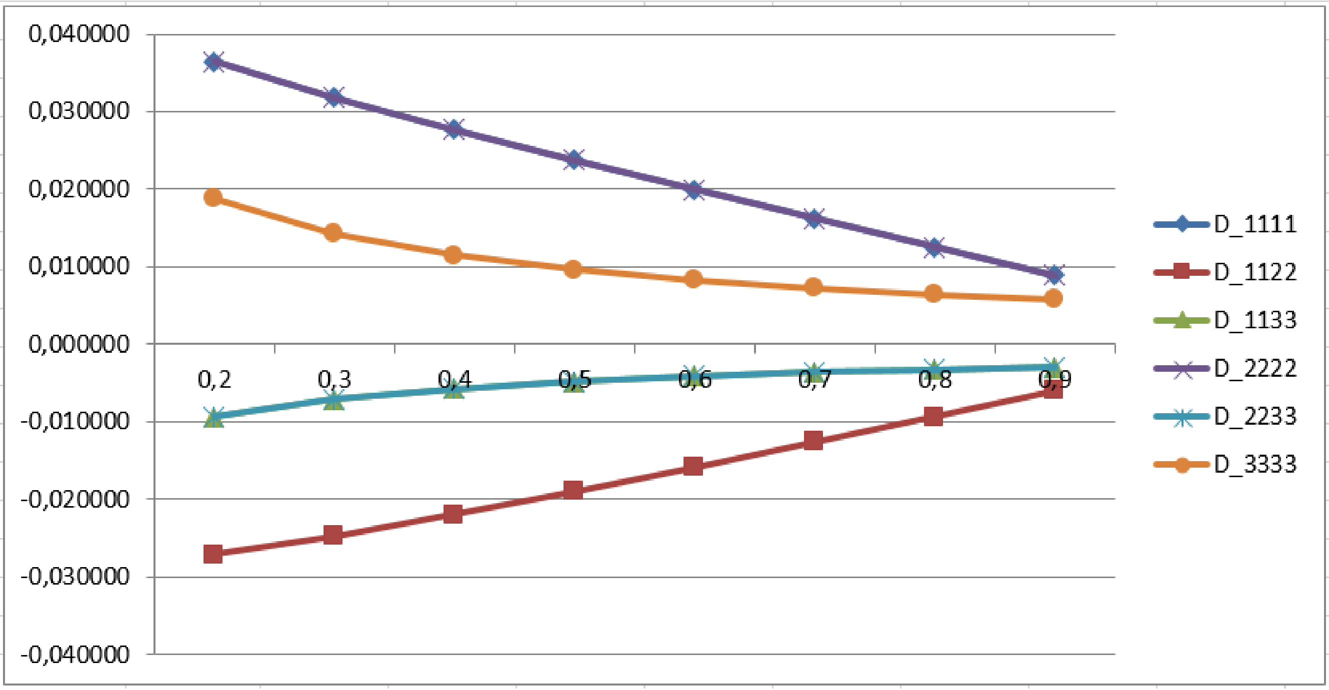

Рисунок А.2 — Зависимость эффективных моментных характеристик от объемной доли

Как видно из графиков зависимость эффективных упругих и моментных характеристик от объемной доли нелинейна.

A.7 Вид анизотропии эффективных характеристик

Определим вид анизотропии
(т.е. отнесем к какой-либо группе симметрий).

В случае нулевого приближения, как уже было показано, это будет трансверсально-изотропный вид анизотропии как для C^0_{ijkl}, так и для D^0_{ijkl} (или $R_3(\theta)\big(0 \leq \theta \leq 2\pi\big)$,$R_1(\pi)$). Это означает по 8 независимых констант для каждого. А для тензора B^0_{ijkl} было получена симметрия чуть более общего случая $R_3(\theta)\big(0 \leq \theta \leq 2\pi\big)$, где соответственно должно быть 13 констант, но у нас многие из них нулевые. В силу того, что операторы $\hat{\tilde{C}}_{is}(\bullet)$ и $\tilde{L}_{iq}(\bullet)$ не меняют общий вид подоператорного выражения (выводы 1 и 2), следует, что итоговый вид тензоров C^0_{ijkl}, B^0_{ijkl} и D^0_{ijkl} будет таким же, как и с лучае нулевого приближения. А следовательно и вид анизотропи будет таким же.

Приложение Б

Случай волокнистого композита

В приложении Б представлены формулы для расчетов эффективных характеристик для волокнистого композита и результаты расчетов.

Б.1 Параметры задачи

Рассматривается бесконечное в одном направлении упругое тело с моментными свойствами. В двух других направлениях оно ограничено цилиндрической поверхностью. Поперечное сечение тела имеет периодическую структуру, где каждая ячейка периодичности представляет собой прямоугольник с прямоугольным включением. Матрица композита и включение изотропны.

В силу того, что матрица композита и включения изотропны, тензоры упругих и моментных свойств имеют вид:

$$
(C_{ijkl}(x_1,x_2)) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 & 12 & 13 & 23 & 21 & 31 & 32 \\
\hline
11 & \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & & & & \\
\hline
22 & \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & & & & & \\
\hline
33 & \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & & & & \\
\hline
12 & & & & \mu-\alpha & & & \mu+\alpha & & \\
\hline
13 & & & & & \mu-\alpha & & & \mu+\alpha & \\
\hline
23 & & & & & & \mu-\alpha & & & \mu+\alpha \\
\hline
21 & & & & \mu+\alpha & & & \mu-\alpha & & \\
\hline
31 & & & & & \mu+\alpha & & & \mu-\alpha & \\
\hline
32 & & & & & & \mu+\alpha & & & \mu-\alpha
\end{array}\right)
$$

$$
(D_{ijkl}(x_1,x_2)) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 & 12 & 13 & 23 & 21 & 31 & 32 \\
\hline
11 & \beta+2\gamma & \beta & \beta & & & & & & \\
\hline
22 & \beta & \beta+2\gamma & \beta & & & & & & \\
\hline
33 & \beta & \beta & \beta+2\gamma & & & & & & \\
\hline
12 & & & & \gamma-\varepsilon & & & \gamma+\varepsilon & & \\
\hline
13 & & & & & \gamma-\varepsilon & & & \gamma+\varepsilon & \\
\hline
23 & & & & & & \gamma-\varepsilon & & & \gamma+\varepsilon \\
\hline
21 & & & & \gamma+\varepsilon & & & \gamma-\varepsilon & & \\
\hline
31 & & & & & \gamma+\varepsilon & & & \gamma-\varepsilon & \\
\hline
32 & & & & & & \gamma+\varepsilon & & & \gamma-\varepsilon
\end{array}\right)
$$

где $\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ - ступенчатые функции координаты x_3 В отдельности для матрицы композита и включения свойства λ, μ - постоянные Ламе,а $\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ - физические постоянные материала в рамках среды Коссера несимметричной теории упругости.

