МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙУНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова

# ВИХРЕВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Москва 2006 год

УДК 532.5+534.3+534.315
ББК 22.253.3
А32

*Рецензенты:*
д.т.н., профессор А.С ГИНЕВСКИЙ,
д.ф-м.н., профессор Н.Н. СМИРНОВ

А32 Андронов П.Р., Гувернюк С.В, Дынникова Г.Я.
**Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок.** –
М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.-184 с.

ISBN 5-211-05256-0

Получены формулы, выражающие давление и гидродинамические нагрузки на тела в нестационарном потоке идеальной или вязкой несжимаемой жидкости через распределения свободной и несвободной (сопряженной) завихренности. Разработан бессеточный численный метод вязких вихревых доменов (ВВД) для моделирования плоских и осесимметричных нестационарных течений. Предложены способы постановки и совместного решения сопряженных задач динамики и аэрогидромеханики. Приводятся примеры применения метода ВВД.

Для специалистов по вихревым методам, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики.

УДК 532.5+534.3+534.315

ББК 22.253.3

ISBN 5-211-05256-0

*Вихри – это «мышцы и жилы» гидродинамики*

Д. Кюхеманн, 1965[1]

*Основной проблемой механики жидкости и газа со времени ее создания была и остается проблема о силах взаимодействия тел и движущейся жидкости.*

Г.Ю. Степанов, 1978[2]

# ВВЕДЕНИЕ

## 1. Обзор содержания

Исследование движения тел в сопротивляющейся жидкой или газообразной среде и вычисление возникающих при этом нестационарных аэро – или гидродинамических нагрузок является актуальной проблемой в аэрогидромеханике. В общем случае течение жидкости и движение погруженных в нее тел взаимообусловлены. Тела испытывают сопротивление и иные гидродинамические нагрузки, зависящие как от параметров их движения, так и от характеристик течения возмущенной этими телами среды. Возникает необходимость постановки так называемых сопряженных задач, в которых тела и жидкость рассматриваются вместе как одна динамическая система. Соответствующие задачи, как правило, не удается исследовать аналитически, необходимо применять специальные численные методы.

Сопряженные постановки задач важны при моделировании машущего полета, явлений авторотации, аэроупругости, аэродинамики высокоманевренных летательных аппаратов, ветродвигателей и иных устройств типа маятников, флюгеров, вертушек, при анализе

[1] [1], стр. 7.

[2] [2], стр. 5.

устойчивости парашютных систем, отыскании способов предотвращения штопора летательных аппаратов и во многих других случаях.

В вышеперечисленных примерах, а также при моделировании обтекания деформируемых тел применение сеточных численных методов затруднено, так как при движении границ области течения требуется либо постоянное перепостроение моноблочной эйлеровой сетки, либо пересчет взаимного перекрытия блоков многоблочной сетки. Использование вихревых методов с лагранжевой системой координат оказывается более удобным. При этом силовое воздействие движущейся среды на тело должно быть выражено через характеристики вихревого поля. До недавнего времени такие формулы существовали лишь для ограниченного класса течений.

Настоящая книга объединяет цикл оригинальных работ авторов, выполненных, в основном, в период 2002-2006 г.г. при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00670, 04-01-00554, 06-08-01217) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ НШ-8597.2006.1. Результаты многократно докладывались на конференциях МГУ "Ломоносовские чтения", Всероссийских школах-семинарах "Современные проблемы аэрогидродинамики" (XI, XII, XIII, XIV), международных симпозиумах и школах-семинарах «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики» (IX, XI, XIII) "Модели и методы аэромеханики" (III, IV, V), "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости" (XV, XVI) и др.

В главе 1 излагаются основные принципы вихревого моделирования течений несжимаемой жидкости, описывается разработанный авторами бессеточный численный метод вязких вихревых доменов (ВВД).

В главе 2 приводится вывод обобщенных интегральных представлений для давления в вихревом потоке жидкости, а также для гидродинамических сил и моментов, действующих на объемные тела и бесконечно тонкие поверхности (жесткие, деформируемые и проницаемые) при обтекании вязкой или идеальной несжимаемой жидкостью, в том числе, при наличии отсоса и вдува. Давление и силы выражены через характеристики вихревых полей, что позволяет использовать данные представления при решении сопряженных задач вихревыми методами. Некоторые из этих формул уже публиковались в предшествующих работах авторов, некоторые представляются впервые (например, обобщенные выражения для сил и моментов при наличии вдува, отсоса и проницаемости).

В главе 3 приводятся расчетные схемы для различных типов двумерных течений идеальной и вязкой жидкости, включая сопряженные задачи динамики и аэрогидродинамики с использованием (изложенных в главе 2) интегральных представлений для нестационарных гидродинамических нагрузок.

Глава 4 содержит примеры численного решения двумерных задач аэрогидродинамики методом вязких вихревых доменов с учетом вязкости среды и наличия у обтекаемых тел степеней свободы.

Авторы считают своим долгом почтить светлую память профессора Г.Ю. Степанова (1922-2005), уделявшего постоянное внимание их исследованиям в данном направлении.

## 2. Некоторые формулы векторного анализа с исполь-зованием оператора Гамильтона

Некоторые формулы векторного анализа с исполь-зованием оператора Гамильтона

При выводе формул в данной работе широко используется формализм оператора Гамильтона $\nabla$, который оказывается чрезвычайно удобным во многих вопросах векторного анализа. Для того чтобы облегчить понимание работы читателю, недостаточно владеющему этим формализмом, в данном разделе приводятся основные формулы и правила работы с этим оператором [3].

Оператор $\nabla$ в трехмерном евклидовом пространстве есть

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

При помощи этого оператора компактно записываются такие выражения, как градиент скалярной функции

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla\varphi,$$

ротор векторной функции

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{a},$$

дивергенция векторной функции

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla\mathbf{a}),$$

производная функции по направлению вектора **a**

$$(\mathbf{a}\nabla)f = \left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)f\ .$$

Поскольку оператор $(\mathbf{a}\nabla)$ представляет собой скаляр, он может быть применен как к скалярной функции, так и к векторной.

Как известно, при дифференцировании функции, представляющей собой произведение двух или нескольких функций, результат можно записать в виде суммы слагаемых, в каждом из которых дифференцирование применено только к одному сомножителю. Аналогичное правило действует и в случае использования оператора $\nabla$, например

$$\nabla\varphi\psi = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi\ .$$

В дальнейшем будем придерживаться следующего правила: сомножители, на которые оператор дифференцирования не действует, будем записывать слева от этого оператора или, в том случае, когда это невозможно, будем их подчеркивать. На все неподчеркнутые сомножители, стоящие справа от $\nabla$, независимо от расстановки скобок, действие оператора будем считать распространяющимся. Например, запись $(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}$ означает

$$(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b} = \left(\frac{\partial}{\partial x}a_x b_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y b_x + \frac{\partial}{\partial z}a_z b_x\right)\mathbf{e}_x +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}a_x b_y + \frac{\partial}{\partial y}a_y b_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z b_y\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}a_x b_z + \frac{\partial}{\partial y}a_y b_z + \frac{\partial}{\partial z}a_z b_z\right)\mathbf{e}_z =$$

$$= b_x\mathbf{e}_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_x\left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)b_x +$$

$$+ b_y\mathbf{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_y\left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)b_y +$$

$$+ b_z\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_z\left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z .$$

Это выражение можно записать с использованием оператора $\nabla$ в виде

$$(\nabla \mathbf{a})\mathbf{b} = (\nabla \underline{\mathbf{a}})\mathbf{b} + (\nabla \mathbf{a})\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}). \qquad (2.1)$$

Очевидно, что такая запись намного компактнее, чем покоординатное представление.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые выражения, например, дивергенцию произведения скалярной функции $\varphi$ на векторную $\mathbf{a}$

$$(\nabla(\varphi \mathbf{a})) = (\nabla(\underline{\varphi} \mathbf{a})) + (\nabla(\varphi \underline{\mathbf{a}})).$$

Поскольку действия с векторным оператором $\nabla$ аналогичны действиям с обычными векторами (кроме переноса с правой стороны на левую от оператора), а для обычных векторов справедливо $(\mathbf{b}(\varphi \mathbf{a})) = ((\mathbf{b}\varphi)\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{b}\,\mathbf{a})$, в первом слагаемом скалярная функция $\varphi$ может быть объединена с $\nabla$ и записана слева от него (так как на нее $\nabla$ не действует) $(\nabla(\underline{\varphi} \mathbf{a})) = ((\varphi\nabla)\mathbf{a}) = \varphi(\nabla \mathbf{a})$, а во втором слагаемом скалярную функцию можно объединить с $\nabla$, а затем изменить порядок векторов в скалярном произведении, чтобы избавиться от необходимости подчеркивания $(\nabla(\varphi \underline{\mathbf{a}})) = ((\nabla\varphi)\underline{\mathbf{a}}) = (\mathbf{a}\nabla\varphi)$. В результате получим

$$(\nabla(\varphi \mathbf{a})) = \varphi(\nabla \mathbf{a}) + (\mathbf{a}\nabla\varphi). \qquad (2.2)$$

Аналогичным образом можно записать выражения для $\nabla \times \varphi \mathbf{a}$ и $(\mathbf{b}\nabla)\varphi \mathbf{a}$

$$\nabla \times \varphi \mathbf{a} = \varphi \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \varphi, \qquad (2.3)$$

$$(\mathbf{b}\nabla)\varphi \mathbf{a} = \varphi(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{b}\nabla\varphi). \qquad (2.4)$$

Выражение ротора от векторного произведения $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, можно получить из известной формулы для двойного векторного произведения $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c}\mathbf{a})\mathbf{b}$ и формулы (2.1)

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}). \qquad (2.5)$$

Для получения выражения дивергенции векторного произведения $\left(\nabla\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right)$ надо воспользоваться свойством инвариантности смешанного произведения относительно циклических перестановок $\left(\mathbf{c}\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right)=\left(\left(\mathbf{c}\times\mathbf{a}\right)\mathbf{b}\right)=-\left(\left(\mathbf{c}\times\mathbf{b}\right)\mathbf{a}\right)$.

$$\left(\nabla\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right)=\left(\nabla\left(\mathbf{a}\times\underline{\mathbf{b}}\right)\right)+\left(\nabla\left(\underline{\mathbf{a}}\times\mathbf{b}\right)\right)=\left(\left(\nabla\times\mathbf{a}\right)\underline{\mathbf{b}}\right)-\left(\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)\underline{\mathbf{a}}\right).$$

Меняя порядок векторов в скалярных произведениях, окончательно получим

$$\left(\nabla\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right)=\left(\mathbf{b}\left(\nabla\times\mathbf{a}\right)\right)-\left(\mathbf{a}\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)\right). \tag{2.6}$$

Градиент скалярного произведения двух векторных функций **a** и **b** равен

$$\nabla\left(\mathbf{a}\mathbf{b}\right)=\nabla\left(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}\right)+\nabla\left(\mathbf{a}\underline{\mathbf{b}}\right).$$

Из формулы двойного векторного произведения, примененной к выражению $\mathbf{a}\times\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)=\nabla\left(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}\right)-\left(\mathbf{a}\nabla\right)\mathbf{b}$, можно выразить $\nabla\left(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{b}\right)=\left(\mathbf{a}\nabla\right)\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)$. Аналогичным образом, выражая $\nabla\left(\mathbf{a}\underline{\mathbf{b}}\right)=\left(\mathbf{b}\nabla\right)\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\left(\nabla\times\mathbf{a}\right)$, получим

$$\nabla\left(\mathbf{a}\mathbf{b}\right)=\left(\mathbf{a}\nabla\right)\mathbf{b}+\left(\mathbf{b}\nabla\right)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)+\mathbf{b}\times\left(\nabla\times\mathbf{a}\right). \tag{2.7}$$

Запишем некоторые выражения для простейшей векторной функции в трехмерном пространстве $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z$ в связи с тем, что различные комбинации с участием этой функции используются в данной работе

$$\left(\nabla\mathbf{r}\right)=\kappa, \tag{2.8}$$

$\kappa$ – размерность евклидова пространства,

$$\nabla\times\mathbf{r}=0, \tag{2.9}$$

$$\left(\mathbf{a}\nabla\right)\mathbf{r}=\mathbf{a}. \tag{2.10}$$

В справедливости этих формул нетрудно убедиться простым дифференцированием.

Отметим, что в двумерном пространстве $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ и $(\nabla\mathbf{r}) = 2$. Формулы (2.9) и (2.10) справедливы также и в двумерном пространстве.

Из формул (2.7)-(2.10) легко получить следующие соотношения

$$\nabla\mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}, \tag{2.11}$$

$$\nabla(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{r}) = \mathbf{a}, \tag{2.12}$$

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{r} = \nabla(\underline{\mathbf{a}}\mathbf{r}) - \mathbf{a}(\nabla\mathbf{r}) = \mathbf{a} - \kappa\mathbf{a} = -(\kappa-1)\mathbf{a}. \tag{2.13}$$

Градиент произвольной функции $f(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$, равен

$$\nabla f(r) = f'(r)\nabla r = f'(r)\nabla\sqrt{\mathbf{r}^2} = f'(r)\frac{\nabla\mathbf{r}^2}{2r} = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.14}$$

Очень удобным оказывается формализм оператора Гамильтона при преобразованиях поверхностных интегралов в объемные. Согласно обобщенной теореме Стокса интеграл по замкнутой поверхности $S$, ограничивающей объем $\tau$, от непрерывной и дифференцируемой в этом объеме функции, линейной относительно вектора **n** (**n** – внешняя нормаль к поверхности), равен интегралу по объему, в котором вместо вектора **n** записан оператор $\nabla$. Причем действие этого оператора должно распространяться на все множители вектора **n** (то есть, все векторные или скалярные функции, не являющиеся константами, должны быть записаны справа от $\nabla$). Например:

$$\oint_S (\mathbf{na})\,ds = \int_\tau (\nabla\mathbf{a})\,d\tau, \qquad \oint_S \mathbf{n}\times\mathbf{a}\,ds = \int_\tau \nabla\times\mathbf{a}\,d\tau,$$

$$\oint_S \mathbf{b}(\mathbf{na})\,ds = \int_\tau (\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}\,d\tau = \int_\tau \big(\mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}\big)\,d\tau,$$

$$\oint_S \mathbf{a}\times(\varphi\,\mathbf{n})\,ds = -\int_\tau (\nabla\varphi)\times\mathbf{a}\,d\tau = \int_\tau \big(\mathbf{a}\times(\nabla\varphi) - \varphi\nabla\times\mathbf{a}\big)\,d\tau.$$

Формулы преобразования контурных интегралов в поверхностные имеют аналогичную структуру

$$\oint_L \varphi\,\mathbf{n}\,dl = \int_S \nabla\varphi\,ds,$$

$$\oint_L (\mathbf{a}\times\mathbf{n})\times\mathbf{b}\,dl = -\int_S (\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}\,ds\,.$$

Ниже приведены используемые в данной работе формулы, которые могут быть доказаны с помощью теоремы Стокса и формул (2.8) (2.13), и (2.10)

$$\int_B \mathbf{a}\,db = \frac{1}{\kappa-1}\int_B \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{a})\,db - \frac{1}{\kappa-1}\oint_S \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,ds, \qquad (2.15)$$

$$\mathbf{r}\in B, \qquad B\subset\mathbf{R}^\kappa.$$

$S$ – замкнутая поверхность, являющаяся границей области $B$. В двумерном пространстве ($\kappa$ = 2) $S$ является замкнутым контуром. Вектор $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к области $B$ нормаль к поверхности $S$.

$$\int_B \mathbf{a}\,db = -\int_B \mathbf{r}(\nabla\mathbf{a})\,db + \oint_S \mathbf{r}(\mathbf{n}\mathbf{a})\,ds\,, \qquad (2.16)$$

$$\int_B \mathbf{r}\times\mathbf{a}\,db = -\frac{1}{2}\int_B r^2(\nabla\times\mathbf{a})\,db + \frac{1}{2}\oint_S r^2(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,ds\,, \qquad (2.17)$$

$$\int_B \mathbf{a}\,db = \frac{1}{\kappa-1}\int_B \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{a})\,db - \frac{1}{\kappa-1}\oint_S \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,ds\,, \qquad (2.18)$$

$$\int_S \mathbf{a}\,ds = \frac{1}{\kappa-1}\int_S \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{a})\,ds - \frac{1}{\kappa-1}\oint_C \mathbf{r}\times(\mathbf{n}_c\times\mathbf{a})\,dl\ . \qquad (2.19)$$

В последней формуле $S$ – криволинейная поверхность; замкнутый контур $C$ – ее граница; $\mathbf{n}_c$ – внешняя нормаль к контуру, лежащая в плоскости, касательной к поверхности в данной точке, вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен поверхности, оператор $\nabla_s$ содержит только производные вдоль поверхности, т.е. равен $\nabla_s = \nabla - \nabla_n$, где $\nabla_n = \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)$ – оператор дифференцирования в направлении, перпендикулярном поверхности.

## 3. Математические модели в аэрогидромеханике

В зависимости от свойств среды, формы тел и конкретных условий движения используют различные математические модели сред и схематизированные постановки соответствующих задач взаимодействия. В классической аэрогидромеханике это – модели несжимаемой жидкости (идеальной или вязкой) [4-10]. Рассматриваются различные установившиеся и неустановившиеся (нестационарные), двумерные и трехмерные, плоские и пространственные задачи. При этом правильная постановка задачи предусматривает выбор краевых, начальных и дополнительных условий, выделяющих единственным образом искомое движение тел и среды.

Движения тел в вязкой среде обычно сопровождаются срывом пограничных слоев, которые, распространяясь в жидкости, служат источником вихревых течений. В модели идеальной среды этим явлениям ставят в соответствие сход и дальнейшую эволюцию бесконечно тонких вихревых пелен. Однако точки отрыва (места схода вихрей) не могут быть вычислены в рамках невязкой модели, поэтому требуются дополнительные условия, фиксирующие эти точки.

Если на контуре тела имеются острые кромки (угловые точки), то они являются естественными местами схода вихревых пелен, так как иначе не может быть удовлетворено физическое требование ограниченности отрицательных значений давления вблизи угловых точек. В теории крыла это соответствует классическому постулату Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости невязкого потока на задней острой кромке крыла.

В реальных течениях отрывы происходят не только в угловых точках, но и на гладкой поверхности тел. В модели идеальной жидкости не существует адекватных способов определения отрывов с гладкой поверхности, для этого необходимо явно учитывать механизмы генерации завихренности на всей поверхности тела, что возможно только при учете вязкости среды.

При неустановившемся движении механические характеристики системы тело-жидкость, вообще говоря, не определены простейшими кинематическими данными для тела в рассматриваемый момент времени, как это имеет место в случае установившегося движения [4]. Это фундаментальное свойство взаимодействия тела с жидкой средой проявляется уже на простейшем уровне моделирования в рамках потенциальных течений идеальной среды. Например, в классической схеме плавного плоскопараллельного обтекания крылового профиля идеальной несжимаемой жидкостью с условием Жуковского-Чаплыгина на задней кромке почти всегда неизбежно возникновение поверхности разрыва скорости – сход вихревой пелены с острой кромки крыла [4-6]. Исключение составляет только случай установившегося обтекания, когда циркуляция скорости по контуру крыла неизменна во времени.

Принципиальная зависимость гидродинамических сил, действующих на тело, от предыстории его движения в жидкости приводит к необходимости постановки и решения сопряженных задач динамики и аэрогидромеханики, когда задача динамики о движении твердого тела под действием гидродинамических сил решается одновременно с задачей гидродинамики о движении жидкости, вызванном движением тела. Развиваемые в книге методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок дают конструктивную возможность эффективного решения сопряженных задач не только в идеальной, но и в вязкой жидкости.

