

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Ершков, В. В. Щенников, Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье–Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 7, 1117–1124

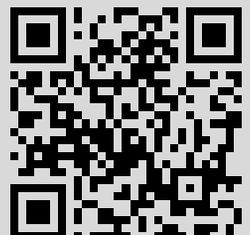
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.99.255.219

10 июля 2015 г., 14:59:52



УДК 519.634

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

© 2001 г. С. В. Еришков, В. В. Щенников

(123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)
e-mail: ICAD@inapro.msk.su

Поступила в редакцию 10.07.00 г.

Приводится расширение представлений о конических автомодельных течениях жидкости и газа, предложенных ранее. Рассматриваемое расширение позволяет построить класс приведенных полных уравнений Навье–Стокса, выписанных для случая однородного вязкого сжимаемого газа, к автомодельному виду, обладающему свойством инвариантности по отношению к уравнению состояния. Прямым следствием этого свойства инвариантности является расщепление полной системы автомодельных уравнений на две независимые подсистемы: кинематическую (с исключенным давлением) и термокинематическую (с исключенными давлением и скоростями). Показано, что при определенных условиях каждая из этих систем в свою очередь редуцируется к системе двух уравнений типа Риккати (с финитными областями существования непрерывного решения).

Выпишем общий вид исходной системы дифференциальных уравнений неразрывности, движения и притока тепла при отсутствии массовых сил (в сферической системе координат R, θ, φ) для стационарного осесимметричного ($\partial/\partial\varphi = 0$) течения вязкого сжимаемого газа (см. [1]–[3]). Начало координат совместим с началом течения, полярную ось Ox направим по оси симметрии течения. Итак,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho v)}{R\partial\theta} + 2\frac{\rho u}{R} + \frac{\rho v \operatorname{ctg}\theta}{R} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial R} + \rho v \frac{\partial u}{R\partial\theta} - \rho \frac{v^2 + w^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{R\theta}}{R\partial\theta} + \frac{2\tau_{RR} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{R\theta} \operatorname{ctg}\theta}{R}, \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial R} + \rho v \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \rho \frac{uv}{R} - \rho \frac{w^2 \operatorname{ctg}\theta}{R} = -\frac{\partial p}{R\partial\theta} + \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{3\tau_{R\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg}\theta}{R}, \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial R} + \rho v \frac{\partial w}{R\partial\theta} + \rho \frac{uw}{R} + \rho \frac{vw \operatorname{ctg}\theta}{R} = \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{R\partial\theta} + \frac{3\tau_{R\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg}\theta}{R}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial R} + \rho v \frac{\partial h}{R\partial\theta} = u \frac{\partial p}{\partial R} + v \frac{\partial p}{R\partial\theta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{\operatorname{Pr}} \operatorname{grad} h \right) + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{u}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{u}{R} + \frac{v \operatorname{ctg}\theta}{R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{w \operatorname{ctg}\theta}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{V})^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\tau_{RR} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{u}{R} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{u}{R} + \frac{v \operatorname{ctg}\theta}{R} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \tau_{R\theta} = \mu \left(\frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \right),$$

$$\tau_{R\varphi} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R} \right), \quad \tau_{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{w \operatorname{ctg} \theta}{R} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbb{V} = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + 2 \frac{u}{R} + \frac{v \operatorname{ctg} \theta}{R}, \quad \operatorname{grad}(\cdot) = \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial R}, \frac{\partial(\cdot)}{R \partial \theta}, 0 \right).$$

Здесь u, v, w – соответственно, радиальная, нормальная к полярному радиусу (в меридиональной плоскости) и окружная составляющие скорости; $\tau_{RR}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{R\theta}, \tau_{R\varphi}, \tau_{\theta\varphi}$ – составляющие тензора вязких напряжений; p – давление, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, Pr – число Прандтля, h – энтальпия газа.