В работе [157] вводятся так называемые технические константы: G - модуль сдвига; ν - коэффициент Пуассона; l_t - характерный размер кручения; l_b - характерный размер изгиба; N - порядок несимметрии; Ψ - полярный коэффициент. Константы для некоторых материалов приведены в таблице (1.1). Для расчетов использовались следующие значения свойств материалов:

Таблица Б.1

Материальные константы для расчетов

Материал	λ,МПа	μ,МПа	α,МПа	β,Н	γ,Н	ε,Н
Syntatic foam (полые стеклянные сферы в эпоксидной смоле)	2096	1033	115	-2.73	4.1	0.13
Dense polyuretane (пенополиуретан высокой плотности)	763	104	4.33	-26.6	40	4.5

Б.2 Формулы для эффективных характеристик

Формулы для эффектиных упругих характеристик C^{eff}_{ijkl} примут вид:

$$
\begin{gathered}
C^{eff}_{1111} = \Big\langle C_{1111} * (1 + N_{111,1}) + C_{1122} * (N_{211,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1122} = \Big\langle C_{1122} * (1 + N_{222,2}) + C_{1111} * (N_{122,1}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2222} = \Big\langle C_{2222} * (1 + N_{222,2}) + C_{2211} * (N_{122,1}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1112} = \Big\langle C_{1111} * (N_{112,1}) + C_{1122} * (N_{212,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1121} = \Big\langle C_{1111} * (N_{121,1}) + C_{1122} * (N_{221,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2212} = \Big\langle C_{2211} * (N_{112,1}) + C_{2222} * (N_{212,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2221} = \Big\langle C_{2211} * (N_{121,1}) + C_{2222} * (N_{221,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1212} = \Big\langle C_{1212} * (1 + N_{112,2} + V_{312}) + C_{1221} * (N_{212,1} - V_{312}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1221} = \Big\langle C_{1221} * (1 + N_{221,1} - V_{321}) + C_{1212} * (N_{121,2} + V_{321}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2121} = \Big\langle C_{2121} * (1 + N_{221,1} - V_{321}) + C_{2112} * (N_{121,2} + V_{321}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1133} = \Big\langle C_{1133} + C_{1111} * (N_{133,1}) + C_{1122} * (N_{233,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2233} = \Big\langle C_{2233} + C_{2211} * (N_{133,1}) + C_{2222} * (N_{233,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{3333} = \Big\langle C_{3333} + C_{3311} * (N_{133,1}) + C_{3322} * (N_{233,2}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1233} = \Big\langle C_{1212} * (N_{133,2} + V_{333}) + C_{1221} * (N_{233,1} - V_{333}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2133} = \Big\langle C_{2121} * (N_{233,1} - V_{333}) + C_{2112} * (N_{133,2} + V_{333}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1313} = \Big\langle C_{1313} * (1 - V_{213}) + C_{1331} * (N_{313,1} + V_{213}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{3131} = \Big\langle C_{3131} * (1 + N_{331,1} + V_{231}) + C_{3113} * (-V_{231}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1331} = \Big\langle C_{1331} * (1 + N_{331,1} + V_{231}) + C_{1313} * (-V_{231}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1113} = C^{eff}_{1131} = C^{eff}_{2213} = C^{eff}_{2231} = C^{eff}_{1123} = C^{eff}_{1132} = C^{eff}_{2223} = C^{eff}_{2232} = C^{eff}_{1213} = C^{eff}_{1231} = \\
= C^{eff}_{2113} = C^{eff}_{2131} = C^{eff}_{1223} = C^{eff}_{1232} = C^{eff}_{2123} = C^{eff}_{2132} = C^{eff}_{3313} = C^{eff}_{3331} = C^{eff}_{3323} = C^{eff}_{3332} = 0 \\
C^{eff}_{1323} = \Big\langle C_{1331} * (N_{323,1} + V_{223}) + C_{1313} * (-V_{223}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{1332} = \Big\langle C_{1331} * (N_{332,1} + V_{232}) + C_{1313} * (-V_{232}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{3123} = \Big\langle C_{3131} * (N_{323,1} + V_{223}) + C_{3113} * (-V_{223}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{3132} = \Big\langle C_{3131} * (N_{332,1} + V_{232}) + C_{3113} * (-V_{232}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2323} = \Big\langle C_{2323} * (1 + V_{123}) + C_{2332} * (N_{323,2} - V_{123}) \Big\rangle, \\
C^{eff}_{2332} = \Big\langle C_{2332} * (1 + N_{332,2} - V_{132}) + C_{2323} * (V_{132}) \Big\rangle,
\end{gathered}
$$

$$C^{eff}_{3232} = \Big\langle C_{3232} * (1 + N_{332,2} - V_{132}) + C_{3223} * (V_{132}) \Big\rangle.$$

Формулы для эффективных характеристик взаимного влияния B^{eff}_{ijkl} примут вид:

$$B^{eff}_{1111} = B^{eff}_{1122} = B^{eff}_{1133} = B^{eff}_{2222} = B^{eff}_{2233} = B^{eff}_{3333} = B^{eff}_{1212} = 0,$$
$$B^{eff}_{1213} = \Big\langle D_{1212} * (V_{113,2}) + D_{1221} * (V_{213,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1223} = \Big\langle D_{1212} * (V_{123,2}) + D_{1221} * (V_{223,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1313} = B^{eff}_{1323} = B^{eff}_{2323} = B^{eff}_{1112} = B^{eff}_{2212} = B^{eff}_{3312} = 0,$$
$$B^{eff}_{1113} = \Big\langle D_{1111} * (V_{113,1}) + D_{1122} * (V_{213,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{2213} = \Big\langle D_{2211} * (V_{113,1}) + D_{2222} * (V_{213,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{3313} = \Big\langle D_{3311} * (V_{113,1}) + D_{3322} * (V_{213,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1123} = \Big\langle D_{1111} * (V_{123,1}) + D_{1122} * (V_{223,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{2223} = \Big\langle D_{2211} * (V_{123,1}) + D_{2222} * (V_{223,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{3323} = \Big\langle D_{3311} * (V_{123,1}) + D_{3322} * (V_{223,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1121} = B^{eff}_{2221} = B^{eff}_{3321} = 0,$$
$$B^{eff}_{1131} = \Big\langle D_{1111} * (V_{131,1}) + D_{1122} * (V_{231,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{2231} = \Big\langle D_{2211} * (V_{131,1}) + D_{2222} * (V_{231,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{3331} = \Big\langle D_{3311} * (V_{131,1}) + D_{3322} * (V_{231,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1132} = \Big\langle D_{1111} * (V_{132,1}) + D_{1122} * (V_{232,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{2232} = \Big\langle D_{2211} * (V_{132,1}) + D_{2222} * (V_{232,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{3332} = \Big\langle D_{3311} * (V_{132,1}) + D_{3322} * (V_{232,2}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1221} = 0,$$
$$B^{eff}_{1321} = \Big\langle D_{1331} * (V_{321,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{2321} = \Big\langle D_{2332} * (V_{321,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1231} = \Big\langle D_{1212} * (V_{131,2}) + D_{1221} * (V_{231,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1331} = B^{eff}_{2331} = 0,$$
$$B^{eff}_{1232} = \Big\langle D_{1212} * (V_{132,2}) + D_{1221} * (V_{232,1}) \Big\rangle,$$
$$B^{eff}_{1332} = B^{eff}_{2332} = B^{eff}_{2121} = 0,$$
$$B^{eff}_{2131} = \Big\langle D_{2112} * (V_{131,2}) + D_{2121} * (V_{231,1}) \Big\rangle,$$

$$B_{3131}^{eff} = 0,$$
$$B_{2132}^{eff} = \left\langle D_{2112} * (V_{132,2}) + D_{2121} * (V_{232,1}) \right\rangle,$$
$$B_{3132}^{eff} = B_{3232}^{eff} = 0,$$

Формулы для эффективных характеристик взаимного влияния D_{ijkl}^{eff} примут вид:

$$D_{1111}^{eff} = \left\langle D_{1111} + D_{1111} * (M_{111,1}) + D_{1122} * (M_{211,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1122}^{eff} = \left\langle D_{1122} + D_{1111} * (M_{122,1}) + D_{1122} * (M_{222,2}) \right\rangle,$$
$$D_{2222}^{eff} = \left\langle D_{2222} + D_{2211} * (M_{122,1}) + D_{2222} * (M_{222,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1133}^{eff} = \left\langle D_{1133} + D_{1111} * (M_{133,1}) + D_{1122} * (M_{233,2}) \right\rangle,$$
$$D_{2233}^{eff} = \left\langle D_{2233} + D_{2211} * (M_{133,1}) + D_{2222} * (M_{233,2}) \right\rangle,$$
$$D_{3333}^{eff} = \left\langle D_{3333} + D_{3311} * (M_{133,1}) + D_{3322} * (M_{233,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1112}^{eff} = \left\langle D_{1111} * (M_{112,1}) + D_{1122} * (M_{212,2}) \right\rangle,$$
$$D_{2212}^{eff} = \left\langle D_{2211} * (M_{112,1}) + D_{2222} * (M_{212,2}) \right\rangle,$$
$$D_{3312}^{eff} = \left\langle D_{3311} * (M_{112,1}) + D_{3322} * (M_{212,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1212}^{eff} = \left\langle D_{1212} + D_{1212} * (M_{112,2}) + D_{1221} * (M_{212,1}) \right\rangle,$$
$$D_{1113}^{eff} = D_{2213}^{eff} = D_{3313}^{eff} = D_{1213}^{eff} = 0;$$
$$D_{1313}^{eff} = \left\langle D_{1313} + D_{1331} * (M_{313,1}) \right\rangle,$$
$$D_{1123}^{eff} = D_{2223}^{eff} = D_{3323}^{eff} = D_{1223}^{eff} = 0;$$
$$D_{1323}^{eff} = \left\langle D_{1331} * (M_{323,1}) \right\rangle,$$
$$D_{2323}^{eff} = \left\langle D_{2323} + D_{2332} * (M_{323,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1121}^{eff} = \left\langle D_{1111} * (M_{121,1}) + D_{1122} * (M_{221,2}) \right\rangle,$$
$$D_{2221}^{eff} = \left\langle D_{2211} * (M_{121,1}) + D_{2222} * (M_{221,2}) \right\rangle,$$
$$D_{3321}^{eff} = \left\langle D_{3311} * (M_{121,1}) + D_{3322} * (M_{221,2}) \right\rangle,$$
$$D_{1221}^{eff} = \left\langle D_{1221} + D_{1212} * (M_{121,2}) + D_{1221} * (M_{221,1}) \right\rangle,$$
$$D_{1321}^{eff} = D_{2321}^{eff} = 0;$$
$$D_{2121}^{eff} = \left\langle D_{2121} + D_{2112} * (M_{121,2}) + D_{2121} * (M_{221,1}) \right\rangle,$$
$$D_{1131}^{eff} = D_{2231}^{eff} = D_{3331}^{eff} = D_{1231}^{eff} = 0;$$
$$D_{1331}^{eff} = \left\langle D_{1331} + D_{1331} * (M_{331,1}) \right\rangle,$$

$$D^{eff}_{2331} = \left\langle D_{2332} * (M_{331,2}) \right\rangle, D^{eff}_{2131} = 0;$$
$$D^{eff}_{3131} = \left\langle D_{3131} + D_{3131} * (M_{331,1}) \right\rangle,$$
$$D^{eff}_{1132} = D^{eff}_{2232} = D^{eff}_{3332} = D^{eff}_{1232} = 0;$$
$$D^{eff}_{1332} = \left\langle D_{1331} * (M_{332,1}) \right\rangle,$$
$$D^{eff}_{2332} = \left\langle D_{2332} + D_{2332} * (M_{332,2}) \right\rangle,$$
$$D^{eff}_{2132} = 0; D^{eff}_{3132} = \left\langle D_{3131} * (M_{332,1}) \right\rangle,$$
$$D^{eff}_{3232} = \left\langle D_{3232} + D_{3232} * (M_{332,2}) \right\rangle,$$

Б.3 Результаты расчетов.

Рассматривается бесконечное в одном направлении упругое тело с моментными свойствами. В двух других направлениях оно ограничено цилиндрической поверхностью. Поперечное сечение тела имеет периодическую структуру, где каждая ячейка периодичности представляет собой квадрат с квадратным включением. Матрица композита и включение изотропны.

