Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. V. Ershkov, V. V. Shchennikov, Self-similar solutions to the complete system of Navier–Stokes equations for axially symmetric swirling flows of a viscous compressible gas, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2001, Volume 41, Number 7, 1117–1124

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 176.99.213.247
May 7, 2016, 01:54:19

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2001, том 41, № 7, с. 1117–1124

УДК 519.634

# ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

© 2001 г. С. В. Ершков, В. В. Щенников

*(123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)*
*e-mail: ICAD@inapro.msk.su*

Поступила в редакцию 10.07.00 г.

Приводится расширение представлений о конических автомодельных течениях жидкости и газа, предложенных ранее. Рассматриваемое расширение позволяет построить класс приведений полных уравнений Навье–Стокса, выписанных для случая однородного вязкого сжимаемого газа, к автомодельному виду, обладающему свойством инвариантности по отношению к уравнению состояния. Прямым следствием этого свойства инвариантности является расщепление полной системы автомодельных уравнений на две независимые подсистемы: кинематическую (с исключенным давлением) и термокинематическую (с исключенными давлением и скоростями). Показано, что при определенных условиях каждая из этих систем в свою очередь редуцируется к системе двух уравнений типа Риккати (с финитными областями существования непрерывного решения).

Выпишем общий вид исходной системы дифференциальных уравнений неразрывности, движения и притока тепла при отсутствии массовых сил (в сферической системе координат $R$, $\theta$, $\varphi$) для стационарного осесимметричного ($\partial/\partial\varphi = 0$) течения вязкого сжимаемого газа (см. [1]–[3]). Начало координат совместим с началом течения, полярную ось $Ox$ направим по оси симметрии течения. Итак,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho v)}{R\partial\theta} + 2\frac{\rho u}{R} + \frac{\rho v \operatorname{ctg}\theta}{R} = 0, \tag{1}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial R} + \rho v\frac{\partial u}{R\partial\theta} - \rho\frac{v^2 + w^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\partial\tau_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial\tau_{R\theta}}{R\partial\theta} + \frac{2\tau_{RR} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{R\theta}\operatorname{ctg}\theta}{R}, \tag{2}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial R} + \rho v\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \rho\frac{uv}{R} - \rho\frac{w^2\operatorname{ctg}\theta}{R} = -\frac{\partial p}{R\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{3\tau_{R\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta}{R}, \tag{3}$$

$$\rho u\frac{\partial w}{\partial R} + \rho v\frac{\partial w}{R\partial\theta} + \rho\frac{uw}{R} + \rho\frac{vw\operatorname{ctg}\theta}{R} = \frac{\partial\tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{R\partial\theta} + \frac{3\tau_{R\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta}{R}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\rho u\frac{\partial h}{\partial R} + \rho v\frac{\partial h}{R\partial\theta} = {} & u\frac{\partial p}{\partial R} + v\frac{\partial p}{R\partial\theta} + \operatorname{div}\left(\frac{\mu}{\Pr}\operatorname{grad}h\right) + \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{u}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{R} + \frac{v\operatorname{ctg}\theta}{R}\right)^2 + \right.\\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{w\operatorname{ctg}\theta}{R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\mathbb{V})^2,\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\tau_{RR} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbb{V}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu\left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{u}{R}\right) - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbb{V},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(\frac{u}{R} + \frac{v\operatorname{ctg}\theta}{R}\right) - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbb{V}, \quad \tau_{R\theta} = \mu\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R}\right),$$

$$\tau_{R\varphi} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R}\right), \quad \tau_{\theta\varphi} = \mu\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{w\operatorname{ctg}\theta}{R}\right),$$

$$\operatorname{div}\mathbb{V} = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial v}{R\partial\theta} + 2\frac{u}{R} + \frac{v\operatorname{ctg}\theta}{R}, \quad \operatorname{grad}(\cdot) = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial R}, \frac{\partial(\cdot)}{R\partial\theta}, 0\right).$$

Здесь $u$, $v$, $w$ – соответственно, радиальная, нормальная к полярному радиусу (в меридиональной плоскости) и окружная составляющие скорости; $\tau_{RR}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{R\theta}, \tau_{R\varphi}, \tau_{\theta\varphi}$ – составляющие тензора вязких напряжений; $p$ – давление, $\rho$ – плотность, $\mu$ – динамическая вязкость, Pr – число Прандтля, $h$ – энтальпия газа.