Кроме того, применительно к газу полученную систему необходимо дополнить обобщенным уравнением состояния газа

$$p = p(\rho, T; R, \theta) \quad (6)$$

и зависимостью динамической вязкости газа от температуры (энтальпии), которую мы будем полагать степенной (здесь a – показатель степени):

$$\mu(R, \theta) = \mu(h^a(R, \theta)). \quad (7)$$

При течении вязкого газа имеет место прилипание частиц газа к стенкам, ограничивающим течение, поэтому при интегрировании приведенной выше системы необходимо использовать в качестве граничного условия равенство нулю скорости течения у стенки (исключение составляют лишь струйные течения – течения газа со свободной границей [4]).

Принципиальным моментом предлагаемого в данной работе подхода к автомодельному представлению решений исходной системы уравнений Навье–Стокса (1)–(5) является отказ от необходимости конкретизации (спецификации) уравнения состояния (6) и переход к его наиболее общему виду, включающему все известные спецификации (совершенный, несовершенный, полнотерпный, нормальный, аномальный газы).

Исходя из этого будем ограничиваться так называемым достаточным условием приводимости уравнения состояния к автомодельному виду. Этим условием является (оказывается) фактически общее условие представления функции $P = P(R, \theta)$ в виде

$$P(R, \theta) = P(R)P(\theta).$$

Если принять во внимание то обстоятельство, что, в отличие от [1], [2], в настоящей статье фигурируют размерные функции, то в исходное представление уравнения состояния (6) следует ввести так называемую функцию приведения, т.е. записать его в следующем виде:

$$P = \gamma(R, \theta)P(R)P(\theta),$$

где $\gamma(R, \theta) = \gamma_1(R)\gamma_2(\theta)$, так что

$$P = \gamma_1(R)P(R)\gamma_2(\theta)P(\theta).$$

Скрытый смысл введения функции приведения становится понятным, если принять во внимание ее операционный оттенок, состоящий, по существу, в так называемом обезразмеривании присутствующих в исходных уравнениях функций.

Действительно, вводя общее представление

$$P(R, \theta) = P(R)P(\theta),$$

необходимо скомпенсировать возникающее изменение размерности (мерности) давления.

Существо этой скрытости заключается в коническом характере рассматриваемой автомодельности, о котором впервые в мировой практике исследований заявлено в работе [5].

Раскрывая смысл коничности автомодельности (и течений вообще), мы, в свою очередь, заявляем о скрытом моменте приведения (как обезразмеривания), состоящем в связывании линейных мер – радиусов сферического и кругового (конического) представлений, т.е. появлении момента их соотношения (отношения этих радиусов).

Отмеченное обстоятельство позволяет говорить о проявлении эффекта (фактора) собственного обезразмеривания и рассматривать введенную выше функцию приведения как функцию топологической связности (связывания).

Сохраняя форму представления автомодельного решения, предложенную в [1], [2], мы приходим к представлению

$$P(R, \theta) = P(\theta)/P(R),$$

в рамках которого $P(R)$ является обезразмеренной функцией приведенного (относительного) линейного аргумента, а $P(\theta)$ несет (в себе) размерность давления.

Исходя из сказанного, представляем функции, входящие в исходную систему уравнений, в виде

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= U(\theta)/R^\alpha, \quad U = (U, V, W), \quad h(R, \theta) = H(\theta)/R^{2\alpha}, \\ p(R, \theta) &= P(\theta)/R^{1+\alpha(2a+1)}, \quad \rho(R, \theta) = \rho(\theta)/R^{1+\alpha(2a-1)} \\ \mu(R, \theta) &= \mu(\theta)/R^{2\alpha a}, \quad \text{Pr}(R, \theta) = \text{Pr}(\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь α – константа автомодельности. Принципиально важно отметить, что в рамках предлагаемых представлений автомодельные функции $\mu(\theta)$, $\text{Pr}(\theta)$ являются свободными функциями, подлежащими определению.