Структурные функции находятся из решения вспомогательных задач (5.24)-(5.25) и (5.30)-(5.31). Задачи решаются методом конечных элементов.

Б.3.1 Зависимость эффективных характеристик от объемной доли включения

Ниже будут представлены значения упругих и моментных эффективных характеристик, рассчитанных при разной объемной доли.

Объемная доля включения k=0,2

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,85025	0,519813	0,519708	0	0	0	0	0	0
22	0,519813	0,85025	0,519708	0	0	0	0	0	0
33	0,519708	0,519708	0,77454	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,152493	0	0	0,181344	0	0
13	0	0	0	0	0,163823	0	0	0,167772	0
23	0	0	0	0	0	0,163823	0	0	0,167772
21	0	0	0	0,181344	0	0	0,152493	0	0
31	0	0	0	0	0,167772	0	0	0,160744	0
32	0	0	0	0	0	0,167772	0	0	0,160744

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0484115	−0,0233204	−0,0250911	0	0	0	0	0	0
22	−0,0233204	0,0484115	−0,0250911	0	0	0	0	0	0
33	−0,0250911	−0,0250911	0,0501821	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0741292	0	0	−0,002350	0	0
13	0	0	0	0	0,0740976	0	0	−0,000614	0
23	0	0	0	0	0	0,0740976	0	0	−0,0006146
21	0	0	0	−0,002350	0	0	0,0741292	0	0
31	0	0	0	0	−0,0006146	0	0	0,09801	0
32	0	0	0	0	0	−0,0006146	0	0	0,09801

Объемная доля включения k=0,3

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	1,15421	0,665917	0,66465	0	0	0	0	0	0
22	0,665917	1,15421	0,66465	0	0	0	0	0	0
33	0,66465	0,66465	0,986793	0	0	0	$1{,}53098e-008$	0	0
12	0	0	0	0,214537	0	0	0,284944	0	0
13	0	0	0	0	0,253622	0	0	0,239895	0
23	0	0	0	0	0	0,253622	0	0	0,239896
21	0	0	0	0,284944	0	0	0,214538	0	0
31	0	0	0	0	0,239895	0	0	0,2465	0
32	0	0	0	0	0	0,239896	0	0	0,2465

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0443632	−0,0202276	−0,0241356	0	0	0	0	0	0
22	−0,0202276	0,0443632	−0,0241356	0	0	0	0	0	0
33	−0,0241356	−0,0241356	0,0482713	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0705858	0	0	−0,005832	0	0
13	0	0	0	0	0,0704763	0	0	−0,001125	0
23	0	0	0	0	0	0,070476	0	0	−0,001125
21	0	0	0	−0,0058326	0	0	0,070585	0	0
31	0	0	0	0	−0,00112571	0	0	0,108236	0
32	0	0	0	0	0	−0,0011257	0	0	0,108236

Объемная доля включения k=0,4

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	1,57149	0,870102	0,864795	0	0	0	0	0	0
22	0,870102	1,57149	0,864796	0	0	0	0	0	0
33	0,864795	0,864796	1,28216	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,291229	0	0	0,439645	0	0
13	0	0	0	0	0,384633	0	0	0,333261	0
23	0	0	0	0	0	0,384703	0	0	0,333148
21	0	0	0	0,439645	0	0	0,291229	0	0
31	0	0	0	0	0,333261	0	0	0,370508	0
32	0	0	0	0	0	0,333148	0	0	0,370691

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0385843	−0,0158509	−0,0227334	0	0	0	0	0	0
22	−0,0158509	0,0385844	−0,0227335	0	0	0	0	0	0
33	−0,0227334	−0,0227335	0,0454669	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,065619	0	0	−0,010702	0	0
13	0	0	0	0	0,0653907	0	0	−0,00152607	0
23	0	0	0	0	0	0,0653907	0	0	−0,00152607
21	0	0	0	−0,010702	0	0	0,0656191	0	0
31	0	0	0	0	−0,00152607	0	0	0,11624	0
32	0	0	0	0	0	−0,00152607	0	0	0,116239

Объемная доля включения k=0,5

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	2,09111	1,13176	1,11641	0	0	0	0	0	0
22	1,13176	2,09111	1,11641	0	0	0	0	0	0
33	1,11641	1,11641	1,65823	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,381321	0	0	0,644904	0	0
13	0	0	0	0	0,553579	0	0	0,447715	0
23	0	0	0	0	0	0,553599	0	0	0,447687
21	0	0	0	0,644904	0	0	0,381319	0	0
31	0	0	0	0	0,447715	0	0	0,528433	0
32	0	0	0	0	0	0,447687	0	0	0,528473

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0308879	−0,0100303	−0,0208575	0	0	0	0	0	0
22	−0,0100303	0,0308883	−0,0208579	0	0	0	0	0	0
33	−0,0208575	−0,0208579	0,0417155	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0592191	0	0	−0,0169591	0	0
13	0	0	0	0	0,0588419	0	0	−0,00183721	0
23	0	0	0	0	0	0,0588419	0	0	−0,00183722
21	0	0	0	−0,0169591	0	0	0,0592193	0	0
31	0	0	0	0	−0,00183721	0	0	0,12246	0
32	0	0	0	0	0	−0,00183722	0	0	0,12246

Объемная доля включения k=0,6

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	2,69422	1,44836	1,4126	0	0	0	0	0	0
22	1,44836	2,69422	1,4126	0	0	0	0	0	0
33	1,4126	1,4126	2,11058	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,494632	0	0	0,886278	0	0
13	0	0	0	0	0,747645	0	0	0,589915	0
23	0	0	0	0	0	0,747645	0	0	0,589913
21	0	0	0	0,886278	0	0	0,49463	0	0
31	0	0	0	0	0,589915	0	0	0,705388	0
32	0	0	0	0	0	0,589913	0	0	0,705389

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0206563	−0,00217809	−0,0184782	0	0	0	0	0	0
22	−0,00217809	0,0206565	−0,0184785	0	0	0	0	0	0
33	−0,0184782	−0,0184785	0,0369567	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0513558	0	0	−0,0246044	0	0
13	0	0	0	0	0,0508301	0	0	−0,00206389	0
23	0	0	0	0	0	0,0508301	0	0	−0,00206388
21	0	0	0	−0,0246044	0	0	0,0513557	0	0
31	0	0	0	0	−0,00206389	0	0	0,126992	0
32	0	0	0	0	0	−0,00206388	0	0	0,126992