Кроме того, применительно к газу полученную систему необходимо дополнить обобщенным уравнением состояния газа

$$p = p(\rho, T; R, \theta) \tag{6}$$

и зависимостью динамической вязкости газа от температуры (энтальпии), которую мы будем полагать степенной (здесь $a$ – показатель степени):

$$\mu(R, \theta) = \mu(h^a(R, \theta)). \tag{7}$$

При течении вязкого газа имеет место прилипание частиц газа к стенкам, ограничивающим течение, поэтому при интегрировании приведенной выше системы необходимо использовать в качестве граничного условия равенство нулю скорости течения у стенки (исключение составляют лишь струйные течения – течения газа со свободной границей [4]).

Принципиальным моментом предлагаемого в данной работе подхода к автомодельному представлению решений исходной системы уравнений Навье–Стокса (1)–(5) является отказ от необходимости конкретизации (спецификации) уравнения состояния (6) и переход к его наиболее общему виду, включающему все известные спецификации (совершенный, несовершенный, политропный, нормальный, аномальный газы).

Исходя из этого будем ограничиваться так называемым достаточным условием приводимости уравнения состояния к автомодельному виду. Этим условием является (оказывается) фактически общее условие представления функции $P = P(R, \theta)$ в виде

$$P(R, \theta) = P(R)P(\theta).$$

Если принять во внимание то обстоятельство, что, в отличие от [1], [2], в настоящей статье фигурируют размерные функции, то в исходное представление уравнения состояния (6) следует ввести так называемую функцию приведения, т.е. записать его в следующем виде:

$$P = \gamma(R, \theta)P(R)P(\theta),$$

где $\gamma(R, \theta) = \gamma_1(R)\gamma_2(\theta)$, так что

$$P = \gamma_1(R)P(R)\gamma_2(\theta)P(\theta).$$

Скрытый смысл введения функции приведения становится понятным, если принять во внимание ее операционный оттенок, состоящий, по существу, в так называемом обезразмеривании присутствующих в исходных уравнениях функций.

Действительно, вводя общее представление

$$P(R, \theta) = P(R)P(\theta),$$

необходимо скомпенсировать возникающее изменение размерности (мерности) давления.

Существо этой скрытости заключается в коническом характере рассматриваемой автомодельности, о котором впервые в мировой практике исследований заявлено в работе [5].

Раскрывая смысл коничности автомодельности (и течений вообще), мы, в свою очередь, заявляем о скрытом моменте приведения (как обезразмеривания), состоящем в связывании линейных мер – радиусов сферического и кругового (конического) представлений, т.е. появлении момента их соотнесения (отношения этих радиусов).

Отмеченное обстоятельство позволяет говорить о проявлении эффекта (фактора) собственного обезразмеривания и рассматривать введенную выше функцию приведения как функцию топологической связности (связывания).

Сохраняя форму представления автомодельного решения, предложенную в [1], [2], мы приходим к представлению

$$P(R, \theta) = P(\theta)/P(R),$$

в рамках которого $P(R)$ является обезразмеренной функцией приведенного (относительного) линейного аргумента, а $P(\theta)$ несет (в себе) размерность давления.

Исходя из сказанного, представляем функции, входящие в исходную систему уравнений, в виде

$$\begin{gathered} \mathbb{u}(R, \theta) = \mathbb{U}(\theta)/R^{\alpha}, \quad \mathbb{U} = (U, V, W), \quad h(R, \theta) = H(\theta)/R^{2\alpha}, \\ p(R, \theta) = P(\theta)/R^{1+\alpha(2a+1)}, \quad \rho(R, \theta) = \rho(\theta)/R^{1+\alpha(2a-1)}, \\ \mu(R, \theta) = \mu(\theta)/R^{2\alpha a}, \quad \mathrm{Pr}(R, \theta) = \mathrm{Pr}(\theta). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\alpha$ – константа автомодельности. Принципиально важно отметить, что в рамках предлагаемых представлений автомодельные функции $\mu(\theta)$, $\mathrm{Pr}(\theta)$ являются свободными функциями, подлежащими определению.