После подстановки представлений (8) в исходную систему уравнений получаем следующую систему автомодельных уравнений:

$$(1 - 2a\alpha)\rho U \sin \theta + (\rho V \sin \theta)' = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\alpha U^2 + VU' - (V^2 + W^2) &= \frac{1}{\rho} \left\{ [1 + \alpha(2a + 1)]P + \mu \left\{ U'' + U' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \text{ctg} \theta \right) + \right. \right. \\ &+ U \left[\frac{4}{3}(\alpha + 1)(1 + 2a\alpha + \alpha) - 4(\alpha + 1) \right] - (\alpha + 1) \frac{\mu'}{\mu} V + (V' + V \text{ctg} \theta) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)UV + VV' - W^2 \text{ctg} \theta &= \frac{1}{\rho} \left\{ -P' + \mu \left[\frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \text{ctg} \theta \right) + \right. \right. \\ &+ V \left[(\alpha + 1)(\alpha + 2a\alpha - 2) - \frac{2}{3} \text{ctg} \theta \left(\frac{\mu'}{\mu} + 2 \text{ctg} \theta \right) + \frac{2}{3} \right] + U' \left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3} \right) + U \left[\frac{2}{3}(\alpha + 1) \frac{\mu'}{\mu} \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V(W' + W \text{ctg} \theta) + (1 - \alpha)UW &= \\ = \frac{\mu}{\rho} \left\{ W \{ 1 + (\alpha + 1)[\alpha(1 + 2a) - 2] \} - (W \text{ctg} \theta - W') \left(\frac{\mu'}{\mu} + \text{ctg} \theta \right) + W'' \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -2\alpha\rho UH + \rho VH' &= -UP[1 + \alpha(2a + 1)] + VP' + 2\alpha(1 + 2a\alpha + 2\alpha) \frac{\mu H}{\text{Pr}} + \\ &+ \left(\frac{\mu' H' + \mu H''}{\text{Pr}} - \frac{\text{Pr}' \mu H'}{\text{Pr}^2} \right) - 4\alpha \frac{\mu H}{\text{Pr}} + \frac{\mu H'}{\text{Pr}} \text{ctg} \theta + \mu \left\{ 2(\alpha U)^2 + 2(V' + U)^2 + \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left. + 2(U + V \text{ctg} \theta)^2 + [U' - (\alpha + 1)V]^2 + (W' - W \text{ctg} \theta)^2 + [(\alpha + 1)W]^2 - \frac{2}{3}[(2 - \alpha)U + V' + V \text{ctg} \theta]^2 \right\}.$$

Далее: среди всех прочих решений полученной системы уравнений (9)–(13) (дополненной приведенным уравнением состояния газа и зависимостью динамической вязкости от энтальпии) особый интерес, как и оговорено выше, представляют решения, не зависящие от конкретного вида этих представлений, или, другими словами, решения, инвариантные относительно формы записи уравнения состояния газа. К тому же типу относятся решения этой системы, для которых уравнения состояния выписываются a posteriori, т.е. являются подстраиваемыми под течение.

Для достижения подобной инвариантности необходимо исключить составляющую давления $P(\theta)$ из уравнений приведенной выше системы. Итак, из уравнения (10) вытекает ($\alpha \neq -1/(2a+1)$)

$$P(\theta) = \frac{1}{1+\alpha(2a+1)} \left(-\alpha\rho U^2 + \rho VU' - \rho(V^2 + W^2) - \mu \left\{ U'' + U' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + U \left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1) \right] - (\alpha+1) \frac{\mu'}{\mu} V + (V' + V \operatorname{ctg} \theta) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \right\} \right).$$

Продифференцировав это выражение по θ , получаем следующее:

$$P'(\theta) = \frac{1}{1+\alpha(2a+1)} \left(\rho'[-\alpha U^2 + VU' - (V^2 + W^2)] + \rho[-2\alpha UU' + V'U' + VU'' - \right. \\ \left. - 2(VV' + WW')] - \mu' \left\{ U'' + U' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + U \left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1) \right] - \right. \\ \left. - (\alpha+1) \frac{\mu'}{\mu} V + (V' + V \operatorname{ctg} \theta) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \right\} - \mu \left\{ U''' + U'' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ \left. + U' \left[\left(\frac{\mu'}{\mu} \right)' - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] + U \left[\frac{4}{3}(\alpha+1)(1+2a\alpha+\alpha) - 4(\alpha+1) \right] - (\alpha+1) \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)' V - \right. \\ \left. - (\alpha+1) \frac{\mu'}{\mu} V' + \left(V'' + V' \operatorname{ctg} \theta - \frac{V}{\sin^2 \theta} \right) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \right\} \right); \quad (14)$$