Объемная доля включения k=0,7

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	3,34801	1,8103	1,73972	0	0	0	0	0	0
22	1,8103	3,34801	1,73972	0	0	0	0	0	0
33	1,73972	1,73972	2,63041	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,656165	0	0	1,12781	0	0
13	0	0	0	0	0,941797	−0,000179	0	0,771926	0,000245
23	0	0	0	0	−0,00017932	0,941704	0	0,00024788	0,772051
21	0	0	0	1,12781	0	0	0,656164	0	0
31	0	0	0	0	0,771926	0,000247	0	0,873114	−0,000342
32	0	0	0	0	0,0002453	0,772051	0	−0,0003426	0,872945

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,00459076	0,0109606	−0,0155514	0	0	0	0	0	0
22	0,0109606	0,00459523	−0,0155558	0	0	0	0	0	0
33	−0,0155514	−0,0155558	0,0311072	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0419537	0	0	−0,0336422	0	0
13	0	0	0	0	0,041355	0	0	−0,00220028	0
23	0	0	0	0	0	0,041355	0	0	−0,00220026
21	0	0	0	−0,0336422	0	0	0,0419541	0	0
31	0	0	0	0	−0,00220028	0	0	0,129718	0
32	0	0	0	0	0	−0,00220026	0	0	0,129718

Объемная доля включения k=0,8

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	3,98867	2,18451	2,06656	0	0	0	0	0	0
22	2,18451	3,98866	2,06655	0	0	0	0	0	0
33	2,06656	2,06655	3,19761	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,893202	0	0	1,3139	0	0
13	0	0	0	0	1,09823	0	0	0,997885	0
23	0	0	0	0	0	1,09824	0	0	0,997861
21	0	0	0	1,3139	0	0	0,893198	0	0
31	0	0	0	0	0,997885	0	0	0,992189	0
32	0	0	0	0	0	0,997861	0	0	0,992217

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	−0,133033	0,145051	0	0	0	0	0	0	0
22	0,145051	−0,133028	−0,012023	0	0	0	0	0	0
33	−0,0120181	−0,012023	0,024041	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0308012	0	0	−0,0440997	0	0
13	0	0	0	0	0,0304153	0	0	−0,00221762	0
23	0	0	0	0	0	0,0304153	0	0	−0,00221753
21	0	0	0	−0,0440997	0	0	0,0308013	0	0
31	0	0	0	0	−0,00221762	0	0	0,130065	0
32	0	0	0	0	0	−0,00221753	0	0	0,130063

Объемная доля включения k=0,9

$(C^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	4,45142	2,45398	2,30237	0	0	0	0	0	0
22	2,45398	4,45139	2,30236	0	0	0	0	0	0
33	2,30237	2,30236	3,75374	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1,14876	0	0	1,40123	0	0
13	0	0	0	0	1,1625	0	0	1,21022	0
23	0	0	0	0	0	1,16248	0	0	1,21027
21	0	0	0	1,40123	0	0	1,14877	0	0
31	0	0	0	0	1,21022	0	0	1,03003	0
32	0	0	0	0	0	1,21027	0	0	1,02998

$(D^{eff}_{ijkl}) =$

$\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow}$	11	22	33	12	13	23	21	31	32
11	0,0233128	−0,0155372	−0,00777563	0	0	0	0	0	0
22	−0,0155372	0,0233123	−0,00777512	0	0	0	0	0	0
33	−0,00777563	−0,00777512	0,0155507	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0,0167614	0	0	−0,05609	0	0
13	0	0	0	0	0,0180034	0	0	−0,001966	0
23	0	0	0	0	0	0,0180033	0	0	−0,00196
21	0	0	0	−0,0560954	0	0	0,0167596	0	0
31	0	0	0	0	−0,001966	0	0	0,12504	0
32	0	0	0	0	0	−0,001966	0	0	0,125039

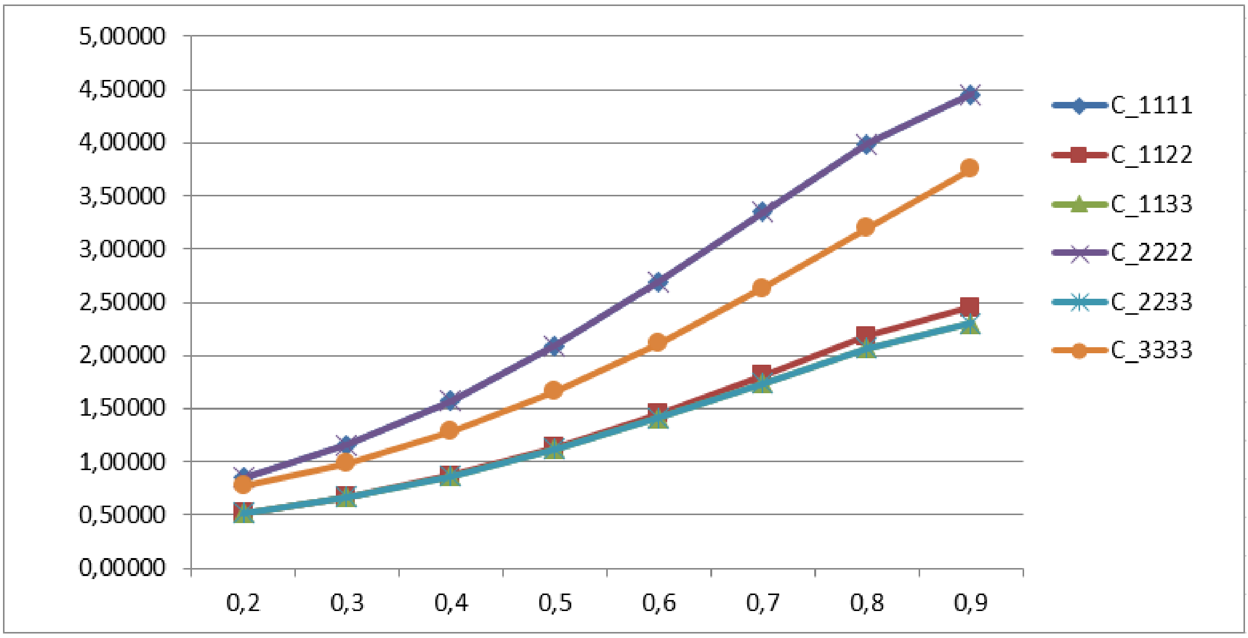

Рисунок Б.1 — График зависимости эффектиных упругих модулей от объемной доли включения