После подстановки представлений (8) в исходную систему уравнений получаем следующую систему автомодельных уравнений:

$$(1 - 2a\alpha)\rho U\sin\theta + (\rho V\sin\theta)' = 0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} -\alpha U^2 + VU' - (V^2 + W^2) = \frac{1}{\rho}\left([1 + \alpha(2a+1)]P + \mu\left\{U'' + U'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \mathrm{ctg}\,\theta\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + U\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1 + 2a\alpha + \alpha) - 4(\alpha+1)\right] - (\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V + (V' + V\mathrm{ctg}\,\theta)\left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3}\right]\right\}\right), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} (1-\alpha)UV + VV' - W^2\mathrm{ctg}\,\theta = \frac{1}{\rho}\left(-P' + \mu\left\{\frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \mathrm{ctg}\,\theta\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + V\left[(\alpha+1)(\alpha + 2a\alpha - 2) - \frac{2}{3}\mathrm{ctg}\,\theta\left(\frac{\mu'}{\mu} + 2\mathrm{ctg}\,\theta\right) + \frac{2}{3}\right] + U'\left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3}\right) + U\left[\frac{2}{3}(\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}\right]\right\}\right), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} V(W' + W\mathrm{ctg}\,\theta) + (1-\alpha)UW = \\ = \frac{\mu}{\rho}\left(W\{1 + (\alpha+1)[\alpha(1+2a) - 2]\} - (W\mathrm{ctg}\,\theta - W')\left(\frac{\mu'}{\mu} + \mathrm{ctg}\,\theta\right) + W''\right), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} -2\alpha\rho UH + \rho VH' = -UP[1 + \alpha(2a+1)] + VP' + 2\alpha(1 + 2a\alpha + 2\alpha)\frac{\mu H}{\mathrm{Pr}} + \\ + \left(\frac{\mu'H' + \mu H''}{\mathrm{Pr}} - \frac{\mathrm{Pr}'\mu H'}{\mathrm{Pr}^2}\right) - 4\alpha\frac{\mu H}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu H'}{\mathrm{Pr}}\mathrm{ctg}\,\theta + \mu\left\{2(\alpha U)^2 + 2(V' + U)^2 + \right. \\ \left. + 2(U + V\mathrm{ctg}\,\theta)^2 + [U' - (\alpha+1)V]^2 + (W' - W\mathrm{ctg}\,\theta)^2 + [(\alpha+1)W]^2 - \frac{2}{3}[(2-\alpha)U + V' + V\mathrm{ctg}\,\theta]^2\right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Далее: среди всех прочих решений полученной системы уравнений (9)–(13) (дополненной приведенным уравнением состояния газа и зависимостью динамической вязкости от энтальпии) особый интерес, как и оговорено выше, представляют решения, не зависящие от конкретного вида этих представлений, или, другими словами, решения, инвариантные относительно формы записи уравнения состояния газа. К тому же типу относятся решения этой системы, для которых уравнения состояния выписываются a posteriori, т.е. являются подстраиваемыми под течение.

Для достижения подобной инвариантности необходимо исключить составляющую давления $P(\theta)$ из уравнений приведенной выше системы. Итак, из уравнения (10) вытекает ($\alpha \neq -1/(2a+1)$)

$$P(\theta) = \frac{1}{1+\alpha(2a+1)}\left(-\alpha\rho U^2 + \rho VU' - \rho(V^2+W^2) - \mu\left\{U'' + U'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + U\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1)\right] - (\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V + (V' + V\operatorname{ctg}\theta)\left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3}\right]\right\}\right).$$

Продифференцировав это выражение по $\theta$, получаем следующее:

$$P'(\theta) = \frac{1}{1+\alpha(2a+1)}\left(\rho'[-\alpha U^2 + VU' - (V^2+W^2)] + \rho[-2\alpha UU' + V'U' + VU'' - \right.$$

$$-2(VV' + WW')] - \mu'\left\{U'' + U'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + U\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1)\right] - \right.$$

$$\left. - (\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V + (V' + V\operatorname{ctg}\theta)\left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3}\right]\right\} - \mu\left\{U''' + U''\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \right. \tag{14}$$

$$+ U'\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' - \frac{1}{\sin^2\theta}\right] + U'\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1)\right] - (\alpha+1)\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'V -$$

$$\left.\left. - (\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V' + \left(V'' + V'\operatorname{ctg}\theta - \frac{V}{\sin^2\theta}\right)\left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3}\right]\right\}\right);$$