но, с другой стороны, из уравнения (11) нетрудно получить

$$P' = \left(\rho((\alpha-1)UV - VV' + W^2 \operatorname{ctg} \theta) + \mu \left\{ \frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + V \left[(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2) - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\mu'}{\mu} + 2 \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{2}{3} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + U \left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3} \right) + U \left[\frac{2}{3}(\alpha+1) \frac{\mu'}{\mu} \right] \right\} \right). \quad (15)$$

Сравнивая правые части выражений (14) и (15), мы можем полностью исключить составляющую давления $P(\theta)$ из дальнейшего рассмотрения, осуществляя тем самым поиск решений, инвариантных относительно уравнения состояния газа

$$\frac{\rho}{\mu} [(\alpha-1)UV - VV' + W^2 \operatorname{ctg} \theta] + \left\{ \frac{4}{3}V'' + \frac{4}{3}V' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ \left. + V \left[(\alpha+1)(\alpha+2a\alpha-2) - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\mu'}{\mu} + 2 \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{2}{3} \right] + U \left(\frac{8}{3} - 2a\alpha - \frac{\alpha}{3} \right) + \right. \\ \left. + U \left[\frac{2}{3}(\alpha+1) \frac{\mu'}{\mu} \right] \right\} = \frac{\rho}{\mu[1+\alpha(2a+1)]} [-2\alpha UU' + V'U' +$$

$$\begin{aligned}
 & + VU'' - 2(VV' + WW') \Big] + \frac{\rho'}{\mu[1 + \alpha(2a + 1)]} [-\alpha U^2 + VU' + (V^2 + W^2)] = \\
 & - \frac{\mu'}{\mu[1 + \alpha(2a + 1)]} \left\{ U'' + U' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + U \left[\frac{4}{3}(\alpha + 1)(1 + 2a\alpha + \alpha) - 4(\alpha + 1) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - (\alpha + 1) \frac{\mu'}{\mu} V + (V' + V \operatorname{ctg} \theta) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \right\} - \frac{1}{1 + \alpha(2a + 1)} \times \\
 & \times \left\{ U''' + U'' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + U' \left[\left(\frac{\mu'}{\mu} \right)' - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] + U' \left[\frac{4}{3}(\alpha + 1)(1 + 2a\alpha + \alpha) - 4(\alpha + 1) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - (\alpha + 1) V \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)' - (\alpha + 1) \frac{\mu'}{\mu} V' + \left(V'' + V' \operatorname{ctg} \theta - \frac{V}{\sin^2 \theta} \right) \left[\frac{4}{3}a\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{7}{3} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, следуя работе [5], будем рассматривать профили кручения потока $W(\theta)$ вида

$$W(\theta) = \beta / \sin \theta, \quad \beta = \text{const} \neq 0.$$

Тогда из уравнения (12) приведенной выше системы можно записать (здесь $\alpha \neq 1$, поскольку случай $\alpha = 1$ уже рассматривался ранее в [1] и [2])

$$(1 - \alpha)\rho U = \mu \left[2 + (\alpha + 1)(\alpha + 2a\alpha - 2) - 2 \frac{\mu'}{\mu} \operatorname{ctg} \theta \right], \tag{17}$$

а из уравнения неразрывности (9) записать следующее:

$$(1 - \alpha)(\rho V \sin \theta)' = (1 - 2a\alpha)\mu \sin \theta \left[2 \frac{\mu'}{\mu} \operatorname{ctg} \theta - 2 - (\alpha + 1)(\alpha + 2a\alpha - 2) \right]. \tag{18}$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано, если $\alpha = 2/(1 + 2a)$; в этом случае можно записать ($a \neq -1/2$)

$$(1 - 2a)\rho U = 2(1 + 2a)(\mu \cos \theta)' / \sin \theta, \quad \rho V = -2\mu \operatorname{ctg} \theta \tag{19}$$