Как видно из графиков (Б.1) и (Б.2), зависимость эффектиных упругих и моментных модулей от объемной доли включения

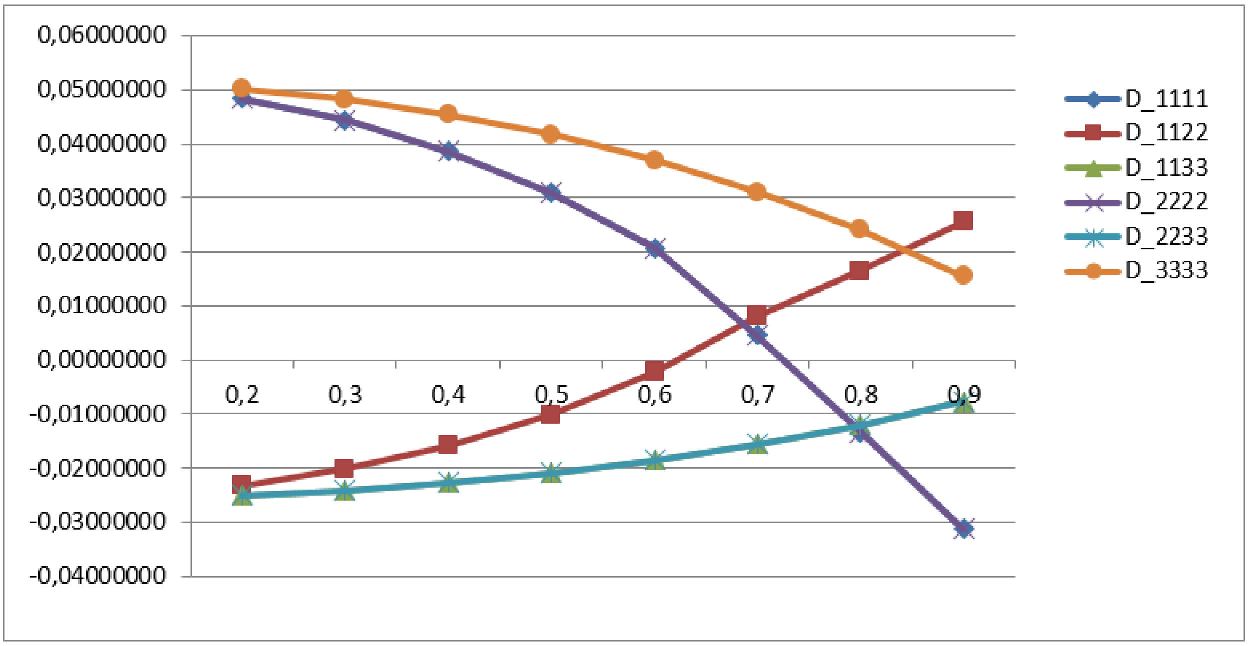

Рисунок Б.2 — График зависимости эффектиных моментных модулей от объемной доли включения

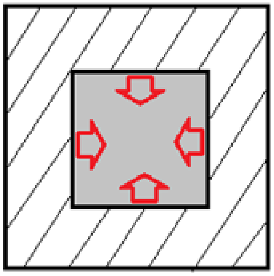

Рисунок Б.3

Б.3.2 Предельный случай, когда объемная доля включения стремится к нулю

Включение рассматриваемой ячейки периодичности представляет собой квадрат. Отношение длинны стороны этого квадрата по отношению к характерному размеру ячейки стремится к нулю.

Свойства матрицы:

$$
(C_{ijkl}^{eff}) = \left(\begin{array}{r|c|c|c}
\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\
\hline
11 & 0.604066 & 0.402711 & 0.402711 \\
\hline
22 & 0.402711 & 0.604066 & 0.402711 \\
\hline
33 & 0.402711 & 0.402711 & 0.604066
\end{array} \right)
$$

Эффективные свойства:

$$
(C_{ijkl}^{eff}) = \left(\begin{array}{r|c|c|c}
\frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\
\hline
11 & 0.604134 & 0.402743 & 0.402743 \\
\hline
22 & 0.402743 & 0.604134 & 0.402743 \\
\hline
33 & 0.402743 & 0.402743 & 0.604324
\end{array} \right)
$$

Приведенные выше результаты расчетов показывают, что численно рассчитанные эффективные свойства будут стремиться к свойствам матрицы при стремлении объемной доли включения к нулю.

Б.3.3 Предельный случай, когда объемная доля включения стремится к единице

Включение рассматриваемой ячейки периодичности представляет собой квадрат. Матрица ячейки тоже представляет квадрат. Отношение длинны стороны этого внутреннего квадрата (включения) по отношению к длине внешнего квадрата (матрице ячейки) стремится к единице. Таким образом включение "заполняет"всю ячейку периодичности.

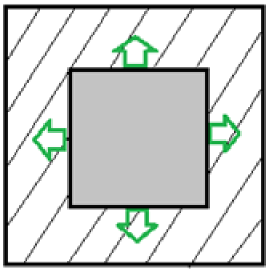

Рисунок Б.4

Свойства включения:

$$(C_{ijkl}^{eff}) = \begin{array}{c|ccc} \frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\ \hline 11 & 4.0303 & 2.0303 & 2.0303 \\ 22 & 2.0303 & 4.0303 & 2.0303 \\ 33 & 2.0303 & 2.0303 & 4.0303 \end{array}$$

Эффективные свойства:

$$(C_{ijkl}^{eff}) = \begin{array}{c|ccc} \frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\ \hline 11 & 3.96108 & 1.97495 & 1.98168 \\ 22 & 1.97495 & 3.96108 & 1.98168 \\ 33 & 1.98168 & 1.98168 & 3.97849 \end{array}$$

Приведенные выше результаты расчетов показывают, что численно рассчитанные эффективные свойства будут стремиться к свойствам включения при стремлении объемной доли включения к единице.