Альтернативой являются так называемые феноменологические или инженерные модели гидродинамических сил при движении твердых тел в сплошной среде (см. например [11-12]). В них вклад возмущенного движения среды заменяется теми или иными эвристическими соотношениями, базирующимися частично на эмпирических наблюдениях, частично на феноменологических гипотезах разработчика модели. Однако границы применимости подобных феноменологических моделей, как правило, неизвестны. Простота и возможность детального параметрического анализа динамики тела –

главное оправдание такого подхода. Поэтому возможность сопоставления результатов решения конкретных сопряженных задач динамики и аэрогидродинамики в строгой постановке с предсказаниями различных феноменологических моделей могло бы стать полезным методом верификации последних.

***Уравнения движения жидкости***

Движение жидкости описывается векторным полем скорости $\mathbf{V}(\mathbf{R},t)$, где $t$ – время, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки в пространстве движения. Всюду далее ограничимся случаем однородной несжимаемой жидкости, принимая плотность $\rho = const$ для всего объема жидкости. В каждой области $A_\tau$ гладкости поля $\mathbf{V}$ определен ротор скорости $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$, называемый вектором завихренности. Векторные линии поля скоростей суть линии тока, аналогично, векторные линии поля вектора завихренности – вихревые линии. Известны интегральные представления поля скорости через поле вектора завихренности [1, 3-10], поэтому возможны подходы, при которых первичной искомой величиной является непосредственно поле завихренности. Соответствующие численные методы называют вихревыми методами численного моделирования процессов аэрогидродинамики [13].

В любой области, не содержащей источников массы, справедливо уравнение неразрывности, при $\rho = const$ оно имеет вид условия соленоидальности поля скорости

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3.1}$$

В модели *идеальной жидкости* принимаются равными нулю все внутренние касательные напряжения и трение на поверхности омываемых твердых тел. В результате вектор скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и давление $p(\mathbf{r}, t)$, в любой момент времени в любой пространственной области $\mathbf{r} \in A_\tau$ подчиняются уравнению Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}, \tag{3.2}$$

где субстанциональная производная $\frac{d\mathbf{V}}{d\,t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$ выражает ускорение жидкой частицы [6-8], а через **F** обозначено поле внешних сил, отнесенных к единице массы.

В модели *вязкой жидкости* принимается линейная связь между тензором напряжений **P** и тензором скоростей деформаций **W** (реологическое уравнение ньютоновской жидкости [7])

$$\mathbf{P} = 2\rho\nu\,\mathbf{W} - p\,\mathbf{E}\ .$$

Здесь **E** – тензорная единица, ν = *const* – кинематический коэффициент вязкости жидкости – физическая постоянная для всего пространства.

Соответствующие движения вязкой жидкости подчиняются уравнению Навье-Стокса

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{V} + \rho\mathbf{F}\,. \qquad (3.3)$$

В предположении о консервативности поля внешних сил $\mathbf{F} = -\nabla\Pi$ уравнения Эйлера (3.2) и Навье-Стокса (3.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2}\right), \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{V^2}{2}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{V}\,. \qquad (3.5)$$

***Уравнения переноса завихренности, вычисление давления***

В уравнениях движения идеальной и вязкой жидкостей давление фигурирует только под знаком градиента, поэтому в любой одной точке пространства всегда можно принять $p = 0$. Более того, эти уравнения легко преобразовать к виду, вообще не содержащему давления [1-10]. В случае идеальной жидкости из (3.4) получается

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}). \tag{3.6}$$

Аналогично, в вязкой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}). \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) и (3.7) являются уравнениями эволюции поля завихренности, в них скорость изменения завихренности зависит только от мгновенных локальных значений полей скорости и завихренности, поэтому они могут решаться без вычисления давления. Завихренность, подчиняющаяся уравнениям (3.6) или (3.7) в консервативном поле сил, называется *свободной завихренностью*. Важное значение имеет также несвободная завихренность (в частном случае – *присоединенная завихренность*), связанная с неконсервативными внешними силами **F** в уравнениях (3.2)-(3.3). По известным распределениям **V** и **Ω** в пространстве и времени можно найти поле давления.

Области жидкости, в которых завихренность тождественно равна нулю ($\mathbf{\Omega} \equiv 0$), называют областями безвихревого движения.

В безвихревых односвязных областях всегда можно определить однозначную скалярную функцию φ − *потенциал поля скоростей* так, что $\mathbf{V} = \nabla\varphi$, [5-10]. Это позволяет немедленно проинтегрировать уравнение Эйлера (3.4) и получить формулу (*интеграл Коши-Лагранжа*) для непосредственного вычисления давления

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi = f(t), \tag{3.8}$$

где $f(t)$ – одинаковая для всех точек области произвольная функция времени. Физический смысл φ определяется тем, что всякое потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости можно рассматривать как возникшее внезапно из состояния покоя в результате удара импульсивным давлением вида[3] $p_t\,\delta(t-t_0)$, при этом необходимый импульс давлений связан с потенциалом скоростей формулой $p_t = -\rho\,\varphi$ [5, 10].

При $\mathbf{\Omega} \equiv 0$ из уравнения Навье-Стокса (3.5) также можно получить интеграл (3.8). Для этого нужно воспользоваться перестановочностью операторов $\nabla$ и $\Delta$ и уравнением неразрывности (3.1). Однако движение вязкой жидкости лишь в редких случаях может быть безвихревым [8].

В вихревых областях интеграл Коши-Лагранжа не существует, однако возможны нетривиальные аналоги[4] формулы (3.8) для вычисления давления при $\mathbf{\Omega} \neq 0$ [14-16].

***Граничные условия***

Уравнения движения жидкости должны интегрироваться при заданных граничных условиях. В задаче о движении непроницаемого тела в неограниченной покоящейся на бесконечности жидкости необходимо удовлетворять условиям:

- на бесконечном удалении от тела – равенство нулю скоростей частиц жидкости,
- на поверхности тела – *условие непротекания* или *условие прилипания*.

Условие непротекания выражает непроницаемость границ тела, оно сводится к требованию равенства нормальных составляющих скорости $\mathbf{V}$ частиц жидкости на границе тела и скорости $\mathbf{V}^*$ точек поверхности тела, соприкасающихся с жидкостью: $V_n = V_n^*$. Безвихревое движение жидкости в односвязной области полностью определено условием непротекания на каждом элементе твердой границы. В случае неодносвязных областей для выделения единственного безвихревого решения необходимо дополнительно задавать циркуляцию на нестягиваемых замкнутых контурах в жидкости [1-

[3] здесь δ(t) – функция Дирака.

[4] Обобщенные формулы для расчета давления в вихревых областях движения приводятся далее в главе 2.

10]. Это единственное безвихревое движение неизбежно имеет ненулевую касательную составляющую скорости на теле (за исключениями экзотических случаев движения его поверхности [8]).

В вязкой жидкости проскальзывание вдоль поверхности тела невозможно и вместо условия непротекания следует брать более жесткое условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке (это не переопределяет задачу, поскольку порядок системы уравнений для вязкой жидкости выше, чем для идеальной). Граничное условие прилипания выражается требованием совпадения скоростей частиц жидкости и точек движущейся твердой поверхности, с которой соприкасаются жидкие частицы: $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$.

***Условия на проницаемой поверхности***

В ряде важных для практики случаев, твердое тело не является монолитным, а представляет собой оболочку, состоящую из большого числа мелкомасштабных фрагментов, между которыми имеются просветы. Составленная из этих фрагментов граница не подчиняется условию непротекания. Несмотря на выполнение условия прилипания на поверхности каждого из твердых фрагментов, жидкость может проникать сквозь такую *проницаемую границу*.

Сложность соответствующих задач аэрогидродинамики заключается в том, что требуется находить некоторое крупномасштабное "основное" течение жидкости, учитывая влияние большого числа мелкомасштабных твердых фрагментов строения пористости границы проницаемого тела. В связи с этим получил распространение упрощающий подход, согласно которому проницаемая стенка вместе с прилегающими слоями локального мелкомасштабного течения, зависящего от деталей структуры пористости, заменяется поверхностью разрыва основного течения. Хотя физически мы имеем дело с твердой границей дискретной структуры, при математическом моделировании предполагается наличие некоторой *скорости просачивания* в каждой точке проницаемой поверхности.

Состояния среды, перетекающей через проницаемую поверхность, должны быть связаны соотношениями на поверхности разрыва. Однако здесь возникают известные трудности определения полной системы граничных условий, поскольку недостаточно общих соотношений, вытекающих из общих интегральных законов сохранения на поверхности разрыва, и требуется привлекать дополнительные граничные соотношения, которые зависят от типа пористости проницаемого материала и свойств пристеночного течения [17].

Следует различать два принципиально различных семейства моделей проницаемости: семейство локальных моделей "равномерно проницаемой поверхности" и семейство нелокальных моделей "равномерно перфорированной поверхности".

В исторически первых локальных моделях *равномерно проницаемой* поверхности (Рахматулин Х.А. 1950, Taylor G.I. & Batchelor G.K. 1949) граничные условия берутся в точке $(\pm)$ в виде алгебраической связи между параметрами основного потока по обе стороны поверхности разрыва. В этом случае из законов сохранения массы и изменения импульса на разрыве, испытывающем ненулевую нагрузку $\mathbf{P}_n$, получаются общие граничные условия

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_- = \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_+ = V_n, \\ &\rho\, V_n(\mathbf{V}_- - \mathbf{V}_+) = (p_+ - p_-)\,\mathbf{n} - \mathbf{P}_n, \end{aligned} \qquad (3.9)$$

которые должны дополняться частными соотношениями, указывающими зависимость напряжения $\mathbf{P}_n$ (действующего со стороны жидкости на единичную площадку поверхности с нормалью $\mathbf{n}$) от параметров просачивающейся среды и локальных физических свойств проницаемой стенки. Для материалов с изотропным строением пористости дополнительные граничные соотношения [17], замыкающие систему (3.9), можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}_{-}\times\mathbf{V}_{+})=0,\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}_{n}=\frac{\rho V_{n}}{2}\zeta,\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{P}_{n}=\rho V_{n}\,(T-1)\,\mathbf{n}\times\mathbf{V}_{+},
\end{aligned}\tag{3.10}$$

где безразмерные величины $\varsigma$, $T$ характеризуют гидравлическое сопротивление и излом линий тока при перетекании жидкости через поверхность разрыва; они могут зависеть от локального числа Рейнольдса, угла подхода линии тока к проницаемой поверхности и от других безразмерных параметров. Конкретные выражения для $\varsigma$, $T$ определяются полуэмпирическими методами [17].

Гипотеза локальности, приводящая к соотношениям (3.9), пригодна не всегда. Имеются экспериментальные факты [18], указывающие на случаи, когда локальные граничные условия (3.9)-(3.10) не способны адекватно описать действительное взаимодействие среды и перфорированной стенки. Причиной является значительная роль внутренних потоков среды вдоль твердых фрагментов перфорированной границы в пристеночном слое. В этих случаях

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_{-}\neq\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_{+}$$

и граничные условия на проницаемой поверхности теряют локальный характер, поскольку необходимо учитывать подсос среды со стороны периферийных участков внутри пристеночного слоя. Попытки построить нелокальную модель взаимодействия отражены в теории *равномерно перфорированной* поверхности [18], которая, однако, еще нуждается в усовершенствованиях.

***Свойства вихревого движения***

В случае, когда внешняя удельная массовая сила представляется в виде однозначного потенциала $\mathbf{F}=-\nabla\,\Pi$, из уравнений (3.6), (3.7), с учетом (3.1), вытекают известные законы эволюции поля свободной завихренности $\mathbf{\Omega}$ в идеальной и в вязкой жидкостях [1-10]. Важнейшие из них состоят в следующем:

- изменения циркуляции вектора скорости по жидкому замкнутому контуру происходят только за счет вязкой *диффузии завихренности* через контур, независимо от вида контура, ограничивающего незамкнутую поверхность, целиком лежащую в жидкости;
- внутри жидкости поток свободной завихренности или циркуляция по жидким контурам не могут возникать, а могут только распространяться под действие вязкости [8].
- Если вязкая диффузия пренебрежимо мала (идеальная жидкость), то свободная завихренность "соблюдает" законы сохранения, известные как теоремы Гельмгольца, согласно которым завихренность "вморожена в жидкость", т.е. переносится с жидкими частицами [5-10].

Если жидкость частично ограничена твердыми непроницаемыми поверхностями и в бесконечности считается покоящейся, то механизм возникновения завихренности определяется условиями прилипания жидкости на твердых границах [2, 8]. Действительно, пусть движение тела в жидкости начинается из состояния покоя жидкости. Тогда при отсутствии диффузии завихренности через границы тела, возникнет ненулевая касательная скорость жидкости относительно поверхности тела (при соблюдении условия непротекания). Поскольку условие прилипания требует обращения в нуль и касательной компоненты относительной скорости жидкости в каждой точке границы тела, то на границе образуется завихренность бесконечной величины. Эта пелена завихренности на непроницаемой границе тела является тем источником, из которого завихренность диффундирует внутрь вязкой жидкости.

В идеальной жидкости с острых кромок твердого тела могут сходить поверхности тангенциального разрыва, порождающие сингулярное распределение завихренности – свободную *вихревую пелену* (это определяется дополнительными условиями типа условия Жуковского-Чаплыгина на острых кромках). Если тело проницаемое, то оно может быть источником распределенной объемной завихренности даже в идеальной жидкости. Для этого достаточно, чтобы возник ненулевой градиент скорости просачивания $V_n$ вдоль проницаемой поверхности [17].

Если нестационарное движение неограниченной на бесконечности жидкости возникло из состояния покоя под действием движущихся тел, то справедливо допущение о *финитности* распределения завихренности в жидкости. Финитность означает, что завихренность либо равна нулю за пределами некоторого конечного объема, либо экспоненциально убывает на бесконечности [1].

Отдельно нужно рассматривать *плоские движения* жидкости. Течение называют плоским, если все его характеристики зависят от двух декартовых координат x, y и не зависят от третьей координаты z. В этом случае ненулевой является только одна компонента завихренности $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e}_z$. и финитность определяется для распределения скаляра $\Omega$ на плоскости x, y.

***Двумерные течения***

Уравнение Эйлера (3.6) при $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e}_z$ для плоских движений идеальной жидкости, принимает вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathrm{div}(\Omega\,\mathbf{V}) = 0, \tag{3.11}$$

откуда с очевидностью вытекает знаменитое свойство сохранения циркуляции скорости по любым замкнутым жидким контурам, охватывающим односвязную область идеальной жидкости.

Относительно недавно было замечено, что плоским течениям вязкой жидкости также присуще аналогичное свойством сохранения циркуляции по стягиваемым контурам, только теперь эти контуры не вморожены в среду, а перемещаются относительно нее с так называемой "диффузионной скоростью" $\mathbf{V}_d$ [19]

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}, \tag{3.12}$$

что легко видеть из следующей эквивалентной записи уравнения Навье-Стокса (3.7) при $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e}_z$ [16, 19, 20]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathrm{div}(\Omega\,(\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)) = 0\,. \qquad (3.13)$$

Двумерными являются и некоторые виды пространственных течений. Простейшее из них – *осесимметричное течение* без закрутки, когда все параметры зависят только от двух координат x, y цилиндрической системы x,y,θ и нет ненулевой составляющей азимутальной скорости ($V_\theta = 0$). В этом случае также только одна компонента завихренности $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{e}_\theta$ может быть ненулевой. Замечательно, что в осесимметричных течениях вязкой жидкости также можно ввести диффузионную скорость $\mathbf{V}_d$ [16, 20], обеспечивающую существование замкнутых контуров, несущих постоянную завихренность,

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla(y\,\Omega)}{y\,\Omega}\,. \qquad (3.14)$$

***Замена тел вихрями. Гидродинамические силы***

Слагаемое $\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}$ в уравнениях (3.4)-(3.5) можно трактовать, как неконсервативную массовую силу, приложенную к жидкости. Иногда ее называют *вихревой силой* по Прандтлю [1]. Отсюда понятна справедливость идеи заменять тела, погруженные в жидкость, некоторым распределением *сопряженной завихренности* в жидкости, размещаемой в объеме тела.

Любое тело, движущееся относительно жидкости, можно мысленно заменить (причем бесконечным множеством способов) кинематически эквивалентным распределением сопряженной завихренности [1]. Последняя, в общем случае, не будет удовлетворять уравнениям эволюции свободной завихренности (3.6)-(3.7). Для поддержания баланса сил необходимо вводить фиктивную неконсервативную внешнюю массовую силу **F** согласно уравнениям (3.2)-(3.3). Это нужно, чтобы уравновесить вихревую силу, создаваемую сопряженной завихренностью.

Если распределение сопряженной завихренности фиксировано относительно тела (подразумевается, что вихревые линии неподвижны относительно тела, но напряженность вихревых трубок может изменяться во времени), оно называется *присоединенной завихренностью*. Однако сопряженная завихренность не обязательно должна быть присоединенной. Можно из соображений удобства исследования выбирать любой детерминированный закон перераспределения сопряженной завихренности в объеме тела[5]. При соблюдении уравнений (3.6)-(3.7) вне тела и надлежащих граничных условий на поверхности тела, конкретный вариант перераспределения сопряженной завихренности внутри тела и на его поверхности не будет изменять внешнее обтекание и распределение гидродинамических напряжений по поверхности тела. В этом смысле твердое тело или соответствующая сопряженная завихренность в жидкости эквивалентны.

***Гидродинамический и вращательный импульсы***

Попытки трактовать взаимодействие твердого тела и несжимаемой жидкости с помощью подсчета изменений полного механического количества движения и полного механического момента количества движения неограниченного объема жидкости[6] наталкиваются на парадоксальные свойства несобственных интегралов [1, 5-10]

$$\int \mathbf{V}\, d\tau\,, \quad \int \mathbf{R}\times\mathbf{V}\, d\tau\,. \tag{3.15}$$

Первый из них сходится, но не абсолютно (т.е. интеграл существует, но результат интегрирования не определен, т.к. зависит от способа стремления области интегрирования к бесконечности). Второй интеграл вообще расходится, за исключением частного случая области интегрирования в виде шара бесконечного радиуса [1]. Причина па-

[5] Это свойство сопряженной завихренности широко используется в книге при анализе гидродинамических сил.

[6] Рассматриваем движение жидкости в неограниченной области с нулевой скоростью на бесконечности и с финитным распределением завихренности.

радокса кроется в предположении о несжимаемости среды, приводящей к бесконечной скорости распространения возмущений.

Эти затруднения можно преодолеть, введя в рассмотрение вместо (3.15) сходящиеся интегралы [1]

$$\mathbf{I} = \frac{\rho}{2}\int \mathbf{R}\times\mathbf{\Omega}\, d\tau, \quad \mathbf{A} = -\frac{\rho}{2}\int \mathrm{R}^2\mathbf{\Omega}\, d\tau, \tag{3.16}$$

получившие названия:

**I** – *гидродинамический импульс*,

**A** – *вращательный импульс*.

Величины **I**, **A**, определенные по формулам (3.16) для бесконечного объема жидкости, меняются вследствие действующих на тело внешних сил точно так же, как количество движения и момент количества движения конечной динамической системы [1, 5, 10]:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \int \mathbf{F}\, d\tau, \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \int \mathbf{R}\times\mathbf{F}\, d\tau. \tag{3.17}$$

Гидродинамический и вращательный импульсы вместе образуют *динамический винт* или "импульс" по Кельвину, являющийся мерой импульсивных сил, обеспечивающих мгновенную генерацию любого данного движения из состояния покоя. Каковым бы ни было в некоторый момент времени движение твердого тела и жидкости, оно может быть образовано мгновенно из положения равновесия при помощи подходящим образом выбранного импульсивного динамического винта, приложенного к жидкости (включая заменяющие тело жидкие массы, находящиеся в вихревом движении)[7] [5].
Два значения гидродинамического импульса в моменты времени $t$ и $t + dt$ отличаются между собой на интеграл по времени от внешних сил, которые действовали на жидкость в течение промежутка времени $dt$. При замене тела жидким объемом интеграл от внешних сил, действующих на данный объем равен внешней силе, приложенной к телу, что позволяет находить действующую на тело гидродинамиче-

[7] Точно также с помощью динамического винта можно мгновенно остановить тело и жидкость.