или, переписав в несколько другом виде, получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu'}{\mu} &= (1 - \alpha) \frac{U}{V} + \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{\rho}{\mu} = -\frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{V}, \\
 \frac{\rho'}{\mu} &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{2\mu \operatorname{ctg} \theta}{V} \right)' = \frac{2}{V^2} \left(\frac{V}{\sin^2 \theta} + V' \operatorname{ctg} \theta \right) - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{V} \left(\frac{U}{V} (1 - \alpha) + \operatorname{tg} \theta \right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

и также получить следующее выражение для угловой составляющей динамической вязкости:

$$\mu(\theta) = \frac{\mu_0}{\cos \theta} \exp \left((1 - \alpha) \int \frac{U(\theta)}{V(\theta)} d\theta \right). \tag{21}$$

Вернемся к исследованию уравнения (16), а именно: рассмотрим случай, когда профили радиальной и нормальной к полярному радиусу составляющих скорости подобны, т.е. $U(\theta) = \xi(\theta)V(\theta)$ ($\xi(\theta)$ – некоторая функция приведения, $\xi(\theta) \in C^2$); в этом случае можно преобразовать уравнение (16) к следующему виду (используя для этого соотношения (20) и (21)):

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{V} \left[(1 - \alpha) \xi V^2 + VV' - \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] + \left(\frac{4}{3} V'' + \frac{4}{3} V' [\xi(1 - \alpha) + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{3} V \operatorname{ctg} \theta [\xi(1 - \alpha) + 2 \operatorname{ctg} \theta] + \frac{2}{3} (\alpha + 1) (\xi V)' + \xi V \left\{ \frac{2}{3} (\alpha + 1) [\xi(1 - \alpha) + \operatorname{tg} \theta] \right\} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{3} \frac{\theta}{V} \left[2\alpha \xi V (\xi V)' + V' (\xi V)' - V (\xi V)'' + 2 \left(V V' - \frac{\beta^2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{V^2} \left(\frac{V}{\sin^2 \theta} + V' \operatorname{ctg} \theta \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{V} [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta] \right\} \left[\alpha (\xi V)^2 - V (\xi V)' + \left(V^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{1}{3} [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta] \times \\
&\quad \times \{ (\xi V)'' + (\xi V)' [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta] - (\alpha+1) [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta] V - \\
&\quad - (\alpha+1) (V' + V \operatorname{ctg} \theta) \} - \frac{1}{3} \left[(\xi V)''' + (\xi V)'' [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta] + \right. \\
&\quad \left. + (\xi V)' \left\{ [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta]' - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right\} - \right. \\
&\quad \left. - (\alpha+1) V [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta]' - (\alpha+1) [\xi(1-\alpha) + \operatorname{tg} \theta] V' - (\alpha+1) \left(V'' + V' \operatorname{ctg} \theta - \frac{V}{\sin^2 \theta} \right) \right].
\end{aligned}$$

При дальнейшем исследовании этого уравнения несомненный интерес, конечно же, представляет случай $U(\theta) \ll V(\theta)$ (т.е. $\xi(\theta) \rightarrow 0$), что сходно с представлением пограничного слоя. С учетом этого условия имеем

$$\begin{aligned}
&(\alpha-3)V'' + [(\alpha-7)\operatorname{ctg} \theta + 2(\alpha-1)\operatorname{tg} \theta]V' + \\
&+ [2(\alpha+1)\operatorname{tg}^2 \theta - (\alpha-1)\operatorname{ctg}^2 \theta + (\alpha+1)]V - \frac{2\beta^2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \frac{V'}{V^2} = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Полученное уравнение может быть представлено также в виде системы из двух дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков

$$y'' + \zeta_1(\theta)y' + \zeta_2(\theta)y = 0, \quad [\tilde{y}' + \zeta_3(\theta)]\tilde{y}' = \zeta_4(\theta)\tilde{y}^2,$$

где

$$y(\theta) = V(\theta), \quad \tilde{y}(\theta) = y^2(\theta) = V^2(\theta), \quad \zeta_1(\theta) = 2\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\zeta_2(\theta) = 2\operatorname{tg}^2 \theta + 1 - \operatorname{ctg}^2 \theta, \quad \zeta_3(\theta) = \left\{ \frac{\beta^2}{2\sin^2 \theta} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{tg} \theta} \right\}, \quad \zeta_4(\theta) = \left\{ \frac{4\operatorname{tg}^2 \theta + 2 - \operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{tg} \theta} \right\}$$

одно из которых может быть сведено заменой $f(\theta) = V'(\theta)/V(\theta)$ к уравнению типа Риккати (см. [6]), а второе является уравнением Абеля II рода (своего рода обобщением уравнений типа Риккати). Это означает, что искомое решение существует (непрерывным образом) только в определенном (узком) диапазоне значений θ , или, другими словами, претерпевает разрыв на некотором луче θ_0 .