Б.3.4 Предельный случай, когда объемная доля включения стремится к нулю

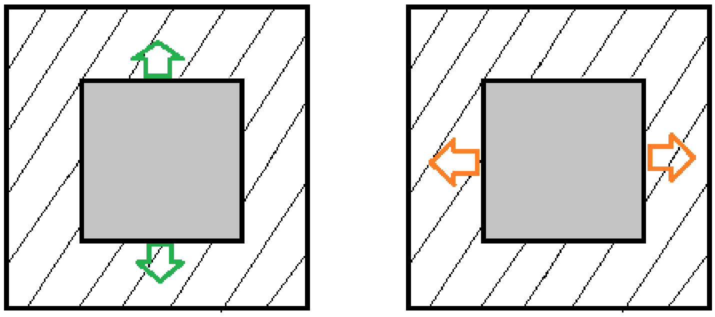

Рисунок Б.5

Матрица рассматриваемой ячейки периодичности представляет собой квадрат. Включение ячейки представляет собой прямоугольник. Отношение длинны большей стороны прямоугольника (включения) по отношению к длине внешнего квадрата (матрице ячейки) стремится к единице. Таким образом материал будет представлять из себя как слоистый материал с некоторой погрешностью.

Предельный случай волокнистого материала:

$$(C^{eff}_{ijkl}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{kl\rightarrow}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\ \hline 11 & 0.810115 & 0.500008 & 0.500404 \\ \hline 22 & 0.500008 & 1.41107 & 0.693942 \\ \hline 33 & 0.500404 & 0.693942 & 1.43556 \end{array}\right)$$

Слоистый материал:

$$(C^{eff}_{ijkl}) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} \frac{kl\to}{ij\downarrow} & 11 & 22 & 33 \\ \hline 11 & 0.810865 & 0.500948 & 0.500948 \\ \hline 22 & 0.500948 & 1.446653 & 0.705704 \\ \hline 33 & 0.500948 & 0.705704 & 1.446653 \end{array} \end{pmatrix}$$

Приведенные результаты показывают, что эффективные характеристики, рассчитанные программой для волокнистого композита, совпадают с расчетами, проведенными по аналитическим формулам для слоистого композита с некоторой погрешностью.

Б.4 Краевой эффект

Рассматривается бесконечное в одном направлении упругое тело с моментными свойствами. В двух других направлениях оно ограничено цилиндрической поверхностью. Поперечное сечение тела имеет периодическую структуру, где каждая ячейка периодичности представляет собой квадрат с квадратным включением. Матрица композита и включение изотропны.

При решении вспомогательных задач для поиска всех компонент структурных функций $N_{lmn}(x_1,x_2)$, $V_{lmn}(x_1,x_2)$, $U_{lmn}(x_1,x_2)$ и $M_{lmn}(x_1,x_2)$ можно наблюдать краевой эффект. Например, рассмотрим композит, состоящий из 25 ячеек периодичности (т.е. 5X5 как показано на (Б.6)). И решим вспомогательную задачу для поиска структурной функции N_{111} причем единственное решение систем интеградифференциальных уравнений этой задачи выбираем из условий однородности на границе, т.е. $N_{111}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta\in\Sigma} = 0$. Графика функции N_{111} представлен на рисунке (Б.7).

Одновременно с этим решаем вспомогательную задачу на ячейке для нахождения структурных функций причем единственное решение этих систем вы-

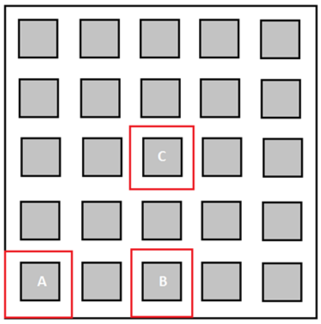

Рисунок Б.6 — Поперечное сечение композита

бирается из условий периодичности $N_{111}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=0} = N_{111}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)|_{\zeta_i=1}$ $(i = 1,2,3)$ и условий нормировки $\left\langle N_{111} \right\rangle = 0$. Графика функции N_{111} представлен на рисунке (Б.7) с подписью **Periodic**.

Далее сравниваем решения на ячейках **A** – угловая, **B** – центральная на границе, **C** – центральная как показано на картинке (Б.6) с периодическим решением.