но, с другой стороны, из уравнения (11) нетрудно получить

$$P' = \left(\rho((\alpha-1)UV - VV' + W^2\operatorname{ctg}\theta) + \mu\left\{\frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \right.\right.$$

$$+ V\left[(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2) - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\mu'}{\mu} + 2\operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{2}{3}\right] + \tag{15}$$

$$\left.\left. + U'\left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3}\right) + U\left[\frac{2}{3}(\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}\right]\right\}\right).$$

Сравнивая правые части выражений (14) и (15), мы можем полностью исключить составляющую давления $P(\theta)$ из дальнейшего рассмотрения, осуществляя тем самым поиск решений, инвариантных относительно уравнения состояния газа

$$\frac{\rho}{\mu}[(\alpha-1)UV - VV' + W^2\operatorname{ctg}\theta] + \left\{\frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \right.$$

$$+ V\left[(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2) - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\mu'}{\mu} + 2\operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{2}{3}\right] + U'\left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3}\right) +$$

$$\left. + U\left[\frac{2}{3}(\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}\right]\right\} = \frac{\rho}{\mu[1+\alpha(2a+1)]}[-2\alpha UU' + V'U' +$$

$$
\begin{gathered}
+VU''-2(VV'+WW')]+\frac{\rho'}{\mu[1+\alpha(2a+1)]}[-\alpha U^2+VU'-(V^2+W^2)]-\\
-\frac{\mu'}{\mu[1+\alpha(2a+1)]}\left\{U''+U'\left(\frac{\mu'}{\mu}+\operatorname{ctg}\theta\right)+U\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha)-4(\alpha+1)\right]-\right.\\
\left.-(\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V+(V'+V\operatorname{ctg}\theta)\left[\frac{4}{3}a\alpha-\frac{1}{3}\alpha-\frac{7}{3}\right]\right\}-\frac{1}{1+\alpha(2a+1)}\times\\
\times\left\{U'''+U''\left(\frac{\mu'}{\mu}+\operatorname{ctg}\theta\right)+U'\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]+U'\left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha)-4(\alpha+1)\right]-\right.\\
\left.-(\alpha+1)V\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'-(\alpha+1)\frac{\mu'}{\mu}V'+\left(V''+V'\operatorname{ctg}\theta-\frac{V}{\sin^2\theta}\right)\left[\frac{4}{3}a\alpha-\frac{1}{3}\alpha-\frac{7}{3}\right]\right\}.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Далее, следуя работе [5], будем рассматривать профили кручения потока $W(\theta)$ вида

$$W(\theta) = \beta/\sin\theta, \quad \beta = \mathrm{const} \neq 0.$$

Тогда из уравнения (12) приведенной выше системы можно записать (здесь $\alpha \neq 1$, поскольку случай $\alpha = 1$ уже рассматривался ранее в [1] и [2])

$$(1-\alpha)\rho U = \mu\left[2+(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2)-2\frac{\mu'}{\mu}\operatorname{ctg}\theta\right], \tag{17}$$

а из уравнения неразрывности (9) записать следующее:

$$(1-\alpha)(\rho V\sin\theta)' = (1-2a\alpha)\mu\sin\theta\left[2\frac{\mu'}{\mu}\operatorname{ctg}\theta-2-(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2)\right]. \tag{18}$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано, если $\alpha = 2/(1+2a)$; в этом случае можно записать ($a \neq -1/2$)

$$(1-2a)\rho U = 2(1+2a)(\mu\cos\theta)'/\sin\theta, \quad \rho V = -2\mu\operatorname{ctg}\theta \tag{19}$$

или, переписав в несколько другом виде, получить следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\mu'}{\mu} = (1-\alpha)\frac{U}{V}+\operatorname{tg}\theta, \quad \frac{\rho}{\mu} = -\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{V},\\
\frac{\rho'}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\mu\operatorname{ctg}\theta}{V}\right)' = \frac{2}{V^2}\left(\frac{V}{\sin^2\theta}+V'\operatorname{ctg}\theta\right)-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{V}\left(\frac{U}{V}(1-\alpha)+\operatorname{tg}\theta\right)
\end{gathered}
\tag{20}
$$