Из уравнения (13) можно выписать еще одно дифференциальное уравнение относительно свободной функции Прандтля $\operatorname{Pr}(\theta)$. Как в этом нетрудно убедиться, это уравнение также будет являться уравнением типа Риккати:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Pr}'(\theta) = & \left[\frac{V P'}{\mu H'} - \frac{\rho V}{\mu} + \frac{2(V')^2}{H'} + \frac{2(V \operatorname{ctg} \theta)^2}{H'} + \frac{[(\alpha+1)V]^2}{H'} + \right. \\
& + \frac{1}{H'} \left(\frac{2\beta \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{H'} \left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\sin \theta} \right)^2 - \frac{2(V' + V \operatorname{ctg} \theta)^2}{3H'} \left. \right] \operatorname{Pr}^2(\theta) + \\
& + \left[\frac{2\alpha(2\alpha+2\alpha-1)H'}{H'} + \operatorname{ctg} \theta + \frac{\mu'}{\mu} + \frac{H''}{H'} \right] \operatorname{Pr}(\theta),
\end{aligned}$$

где $V(\theta)$ находится как решение уравнения (22); выражение для $P'(\theta)$ можно получить из уравнения (15), приняв при этом $\mu(\theta) = \mu_0/\cos\theta$, $U(\theta) = 0$, $W(\theta) = \beta/\sin\theta$; выражение для $\rho(\theta)$ можно получить из соотношения (19), выражения для $H(\theta)$, $H'(\theta)$ и $H''(\theta)$ – из уравнения (7).

Перейдем теперь от “кинематического” представления выписанных выше уравнений к “термокинематическим” представлениям (через $\mu(\theta)$ и $\rho(\theta)$).

Положим $a = -1/2$ (случай, исключенный нами ранее из рассмотрения). Подставив теперь это значение в соотношения (17) и (18) и выбрав для удобства записи $\alpha = -1$; из этих соотношений мы можем записать (здесь C – константа интегрирования)

$$U(\theta) = -\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta}, \quad V(\theta) = \frac{C}{\rho \sin \theta},$$

а из уравнения (16) – следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{\mu} \left[2C \frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho^2 \sin^2 \theta} - \frac{C}{\rho \sin \theta} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' + \frac{\beta^2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \right] + \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)'' + \frac{4}{3} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \frac{C}{\rho \sin \theta} \left[1 - \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\mu'}{\mu} + 2 \operatorname{ctg} \theta \right) \right] - 2 \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' \right\} = \\ & = \frac{\rho}{\mu} \left\{ 2 \frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' - \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' - \frac{C}{\rho \sin \theta} \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)'' - 2 \left[\frac{C}{\rho \sin \theta} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta^2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \right] \right\} + \frac{\rho'}{\mu} \left\{ \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)^2 - \frac{C}{\rho \sin \theta} \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' - \left[\left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\} + \frac{\mu'}{\mu} \left\{ \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)'' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) - \frac{4}{3} \left[\left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' + \frac{C}{\rho \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \right] \right\} + \left\{ \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)'' + \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\mu'}{\mu} + \operatorname{ctg} \theta \right) + \left(\frac{(\mu \cos \theta)'}{\rho \sin \theta} \right)' \left[\left(\frac{\mu'}{\mu} \right)' - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{4}{3} \left[\left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)'' + \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' \operatorname{ctg} \theta - \frac{C}{\rho \sin^3 \theta} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Разберем теперь случай, когда $\mu(\theta) \rightarrow \mu_0/\cos\theta$. Здесь уравнение (23) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)'' + \left\{ \frac{8}{3} (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta) + \frac{C}{\mu_0} \operatorname{ctg} \theta \right\} \left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)' - \left(\frac{8}{3} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) \frac{C}{\rho \sin \theta} - \\ & - \left\{ \frac{C \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\mu_0 \sin^2 \theta} \right\} \frac{\rho \sin \theta}{C} + \left\{ \frac{\cos \theta}{\mu_0} \left[\left(\frac{C}{\rho \sin \theta} \right)^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\} \rho' = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Уравнение (24) также может быть представлено в виде системы из двух дифференциальных уравнений;