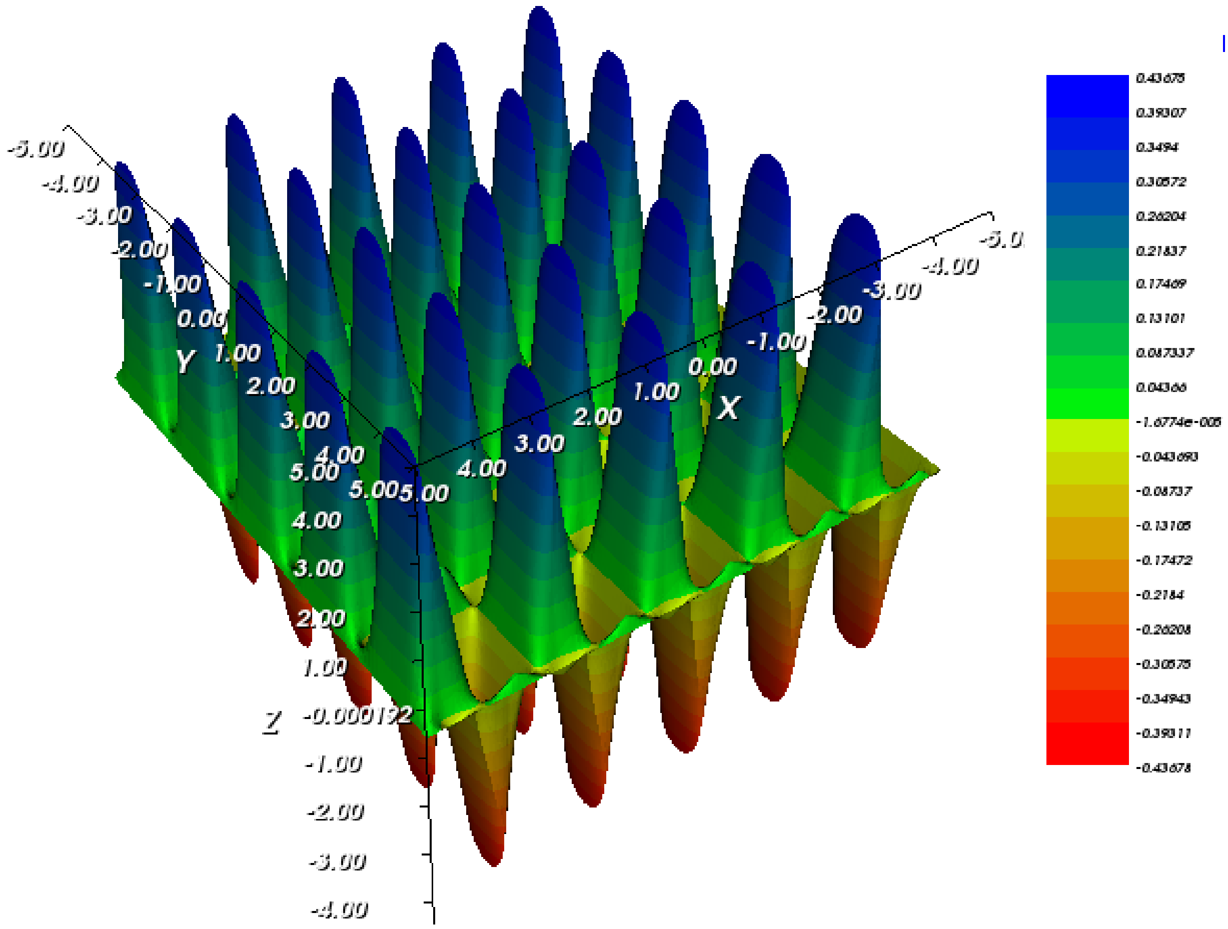

Рисунок Б.7 — График функции N_{111}

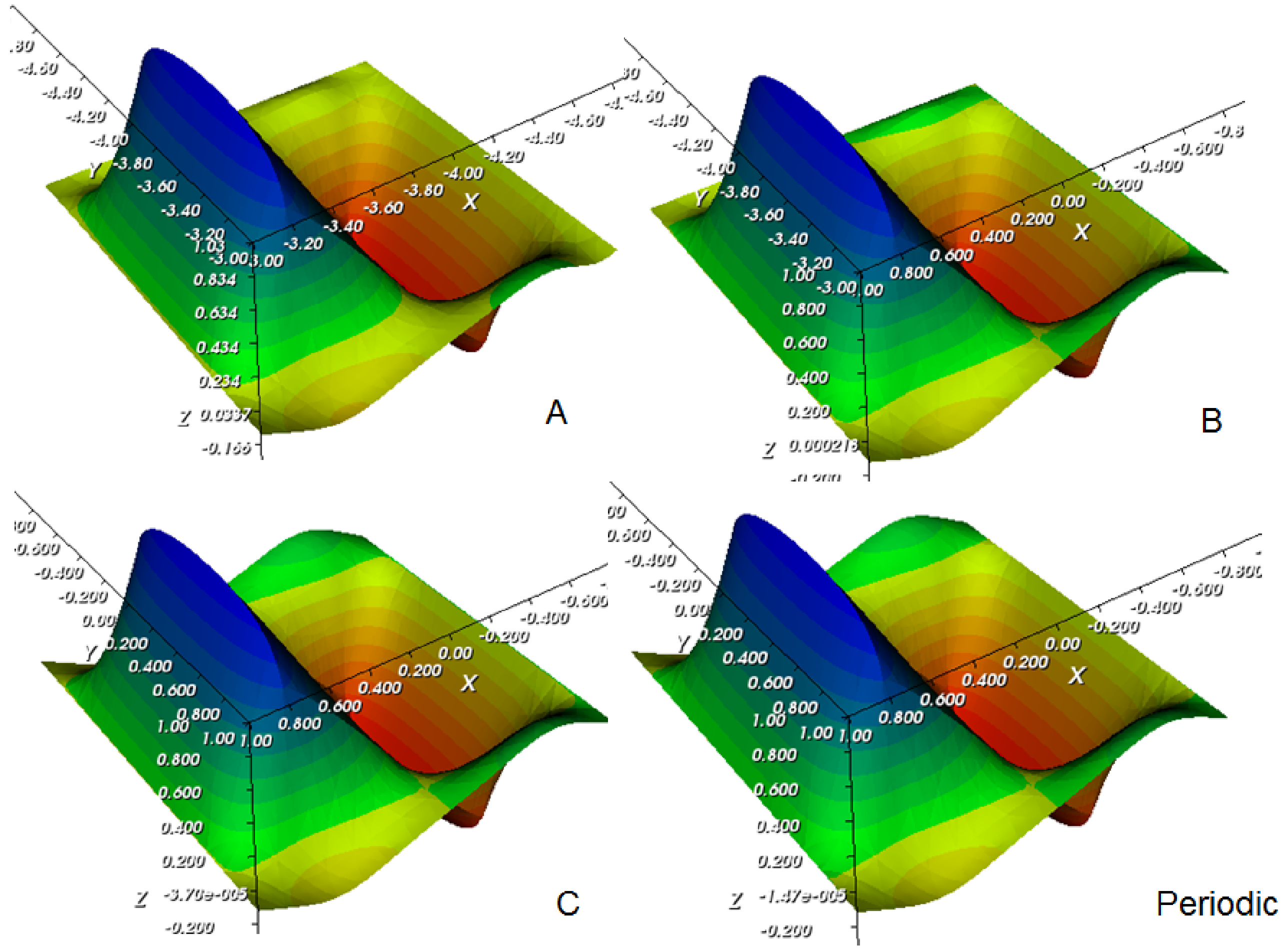

Рисунок Б.8 — График функции N_{111} на различных ячейках

Из графика функции N_{111}, который представлен на рисунке (Б.7), видно, что структурная функция очень похожа на периодическую. Причем различия наблюдаются более явно на тех ячейках, чем ближе они к цилиндрической поверхности. При удалении от границы вглубь тела функции стремятся к своим периодическим значениям на ячейке периодичности. Это хорошо видно на графиках на рисунке (Б.8) — решение на центральной ячейки **C** практически не отличается от периодического **Periodic**. Чего нельзя сказать о решениях на ячейах вблизи цилиндрической поверхности **A** и **B**.

Проведя численные расчеты для поиска всех компонент структурных функций $N_{lmn}(x_1,x_2)$, $V_{lmn}(x_1,x_2)$, $U_{lmn}(x_1,x_2)$ и $M_{lmn}(x_1,x_2)$ можно увидеть схожую тенденцию.

Следовательно, вдали от границы тела структурные функции N_{lmn}, V_{lmn}, U_{lmn} и M_{lmn} являются периодическими функциями локальных (быстрых) переменных ζ_i, т.е. в окрестности контура поперечного сечения существует пограничный слой, разделяющий области периодических значений структурных функций от непериодических. Толщина пограничного слоя сопоставима с размером структурного параметра и составляет несколько ячеек.