и также получить следующее выражение для угловой составляющей динамической вязкости:

$$\mu(\theta) = \frac{\mu_0}{\cos\theta}\exp\left((1-\alpha)\int\frac{U(\theta)}{V(\theta)}d\theta\right). \tag{21}$$

Вернемся к исследованию уравнения (16), а именно: рассмотрим случай, когда профили радиальной и нормальной к полярному радиусу составляющих скорости подобны, т.е. $U(\theta) = \xi(\theta)V(\theta)$ ($\xi(\theta)$ – некоторая функция приведения, $\xi(\theta) \in C^2$); в этом случае можно преобразовать уравнение (16) к следующему виду (используя для этого соотношения (20) и (21)):

$$
\begin{gathered}
\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{V}\left[(1-\alpha)\xi V^2+VV'-\frac{\beta^2}{\sin^2\theta}\operatorname{ctg}\theta\right]+\left(\frac{4}{3}V''+\frac{4}{3}V'[\xi(1-\alpha)+\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta]-\right.\\
\left.-\frac{2}{3}V\operatorname{ctg}\theta[\xi(1-\alpha)+2\operatorname{ctg}\theta]+\frac{2}{3}(\alpha+1)(\xi V)'+\xi V\left\{\frac{2}{3}(\alpha+1)[\xi(1-\alpha)+\operatorname{tg}\theta]\right\}\right) =
\end{gathered}
$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{V}\left[2\alpha\xi V(\xi V)' - V'(\xi V)' - V(\xi V)'' + 2\left(VV' - \frac{\beta^2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\right)\right] - \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{V^2}\left(\frac{V}{\sin^2\theta} + V'\operatorname{ctg}\theta\right) -\right.$$

$$\left.- \frac{\operatorname{ctg}\theta}{V}[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]\right\}\left[\alpha(\xi V)^2 - V(\xi V)' + \left(V^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}\right)\right] - \frac{1}{3}[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]\times$$

$$\times\{(\xi V)'' + (\xi V)'[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta] - (\alpha+1)[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]V -$$

$$-(\alpha+1)(V' + V\operatorname{ctg}\theta)\} - \frac{1}{3}\left[(\xi V)''' + (\xi V)''[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta] +\right.$$

$$+ (\xi V)'\left\{[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]' - \frac{1}{\sin^2\theta}\right\} -$$

$$\left.-(\alpha+1)V[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]' - (\alpha+1)[\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg}\theta]V' - (\alpha+1)\left(V'' + V'\operatorname{ctg}\theta - \frac{V}{\sin^2\theta}\right)\right\}.$$

При дальнейшем исследовании этого уравнения несомненный интерес, конечно же, представляет случай $U(\theta) \ll V(\theta)$ (т.е. $\xi(\theta) \longrightarrow 0$), что сходно с представлением пограничного слоя. С учетом этого условия имеем

$$(\alpha - 3)V'' + [(\alpha - 7)\operatorname{ctg}\theta + 2(\alpha - 1)\operatorname{tg}\theta]V' +$$
$$+ [2(\alpha+1)\operatorname{tg}^2\theta - (\alpha - 1)\operatorname{ctg}^2\theta + (\alpha+1)]V - \frac{2\beta^2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\frac{V'}{V^2} = 0. \qquad (22)$$

Полученное уравнение может быть представлено также в виде системы из двух дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков

$$y'' + \zeta_1(\theta)y' + \zeta_2(\theta)y = 0, \quad [\tilde{y} + \zeta_3(\theta)]\tilde{y}' = \zeta_4(\theta)\tilde{y}^2,$$

где

$$y(\theta) = V(\theta), \quad \tilde{y}(\theta) = y^2(\theta) = V^2(\theta), \quad \zeta_1(\theta) = 2\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta,$$

$$\zeta_2(\theta) = 2\operatorname{tg}^2\theta + 1 - \operatorname{ctg}^2\theta, \quad \zeta_3(\theta) = \left\{\frac{\beta^2}{2\sin^2\theta}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{tg}\theta}\right\}, \quad \zeta_3(\theta) = \left\{\frac{4\operatorname{tg}^2\theta + 2 - \operatorname{ctg}^2\theta}{\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{tg}\theta}\right\}$$