скую силу (при этом необходимо учитывать вклад в гидродинамический импульс присоединенной завихренности и ускорение тела). Однако при обтекании нескольких тел использование «импульса» позволяет вычислить лишь суммарную для всех тел силу.

В двумерной гидродинамике импульс **I**, как величина, удовлетворяющая (3.17), определяется равенством [1]

$$\mathbf{I} = \rho \int \Omega\, \mathbf{R} \times \mathbf{e}_z \; dS \;. \tag{3.18}$$

Здесь импульс отнесен к единице длины в z-направлении, и его размерность, естественно, отличается от соответствующей величины в трехмерной гидродинамике[8].

Аналогично, вращательный импульс плоского движения определяется выражением

$$\mathbf{A} = -\frac{\rho}{2}\mathbf{e}_z \int \Omega\, R^2 \; dS \;. \tag{3.19}$$

***Вычислительные модели***

В связи с тем, что в большинстве случаев невозможно получить аналитические решения задач взаимодействия тел со средой, возникает еще один аспект моделирования – построение *вычислительных моделей*. От степени приближения исходных уравнений и от выбранного алгоритма могут зависеть не только устойчивость вычислений, время счета, точность результата, но и свойства определяемого решения. Выбор численного метода, вообще говоря, определяет новую вычислительную модель со своими специфическими параметрами и свойствами, иногда существенно отличающимися от свойств исходной *модели* [2].

Для правильного понимания сложных гидродинамических процессов при нестационарном движении тел в жидкости, необходимо адекватное численное моделирование нестационарных отрывных течений. В настоящее время на роль такого метода, по-видимому,

[8] Отсутствие множителя ½ в формуле (3.18) связано с незамкнутостью вихревых линий в двумерной гидродинамике [1].

может претендовать прямое численное моделирование (решение трёхмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса). Однако использование его требует чрезвычайно больших вычислительных ресурсов.

Широко распространенные инженерные методы численного анализа RANS и URANS, основанные на решении уравнений Рейнольдса [21, 22], хотя и могут при удачном выборе модели турбулентности давать соответствующие экспериментам результаты, но необходимость этого выбора снижает ценность метода в отношении его предсказательных возможностей.

То же можно сказать и о вихревых методах, основанных на решении уравнений Эйлера (методов дискретных вихрей и т.п.), поскольку их применение связано с необходимостью априорного задания местоположения отрывов или с дополнительными предположениями о структуре пограничного слоя на теле [18, 23-25]. Тем не менее, кажущееся удивительным согласование расчетов и экспериментов объясняется тем, что силовое воздействие потока реальной маловязкой жидкости на обтекаемое тело во многих практически важных случаях вполне успешно моделируется разрывными и нестационарными течениями идеальной жидкости [2].

Благодаря ряду преимуществ представления движения в лагранжевых координатах и использования в качестве первичной вычисляемой величины непосредственно завихренности[9], бессеточные вихревые методы обладают высоким потенциалом развития. Современное состояние вихревых методов отражено в обзоре [13] (до уровня 1988 г.), в монографии [24] (до 1995), в обзоре [26] (до 2005). Дополнительно отметим метод кратных цепочек дискретных вихрей [27-28], позволяющий в рамках модели идеальной среды учесть

[9] После определения дискретного поля завихренности процедура определения поля скоростей, давлений и гидродинамических нагрузок на тела в жидкости представляет собой процедуру численного интегрирования, что гораздо точнее и обладает рядом других преимуществ по сравнению с процедурами численного дифференцирования, присущей конечно-разностным методам.

влияние толщины свободных вихревых слоев на их гидродинамическую устойчивость [29].

Главной трудностью применения вихревых методов для моделирования вязкой жидкости является то, что циркуляция скорости по выделенному жидкому контуру не сохраняется из-за вязкой диффузии завихренности. В исторически первом методе случайных блужданий [30] учет диффузионного смещения вихрей осуществляется путем добавления к детерминированному конвективному смещению дискретного вихря дополнительного случайного смещения с гауссовым распределением вероятности. В [19] для плоских движений вязкой жидкости предложен метод *диффузионной скорости*, опирающийся на идею введения лагранжевых координат, связанных с контурами, движущимися в вязкой жидкости со скоростью $\mathbf{V}+\mathbf{V}_d$. В [31] предложены способы имитации диффузии за счет перераспределения циркуляции между конвективно движущимися дискретными вихревыми элементами. В [32] приводятся результаты сравнения этих методов, сделан вывод в пользу метода перераспределения циркуляции[10]. В книге изложен новый бессеточный вихревой метод "вязких вихревых доменов" (ВВД). Он опирается на специальные интегральные представления диффузионной скорости (в плоских и осесимметричных течениях вязкой жидкости) и на интегральные выражения нестационарных гидродинамических сил и моментов через распределение завихренности. Его преимуществом является правильный учет трения на поверхности тела при отсутствии подгоночных параметров. Метод ВВД позволяет решать сопряженные задачи динамики и аэрогидромеханики, рассматривая взаимодействие подвижного тела и жидкости без расщепления задачи на динамическую и гидродинамическую составляющие.

[10] Этот вывод должен быть пересмотрен в свете усовершенствований, которые можно внести в метод диффузионной скорости.

# ГЛАВА 1

## ВИХРЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ

### 4. Основы вихревого моделирования течений

#### *Выражение скорости жидкости через распределения завихренности и скорости на границе области течения*

При решении задач внешнего обтекания тел в безграничном пространстве распределение завихренности обычно считается финитным. Область, занятая телами, моделируется как жидкий объем, на границе которого имеет место тангенциальный разрыв вектора скорости. Величина скачка тангенциальной скорости определяется из интегрального уравнения, обеспечивающего условие непротекания на поверхности тела. Данная процедура описана во многих работах, однако мы остановимся на ней более подробно, так как при моделировании вязких течений имеются некоторые особенности, связанные с необходимостью удовлетворения условия прилипания на обтекаемых поверхностях.

Вектор скорости **V** в произвольной точке **R** неограниченного пространства τ течения несжимаемой жидкости выражается через поле завхренности и распределение скачка скорости на поверхностях тангенциального разрыва *S* по известной формуле Био-Савара

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \int_\tau \mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau + \int_S \left(\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)\times\mathbf{n}_+\right)\times\mathbf{K}ds + \mathbf{V}_\infty, \qquad (4.1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2}, & \kappa=2 \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^3}, & \kappa=3 \end{cases} \qquad \mathbf{r}' = (\mathbf{R}-\mathbf{r}),$$

где κ – размерность евклидова пространства τ, $\mathbf{r}\in\tau$, $\mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-$ – скорости на двух сторонах поверхности, $\mathbf{n}_+$ – нормаль к *S*, внешняя по отношению к области «+».

Формула (4.1) не является следствием законов движения жидкости, а представляет собой математическую связь между векторным полем и его ротором, удовлетворяющим условиям $\nabla\mathbf{V} = 0$, $\nabla\times\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}$.

Выражение $\boldsymbol{\gamma} = \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)\times\mathbf{n}$ называется поверхностным ротором или поверхностной завихренностью. В реальных течениях поверхность разрыва является слоем конечной толщины $\delta$. Можно показать, что в пределе при $\delta \to 0$ величина $\gamma$ представляет собой проинтегрированную по толщине объемную завихренность в этом слое. В самом деле, пусть в тонком слое толщины $\delta$ задано дифференцируемое поле $\mathbf{V}$, непрерывно изменяющееся от $\mathbf{V}_+$ до $\mathbf{V}_-$ . Выберем локальную систему координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$ такую, что ось $\zeta$ направлена перпендикулярно поверхности слоя, а остальные лежат в касательной плоскости. Проинтегрировав объемную завихренность $\mathbf{\Omega}$ по толщине слоя, получим

$$\int_0^\delta \mathbf{\Omega} d\varsigma = \mathbf{e}_\xi \int_0^\delta \left(\frac{\partial V_\varsigma}{\partial\eta} - \frac{\partial V_\eta}{\partial\varsigma}\right) d\varsigma + \mathbf{e}_\eta \int_0^\delta \left(\frac{\partial V_\xi}{\partial\varsigma} - \frac{\partial V_\varsigma}{\partial\xi}\right) d\varsigma +$$
$$+\mathbf{e}_\varsigma \int_0^\delta \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial V_\xi}{\partial\eta}\right) d\varsigma = \mathbf{e}_\xi \int_0^\delta \frac{\partial V_\varsigma}{\partial\eta} d\varsigma + \mathbf{e}_\xi \left(V_{\eta+} - V_{\eta-}\right) -$$
$$-\mathbf{e}_\eta \int_0^\delta \frac{\partial V_\varsigma}{\partial\xi} d\varsigma - \mathbf{e}_\eta \left(V_{\xi+} - V_{\xi-}\right) + \mathbf{e}_\varsigma \int_0^\delta \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial V_\xi}{\partial\eta}\right) d\varsigma.$$

В пределе $\delta\to 0$ слагаемые, содержащие производные по $\xi$ и $\eta$ обращаются в ноль. В результате получается

$$\int_0^\delta \mathbf{\Omega} d\varsigma = \mathbf{e}_\xi \left(V_{\eta+} - V_{\eta-}\right) - \mathbf{e}_\eta \left(V_{\xi+} - V_{\xi-}\right) =$$
$$= \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)\times\mathbf{e}_\varsigma = \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)\times\mathbf{n}_+ = \boldsymbol{\gamma}.$$

Величину $\mathbf{\Omega}\, d\tau$ и аналогичную ей $\boldsymbol{\gamma}\, d\mathrm{s}$ будем называть вихревым элементом и обозначать как $d\mathbf{\Gamma}$ (в случае двумерных течений $d\tau$ – элемент площади, а $ds$ – элемент длины контура поверхности).

Используя это обозначение, формулу (4.1) можно переписать в более компактном виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{K} + \mathbf{V}_\infty . \tag{4.2}$$

Интегрирование ведется по всем вихревым элементам, объемным и поверхностным.

Гипотетическое течение в областях, занятых телами, может считаться как безвихревым, так и завихренным. Кроме того, в этих областях или на их поверхностях при необходимости могут помещаться дискретные, поверхностные или объемные источники. Объемная плотность источников равна $q_b = \nabla\mathbf{V}$ , поверхностная – $q_s = (\mathbf{V}_- - \mathbf{V}_+)\mathbf{n}_+$. По аналогии с вихревыми элементами введем обозначение $dQ$ для величин $q_b\, d\tau$ и $q_s\, d$s

В случае наличия источников выражение скорости имеет вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{K} + \int dQ\,\mathbf{K} + \mathbf{V}_\infty . \tag{4.3}$$

При дискретном моделировании течений интегралы заменяются суммами.

Если рассматривается течение в ограниченной области, можно считать его границу поверхностью разрыва, за которой скорость **V** равна нулю. Вихревые элементы и элементы источников на этой поверхности также должны учитываться в формулах (4.2) и (4.3).

Ниже приводится доказательство формулы (4.3). Параллельно будет получена несколько иная формула, удобная для применения в случае вязких течений при подвижных границах области.

Запишем интеграл по области реального течения $\tau_1$.от векторного произведения $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{K}$ и преобразуем его, используя (2.7)

$$\begin{aligned}\int_{\tau_1} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{K} d\tau_1 &= -\int_{\tau_1} \mathbf{K} \times (\nabla \times \mathbf{V}) d\tau_1 = \\ &= -\int_{\tau_1} \big(\nabla(\mathbf{KV}) - (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{K} - (\mathbf{K}\nabla)\mathbf{V} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{K})\big) d\tau_1 .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь и далее в соответствие с принятым в разделе 2 соглашением оператор $\nabla$ действует на все сомножители, стоящие справа от него. Так как $\nabla\mathbf{V} = 0$, $\nabla\mathbf{K} = 0$ $\nabla\times\mathbf{K} = 0$, (4.4) можно переписать в виде

$$\int_{\tau_1} \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau_1 = -\int_{\tau_1}\mathbf{K}\times(\nabla\times\mathbf{V})d\tau_1 =$$
$$= -\int_{\tau_1}\big(\nabla(\mathbf{KV}) - (\nabla\mathbf{V})\mathbf{K} - (\nabla\mathbf{K})\mathbf{V}\big)d\tau_1.$$

Интеграл в правой части преобразуется с помощью обобщенной теоремы Стокса в интеграл по поверхности $S_e$, ограничивающей область $\tau_1$ с внешней стороны (в случае внешне неограниченного пространства по бесконечно удаленной поверхности) и со стороны обтекаемых тел $S_b$, а также по поверхности $S_\varepsilon$ бесконечно малой области, окружающей точку разрыва $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ функции $\mathbf{K}$ (поле скорости $\mathbf{V}$ будем считать непрерывным в $\tau_1$).

$$\int_{\tau_1} \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau_1 = -\oint_{S_{b,e,\varepsilon}}\big(\mathbf{n}_+(\mathbf{KV}_+) - (\mathbf{n}_+\mathbf{V}_+)\mathbf{K} - (\mathbf{n}_+\mathbf{K})\mathbf{V}_+\big)ds. \tag{4.5}$$

В качестве поверхности $S_\varepsilon$ возьмем сферу (окружность) радиуса $\varepsilon\to 0$ с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$. В этом случае вектор внешней к $\tau_1$ нормали равен $\mathbf{n}_+ = \mathbf{r}'/r'$. Получим

$$\oint_{S_\varepsilon}\big(\mathbf{n}_+(\mathbf{KV}) - (\mathbf{n}_+\mathbf{V})\mathbf{K} - (\mathbf{n}_+\mathbf{K})\mathbf{V}\big)ds =$$
$$= \oint_{S_\varepsilon}\frac{1}{2\pi(\kappa-1)(r')^{\kappa+1}}\big(\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{V}) - (\mathbf{r}'\mathbf{V})\mathbf{r}' - (\mathbf{r}'\mathbf{r}')\mathbf{V}\big)ds = \tag{4.6}$$
$$= -\oint_{S_\varepsilon}\frac{1}{2\pi(\kappa-1)(r')^{\kappa-1}}\mathbf{V}ds = -\mathbf{V}(\mathbf{R}).$$

Подынтегральное выражение в интеграле по $S$ в (4.5) запишем в виде

$$\mathbf{n}(\mathbf{KV})-(\mathbf{nV})\mathbf{K}-(\mathbf{nK})\mathbf{V}=(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\times\mathbf{K}-(\mathbf{nV})\mathbf{K}. \qquad (4.7)$$

Из (4.5) – (4.7) следует

$$\mathbf{V}(\mathbf{R})=\int_{\tau_1}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau_1+\oint_{S_{b,e}}(\mathbf{V}_+\times\mathbf{n}_+)\times\mathbf{K}ds-\oint_{S_{b,e}}(\mathbf{n}_+\mathbf{V}_+)\mathbf{K}ds. \qquad (4.8)$$

Аналогичным образом, преобразуя интеграл по области $\tau_2$, занятой телами $\int_{\tau_2}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau_2$, получим

$$\begin{aligned}0=&\int_{\tau_2}\mathbf{\Omega}\times\mathbf{K}d\tau_2+\oint_{S_b}(\mathbf{V}_-\times\mathbf{n}_-)\times\mathbf{K}ds-\\&-\oint_{S_b}(\mathbf{n}_-\mathbf{V}_-)\mathbf{K}ds+\int_{\tau_2}\mathbf{K}(\nabla\mathbf{V})d\tau_2.\end{aligned} \qquad (4.9)$$

В отличие от (4.8) слагаемое $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ здесь отсутствует, так как точка $\mathbf{R}$ $\notin\tau_2$. Кроме того, имеется слагаемое, содержащее $\nabla\mathbf{V}$, так как гипотетическое течение в области тела в общем случае может быть сжимаемым (в случае деформируемого тела изменяющегося объема).

Складывая (4.8) и (4.9), получаем формулу Био-Савара (4.3) (сумма интегралов по бесконечно удаленной поверхности в (4.8) равна $\mathbf{V}_\infty$).

Формула (4.8) также может быть использована для вычисления распределения скорости в пространстве течения по заданному полю $\mathbf{\Omega}$ и скорости на поверхности S. Преимущество ее в том, что она не содержит параметров гипотетического течения в областях, занятых телами. При этом неизвестное распределение тангенциальной скорости $\mathbf{V}_+\times\mathbf{n}_+$ на обтекаемых поверхностях может быть найдено из решения интегрального уравнения подобно тому, как это делается для нахождения величины $\gamma$. Нормальная составляющая скорости $\mathbf{V}_+$ в случае непроницаемой поверхности совпадает с нормальной составляющей скорости поверхности, а при наличии вдува или отсоса отличается на величину расхода, деленного на плотность.

***Понятие движения вихрей***

Известно, что в идеальной жидкости циркуляция скорости на контуре, «вмороженном» в жидкость, является постоянной, а частицы жидкости, принадлежащие одной вихревой линии, в процессе движения остаются на одной вихревой линии. Это позволяет говорить о движении вихревых элементов со скоростью жидкости. В вязкой жидкости и в гипотетических течениях в областях, занятых телами, под движением вихревых элементов будем понимать их непрерывное отображение такое, что точки, лежащие на одной вихревой линии после отображения также лежат на одной линии, и циркуляция скорости жидкости на контурах сохраняется. Скорость изменения вектора координат $\mathbf{r}$ вихревого элемента будем называть скоростью его движения (в гипотетических течениях внутри тела эта скорость может не совпадать со скоростью движения тела). Покажем, что если вихревые линии движутся со скоростью $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и циркуляция на контурах при движении сохраняется, то завихренность $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}). \tag{4.10}$$

Выделим малый цилиндрический объем вокруг отрезка вихревой линии длины $\Delta\xi$ и площади поперечного сечения $\Delta$s. После перемещения всех точек объема со скоростью $\mathbf{u}$ направление вихревой линии, а, следовательно, и вектора $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_\Omega$ может измениться. Выберем локальную систему координат, направив единичный вектор $\mathbf{e}_\xi$ вдоль вихревой линии $\mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_\Omega$, а $\mathbf{e}_\eta$ и $\mathbf{e}_\zeta$ перпендикулярно ей. При перемещении вихревой линии со скоростью $\mathbf{u}$ полные производные вектора $\mathbf{e}_\Omega$, длины цилиндра и его объема описываются формулами

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\Omega = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\mathbf{e}_\eta + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial \xi}\mathbf{e}_\varsigma, \tag{4.11}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\xi = \Delta\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta\xi\Delta s) = (\Delta\xi\Delta s)\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial\varsigma}\right). \tag{4.13}$$

Величина $\Omega\Delta\mathbf{s}$, равная циркуляции скорости $\mathbf{V}$ по контуру, охватывающему цилиндр, при его движении со скоростью $\mathbf{u}$ не изменяется, следовательно

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\Omega}{\Delta s}\frac{d}{dt}\Delta s\,.$$

Выражая производную величины $\Delta\mathbf{s}$ из (4.12) и (4.13), получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\Omega}{\Delta s}\frac{d}{dt}\Delta s = -\Omega\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial\varsigma}\right). \tag{4.14}$$

Из (4.11) и (4.14) вытекает закон изменения вектора $\mathbf{\Omega}$.