$$y'' + \tau_1(\theta)y' + \tau_2(\theta)y = 0, \quad [\tilde{y} + \tau_3(\theta)]\tilde{y}' = \tau_4(\theta)\tilde{y}^2 + \tau_5(\theta)\tilde{y},$$

где

$$y(\theta) = \frac{C}{\rho(\theta)\sin\theta}, \quad \tilde{y}(\theta) = y^2(\theta) = \left(\frac{C}{\rho(\theta)\sin\theta} \right)^2,$$

$$\tau_1(\theta) = \operatorname{tg} \theta + \left(1 + \frac{3C}{8\mu_0} \right) \operatorname{ctg} \theta, \quad \tau_2(\theta) = -\operatorname{ctg}^2 \theta,$$

$$\tau_3(\theta) = \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta}, \quad \tau_4(\theta) = -2 \operatorname{ctg} \theta, \quad \tau_5(\theta) = -4 \operatorname{ctg} \theta \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta},$$

первое из которых также может быть сведено заменой $\varphi(\theta) = \eta'(\theta)/\eta(\theta)$ к уравнению типа Риккати (см. [6]), а второе является уравнением Абеля II рода (своего рода обобщением уравнений типа Риккати). Это означает, как и в рассмотренном выше “кинематическом” случае, ограниченность существования непрерывного решения во всем поле течения.

Теперь, как и ранее, можно выписать из уравнения (13) еще одно дифференциальное уравнение – уравнение типа Риккати относительно функции Прандтля $\operatorname{Pr}(\theta)$

$$\operatorname{Pr}'(\theta) = \left\{ \frac{VP'}{\mu H'} - \frac{\rho V}{\mu} + \frac{1}{H'} \left[2(V')^2 + 2(V \operatorname{ctg} \theta)^2 + \left(\frac{2\beta \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right] - \frac{2(V' + V \operatorname{ctg} \theta)^2}{3H'} \right\} \operatorname{Pr}^2(\theta) + \left[\frac{4H}{H'} + \frac{H''}{H'} + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta \right] \operatorname{Pr}(\theta),$$

где $V(\theta)$ находится из соотношения (19), в котором (в данном конкретном случае) следует положить $\mu(\theta) = \mu_0/\cos \theta$; $\rho(\theta)$ находится как решение уравнения (24); выражения для $H(\theta)$, $H'(\theta)$, $H''(\theta)$ можно получить из соотношения (7), выражение для $P'(\theta)$ – из уравнения (15), в котором (в данном конкретном случае) следует положить $U(\theta) = 0$, $W(\theta) = \beta/\sin \theta$.

Авторы выражают глубокую признательность А.П. Быркину за ценные замечания, высказанные в ходе переработки первоначального текста, которые по степени своей глубины и значимости позволяют нам считать его фактическим соавтором данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щенников В.В.* Об одном классе точных решений уравнений Навье–Стокса для случая сжимаемого теплопроводного газа // Прикл. матем. и механ. 1969. Т. 33. № 3. С. 582–584.
2. *Быркин А.П.* О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 6. С. 15–21.
3. *Пробштейн Р., Кемп Н.* Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Механика. 1961. № 2. С. 59–95.
4. *Вулис Л.А., Кашкаров В.П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
5. *Быркин А.П., Щенников В.В.* Конические автомодельные течения несжимаемой жидкости и газа с кручением // Материалы XII Школы-семинара “Аэродинамика летательных аппаратов”. М.: ЦАГИ, март 2001. С. 23–24.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.