одно из которых может быть сведено заменой $f(\theta) = V'(\theta)/V(\theta)$ к уравнению типа Риккати (см. [6]), а второе является уравнением Абеля II рода (своего рода обобщением уравнений типа Риккати). Это означает, что искомое решение существует (непрерывным образом) только в определенном (узком) диапазоне значений $\theta$, или, другими словами, претерпевает разрыв на некотором луче $\theta_0$.

Из уравнения (13) можно выписать еще одно дифференциальное уравнение относительно свободной функции Прандтля $\Pr(\theta)$. Как в этом нетрудно убедиться, это уравнение также будет являться уравнением типа Риккати:

$$\Pr'(\theta) = \left[\frac{VP'}{\mu H'} - \frac{\rho V}{\mu} + \frac{2(V')^2}{H'} + \frac{2(V\operatorname{ctg}\theta)^2}{H'} + \frac{[(\alpha+1)V]^2}{H'} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{H'}\left(\frac{2\beta\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{1}{H'}\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\sin\theta}\right)^2 - \frac{2(V' + V\operatorname{ctg}\theta)^2}{3H'}\right]\Pr^2(\theta) +$$

$$+ \left[\frac{2\alpha(2a\alpha + 2\alpha - 1)H}{H'} + \operatorname{ctg}\theta + \frac{\mu'}{\mu} + \frac{H''}{H'}\right]\Pr(\theta),$$

где $V(\theta)$ находится как решение уравнения (22); выражение для $P'(\theta)$ можно получить из уравнения (15), приняв при этом $\mu(\theta) = \mu_0/\cos\theta$, $U(\theta) = 0$, $W(\theta) = \beta/\sin\theta$; выражение для $\rho(\theta)$ можно получить из соотношения (19), выражения для $H(\theta)$, $H'(\theta)$ и $H''(\theta)$ – из уравнения (7).

Перейдем теперь от “кинематического” представления выписаных выше уравнений к “термокинематическим” представлениям (через $\mu(\theta)$ и $\rho(\theta)$).

Положим $a = -1/2$ (случай, исключенный нами ранее из рассмотрения). Подставив теперь это значение в соотношения (17) и (18) и выбрав для удобства записи $\alpha = -1$, из этих соотношений мы можем записать (здесь $C$ – константа интегрирования)

$$U(\theta) = -\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}, \quad V(\theta) = \frac{C}{\rho\sin\theta},$$

а из уравнения (16) – следующее:

$$\begin{gathered}
\frac{\rho}{\mu}\left[2C\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho^2\sin^2\theta} - \frac{C}{\rho\sin\theta}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)' + \frac{\beta^2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\right] + \left\{\frac{4}{3}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'' + \frac{4}{3}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \right. \\
\left. + \frac{2}{3}\frac{C}{\rho\sin\theta}\left[1 - \operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\mu'}{\mu} + 2\operatorname{ctg}\theta\right)\right] - 2\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'\right\} = \\
= \frac{\rho}{\mu}\left\{2\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)' - \left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)' - \frac{C}{\rho\sin\theta}\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'' - 2\left[\frac{C}{\rho\sin\theta}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)' - \right.\right. \\
\left.\left. - \frac{\beta^2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\right]\right\} + \frac{\rho'}{\mu}\left\{\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)^2 - \frac{C}{\rho\sin\theta}\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)' - \left[\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}\right]\right\} + \frac{\mu'}{\mu}\left\{\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'' + \right. \\
\left. + \left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)' + \frac{C}{\rho\sin\theta}\operatorname{ctg}\theta\right]\right\} + \left\{\left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)''' + \left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'' \times \right. \\
\left. \times\left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg}\theta\right) + \left(\frac{(\mu\cos\theta)'}{\rho\sin\theta}\right)'\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' - \frac{1}{\sin^2\theta}\right] - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'' + \left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'\operatorname{ctg}\theta - \frac{C}{\rho\sin^3\theta}\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Разберем теперь случай, когда $\mu(\theta) \longrightarrow \mu_0/\cos\theta$. Здесь уравнение (23) преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{8}{3}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)'' + \left\{\frac{8}{3}(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta) + \frac{C}{\mu_0}\operatorname{ctg}\theta\right\}\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)' - \left(\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^2\theta\right)\frac{C}{\rho\sin\theta} - \\
- \left\{\frac{C}{\mu_0}\frac{\beta^2\operatorname{ctg}^2\theta}{\sin^2\theta}\right\}\frac{\rho\sin\theta}{C} + \left\{\frac{\cos\theta}{\mu_0}\left(\left(\frac{C}{\rho\sin\theta}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}\right)\right\}\rho' = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Уравнение (24) также может быть представлено в виде системы из двух дифференциальных уравнений;