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = -\Omega\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial\varsigma}\right)\mathbf{e}_\xi + \Omega\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial\xi}\mathbf{e}_\eta + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial\xi}\mathbf{e}_\varsigma\right) =$$

$$= -\mathbf{\Omega}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial u_\varsigma}{\partial\varsigma}\right) + \Omega\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{u} = -\mathbf{\Omega}(\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{u}.$$

Так как полная производная по времени представляет собой оператор $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)$, частная производная по времени вектора $\mathbf{\Omega}$ равна

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}(\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{u} =$$

$$= \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}) - \mathbf{u}(\nabla\mathbf{\Omega}) = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}).$$

Таким образом, равенство (4.10) доказано.

В двумерных (плоских и незакрученных осесимметричных) течениях несжимаемой жидкости выражение $\nu\nabla^2\mathbf{V}$, входящее в уравнение Навье–Стокса (3.5), равно $\nu\nabla^2\mathbf{V} = -\nu\nabla\times\mathbf{\Omega}$. Его также можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
\nu\nabla^2\mathbf{V} = \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega} \\
\mathbf{V}_d = -\frac{\nu}{\Omega^2}\boldsymbol{\Omega}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\Omega}\right).
\end{gathered}
\tag{4.15}
$$

в чем можно убедиться, раскрыв двойное векторное произведение векторов $\boldsymbol{\Omega}, \left(\nabla\times\boldsymbol{\Omega}\right)$ и $\boldsymbol{\Omega}$ с учетом того, что скалярное произведение $\boldsymbol{\Omega}\left(\nabla\times\boldsymbol{\Omega}\right)$ равно нулю из-за перпендикулярности этих векторов в рассматриваемых течениях. Используя (4.15), можно записать уравнение Навье-Стокса (3.7) в виде [16]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla\times\left(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}\right). \\
\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_d
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

Следовательно, в указанном выше смысле можно говорить, что в таких течениях вихревые элементы перемещаются со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. (В случае плоских течений формула (4.15), определяющая вектор диффузионной скорости $\mathbf{V}_d$, переходит в (3.12), а в осесимметричном случае в (3.14).)

В точках, где $\Omega = 0$, диффузионная скорость $\mathbf{V}_d$ не определена. Эти точки могут образовывать линии, разделяющие области с положительными и отрицательными значениями $\Omega$. В малой окрестности такой линии диффузионная скорость с обеих сторон направлена в сторону линии, так как при $\Omega > 0$ градиент $\Omega$, взятый с обратным знаком, направлен в сторону отрицательных значений. Так же при $\Omega > 0$ направлена и диффузионная скорость, а при $\Omega < 0$ диффузионная скорость направлена в обратную сторону. В результате вихревые элементы противоположных знаков в окрестности линии двигаются во встречных направлениях и сливаются на ней, что можно интерпретировать как их аннигиляцию. В осесимметричном течении аннигиляция происходит еще и на оси симметрии. В этом случае она носит характер схлопывания вихревых колец.

При моделировании течений вихревыми методами обычно используется лагранжев подход, при котором точкам среды приписываются маркеры – лагранжевы координаты. Точки с фиксированными лагранжевыми координатами будем называть лагранжевыми точками. Эйлеровы координаты лагранжевой точки оказываются функциями времени, производные которых задаются полем скоростей **U**.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}.$$

В идеальной жидкости в качестве скорости **U** обычно берется скорость движения жидкости **V**. В двумерных течениях вязкой жидкости может быть использована скорость $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_d$.

Если скорость Лагранжевых точек совпадает со скоростью движения вихревых элементов **u**, циркуляция на контурах сохраняется. Однако произведение $d\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Omega}\, d\tau$ может изменяться в связи с изменением направления $\boldsymbol{\Omega}$ и растяжением объема $d\tau$ вдоль вихревых линий.

Уравнение изменения вихревого элемента в лагранжевых координатах согласно [8] имеет вид

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_L d\boldsymbol{\Gamma} = d\tau\left(\nabla \times \left(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}\right) + \left(\mathbf{u}\nabla\right)\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\left(\nabla\mathbf{u}\right)\right) =$$

$$= d\tau\left(\nabla\boldsymbol{\Omega}\right)\mathbf{u} = d\tau\left(\boldsymbol{\Omega}\nabla\right)\mathbf{u} = \left(d\boldsymbol{\Gamma}\nabla\right)\mathbf{u}.$$

## 5. Метод вязких вихревых доменов

Метод основан на решении уравнений Навье Стокса вязкой несжимаемой жидкости в лагранжевых координатах со скоростью движения лагранжевых точек $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. Аналогичный подход был применен в работе [19], однако, наличие ряда недостатков в способе вычисления диффузионной скорости, основанном на интуитивных соображениях, ограничило применимость метода. Метод ВВД использует строго обоснованные формулы для вычисления диффузионной скорости и не содержит произвольных параметров. В пределе при бесконечном измельчении вихревых элементов эволюция завихренности подчиняется двумерным нестационарным уравнениям Навье-Стокса.

Пространство с ненулевой завихренностью моделируется набором мелких областей (вихревых доменов), движущихся относительно жидкости с диффузионной скоростью (3.12). На каждом временном шаге со всей поверхности тела сходят новые домены. В процессе движения циркуляция домена $\Gamma$ остается постоянной. В каждом домене имеется контрольная точка $\mathbf{R}$, в которой вычисляется скорость жидкости $\mathbf{V}$ и диффузионная скорость $\mathbf{V}_\mathrm{d}$, после чего точка перемещается в соответствии с суммарной скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. Для сталкивающихся доменов разноименной циркуляции имеется механизм аннигиляции [16].

По положению контрольных точек и значениям циркуляций соответствующих им доменов можно восстановить поля скоростей и завихренности. Поскольку сумма циркуляций соседних доменов остается постоянной, искривление и вытягивание границ не играет существенной роли, так как после перемещения контрольных точек вокруг каждой из них можно мысленно построить домен с другими границами и той же циркуляцией.

Новые вихревые домены в отсутствие неконсервативных сил рождаются только на контуре обтекаемых тел. При достаточно малом значении шага по времени можно считать, что образовавшиеся за время этого шага домены находятся в непосредственной близости от тела, и задать положение новых контрольных точек непосредственно на контуре тела. Циркуляции вновь образовавшихся доменов должны обеспечивать условие непротекания (или иное условие, накладываемое на нормальную составляющую вектора скорости на поверхности).

Для вычисление диффузионной скорости используются формулы, основанные на интегральных представлениях функций $\Omega$ и $\nabla\Omega$ [20]

$$\Omega(\mathbf{R}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_1}{I_0}; \quad \nabla\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathbf{I}_2}{I_0} - \frac{I_1\mathbf{I}_3}{I_0^2}\right) \tag{5.2}$$

$$I_1(\mathbf{R}) = \int_S \Omega(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}\right)ds$$

$$I_0(\mathbf{R}) = \int_S \exp\left(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}\right)ds$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{R}) = \nabla I_1(\mathbf{R}) = -\int_S \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\varepsilon}\Omega(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}\right)ds$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{R}) = \nabla I_0(\mathbf{R}) = -\int_S \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\varepsilon}\exp\left(-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{\varepsilon}\right)ds$$

Данные представления справедливы для любой непрерывной в области $S$ скалярной функции $\Omega$, в чем можно убедиться, разложив ее в ряд в окрестности точки $\mathbf{R}$

$$\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}-\mathbf{R})\nabla\Omega + O\left(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2\right)$$

Подставив это разложение в выражения $I_1(\mathbf{R})$ и $I_2(\mathbf{R})$ и проанализировав вклад каждого слагаемого при $\varepsilon \to 0$, можно убедиться в справедливости (5.2)

Соответственно, диффузионная скорость в случае плоскопараллельного течения равна

$$\mathbf{V}_d = -\nu\frac{\nabla\Omega}{\Omega} = \nu\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\mathbf{I}_2}{I_1}+\frac{\mathbf{I}_3}{I_0}\right) \tag{5.3}$$

Если поле завихренности описывается дискретным набором вихревых доменов с центрами в точках $\mathbf{r}_i$ и циркуляциями $\Gamma_i$, то при вычислении диффузионной скорости $j$-го домена можно заменить интеграл суммой

$$I_2(\mathbf{r}_j) \approx -\sum\frac{\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|\varepsilon}\Gamma_i\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\varepsilon}\right)$$

$$I_1(\mathbf{r}_j) \approx \sum\Gamma_i\exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\varepsilon}\right) \tag{5.4}$$

Здесь $\varepsilon$ – малый параметр, который, с одной стороны, должен быть меньше расстояния, на котором происходит существенное изменение значения $\Omega$, а с другой стороны, превышать характерное расстояние между вихрями. При достаточном измельчении вихревых доменов оба условия могут быть выполнены, если поле завихренности является гладким. Для выбора значения $\varepsilon$ при вычислении диффузионной скорости в $i$-ой точке можно, например, путем перебора всех точек определить расстояние до ближайшей к ней $j$-ой точки (или до ближайших нескольких точек), после чего величина $\varepsilon_i$ полагается равной этому расстоянию, умноженному на некоторый коэффициент запаса $c$ ($c > 1$). В формуле (5.4) при суммировании по $i$ используется не зависящее от $i$ значение $\varepsilon = \varepsilon_j$. Таким образом, значение $\varepsilon$ выбирается по локальным характеристикам распределения контрольных точек. При этом может случиться так, что при суммировании по всем доменам в формуле (5.4) величина $\varepsilon$ окажется недостаточно большой по сравнению с размерами удаленных доменов.

Но, поскольку вклады от доменов экспоненциально убывают с увеличением расстояния до точки наблюдения, то и сам вклад дальнего домена, и ошибка в его вычислении оказываются несущественными.

Интеграл $\mathbf{I}_3$ можно преобразовать в контурный, а затем в сумму по его отрезкам:

$$\mathbf{I}_3\left(\mathbf{r}_j\right) = -\int_S \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\right|\varepsilon} \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right) ds =$$

$$= -\int_S \nabla \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right) ds = -\oint_C \mathbf{n} \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right) dl \approx \tag{5.5}$$

$$\approx -\sum_{k=1}^{K} \mathbf{n}_k \left|\mathbf{d}_k\right| \exp\left(-\left|\boldsymbol{\xi}_k\right|\right)$$

$$\boldsymbol{\xi}_k = \frac{\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k}{\varepsilon}; \quad \mathbf{d}_\mathrm{k} = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k; \quad \hat{\mathbf{r}}_k = \frac{(\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k+1})}{2}$$

Нормаль направлена от жидкости к телу.

Интеграл $I_0\left(\mathbf{r}_j\right)$, вычисленный для внутренней точки течения, в случае, когда расстояние до границы области τ много больше ε, равен $2\pi\varepsilon^2$, а для точки, лежащей на отрезке границы, длина которого много больше ε, равен $\pi\varepsilon^2$. В этом нетрудно убедиться, так как соответствующая квадратура вычисляется аналитически в полярных координатах. Для произвольной точки области этот интеграл может быть преобразован к контурному с использованием соотношения

$$\exp\left(-r/\varepsilon\right) = -\varepsilon\nabla\left(\mathbf{r}\frac{\left(r+\varepsilon\right)}{r^2}\exp\left(-r/\varepsilon\right)\right),$$

которое можно проверить путем дифференцирования правой части. Далее, используя теорему Стокса, получим

$$I_0(\mathbf{R}) = \int\limits_S \exp\left(-r'/\varepsilon\right) d\mathbf{r} = -\int\limits_S \varepsilon\nabla\left(\frac{\mathbf{r}'\left(r'+\varepsilon\right)}{r'^2}\exp\left(-r'/\varepsilon\right)\right) d\mathbf{r} =$$

$$= -\oint\limits_C \varepsilon\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{r}'\left(r'+\varepsilon\right)}{r'^2}\exp\left(-r'/\varepsilon\right)\right) dl -$$

$$-\oint\limits_{C_\delta} \varepsilon\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{r}'\left(r'+\varepsilon\right)}{r'^2}\exp\left(-r'/\varepsilon\right)\right) dl$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

Контур $C_\delta$ представляет собой окружность бесконечно малого радиуса вокруг точки $\mathbf{r}' = 0$. Интеграл по этому контуру равен – $2\pi\varepsilon^2$. Следовательно

$$I_0\left(\mathbf{r}_j\right) \approx 2\pi\varepsilon^2 - \varepsilon\sum_{k=1}^{K} \frac{\left(\xi_k \mathbf{n}_k\right) d_k}{\xi_k^{\ 2}}\left(\left|\xi_k\right| + 1\right)\exp\left(-\left|\xi_k\right|\right). \qquad (5.6)$$

Если расстояние от вихря до середины отрезка $\left|\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k\right|$ меньше или порядка длины отрезка $\left|\mathbf{d}_\mathrm{k}\right|$, отрезок следует разбить на более мелкие части и просуммировать выражение (5.6) по частям отрезка. Если же $\left|\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k\right| << \left|\mathbf{d}_\mathrm{k}\right|$, вычислить вклад этого отрезка можно по приближенным формулам

$$\mathbf{n}_k\left|\mathbf{d}_k\right| \int\limits_{-0.5}^{0.5} \exp\left(-\left|\frac{\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}_k - \alpha\mathbf{d}_k}{\varepsilon}\right|\right) d\alpha =$$

$$= \mathbf{n}_k\left|\mathbf{d}_k\right| \int\limits_{-0.5}^{0.5} \exp\left(-\left|\sqrt{\xi_k^2 - \alpha\frac{2}{\varepsilon}\left(\mathbf{d}_k\xi_k\right) + \alpha^2\frac{\mathbf{d}_k^2}{\varepsilon^2}}\right|\right) d\alpha \approx$$

$$\approx 2\mathbf{n}_k\varepsilon\left(1 - \exp\left(-\frac{d_k}{2\varepsilon}\right)\right)$$

Если рассматривается поверхность, обтекаемая жидкостью с двух сторон, то при вычислении диффузионной скорости вихря в выражении $\mathbf{I}_3$ надо выбирать направление нормали в соответствие с положением вихря (вектор $\mathbf{I}_3$ должен быть направлен от поверхности). Кроме того, в случае двухстороннего обтекания поверхности при вычислении диффузионной скорости вихря в выражении для $I_1$ и $I_2$ в сумму не должны включаться вихри, лежащие по другую сторону поверхности от рассматриваемой. При вычислении $I_1$ и $I_2$ в сумму можно не включать вихри, лежащие на расстояниях много более ε от рассматриваемого, так как вклад таких вихрей экспоненциально убывает с расстоянием. Это позволит сократить время расчета.

В выражение диффузионной скорости (5.3) входят два слагаемых. Первое, как это видно из формул (5.4), представляет собой сумму вкладов от всех вихрей, каждый из которых является вектором, направленным вдоль линии, соединяющей вихри, и носит характер отталкивания для вихрей одного знака и притяжения для вихрей разных знаков. По мере увеличения расстояния между точками этот вклад экспоненциально убывает. Второе слагаемое в соответствие с (5.5) является суммой вкладов отрезков контура и независимо от знака циркуляции вихря носит характер отталкивания. Обозначим его, как **W,** и будем называть скоростью отталкивания от поверхности. Из (5.5) следует

$$\mathbf{W}\left(\mathbf{r}_j\right)=\nu\frac{\mathbf{I}_3}{I_0}=\oint_C \mathbf{w}\left(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}\right)dl$$
$$\mathbf{w}\left(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}\right)=-\nu\frac{\mathbf{n}}{I_0\left(\mathbf{r}_j\right)}\exp\left(-\frac{\left|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right), \qquad (5.7)$$

где $\mathbf{w}\left(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}\right)dl$ – вклад элемента $dl$ в скорость отталкивания для $j$-го домена. Если расстояние до него много больше ε, $\mathbf{w}\left(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}\right)$ стремится к нулю.

В заключение данного раздела выведем соотношение, которое потребуется в дальнейшем для выражения силы трения на поверхности тела. Докажем, что в случае плоскопараллельных течений справедливо равенство

$$\nu\oint_C \mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}(\mathbf{R})dl = \int_\tau ds\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{r}\right)\times\oint_C dl\mathbf{w}\left(\mathbf{r},\mathbf{R}\right), \qquad \mathbf{R}\in C,\quad \mathbf{r}\in\tau \tag{5.8}$$

где $\mathbf{w}$ определяется формулой (5.7) при $\varepsilon\to 0$.

Подставляя выражение Ω из (5.2), получим

$$\begin{aligned}\nu\oint_C \mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}(\mathbf{R})dl &= \nu\oint_C dl\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{e}_z}{I_0(\mathbf{R})}\int_S \Omega\left(\mathbf{r}\right)\exp\left(-\frac{\left|\mathbf{R}-\mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right)ds = \\ &= -\nu\int_S ds\Omega\left(\mathbf{r}\right)\mathbf{e}_z\times\oint_C dl\frac{\mathbf{n}}{I_0(\mathbf{R})}\exp\left(-\frac{\left|\mathbf{R}-\mathbf{r}\right|}{\varepsilon}\right) = \\ &= \int_S ds\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{r}\right)\times\oint_C dl\mathbf{w}\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right).\end{aligned} \tag{5.9}$$

что и требовалось доказать. Отметим, что $\oint_C dl\mathbf{w}\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)\neq\mathbf{W}\left(\mathbf{r}\right)$, так как интегрирование ведется по первому аргументу функции $\mathbf{w}\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)$, при этом $\mathbf{w}\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)=\dfrac{I_0\left(\mathbf{r}\right)}{I_0\left(\mathbf{R}\right)}\mathbf{w}\left(\mathbf{r},\mathbf{R}\right)$.

# ГЛАВА 2

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В ВИХРЕВЫХ ПОТОКАХ

## 6. Обобщённая формула Коши-Лагранжа

При известном во времени и пространстве распределении $\mathbf{\Omega}$ давление в односвязных областях течения с нулевой завихренностью обычно определяется по формуле Коши – Лагранжа (3.8). При этом потенциал $\varphi$ вычисляется как интеграл от потенциалов прямолинейных или замкнутых вихревых нитей. Ниже будет представлено обобщение этой формулы, справедливое для произвольных областей нестационарных вихревых течений.

Запишем уравнения (3.6), (3.7) эволюции завихренности в идеальной и вязкой жидкости в виде

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{\Psi},$$

где $\mathbf{\Psi} = \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}$ для идеальной жидкости и $\mathbf{\Psi} = \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} - \nu \nabla \times \mathbf{\Omega}$ для вязкой.

Покажем, что если в неограниченном пространстве векторная функция $\mathbf{\Psi}$ всюду непрерывна и стремится к нулю на бесконечности, то непрерывная соленоидальная векторная функция $\mathbf{V}$, ротором которой является $\mathbf{\Omega}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{\Psi} - \nabla \int_{\tau} \mathbf{\Psi K} d\tau. \tag{6.1}$$

В самом деле, из (4.1) в случае безграничного течения следует

$$\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{R},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{K} d\tau = -\int_{\tau} \mathbf{K} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Omega} d\tau = -\int_{\tau} \mathbf{K} \times (\nabla \times \mathbf{\Psi}) d\tau. \tag{6.2}$$

Интеграл по $\tau$ является несобственным, так как в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ ($\mathbf{r}$ – переменная интегрирования) подынтегральное выражение имеет особенность. Функция $\mathbf{K}$ зависит от разности векторов $\mathbf{R} - \mathbf{r}$. Сделаем замену переменных $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$. Теперь $\boldsymbol{\Psi}$ является функцией от суммы $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{R}$, и оператор $\nabla$ можно заменить на $\nabla_R$ (дифференцирование по координатам вектора $\mathbf{R}$). Область интегрирования в новых переменных обозначим $\tau_0$. В отличие от $\tau$ в этой области положение особой точки фиксировано и соответствует $\boldsymbol{\zeta} = 0$. Теперь можно записать

$$-\int_{\tau} \mathbf{K} \times (\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) d\tau = -\int_{\tau_0} \mathbf{K}(\boldsymbol{\zeta}) \times (\nabla_R \times \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{R})) d\tau_0 =$$
$$= -\int_{\tau_0} \nabla_R (\mathbf{K}(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{R})) d\tau_0 + \int_{\tau_0} (\mathbf{K}(\boldsymbol{\zeta}) \nabla_R) \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{R}) d\tau_0. \tag{6.3}$$

Так как границы области интегрирования $\tau_0$ (вокруг особой точки) не зависят от $\mathbf{R}$, а интеграл от скалярного произведения $\mathbf{K\Psi}$ сходится, в первом слагаемом в правой части оператор $\nabla_R$ можно вынести из-под интеграла. Во втором слагаемом, заменяя $\nabla_R$ на $\nabla_\zeta$ и применяя теорему Стокса с учетом того, что $\nabla\mathbf{K} = 0$, получим

$$\int_{\tau_0} (\mathbf{K}(\boldsymbol{\zeta}) \nabla_R) \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{R}) d\tau_0 = \oint_{s_\varepsilon} (\mathbf{nK}) \boldsymbol{\Psi} ds = \boldsymbol{\Psi}$$

В результате из (6.3) следует

$$-\int_{\tau} \mathbf{K} \times (\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) d\tau = -\nabla_R \int_{\tau_0} \mathbf{K\Psi} d\tau_0 + \boldsymbol{\Psi} \tag{6.4}$$

После подстановки (6.4) в (6.2) получим (6.1).

Сравнивая (6.1) с уравнениями Эйлера и Навье-Стокса, запишем

$$\nabla\int\limits_{\tau}\mathbf{\Psi K}d\tau=\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi\right)$$

Интеграл в левой части равенства при условии непрерывности $\mathbf{\Psi}$ является непрерывной функцией от $\mathbf{R}$ и в случае финитного распределения завихренности стремится к нулю при $R\to\infty$. Следовательно, для непрерывных функций $p$, $\mathbf{V}$ и $\Pi$ можно записать

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi-\int\limits_{\tau}\mathbf{\Psi K}d\tau=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{V_\infty^2}{2}+\Pi_\infty .$$

Как уже говорилось выше, в плоскопараллельных и осесимметричных течениях вязкой жидкости функция $\mathbf{\Psi}$ может быть записана в виде $\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{u}$ – скорость движения вихревого элемента $d\mathbf{\Gamma}$. В идеальной жидкости она равна $\mathbf{V}$, а в вязкой $\mathbf{V}+\mathbf{V}_d$. Соответственно, скалярное произведение $\mathbf{\Psi K}d\tau$ можно переписать как $\mathbf{u}\left(d\mathbf{\Gamma}\times\mathbf{K}\right)$. Следовательно,

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\Pi-\int\mathbf{u}\left(d\mathbf{\Gamma}\times\mathbf{K}\right)=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{V_\infty^2}{2}+\Pi_\infty . \qquad (6.5)$$

Векторное произведение $d\mathbf{\Gamma}\times\mathbf{K}$ представляет собой скорость, индуцируемую вихревым элементом $d\mathbf{\Gamma}$ в точке, для которой вычисляется давление.

Формула (6.5) доказана для течений жидкости при наличии обтекаемых тел, моделируемых вихрями и источниками с поверхностями разрыва, в работах [14 – 16]. Ввиду громоздкости доказательства здесь оно не приводится. Отметим только, что в этом случае интегрирование в формуле (6.5) должно осуществляться как по объемным, так и по поверхностным и изолированным вихревым элементам. Под скоростью $\mathbf{u}$ внутри тела и на его поверхности понимается скорость движения вихревых элементов, приводящая к необходимому перераспределению циркуляции моделирующих тело вихревых элементов с учетом сходящей с тела завихренности. Она должна быть предварительно вычислена. О способах такого представления эволюции завихренности и нахождении соответствующей скорости **u** будет рассказано в следующем разделе. Кроме того, формула (6.5) будет представлена в виде, не требующем вычисления **u** внутри тела.

В случае наличия источников в выражение (6.5) добавляется скорость изменения потенциала источников $\partial\varphi_Q/\partial t$ [14,15]

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}-\int_\tau \mathbf{u}\left(d\boldsymbol{\Gamma}\times\mathbf{K}\right)+\Pi+\frac{\partial\varphi_Q}{\partial t}=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{V_\infty^2}{2}+\Pi_\infty. \quad (6.6)$$

Нетрудно видеть, что в плоскопараллельных течениях подынтегральное выражение представляет собой производную от потенциала движущегося вихря неизменной циркуляции. В самом деле, потенциал вихревого элемента в точке **R** равен циркуляции этого элемента $d\Gamma$, умноженной на потенциал точечного единичного вихря $\varphi_V$. Скорость, индуцируемая в точке **R** этим вихревым элементом, равна $d\Gamma\nabla\varphi_V = d\boldsymbol{\Gamma}\times\mathbf{K}$. Запишем производную по времени от потенциала рассматриваемого вихревого элемента, учитывая, что его циркуляция при движении не изменяется, а функция $\varphi_V$ зависит только от разности **R**–**r**($t$) (**r** – точка нахождения вихря).

$$d\Gamma\frac{\partial\varphi_V}{\partial t}=-d\Gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\varphi_V=-\mathbf{u}\left(d\boldsymbol{\Gamma}\times\mathbf{K}\right).$$

Следовательно, формулу (6.6) можно также записать в виде

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\int_\tau \frac{\partial\varphi_V}{\partial t}d\Gamma+\Pi+\frac{\partial\varphi_Q}{\partial t}=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{V_\infty^2}{2}+\Pi_\infty. \quad (6.7)$$

Частная производная по времени потенциала движущегося вихря неизменной циркуляции в отличие от самого потенциала является однозначной функцией. Вынос оператора дифференцирования из-под интеграла в точке, где течение является вихревым, приведет к неопределённости выражения под интегралом. В односвязной области потенциального течения потенциал вихря может быть определён однозначно, поэтому вынос оператора $\partial/\partial t$ из-под интеграла возможен, в результате чего полученное выражение переходит в формулу Коши-Лагранжа.

Также можно показать, что в трёхмерных течениях жидкости интеграл в (6.6) по замкнутой вихревой трубке равен скорости изменения ее потенциала. Следовательно, в случае трехмерных потенциальных течений (6.6) также переходит в формулу Коши –Лагранжа.

## 7. Представление эволюции присоединенной завихренности и рождения новых вихревых элементов в виде движения вихрей

### *Плоскопараллельные течения*

Рассмотрим простейший случай обтекания бесконечно тонкой жесткой поверхности со сходом вихревой пелены на краях (см. рис. 1). Предположим, что вихревые элементы на поверхности движутся относительно нее со скоростью $u_{отн}$, и стекают с двух сторон. При этом в точке $\gamma = 0$ рождаются новые вихревые элементы противоположных знаков с суммарной циркуляцией, равной нулю. На контуре задано направление для положительных значений скорости (от точки $l = 0$ к $l = L$)

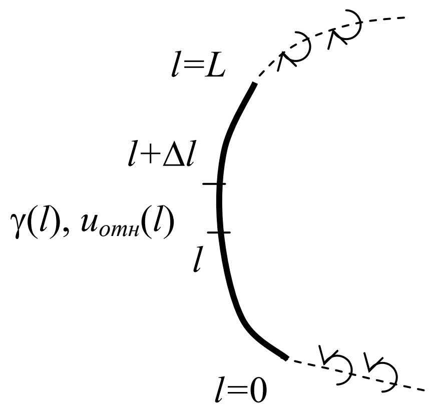



Рис. 1

Циркуляция $\Delta\Gamma$ на отрезке контура $\Delta l$ равна $\Delta\Gamma = \gamma(l)\,\Delta l$. При движении вихревых элементов вдоль контура со скоростью $u_{отн}(l)$ она изменится за время $\Delta t$ на величину $(\gamma(l)u_{отн}(l) - \gamma(l+\Delta l)u_{отн}(l+\Delta l))\Delta t$ . Следовательно, функция $u_{отн}(l)$ в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \gamma u_{отн}}{\partial l} = -\dot{\gamma}\,. \tag{7.1}$$

На концах контура величины $\gamma(0)u_{отн}(0)$ и $\gamma(L)u_{отн}(L)$ должны быть равны соответственно потокам свободной циркуляции в этих точках.

$$\gamma(0)u_{отн}(0) = -J_0 \ , \qquad \gamma(L)u_{отн}(L) = J_L \ . \tag{7.2}$$

$J_0$ и $J_L$ – циркуляции вихревых элементов, сошедших с кромок в единицу времени.

Решением дифференциального уравнения (7.1) с граничными условиями (7.2) является

$$\gamma(l)u_{отн}(l) = -\int_0^l \dot{\gamma}\, dl - J_0 = -\dot{\Gamma}_l - J_0 .$$

Здесь $\Gamma_l = \int_0^l \gamma dl$, величина $l$ – длина части контура от ее начальной до рассматриваемой точки. Граничное условие при $l = L$ выполняется автоматически, так как суммарное приращение циркуляции на обтекаемом контуре вместе с циркуляцией генерируемых свободных вихрей равно нулю.

Если имеет место поток свободных вихрей $J$ в пространство со всех точек контура (например, в вязкой жидкости), то он также должен быть включен в общий баланс

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + J = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\gamma u_{отн}\right).$$

В случае деформирующейся поверхности в уравнение, определяющее виртуальный поток завихренности, должна входить также скорость изменения ее длины. Так как в этом случае $\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t}\Delta l + \gamma \frac{\partial}{\partial t}(\Delta l)$, производная $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta l)$ равна $\Delta l \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial l}\mathbf{e}_l$, где $\mathbf{u}_b$ – скорость движения точек линии, $\mathbf{e}_l$ – касательный к ней единичный вектор

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma + \gamma\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial l}\mathbf{e}_l + J = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\gamma u_{отн}\right).$$

Частная производная по времени берется при фиксированных лагранжевых координатах на контуре.

Таким образом, в общем случае получаем

$$\gamma u_{отн}(\xi) = -\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\gamma + \gamma\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial l}\mathbf{e}_l + J\right)\frac{dl}{d\xi}d\xi - J_0 = \\ = -\dot{\Gamma}_l - \int_0^l J dl - J_0 \ . \tag{7.3}$$

При фиксированной лагранжевой координате $\xi$ на контуре величина $l$ является функцией $\xi$ и $t$.

В случае замкнутых контуров ввиду отсутствия граничного условия функция $\gamma_{отн}$ может быть определена с точностью до константы. Точка, соответствующая значению $l = 0$, назначается произвольно.

$$\gamma u_{отн} = -\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_l - \int_0^l J dl + const\,. \tag{7.4}$$

Ниже будет показано, что константа не влияет на результат вычисления давления вне контура.

Движение вихревых элементов, обеспечивающее перераспределение циркуляции, будем называть виртуальным в отличие от реального движения, связанного с перемещением контура со скоростью $\mathbf{u}_b$. При вычислении давления по формулам (6.5), (6.6) должно быть учтено реальное и виртуальной движение вихревых элементов. Поскольку в дальнейшем относительная скорость будет всегда входить в формулы в виде произведения на $\gamma u_{отн}$, введем обозначение $\gamma_{virt}u_{virt} = \gamma u_{отн}$, полагая $\gamma_{virt}$ бесконечно малой величиной, а $u_{virt}$ бесконечно большой. Это потребуется для общности записи, когда виртуальное движение будет задаваться во внутренних областях тел с нулевой завихренностью.

Рассмотрим вклад в давление от виртуального движения вихревых элементов на бесконечно малом отрезке контура $\Delta l_i$. На этом отрезке вектор виртуальной скорости $\mathbf{u}_{virt}$ направлен вдоль отрезка $\mathbf{u}_{virt} = u_{virt}\mathbf{e}_l$, а скорость, индуцируемая вихревым элементом $\gamma_{virt}\Delta l_i$ равна $\gamma_{virt}\Delta l_i \mathbf{e}_z \times \mathbf{K}$. Следовательно, вклад в давление (обозначим его $\Delta p_i^{virt}$) равен

$$\Delta p_i^{virt} = \rho u_{virt}\gamma_{virt}\Delta l_i \mathbf{e}_l\left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}\right). \tag{7.5}$$

С использованием этого выражения можно записать обобщенную формулу Коши – Лагранжа (6.5) в виде

$$\begin{gathered}\frac{p(\mathbf{R})}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \int\limits_{\tau_1} \mathbf{u}\,\mathbf{v}\,d\tau_1 + \int\limits_{B} \mathbf{u}_b \mathbf{v}\,db + \\ + \int\limits_{C} \gamma_{virt} u_{virt} \mathbf{e}_l\left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}\right) dl.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Здесь $\tau_1$ – пространство, содержащее свободные вихри, $B$ – область тела, $\mathbf{v}d\tau = d\Gamma \times \mathbf{K}$ – скорость, индуцированная вихревым элементом, находящимся в области $d\tau$ (аналогично в области $db$); $\mathbf{u}_b$ – скорость движения точек тела, к которым отнесены присоединенные вихри, величина $\gamma_{virt}u_{virt} = \gamma u_{отн}$ определяется формулами (7.3), (7.4).

Покажем, что при бесконечно малом значении $\Delta l_i$ справедливо равенство $\mathbf{e}_l\left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}\right)\Delta l_i = -\Delta\alpha_i/2\pi$, где $\Delta\alpha_i$ – угол, под которым отрезок $\Delta l_i$ виден из точки $\mathbf{R}$. В самом деле

$$\Delta l_i \mathbf{e}_l \left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta l_i \mathbf{e}_l \left(\mathbf{e}_z \times \left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right)\right)}{\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \left(\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right) \times \Delta l_i \mathbf{e}_l\right)}{\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right)^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \left(\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right) \times \left(\mathbf{R} - \mathbf{r} - \Delta l_i \mathbf{e}_l\right)\right)}{\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}\right)^2}.$$

Векторное произведение в числителе направлено вдоль вектора $\mathbf{e}_z$, и по модулю равно произведению длин векторов на синус угла $\Delta\alpha_i$ между ними. При бесконечно малом значении $\Delta l_i$ дробь с точностью до бесконечно малых второго порядка равна $\Delta\alpha_i$.

Угол отсчитывается от начала отрезка $\Delta l_i$ к его концу. Подставляя в (7.5), получим

$$\Delta p_i^{virt} = -\frac{\rho u_{virt} \gamma_{virt} \Delta\alpha_i}{2\pi} . \tag{7.7}$$

Из этого выражения видно, что если к функции $\gamma_{virt} u_{virt}$ добавлена константа, то после интегрирования по замкнутому контуру интеграл $\oint const\, d\alpha = 0$ в случае, если точка наблюдения лежит вне контура, и $\oint const\, d\alpha = 2\pi const$, если точка находится внутри контура. Таким образом, выбор произвольной константы влияет только на давление внутри области.

Виртуальное движение вихревых элементов можно задавать не только на поверхности, но и внутри контура тела. Например, можно представить, что область тела заполнена завихренностью бесконечно малой плотности, движущейся с бесконечно большой скоростью от некоторой точки $\mathbf{R}_0$ внутри тела к контуру, обеспечивая необходимое изменение циркуляции и генерацию свободной завихренности на нем. В точке $R_0$ при этом одновременно возникают новые вихревые элементы с суммарной нулевой циркуляцией. Для простоты будем рассматривать дискретное распределение вихрей на контуре. Допустим, в точку $r_k$ контура вихревые элементы движутся по линии $l_k$. Пусть циркуляция присоединенного вихревого элемента в этой точке $\Gamma_k$ за время $\Delta t$ изменились на величину $\Delta\Gamma_\mathrm{k}$, а также появились сошедшие с нее новые свободные вихревые элементы с циркуляцией $\Gamma_k^{(g)}$. Кроме этого, вблизи рассматриваемой точки, возможно, были удалены некоторые вихри с циркуляцией $\Gamma_k^{(d)}$ из-за пересечения контура. Обозначим суммарное приращение циркуляции в окрестности $k$-ой точки как $\delta_k$

$$\delta_k = \Delta\Gamma_k + \Gamma_k^{(g)} - \Gamma_k^{(d)}. \qquad (7.8)$$

Для того чтобы обеспечить это изменение, величина $\gamma_{virt}u_{virt}$ на линии $l_k$ должна быть равна $\delta_k/\Delta t$. Сумма $\delta_k$ по всем $k$ на контуре равна нулю.

Как было показано выше, вклад в давление в точке $\mathbf{R}$ от потока завихренности $\gamma_{virt}u_{virt}$ на линии, соединяющей точку $\mathbf{R}_0$ с точкой $\mathbf{r}_k$, равен

$$\frac{p_k(\mathbf{R})}{\rho} = -\frac{\gamma_{virt}u_{virt}}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = -\frac{\delta_k}{\Delta t}\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2\pi}.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2$ – углы, отсчитываемые от оси координат до векторов $\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$ и $\mathbf{r}_\mathrm{k} - \mathbf{R}$ соответственно (см. рис. 2).

Нетрудно видеть, что вклад в давление от виртуального перемещения таких вихревых элементов не зависит ни от выбора точки $\mathbf{R}_0$, ни от формы линий, по которым происходит перемещение вихрей, так как суммарный (по всем точкам $k$) вклад слагаемых, содержащих $\alpha_1$, равен нулю.

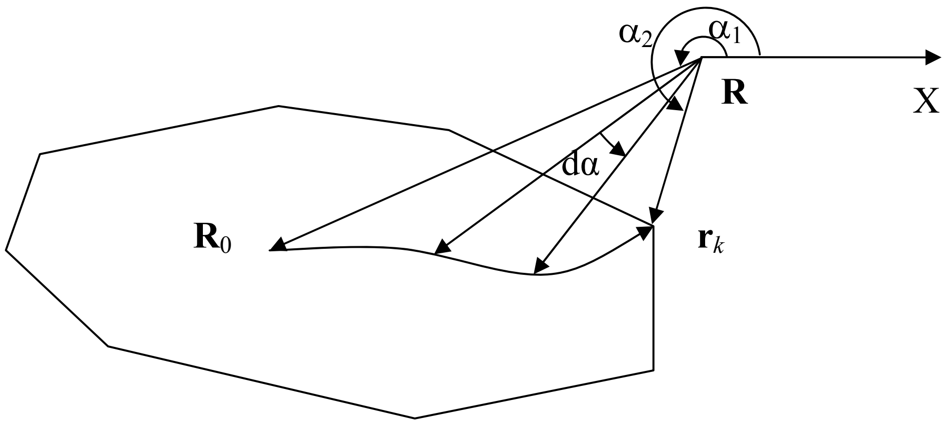



Рис. 2

Необходимо только, чтобы все линии находились внутри тела. Очевидно, что оставшиеся слагаемые представляют собой производную по времени потенциала точечных вихрей с изменяющейся циркуляцией в точках $k$. Сложность, однако, состоит в том, что потенциал точечных вихрей является неоднозначной функцией, и вычисление его с помощью функции арктангенс при неудачном выборе начала отсчета угла может привести к ошибкам. Поэтому в данной работе предлагается следующий алгоритм.