$$y'' + \tau_1(\theta)y' + \tau_2(\theta)y = 0, \quad [\tilde{y} + \tau_3(\theta)]\tilde{y}' = \tau_4(\theta)\tilde{y}^2 + \tau_5(\theta)\tilde{y},$$

где

$$y(\theta) = \frac{C}{\rho(\theta)\sin\theta}, \quad \tilde{y}(\theta) = y^2(\theta) = \left(\frac{C}{\rho(\theta)\sin\theta}\right)^2,$$

$$\tau_1(\theta) = \operatorname{tg}\theta + \left(1 + \frac{3C}{8\mu_0}\right)\operatorname{ctg}\theta, \quad \tau_2(\theta) = -\operatorname{ctg}^2\theta,$$

$$\tau_3(\theta) = \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}, \quad \tau_4(\theta) = -2\operatorname{ctg}\theta, \quad \tau_5(\theta) = -4\operatorname{ctg}\theta\frac{\beta^2}{\sin^2\theta},$$

первое из которых также может быть сведено заменой $\varphi(\theta) = \eta'(\theta)/\eta(\theta)$ к уравнению типа Риккати (см. [6]), а второе является уравнением Абеля II рода (своего рода обобщением уравнений типа Риккати). Это означает, как и в рассмотренном выше "кинематическом" случае, ограниченность существования непрерывного решения во всем поле течения.

Теперь, как и ранее, можно выписать из уравнения (13) еще одно дифференциальное уравнение – уравнение типа Риккати относительно функции Прандтля $\Pr(\theta)$

$$\Pr'(\theta) = \left\{\frac{VP'}{\mu H'} - \frac{\rho V}{\mu} + \frac{1}{H'}\left[2(V')^2 + 2(V\operatorname{ctg}\theta)^2 + \left(\frac{2\beta\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\right)^2\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{2(V' + V\operatorname{ctg}\theta)^2}{3H'}\right\}\Pr^2(\theta) + \left[\frac{4H}{H'} + \frac{H''}{H'} + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta\right]\Pr(\theta),$$

где $V(\theta)$ находится из соотношения (19), в котором (в данном конкретном случае) следует положить $\mu(\theta) = \mu_0/\cos\theta$; $\rho(\theta)$ находится как решение уравнения (24); выражения для $H(\theta)$, $H'(\theta)$, $H''(\theta)$ можно получить из соотношения (7), выражение для $P'(\theta)$ – из уравнения (15), в котором (в данном конкретном случае) следует положить $U(\theta) = 0$, $W(\theta) = \beta/\sin\theta$.

Авторы выражают глубокую признательность А.П. Быркину за ценные замечания, высказанные в ходе переработки первоначального текста, которые по степени своей глубины и значимости позволяют нам считать его фактическим соавтором данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щенников В.В.* Об одном классе точных решений уравнений Навье–Стокса для случая сжимаемого теплопроводного газа // Прикл. матем. и механ. 1969. Т. 33. № 3. С. 582–584.
2. *Быркин А.П.* О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 6. С. 15–21.
3. *Пробстейн Р., Кемп Н.* Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Механика. 1961. № 2. С. 59–95.
4. *Вулис Л.А., Кашкаров В.П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
5. *Быркин А.П., Щенников В.В.* Конически автомодельные течения несжимаемой жидкости и газа с кручением // Материалы XII Школы-семинара "Аэродинамика летательных аппаратов". М.: ЦАГИ, март 2001. С. 23–24.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.