Необходимо выбрать точку $\mathbf{R}_0$, такую, чтобы отрезки, соединяющие ее с новыми или изменяющимися вихрями, лежали внутри контура или на контуре. Далее, для вычисления вклада каждого отрезка в давление в точке $\mathbf{R}$ использовать стандартную функцию atan2($x$, $y$), взяв в качестве $y$ смешанное произведение $\mathbf{e}_z((\mathbf{R}_0-\mathbf{R})\times(\mathbf{r}_k-\mathbf{R}))$, а в качестве $x$ скалярное произведение $(\mathbf{R}_0-\mathbf{R})(\mathbf{r}_k-\mathbf{R})$.

$$p_k(\mathbf{R}) = -\frac{\delta_k}{2\pi\Delta t}\alpha(\mathbf{R},\mathbf{R}_0,\mathbf{r}_k),$$
$$\alpha(\mathbf{R},\mathbf{R}_0,\mathbf{r}_k) = \arctan 2(x,y), \qquad (7.9)$$
$$x = (\mathbf{R}_0-\mathbf{R})\cdot(\mathbf{r}_k-\mathbf{R}), \quad y = \mathbf{e}_z\left((\mathbf{R}_0-\mathbf{R})\times(\mathbf{r}_k-\mathbf{R})\right).$$

Если контур не выпуклый и не существует точки $\mathbf{R}_0$, такой, что все отрезки, соединяющие ее с точками контура, лежат внутри тела, то следует ввести промежуточные точки $\mathbf{r}_k'$ (см. рис. 3) и просуммировать вклады всех отрезков. В противном случае возможны ситуации, когда вместо угла $\alpha$, превышающего $\pi$, получится угол, равный $\alpha - 2\pi$.

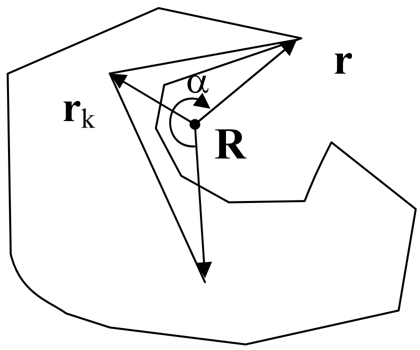



Рис. 3

Таким образом, обобщенная формула Коши-Лагранжа может быть записана в виде, не требующем вычисления виртуальных потоков:

$$\frac{p(\mathbf{R})}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \int_{\tau_1} \mathbf{u}\mathbf{v}\,d\tau_1 + \int_B \mathbf{u}_b \mathbf{v}\,db - \frac{1}{2\pi}\int d\dot{\Gamma}\alpha(\mathbf{R},\mathbf{R}_0,\mathbf{r}). \tag{7.10}$$

$d\dot{\Gamma} = \frac{d}{dt}d\Gamma + Jdl$ – скорость приращения циркуляции присоединенного вихревого элемента dΓ при фиксированных лагранжевых координатах и потока завихренности из точки $\mathbf{r}$, $\alpha(\mathbf{R},\mathbf{R}_0,\mathbf{r})$ – угол под которым видна из точки $\mathbf{R}$ линия, соединяющая внутри тела или которым видна из точки **R** линия, соединяющая внутри тела или по его поверхности точки $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$.

В том случае, когда обтекается вращающееся тело, возможно представление внутренней области в виде жидкости, вращающейся как твердое тело с той же угловой скоростью. Т.е. область тела представляется равномерно заполненной завихренностью $\Omega = 2\omega$, где $\omega$ – угловая скорость вращения тела. Влияние движения и изменения циркуляции этих вихревых элементов также должно быть учтено при вычислении давления.

***Трехмерные течения***

В отличие от двумерных течений, где вихревые линии присоединенной завихренности (бесконечные прямые или кольца) целиком принадлежат области тела, в трехмерных течениях они могут принадлежать ей частично. В модели движущихся вихрей, рассматриваемой здесь, предполагается непрерывная деформация вихревых линий (только тогда верны формулы (6.5), (6.6)). Поэтому, если при движении вихревой линии свободной завихренности смещается точка присоединения ее к поверхности, то вихревая линия либо «отклеивается» от поверхности, либо «приклеивается» к ней, либо «растягивается» в точке присоединения, оставляя за собой след. «Отклеивание» и «приклеивание» связано с движением, перпендикулярным к поверхности. Соответствующая этому процессу скорость изменения присоединенной завихренности описывается выражением $u_n \mathbf{\Omega}_t$, где индексы $n$ и $t$ означают нормальную и тангенциальную к поверхности составляющие векторов, $\mathbf{u}$ – относительная скорость движения вихревых элементов жидкости на границе с поверхностью. «Растяжение» в точке присоединения обусловлено тангенциальным движением вихревой линии и приводит к изменению присоединенной завихренности со скоростью $-\mathbf{u}_t\,\Omega_n$. Итак, при отсутствии движения присоединенных вихревых элементов скорость изменения поверхностной завихренности за счет свободной равна $u_n\mathbf{\Omega}_t - \mathbf{u}_t\,\Omega_n$, которую можно записать в виде

$$u_n\mathbf{\Omega}_t - \mathbf{u}_t\Omega_n = (\mathbf{u}\,\mathbf{n})\big(\mathbf{\Omega} - \mathbf{n}(\mathbf{\Omega}\,\mathbf{n})\big) - \\ -(\mathbf{\Omega}\,\mathbf{n})\big(\mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{u}\,\mathbf{n})\big) = -\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}).$$

Такое изменение присоединенной завихренности в общем случае может не соответствовать изменению, полученному из условия непротекания. Поэтому в модели движущихся вихрей предполагается, что необходимое перераспределение достигается движением присоединенных вихревых элементов. Например, можно представить присоединенную завихренность в виде суперпозиции двух полей, одно из которых ($\gamma_1$) неподвижно относительно поверхности, является продолжением свободного вихревого поля и изменяется только за его счет. Второе ($\gamma_2$), состоящее из замкнутых на поверхности вихревых линий, изменяется в результате виртуального движения вихревых элементов. Полное изменение присоединенной завихренности на неподвижной поверхности описывается уравнением

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_- + \nabla_s\times(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}),\\ \mathbf{J}_+ = \mathbf{n}_+\times(\mathbf{u}_+\times\mathbf{\Omega}_+),\quad \mathbf{J}_- = \mathbf{n}_-\times(\mathbf{u}_-\times\mathbf{\Omega}_-).\end{gathered}\qquad(7.11)$$

Индексами «+», «–» помечены значения функций с двух сторон поверхности, оператор $\nabla_s$ содержит только производные по поверхности. В локальной ортогональной системе координат ($\xi$,$\eta$) он равен

$$\nabla_s = \mathbf{e}_\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathbf{e}_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

Покажем, как может быть вычислена векторная функция $\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}$ при моделировании поверхности вихревыми рамками [33]. Рассмотрим плоскую прямоугольную рамку, циркуляция которой изменилась за время $\Delta t$ на величину $\Delta\Gamma$. Представим, что она заполнена поверхностными вихревыми элементами бесконечно малой плотности $\gamma_{virt}$, причем вихревые линии поля $\gamma_{virt}$ представляют собой рамки, геометрически подобные рассматриваемой (см. рис. 4). Скорость движения виртуальных вихревых элементов направлена от точки О и имеет такую величину, что рамки растягиваются, сохраняя геометрическое подобие, и в конечном итоге «приклеиваются» к основной рамке. При этом векторная функция $\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}$ постоянна по всей площади и равна $\mathbf{n}\,\Delta\Gamma/\Delta t$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности.

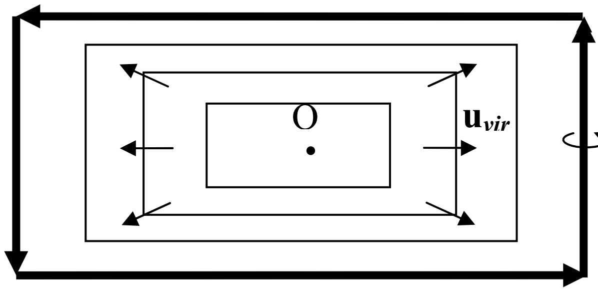



Рис. 4

Вклад в давление в точке $\mathbf{R}$ от потока вихрей по поверхности $i$-ой рамки $p_i(\mathbf{R})$ согласно (6.5) выражается формулой:

$$\frac{p_i(\mathbf{R})}{\rho}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_i}\frac{\boldsymbol{\gamma}_{virt}\times(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}\cdot\mathbf{u}_{virt}ds=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_i}\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}ds=$$

$$=\frac{\Delta\Gamma_i}{4\pi\Delta t}\int\limits_{s_i}\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^3}ds=\frac{\Delta\Gamma_i}{4\pi\Delta t}\Theta_i .$$

Величина $\Theta_i/4\pi$ представляет собой потенциал скорости замкнутой вихревой линии единичной циркуляции. Нетрудно видеть, что $\Theta_i$ представляет собой телесный угол, под которым площадка $s_i$ видна из точки $\mathbf{R}$. В случае треугольной площадки телесный угол можно вычислить, спроектировав треугольник на единичную сферу и вычислив площадь проекции на сфере. Согласно формуле сферической геометрии, площадь треугольника на сфере равна

$$S=R_s^2\left(A+B+C-\pi\right)\ , \qquad (7.12)$$

где $R_s$ –радиус сферы, $A$,$B$,$C$ – значения углов в треугольнике.

Пусть заданы координаты точки наблюдения **R** и вершин треугольника $\mathbf{r}'_A=\mathbf{r}_A+\mathbf{R}$; $\mathbf{r}'_B=\mathbf{r}_B+\mathbf{R}$; $\mathbf{r}'_C=\mathbf{r}_C+\mathbf{R}$. Проекции точек $B$ и $C$ на сферу радиуса $\mathbf{r}_A$ обозначим как $B'$ и $C'$. Угол $A$ между дугами $AB'$ и $AC'$ равен углу между касательными к сфере, проведенными из точки $A$ в плоскостях этих дуг, а, следовательно, и в плоскостях $ABR$ и $ACR$ соответственно. Следовательно, угол $A$ равен углу между векторами $\mathbf{r}_{A1}$ и $\mathbf{r}_{A2}$, перпендикулярными $\mathbf{r}_A$ и лежащими в плоскостях $ABR$ и $ACR$:

$$\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\left(\mathbf{r}_B\mathbf{r}_A\right)/r_A^2,$$
$$\mathbf{r}_{A2} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A\left(\mathbf{r}_C\mathbf{r}_A\right)/r_A^2.$$

Нетрудно убедиться, что оба эти вектора перпендикулярны вектору $\mathbf{r}_A$ и лежат в нужных плоскостях, так как являются линейными комбинациями пар векторов: $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$; $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_C$.

Угол $A$ равен

$$\begin{aligned}
&A = \arccos\frac{\mathbf{r}_{A1}\cdot\mathbf{r}_{A2}}{\left|\mathbf{r}_{A1}\right|\cdot\left|\mathbf{r}_{A2}\right|},\\
&\mathbf{r}_{A1}\cdot\mathbf{r}_{A2} = \left(\mathbf{r}_B\mathbf{r}_C\right) - \left(\mathbf{r}_C\mathbf{r}_A\right)\left(\mathbf{r}_B\mathbf{r}_A\right)/r_A^2,\\
&\left|\mathbf{r}_{A1}\right| = \sqrt{\mathbf{r}_B^2 - \left(\mathbf{r}_B\mathbf{r}_A\right)^2/r_A^2},\\
&\left|\mathbf{r}_{A2}\right| = \sqrt{\mathbf{r}_C^2 - \left(\mathbf{r}_C\mathbf{r}_A\right)^2/r_A^2}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Аналогично можно вычислить углы $B$ и $C$, сделав циклические перестановки в формуле (7.13). Если хотя бы один из векторов $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ равен нулю, следует полагать $\Theta = 0$, так как это может быть только в случае, если точка наблюдения находится в вершине треугольника и телесный угол равен нулю.

Функция arccos дает значения углов в интервале от 0 до $\pi$. Сумма углов треугольника на сферической поверхности, полученного при пересечении сферы и пирамиды больше, чем сумма углов плоского треугольника, т.е. больше, чем $\pi$. Соответственно величина S, вычисленная по формуле (7.12) положительна, тогда как $\Theta$ может быть и положительной, и отрицательной величиной в зависимости от ориентации площадки. Для определения знака $\Theta$ можно вычислить смешанное произведение векторов $\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}_B \times \mathbf{r}_A$. После чего можно записать:

$$\Theta = (A + B + C - \pi)\,\mathrm{sign}\left(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}_B \times \mathbf{r}_A\right).$$

Важно, чтобы порядок обхода вершин треугольника был согласован с выбором направления отсчета циркуляции по этому контуру. В данном случае он соответствует изображенному на рис. 5. При этом направление нормали нужно выбирать в соответствии с направлением обхода контура по правилу буравчика.

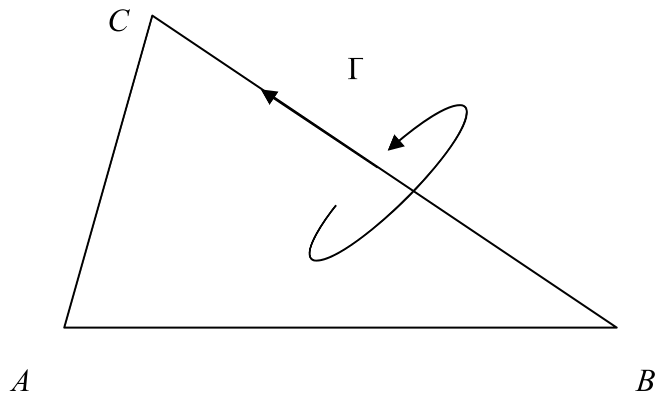



Рис. 5.

## 8. Связь виртуальных перемещений вихрей с неконсервативными силами и разностью давления на поверхностях разрыва

Как известно, при замене обтекаемых тел жидкими объемами и поверхностями разрыва, движение жидкости в этих объемах может быть описано уравнениями Эйлера с внешними массовыми силами $\mathbf{F}_b$ (в общем случае неконсервативными, т.е. $\nabla \times \mathbf{F}_b \neq 0$).

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} = \mathbf{F}_b - \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right). \qquad (8.1)$$

Поскольку течение внутри области тела и массовые силы являются гипотетическими, для одного и того же распределения скорости (и, соответственно, завихренности) в пространстве и времени функция $\mathbf{F}_b$ может быть выбрана не однозначно, а с точностью до потенциальной составляющей (т.е. к ней может быть добавлен градиент произвольной функции, которая затем добавляется к функции $p/\rho$ ), что приводит к неоднозначности распределения давления.

Выше было показано, что если эволюция завихренности представлена как результат реального (со скоростью точек тела $\mathbf{u}_b$) и виртуального (со скоростью $\mathbf{u}_{отн}$) перемещения вихревых элементов по описанным правилам, то завихренность $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяет уравнению (4.10)

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_{отн}.$$

Применив оператор ротор к обеим частям уравнения (8.1) и сравнив полученное равенство с (4.10), запишем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} = (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \times \mathbf{\Omega} - \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right). \qquad (8.2)$$

Вектор $(\mathbf{u}-\mathbf{V})\times\boldsymbol{\Omega}$ выступает в роли силы $\mathbf{F}_b$. Следовательно, можно говорить, что на вихревой элемент $d\boldsymbol{\Gamma}$, совершающий вынужденное движение со скоростью **u,** действует внешняя массовая сила $\mathbf{F}_b$, равная

$$\mathbf{F}_b d\tau=(\mathbf{u}-\mathbf{V})\times d\boldsymbol{\Gamma}.$$

Эта сила является аналогом силы Жуковского, но направлена в противоположную сторону. В этом нет противоречия, так как $\mathbf{F}_b$ является внешней силой, а не действующей на элемент со стороны окружающей жидкости.

Предыдущее выражение силы можно также записать в виде

$$\mathbf{F}_b=(\mathbf{u}_b-\mathbf{V})\times\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt},$$

где, как и в разделе 7, введено обозначение $\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}=\mathbf{u}_{отн}\times\boldsymbol{\Omega}$, при этом $\boldsymbol{\Omega}_{virt}$ – бесконечно малая величина, а $\mathbf{u}_{virt}$ – бесконечно большая. Тогда можно считать, что вихревой элемент $d\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Omega}d\tau$ движется вместе с телом, и на него действует сила $(\mathbf{u}_b-\mathbf{V})\times d\boldsymbol{\Gamma}$. А виртуальные вихревые элементы $d\boldsymbol{\Gamma}_{virt}=\boldsymbol{\Omega}_{virt}d\tau$ движутся с бесконечно большой скоростью, и на них действует массовая сила $\mathbf{u}_{virt}\times d\boldsymbol{\Gamma}_{virt}$.

Покажем, что если эволюция завихренности представлена как результат движения вихревых элементов, то разность давления на поверхностях разрыва равна проекции на ее нормаль силы Жуковского и аналогичной силы, действующей на источники.

$$p_+-p_-=\rho\Big(\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{u}_b-\mathbf{V})+(\boldsymbol{\gamma}_{virt}\times\mathbf{u}_{virt})-q_s(\mathbf{u}_b-\mathbf{V})\Big)\mathbf{n}_+. \quad (8.3)$$

$q_s$ – плотность источников на поверхности ($q_s=\mathbf{n}_+(\mathbf{V}_- -\mathbf{V}_+)$), $\mathbf{V}=(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-)/2$. Разность давления на поверхности замкнутой области гипотетического течения, давление внутри которой описывается уравнением (8.2), выражается формулой (8.3) с точностью до константы.

Как было показано в разделе 7, изменение плотности циркуляции на неподвижной трехмерной поверхности связано с потоками завихренности уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbf{n}_+ \times (\mathbf{u}_+ \times \boldsymbol{\Omega}_+) - \mathbf{n}_- \times (\mathbf{u}_- \times \boldsymbol{\Omega}_-) + \nabla_s \times (\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt}),$$

где поле $\boldsymbol{\gamma}_{virt}$ имеет бесконечно малую плотность и соленоидально на поверхности, а скорость $\mathbf{u}_{virt}$ является бесконечно большой, но векторное произведение конечно. Если поверхность не деформируется и движется поступательно, то в уравнении (7.11) все скорости следует заменить на относительные. Частная производная по времени при этом берется при фиксированной лагранжевой координате на теле.

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_- + \nabla_s \times (\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt}),$$
$$\mathbf{J}_+ = \mathbf{n}_+ \times ((\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_b) \times \boldsymbol{\Omega}_+), \quad \mathbf{J}_- = \mathbf{n}_- \times ((\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_b) \times \boldsymbol{\Omega}_-).$$

При произвольном движении поверхности в уравнение (8.3) должны быть добавлены слагаемые, связанные с ее вращением (при этом изменяется направление вектора $\boldsymbol{\gamma}$) и с растяжением в направлении, перпендикулярном вихревым линиям (при этом изменяется модуль плотности циркуляции $\gamma$). Выразим соответствующие слагаемые $\gamma\dot{\mathbf{e}}_\gamma$ и $\dot{\gamma}\mathbf{e}_\gamma$ через скорость движения поверхности $\mathbf{u}_b$. В локальной системе координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$, в которой единичные векторы $\mathbf{e}_\xi$ и $\mathbf{e}_\eta$ лежат в касательной к поверхности плоскости, причем $\mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_\gamma$, а $\mathbf{e}_\zeta$ перпендикулярен к ней, они равны

$$\gamma\dot{\mathbf{e}}_\xi + \dot{\gamma}\mathbf{e}_\xi = \gamma\left(\mathbf{e}_\eta \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\eta} + \mathbf{e}_\varsigma \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\varsigma}\right) - \mathbf{e}_\xi \gamma\left(\frac{\partial}{\partial\eta} u_{b\eta}\right) = \tag{8.4}$$
$$= \gamma\left(\mathbf{e}_\eta \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\eta} + \mathbf{e}_\xi \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\xi} + \mathbf{e}_\varsigma \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\varsigma}\right) - \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\eta} u_{b\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi} u_{b\xi}\right) =$$
$$= (\boldsymbol{\gamma}\nabla)\mathbf{u}_b - \boldsymbol{\gamma}(\nabla_s \mathbf{u}_b).$$

Оператор $\nabla_s$ содержит только производные в плоскости, касательной к поверхности $\nabla_s = \mathbf{e}_\xi \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{e}_\eta \dfrac{\partial}{\partial \eta}$.

Добавляя (8.4) в (8.3), получим для произвольного движения поверхности скорость изменения циркуляции $\boldsymbol{\gamma}$.

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma}\left(\nabla_s \mathbf{u}_b\right) + \left(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s\right)\mathbf{u}_b + \nabla_s \times \left(\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt}\right) - \mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_- . \quad (8.5)$$

С другой стороны, эту же функцию можно выразить из уравнений движения жидкости на внешней и внутренней сторонах поверхности. Производная $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ при фиксированных лагранжевых координатах, связанных с поверхностью, равна

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_b \nabla\right)\boldsymbol{\gamma} .$$

По определению $\boldsymbol{\gamma} = \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right) \times \mathbf{n}_+$, следовательно,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_b \nabla\right)\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{n}_+ \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_b \nabla\right)\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right) + \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right) \times \dot{\mathbf{n}}_+ .$$

Изменение векторных полей $\mathbf{V}_+$ и $\mathbf{V}_-$ описывается уравнением Навье – Стокса в области жидкости, которое мы записали в виде (8.2). Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\gamma}} = &-\mathbf{n}_+ \times \left(\left(\mathbf{u}_b \nabla\right)\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right) + \mathbf{u}_+ \times \boldsymbol{\Omega}_+ - \mathbf{u}_- \times \boldsymbol{\Omega}_-\right) + \\ &+\mathbf{n}_+ \times \nabla\left(\frac{p_+}{\rho} + \frac{V_+^2}{2} - \frac{p_-}{\rho} - \frac{V_-^2}{2}\right) + \left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right) \times \dot{\mathbf{n}}_+ .\end{aligned} \quad (8.6)$$

Изменение во времени нормали к поверхности при ее движении выражается формулой

$$\dot{\mathbf{n}}_+ = -\mathbf{e}_\xi \frac{\partial u_{b\varsigma}}{\partial \xi} - \mathbf{e}_\eta \frac{\partial u_{b\varsigma}}{\partial \eta} = -\left(\mathbf{n}_+ \times \nabla\right) \times \mathbf{u}_b - \mathbf{n}_+\left(\nabla_s \mathbf{u}_b\right). \quad (8.7)$$

Преобразуем (8.6) с учетом (8.7)

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\gamma}} = &-\mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_b \right) \times \boldsymbol{\Omega}_+ - \left( \mathbf{u}_- - \mathbf{u}_b \right) \times \boldsymbol{\Omega}_- \right) + \\
&+\mathbf{n}_+ \times \nabla \left( \frac{p_+}{\rho} + \frac{V_+^2}{2} - \frac{p_-}{\rho} - \frac{V_-^2}{2} \right) - \\
&-\mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{u}_b \nabla \right) \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) + \mathbf{u}_b \times \left( \boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_- \right) \right) - \\
&-\left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \left( \mathbf{n}_+ \times \nabla \right) \times \mathbf{u}_b + \mathbf{n}_+ \left( \nabla_s \mathbf{u}_b \right) \right).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Выражение $\left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \left( \mathbf{n}_+ \times \nabla \right) \times \mathbf{u}_b \right)$ преобразуем как двойное векторное произведение, учитывая, что $\mathbf{n}_+ \times \nabla = \mathbf{n}_+ \times \nabla_s$

$$\begin{aligned}
&\left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \left( \mathbf{n}_+ \times \nabla \right) \times \mathbf{u}_b \right) = \left( \mathbf{n}_+ \times \nabla_s \right) \left( \underline{\left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right)} \mathbf{u}_b \right) - \\
&-\left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \left( \mathbf{n}_+ \times \nabla \right) \right) \mathbf{u}_b = \mathbf{n}_+ \times \left( \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \nabla_s \right) \mathbf{u}_b + \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \nabla_s \times \mathbf{u}_b \right) \right) - \\
&-\left( \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \mathbf{n}_+ \right) \nabla \right) \mathbf{u}_b = \mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \nabla_s \right) \mathbf{u}_b + \\
&+\mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \nabla_s \times \mathbf{u}_b \right) \right) - \left( \boldsymbol{\gamma} \nabla \right) \mathbf{u}_b.
\end{aligned}$$

Подставим в (8.8), учитывая, что

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{u}_b \nabla \right) \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) + \mathbf{u}_b \times \left( \boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_- \right) \right) - \\
&-\mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \nabla_s \right) \mathbf{u}_b - \mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \left( \nabla_s \times \mathbf{u}_b \right) \right) = \\
&= -\mathbf{n}_+ \times \nabla \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \mathbf{u}_b \right).
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\gamma}} = &-\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_- + \left( \boldsymbol{\gamma} \nabla \right) \mathbf{u}_b - \boldsymbol{\gamma} \left( \nabla_s \mathbf{u}_b \right) + \\
&+\mathbf{n}_+ \times \nabla \left( \frac{p_+}{\rho} + \frac{V_+^2}{2} - \frac{p_-}{\rho} - \frac{V_-^2}{2} - \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \mathbf{u}_b \right) \right).
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Выражение $\left(\frac{V_+^2}{2}-\frac{V_-^2}{2}-\left((\mathbf{V}_+-\mathbf{V}_-)\mathbf{u}_b\right)\right)$ можно преобразовать к виду

$$\frac{V_+^2}{2}-\frac{V_-^2}{2}-\left((\mathbf{V}_+-\mathbf{V}_-)\mathbf{u}_b\right)=(\mathbf{V}_+-\mathbf{V}_-)\left(\frac{1}{2}(\mathbf{V}_++\mathbf{V}_-)-\mathbf{u}_b\right)=$$
$$=(\mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma}-q_s\mathbf{n}_+)(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)=-\left((\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)\times\boldsymbol{\gamma}\right)\mathbf{n}_+-q_s\mathbf{n}_+(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b).$$

Подставляя полученное выражение в (8.9), запишем

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\mathbf{J}_+-\mathbf{J}_-+(\boldsymbol{\gamma}\nabla)\mathbf{u}_b-\boldsymbol{\gamma}(\nabla_s\mathbf{u}_b)+$$
$$+\mathbf{n}_+\times\nabla\left(\frac{p_+-p_-}{\rho}-\left((\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)\times\boldsymbol{\gamma}\right)\mathbf{n}_+-q_s\mathbf{n}_+(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)\right). \qquad (8.10)$$

Из сравнения (8.10) с (8.5) следует

$$\nabla_s\times(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt})=$$
$$=\mathbf{n}_+\times\nabla\left(\frac{p_+-p_-}{\rho}-\left((\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)\times\boldsymbol{\gamma}\right)\mathbf{n}_+-q_s\mathbf{n}_+(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b)\right).$$

Вектор $\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}$ направлен по нормали к поверхности. Обозначим его $\mathbf{J}_{virt}^{(s)}=\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}=J_{virt}^{(s)}\mathbf{n}$.

$$\nabla_s\times(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt})=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\varsigma\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & 0\\ 0 & 0 & J_{virt}^{(s)}\end{vmatrix}=$$
$$=\left(\mathbf{e}_\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathbf{e}_\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)J_{virt}^{(s)}=-\mathbf{n}_+\times\nabla_s J_{virt}^{(s)}$$

Следовательно, с учетом того, что $\mathbf{n}_+\times\nabla=\mathbf{n}_+\times\nabla_s$, справедливо равенство

$$\mathbf{n}_+ \times \nabla_s \left( \frac{p_+ - p_-}{\rho} - \left( \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right) \times \boldsymbol{\gamma} \right) \mathbf{n}_+ - q_s \, \mathbf{n}_+ \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right) + J_{virt}^{(s)} \right) = 0 .$$

Отсюда следует, что выражение под знаком градиента равно константе.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{virt}^{(s)} = -\mathbf{n}_+ \left( \frac{p_+ - p_-}{\rho} \right) + \mathbf{n}_+ \left( \left( \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right) \times \boldsymbol{\gamma} \right) \mathbf{n}_+ \right) + \\ + q_s \mathbf{n}_+ \left( \mathbf{n}_+ \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right) \right) + const. \end{aligned} \qquad (8.11)$$

Значение константы не существенно, когда речь идет о замкнутой области, так оно не влияет на равнодействующую сил давления.

Если поверхность не замкнута, и на ее границе в жидкости давление $p_+$ равно $p_-$, то для выполнения равенства (8.11) с константой, равной нулю, необходимы следующие граничные условия для поля $\mathbf{J}_{virt}^{(s)}$

$$\mathbf{J}_{virt}^{(s)} \mathbf{n} \big|_C = \left( \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right) \times \boldsymbol{\gamma} \right) \mathbf{n}_f . \qquad (8.12)$$

Здесь $\mathbf{n}_f$ – нормаль к свободной поверхности разрыва. Это условие означает непрерывность потоков завихренности в точках, где циркуляция не накапливается. Оно совпадает с условием, принятым при представлении эволюции завихренности в виде движения вихревых элементов.

Таким образом, показано, что разность давления на двух сторонах поверхности выражается формулой (8.3), т.е. утверждение, сформулированное в начале данного раздела, доказано.

Равенство (8.3) можно также переписать в виде

$$\left( p_+ - p_- \right) \mathbf{n}_+ = \rho \left( \boldsymbol{\gamma}_{virt} \times \mathbf{u}_{virt} + \boldsymbol{\gamma} \times \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V} \right)_t + q_s \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)_n \right). \qquad (8.13)$$

(индексы $n$ и $t$ означают нормальную и тангенциальную части векторов).

## 9. Теорема Жуковского «в малом»

При использовании традиционного варианта вихревого метода, не учитывающего влияние вязкости, расчет аэродинамических нагрузок в потенциальных стационарных течениях производился с помощью классической теоремы Н.Е. Жуковского «в малом», согласно которой разность давлений $\Delta p$ на двух сторонах бесконечно тонкой двумерной поверхности равна (см., например, [23]):

$$p_+ - p_- = \rho(\mathbf{u}_b - \mathbf{V})\mathbf{e}_l\gamma\,,$$

а в нестационарных задачах

$$p_+ - p_- = \rho\left((\mathbf{u}_b - \mathbf{V})\mathbf{e}_l\gamma - J_0 - \dot{\Gamma}_l\right), \tag{9.1}$$

где $\mathbf{V}$ – скорость, с которой двигался бы вихрь в данной точке поверхности, если бы он был свободным (в случае бесконечно тонкой поверхности эта скорость равна полусумме скоростей жидкости на обеих ее сторонах), $\mathbf{u}_b$ – скорость движения поверхности, $\mathbf{e}_l$ – касательный к поверхности единичный вектор, соответствующий выбранному направлению обхода контура, $\dot{\Gamma}_l$ – скорость изменения циркуляции части контура между рассматриваемой точкой и начальной точкой его обхода, $J_0$ – поток завихренности, сходящий с начальной точки, индексом «+» помечена правая от контура сторона.

В работе [34] теорема Жуковского в малом была обобщена на случай трехмерных нестационарных вихревых течений идеальной жидкости.

Формула (8.3), полученная в предыдущем разделе, является обобщением теоремы на случай вязких течений при произвольном движении деформируемой и проницаемой поверхности, содержащей источники.

В самом деле, в случае плоскопараллельных течений из (8.3) следует

$$p_+ - p_- = \rho\Big(\mathbf{e}_l\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\gamma + \gamma_{virt}u_{virt} - q_s\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\mathbf{n}_+\Big).$$

Как показано в разделе 7, в идеальной жидкости произведение $\gamma_{virt}u_{virt}$ равно

$$\gamma_{virt}u_{virt} = -\dot{\Gamma}_l - \int_0^l Jdl - J_0 \quad .$$

Следовательно, если вихревые элементы сходят только с концов контура ($J$=0), выражение (8.3) переходит в (9.1), а в общем случае произвольного движения проницаемой и деформируемой поверхности в вязкой жидкости при наличии источников формула имеет вид

$$\frac{p_+ - p_-}{\rho} = \mathbf{e}_l\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\gamma - \dot{\Gamma}_l - \int_0^l Jdl - J_0 \quad - q_s\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\mathbf{n}_+ . \qquad (9.2)$$

При вихревом моделировании обтекания проницаемых поверхностей давление не может быть исключено из уравнений, описывающих эволюцию завихренности, так как поток жидкости сквозь проницаемую поверхность зависит от разности давления на ней. Полученное соотношение (9.2) можно использовать в качестве дополнительного уравнения при постановке задачи вихревыми методами.

В случае замкнутого контура виртуальный поток завихренности, а, следовательно, и давление внутри поверхности может быть определено с точностью до константы, что не влияет на давление снаружи и равнодействующую сил давления. В этом случае произвольно назначается точка, которая считается началом контура. В данной работе принято обозначать индексом «–» внутреннюю область контура, что соответствует обходу его против часовой стрелки.

В случае бесконечно тонкой поверхности в трехмерном пространстве достаточно вычислить виртуальные потоки по алгоритму, описанному в разделе 3. Далее для определения разности давления можно воспользоваться формулой (8.3).

## 10. Касательные напряжения

Помимо нормальной нагрузки, действующей на поверхность вследствие разности давления, на нее может действовать тангенциальная нагрузка $\tau_q$, связанная с потерей импульса при прохождении жидкости сквозь проницаемую поверхность.

$$\tau_q = \rho\left(-q_+\mathbf{V}_+ - q_-\mathbf{V}_-\right), \tag{10.1}$$

где $q_+ = -(\mathbf{V}_+ - \mathbf{u}_b)\cdot\mathbf{n}_+$, $q_- = -(\mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b)\cdot\mathbf{n}_-$.

При наличии источников на поверхности, распределенных с плотностью $q_s$, имеет место разрыв нормальной составляющей скорости жидкости

$$-(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-)\cdot\mathbf{n}_+ = q_+ + q_- = q_s.$$

Разрыв тангенциальной составляющей выражается через плотность завихренности $\boldsymbol{\gamma}$

$$\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)_t = \mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma},$$

следовательно,

$$\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- = \mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma} - q_s\mathbf{n}_+.$$

По определению скорость $\mathbf{V}$ на поверхности разрыва равна полусумме скоростей по обе стороны $\left(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-\right)/2 = \mathbf{V}$.

Из этих формул следует

$$\mathbf{V}_+ = \frac{\mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma}}{2} - \frac{\mathbf{n}_+ q_s}{2} + \mathbf{V};\ \ \mathbf{V}_- = -\frac{\mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma}}{2} + \frac{\mathbf{n}_+ q_s}{2} + \mathbf{V};$$

$$q_+ = -\left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)\mathbf{n} + \frac{q_s}{2};\ \ q_- = \left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)\mathbf{n} + \frac{q_s}{2}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть (10.1), после несложных преобразований получаем

$$-q_+\mathbf{V}_+ - q_-\mathbf{V}_- = \left(\ \mathbf{n}_+\times\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{n}_+ q_s\right)\left(\left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)\mathbf{n}_+\right) - q_s\mathbf{V}. \tag{10.2}$$

Вектор $\mathbf{n}_+\left(\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)\mathbf{n}_+\right)$ представляет собой нормальную к поверхности составляющую вектора $\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)$. Обозначим его как $\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)_n$. С учетом этого обозначения после подстановки (10.2) в (10.1) получим

$$\tau_q = \rho\left(\left(\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)_n \times \boldsymbol{\gamma}\right) - q_s\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)_n - q_s\mathbf{V}\right).$$

Складывая нормальную (8.13) и касательную нагрузку, получаем:

$$\Delta p\mathbf{n}_+ + \boldsymbol{\tau}_q = \rho\left(\boldsymbol{\gamma}\times\left(\mathbf{u}_b-\mathbf{V}\right) + \boldsymbol{\gamma}_{virt}\times\mathbf{u}_{virt} - q_s\mathbf{V}\right) \quad . \qquad (10.3)$$

Из полученного выражения видно, что сумма нормальной и тангенциальной (без учета трения) нагрузок на единичной площади поверхности равна силе Жуковского минус импульс жидкости, истекающей с нее за единицу времени.

При учете вязкости необходимо также рассмотреть касательную нагрузку $\tau_w$, связанную с силой трения, действующей на поверхность.

Как известно [7], тензор напряжения в вязкой несжимаемой жидкости имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} -p + 2\nu\dfrac{\partial V_x}{\partial x} & \nu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y}+\dfrac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \nu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z}+\dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \nu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y}+\dfrac{\partial V_y}{\partial x}\right) & -p + 2\nu\dfrac{\partial V_y}{\partial y} & \nu\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y}+\dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \nu\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z}+\dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \nu\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y}+\dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right) & -p + 2\nu\dfrac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Действующее на тело вязкое напряжение $\boldsymbol{\tau}_w$ на площадке $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{n}\Delta s$ выражается формулой

$$\tau_w = -\nu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial V_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 2\frac{\partial V_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) & 2\frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} =$$

$$= -2(\nabla \mathbf{V})\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} +$$

$$+2\nu \begin{pmatrix} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} & -\frac{\partial V_y}{\partial x} & -\frac{\partial V_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} & -\frac{\partial V_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial V_x}{\partial z} & -\frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} -$$

$$-\nu \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} =$$

$$= \nu\left(-2\mathbf{n}(\nabla \mathbf{V}) - 2(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V})\right).$$

Поскольку в несжимаемой жидкости $\nabla\mathbf{V}=0$, получаем

$$\tau_w = \rho\left(-2\nu\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V} + \nu\mathbf{n}\times\Omega\right). \qquad (10.4)$$

Оператор $\mathbf{n}\times\nabla$ не содержит производных по направлению к нормали поверхности, а скорость жидкости на поверхности при условии прилипания равна скорости поверхности $\mathbf{u}_b$. Поэтому на поверхности тела

$$\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V} = \left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{u}_b\,.$$

Если поверхность является жесткой, $\mathbf{u}_b$ можно выразить формулой $\mathbf{u}_b = \mathbf{V}_c + \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)$, где $\mathbf{V}_c$ – скорость точки, через которую проходит ось вращения, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения.

$$\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{u}_b = \left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)\right) = \boldsymbol{\omega}\left(\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)\right) -$$
$$-\left(\boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\right)\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right) = \boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{n}\left(\nabla\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)\right)\right) - \left(\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}\right)\nabla\right)\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right) = \mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Подставляя это выражение в (10.4), получим для касательной нагрузки, связанной с силой трения на жесткой поверхности:

$$\tau_w = \rho\nu\left(\mathbf{n}\times\Omega - 2\mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega}\right). \qquad (10.5)$$

В случае деформируемой поверхности имеем

$$\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{u}_b = \left(\mathbf{n}\times\nabla_s\right)\times\mathbf{u}_b = \left(\mathbf{n}\nabla_s\right)\mathbf{u}_b + \mathbf{n}\times\left(\nabla_s\times\mathbf{u}_b\right) - \mathbf{n}\left(\nabla_s\mathbf{u}_b\right).$$

Так как оператор $\boldsymbol{\nabla}_s$ не содержит дифференцирования в направлении нормали, скалярное произведение $\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}_s$ равно нулю. Следовательно, связанная с вязкостью нагрузка на деформируемой поверхности при условии прилипания выражается формулой

$$\boldsymbol{\tau}_w = \rho\nu\left(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\Omega} - 2\mathbf{n}\times\left(\nabla_s\times\mathbf{u}_b\right) + 2\mathbf{n}\left(\nabla_s\mathbf{u}_b\right)\right). \qquad (10.6)$$

Как видно из формулы, помимо касательного напряжения в этом случае имеет место и нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\tau}_w$. Второе слагаемое связано с локальным поворотом поверхности, третье – с локальным ее растяжением.

## 11. Гидродинамическая сила

На тело, обтекаемое жидкостью, действуют силы давления и трения, а при наличии проницаемости поверхности и (или) отсоса (вдува) жидкости на нее действуют еще и силы, связанные с соответствующим изменением импульса среды. В данном разделе приводится вывод выражения гидродинамической силы через характеристики вихревого поля для произвольного движения тела (включая деформационное) в идеальной и вязкой жидкости при наличии перечисленных эффектов.

Как было показано в разделе 8, обтекаемое тело можно представить как жидкий объем, внутри которого движение жидкости происходит в общем случае под действием неконсервативной массовой силы $\mathbf{F}_b$, равной

$$\mathbf{F}_b = \left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right) \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt}. \tag{11.1}$$

Уравнение движения в этой области имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} - \mathbf{F}_b = -\nabla p. \tag{11.2}$$

В частном случае, когда присоединенные вихри и их виртуальные перемещения задаются только на поверхности, сила $\mathbf{F}_b$ равна нулю, однако мы будем рассматривать общий случай, так как при деформационном и вращательном движении тела удобно задавать ненулевую завихренность внутри области тела.

Сила давления $\mathbf{F}_p$, действующая на тело, равна

$$\mathbf{F}_p = \oint_S \mathbf{n}_+ p_+ ds = \oint_S \mathbf{n}_+ \left(p_+ - p_-\right) ds - \oint_S \mathbf{n}_- p_- ds. \tag{11.3}$$

Разность давления с двух сторон поверхности определяется равенством (8.13).

$$\left(p_+ - p_-\right)\mathbf{n}_+ = \rho\Big(-\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} + \left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)_t \times \boldsymbol{\gamma} + q_s\left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)_n\Big).$$

Индексы $t$ и $n$ указывают на тангенциальную и нормальную к поверхности составляющие векторов; $q_s = q_+ + q_-$ –плотность источников на поверхности.

Интеграл $\oint\limits_S \mathbf{n}_- p_- ds$ выразим через характеристики вихрей и источников внутри тела, используя теорему Стокса и уравнение (11.2), полагая для простоты, что внутри области тела $B$ поля скорости и давления непрерывны и дифференцируемы. Получим

$$-\frac{1}{\rho}\oint\limits_S \mathbf{n}_- p_- ds = -\frac{1}{\rho}\int\limits_B \nabla p_- ds =$$

$$= \int\limits_B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} db + \int\limits_B (\nabla\mathbf{V})\mathbf{V} db - \int\limits_B \mathbf{V}(\nabla\mathbf{V}) db - \int\limits_B \mathbf{F}_b db = \qquad (11.4)$$

$$= \int\limits_B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} db + \oint\limits_S (\mathbf{n}_- \mathbf{V}_-)\mathbf{V}_- ds - \int\limits_B \mathbf{V}(\nabla\mathbf{V}) db - \int\limits_B \mathbf{F}_b db.$$

Здесь использована также формула (2.1). Первый интеграл в правой части (11.4) выразим из формулы для производной от интеграла по переменной области

$$\frac{d}{dt}\int\limits_B \mathbf{V} db = \int\limits_B \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} db + \oint\limits_S (\mathbf{n}_- \mathbf{u}_b)\mathbf{V}_- ds .$$

Из (11.3) с учетом (8.13), (11.1), (11.2) и определения $q_b$ получаем

$$\frac{\mathbf{F}_p}{\rho} = \frac{d}{dt}\int\limits_B \mathbf{V} db + \oint\limits_S \left(\mathbf{n}_- (\mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b)\right)\mathbf{V}_- ds -$$

$$-\int\limits_B q_b \mathbf{V} db - \int\limits_B \left((\mathbf{u}_b - \mathbf{V})\times\mathbf{\Omega} + \mathbf{u}_{virt}\times\mathbf{\Omega}_{virt}\right) db -$$

$$-\oint\limits_S \left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt} + (\mathbf{u}_b - \mathbf{V})_t \times\boldsymbol{\gamma} - q_s (\mathbf{V} - \mathbf{u}_b)_n\right) ds.$$

Выражения $-\int\limits_B \left( \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V} \right) \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\Omega}_{virt} \right) db$, и

$$-\oint\limits_S \left( \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} + \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V} \right) \times \boldsymbol{\gamma} \right) ds$$

представляет собой аналог силы Жуковского. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Zh} &= -\int\limits_B \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V} \right) \times \boldsymbol{\Omega} db - \oint\limits_S \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V} \right) \times \boldsymbol{\gamma} ds, \\ \mathbf{F}_{Zh}^{virt} &= -\int\limits_B \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\Omega}_{virt} db - \oint\limits_S \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} ds. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Используя эти обозначения и учитывая, что вектор $\left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)$ на проницаемой поверхности содержит помимо тангенциальной нормальную составляющую, запишем

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_p}{\rho} &= \frac{d}{dt} \int\limits_B \mathbf{V} db + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt} - \int\limits_B q_b \mathbf{V} db + \\ &+ \oint\limits_S \left( \mathbf{n}_- \left( \mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b \right) \right) \mathbf{V}_- ds - \oint\limits_S \left( \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)_n \times \boldsymbol{\gamma} - q_s \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)_n \right) ds. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Преобразуем подынтегральные выражения, используя обозначения, принятые в разделе 10.

$$\left( \mathbf{n}_- \left( \mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b \right) \right) \mathbf{V}_- = -q_- \mathbf{V}_-;$$

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)_n \times \boldsymbol{\gamma} - q_s \left( \mathbf{V} - \mathbf{u}_b \right)_n = \\ &= \frac{q_- - q_+}{2} \mathbf{n}_+ \times \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \times \mathbf{n}_+ \right) - \left( q_- + q_+ \right) \frac{\left( q_- - q_+ \right)}{2} \mathbf{n}_+ = \\ &= \frac{q_- - q_+}{2} \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- - \mathbf{n}_+ \left( \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right) \mathbf{n}_+ - (q_- - q_+) \right) \right) = \\ &= \frac{q_- - q_+}{2} \left( \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_- \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (11.6), получим

$$\frac{\mathbf{F}_p}{\rho} = \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{V}db + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt} - \\ -\int_B q_b \mathbf{V}db + \oint_S \left( q_+ \frac{\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-}{2} - q_- \mathbf{V} \right) ds. \tag{11.7}$$

В случае проницаемой поверхности, помимо силы давления, на тело действует сила $\mathbf{F}_q$, связанная с изменением импульса среды за счет поглощенной или вышедшей из тела жидкости, $\mathbf{F}_q = -\rho\oint_S q_+ \mathbf{V}_+ ds$. Складывая с выражением силы $\mathbf{F}_p$, получим

$$\frac{\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_q}{\rho} = \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{V}db + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt} - \int \mathbf{V}dQ, \tag{11.8}$$

где $\int \mathbf{V}dQ = \int_B \mathbf{V}q_b db + \oint_S \mathbf{V}q_s ds$.

В случае непроницаемых поверхностей и отсутствия источников интеграл $\int_B \mathbf{V}db$ равен скорости смещения центра тяжести объема $\mathbf{u}_m$, умноженной на объем $b$, а производная по времени от него – произведению ускорения на объем. Формула в этом случае принимает вид

$$\mathbf{F}_p = \rho\left(\dot{\mathbf{u}}_m b + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt}\right). \tag{11.9}$$

При наличии источников интеграл $\int_B \mathbf{V}db$ можно выразить через их характеристики и скорость движения границы. Используем формулу (2.16)

$$\int_B \mathbf{V}db = -\int_B \mathbf{r}\left(\nabla\mathbf{V}\right)db + \oint_S \mathbf{r}\left(\mathbf{n}_-\mathbf{V}_-\right)ds =$$
$$= -\int_B \mathbf{r}\left(\nabla\mathbf{V}\right)db + \oint_S \mathbf{r}\left(\mathbf{n}_-\left(\mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b\right)\right)ds + \oint_S \mathbf{r}\left(\mathbf{n}_-\mathbf{u}_b\right)ds =$$
$$= -\int_B \mathbf{r}q_b db - \oint_S \mathbf{r}q_- ds + \oint_S \mathbf{r}\left(\mathbf{n}_-\mathbf{u}_b\right)ds.$$

Последний интеграл в правой части можно записать как

$$\oint_S \mathbf{r}\left(\mathbf{n}_-\mathbf{u}_b\right)ds = \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{r}db = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_m b\right) = \mathbf{u}_m b + \mathbf{r}_m \frac{d}{dt}b\,.$$

Здесь $\mathbf{r}_m$ - центр тяжести объема.

Следовательно,

$$\int_B \mathbf{V}d\tau = -\int_B \mathbf{r}q_b db - \oint_S \mathbf{r}q_- ds + \mathbf{u}_m b + \mathbf{r}_m \frac{d}{dt}b\,. \qquad (11.10)$$

Скорость изменения объема тела при заданном потоке жидкости через поверхность связана с интенсивностями источников, моделирующих тело, формулой

$$\frac{d}{dt}b = \int_B q_b db + \oint_S q_- ds = \int dQ_b + \int dQ_-\,.$$

Подставим это выражение в (11.10) и продифференцируем (11.10) по времени (дифференцирование под знаками интегралов выполним при фиксированных лагранжевых координатах, в которых $\dot{\mathbf{r}}$ равно скорости движения точек тела $\mathbf{u}_b$)

$$\left(-\int \mathbf{r}dQ_b - \oint \mathbf{r}dQ_- + \mathbf{u}_m b + \mathbf{r}_m \int dQ_b + \mathbf{r}_m \int dQ_-\right).$$

$$\frac{d}{dt}\int_B \mathbf{V}db = \int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b)dQ_- + \int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b)dQ_b \tag{11.11}$$
$$+\int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_- + \int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_b + \dot{\mathbf{u}}_m b.$$

Из (11.7), (11.10) и (11.11) следует

$$\frac{\mathbf{F}_p}{\rho} = \dot{\mathbf{u}}_m b + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt} - \int \frac{\mathbf{V}_- - \mathbf{V}_+}{2} dQ_+ +$$
$$+\int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b - \mathbf{V})dQ_- + \int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b - \mathbf{V})dQ_b + \tag{11.12}$$
$$+\int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_- + \int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_b.$$

В случае проницаемой поверхности, помимо силы давления, на тело действует сила $\mathbf{F}_q$, связанная с изменением импульса среды за счет поглощенной или вышедшей из тела жидкости. $\mathbf{F}_q = -\rho\oint_s q_+\mathbf{V}_+ ds$. Складывая с выражением силы $\mathbf{F}_p$ (11.12), получим

$$\frac{\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_q}{\rho} = \dot{\mathbf{u}}_m b + \mathbf{F}_{Zh} + \mathbf{F}_{Zh}^{virt} - \int \mathbf{V}dQ_+ +$$
$$+\int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b - \mathbf{V})dQ_- + \int(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b - \mathbf{V})dQ_b + \tag{11.13}$$
$$+\int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_- + \int(\mathbf{r}_m - \mathbf{r})d\dot{Q}_b.$$

Формула (11.13) для случая непроницаемой поверхности ($Q_+ = 0$, $\mathrm{F}_q = 0$) деформируемого тела, в вихревом течении идеальной жидкости доказана в работе [34].

Выражению $\mathbf{F}_{Zh}^{virt}$ можно придать вид, не требующий вычисления виртуальных потоков. Преобразуем $\mathbf{F}_{Zh}^{virt}$, используя формулу (2.15) и (2.19). Получим

$$\mathbf{F}_{Zh}^{virt} = -\frac{1}{\kappa - 1}\left( \int_B \mathbf{r} \times \left( \nabla \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt} \right) \right) db - \oint_S \mathbf{r} \times \left( \mathbf{n} \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt} \right) \right) ds + \right.$$

$$\left. + \oint_S \mathbf{r} \times \left( \nabla \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} \right) \right) ds - \oint_C \mathbf{r} \times \left( \mathbf{n}_C \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} \right) \right) dl \right), \tag{11.14}$$

$$\mathbf{n}_C = \mathbf{n}_- \times \mathbf{e}_l \quad .$$

Выше изменение объемной циркуляции было представлено как результат движения вихревых нитей вместе с телом и виртуального движения относительно тела. Скорость изменения завихренности в результате виртуального движения описывается выражением $\nabla \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt} \right)$. Обозначим соответствующую скорость изменения интенсивности вихревого элемента $d\mathbf{\Gamma}$ как $d\dot{\mathbf{\Gamma}}_b$

$$d\dot{\mathbf{\Gamma}}_b = \nabla \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt} \right) db\,. \tag{11.15}$$

Аналогичное изменение циркуляции присоединенных поверхностных элементов, не связанное с вращением и деформацией поверхности, а только с виртуальным движением и потоками свободной завихренности обозначим соответственно $d\dot{\mathbf{\Gamma}}_s$. Из (8.5) следует, что эта величина равна

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{\Gamma}}_s &= \left( \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\gamma}\left( \nabla_s \mathbf{u}_b \right) - \left( \boldsymbol{\gamma} \nabla_s \right) \mathbf{u}_b \right) ds = \\ &= \left( \nabla_s \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} \right) - \mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_- \right) ds. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Скорость приращения свободной циркуляции $\mathbf{J}_+ \, ds$ на гладкой поверхности и выражение $\mathbf{n}_C \times \left( \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} \right)$, представляющее собой поток завихренности, сходящий с тела на линиях разрыва, обозначим как

$$d\dot{\mathbf{\Gamma}}_f = \mathbf{J}_+ ds, \tag{11.17}$$

$$d\dot{\mathbf{\Gamma}}_C = -\mathbf{n}_C \times \left(\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt}\right) dl.$$

Используя принятые обозначения и учитывая, что $\mathbf{J}_-$ в данном случае равно $\mathbf{J}_- = \mathbf{n}_- \times \left(\mathbf{u}_{virt} \times \mathbf{\Omega}_{virt}\right)$, запишем выражение (11.14) в виде

$$\mathbf{F}_{Zh}^{virt} = -\frac{1}{\kappa - 1}\left(\int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}}_b + \int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}}_s + \int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}}_c + \int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}}_f\right),$$

или еще более коротко

$$\mathbf{F}_{Zh}^{virt} = -\frac{1}{\kappa - 1}\int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}}, \tag{11.18}$$

понимая под $d\dot{\mathbf{\Gamma}}$ совокупность величин $d\dot{\mathbf{\Gamma}}_b, d\dot{\mathbf{\Gamma}}_s, d\dot{\mathbf{\Gamma}}_f, d\dot{\mathbf{\Gamma}}_c$. Отметим, что при моделировании течений вихревыми методами циркуляции присоединенных и генерируемых вихревых элементов вычисляются на каждом шаге по времени, что позволяет легко получить скорости их изменения и использовать для расчета гидродинамической силы.

Таким образом

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_q}{\rho} &= \dot{\mathbf{u}}_m b - \int \left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right) \times d\mathbf{\Gamma} - \frac{1}{\kappa - 1}\int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}} - \int \mathbf{V} dQ_+ + \\ &+ \int \left(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right) dQ_{in} + \int \left(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\right) d\dot{Q}_{in},\end{aligned} \tag{11.19}$$

$dQ_{in}$ – совокупность источников $dQ_-$ и $dQ_b$.

Формула (11.19) в случае плоских течений переходит в известную формулу Седова [4] для потенциальных течений с точечными особенностями.

Выражение силы (11.19) также согласуется с полученным в [1] выражением, связывающим силу $\mathbf{F}$, действующую на тела в безграничной идеальной жидкости, с изменением вихревого импульса тела $\mathbf{I}_{\mathrm{V}}$ (по определению $\mathbf{I}_{\mathrm{V}} = \frac{1}{\kappa - 1}\int_B \mathbf{r} \times \mathbf{\Omega} db$, интегрирование по объему тела). Согласно [1], в случае безотрывного бесциркуляционного обтекания идеальной жидкостью сила, действующая на тело, равна

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{V}db - \frac{d\mathbf{I}_\mathrm{V}}{dt} + \int_B \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}db\,.$$

Сила трения $\mathbf{F}_w$, действующая на обтекаемую поверхность $S$, получается интегрированием формулы (10.5) по поверхности тела

$$\mathbf{F}_w = \nu\oint_S\Big(-2\big(\mathbf{n}\times\nabla\big)\times\mathbf{V}\Big)ds + \nu\oint_S\big(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}\big)ds\,.$$

Первый интеграл в правой части при непрерывном поле скорости вблизи тела равен нулю. Следовательно

$$\mathbf{F}_w = \nu\oint_S\big(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}\big)ds\,. \tag{11.20}$$

При решении задачи обтекания тела вязкой жидкостью методом вязких вихревых доменов сила $\mathbf{F}_w$ выражается через вычисляемые в процессе расчета течения скорости отталкивания вихрей от поверхности по формулам (5.7), (5.8).

## 12. Момент гидродинамических сил

Так же, как и при выводе выражения для гидродинамической силы, заменим обтекаемое тело жидкостью, которая движется под действием объемной силы $\mathbf{F}_b$, распределенной внутри области тела, и поверхностной силы, уравновешивающей разность давления и касательные напряжения на его границе. Течение в этой области описывается уравнением (11.2). Момент сил $\mathbf{M}_p$. относительно точки $\mathbf{r}_c$ равен

$$\mathbf{M}_p = \oint_S \mathbf{r}'\times \mathbf{n}_+ p_+ ds = \oint_S \mathbf{r}'\times \mathbf{n}_+ \left(p_+ - p_-\right) ds - \oint_S \mathbf{r}'\times \mathbf{n}_- p_- ds,$$
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c. \tag{12.1}$$

Разность давления с двух сторон поверхности определяется равенством (8.13)

$$\left(p_+ - p_-\right)\mathbf{n}_+ = -\mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\gamma}_{virt} + \left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)_t \times \boldsymbol{\gamma} + q_s \left(\mathbf{V} - \mathbf{u}_b\right)_n .$$

Для того чтобы выразить $\oint_S \mathbf{r}'\times \mathbf{n}_- p_- ds$ через характеристики вихрей и источников, проинтегрируем по области тела уравнение движения жидкости (11.2), предварительно умножив его на вектор $\mathbf{r}'$.

$$\int_B \mathbf{r}'\times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} db + \int_B \mathbf{r}'\times \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} db - \int_B \mathbf{r}'\times \left(\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}_{virt} \times \boldsymbol{\Omega}_{virt}\right) db =$$
$$= -\int_B \mathbf{r}'\times \nabla \frac{p}{\rho} db. \tag{12.2}$$

Подынтегральное выражение в правой части можно выразить из формулы (2.3), в которой, согласно принятому в данной работе правилу, оператор $\nabla$ действует на все сомножители, стоящие справа от него,

$$\nabla \times \mathbf{r}p = -\mathbf{r} \times \nabla p + p\nabla \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \nabla p .$$

Из этого соотношения, применив теорему Стокса, получаем

$$-\int_B \mathbf{r}'\times \nabla p db = \int_B \nabla \times \mathbf{r}' p db = \oint_S \mathbf{n}_- \times \mathbf{r}' p_- ds . \qquad (12.3)$$

Подынтегральное выражение во втором интеграле слева выразим из формулы $(\nabla\mathbf{V})(\mathbf{r}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{V})(\nabla\mathbf{V}) + (\mathbf{r}\times(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}) - (\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{r})$ и применим теорему Стокса. Получим

$$\begin{aligned} &\int_B \mathbf{r}'\times(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} db = \int_B (\nabla\mathbf{V})\mathbf{r}'\times\mathbf{V} db - \int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V}(\nabla\mathbf{V}) db = \\ &= \oint_S (\mathbf{n}_-\mathbf{V}_-)\mathbf{r}'\times\mathbf{V}_- ds - \int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V} q_b db. \end{aligned} \qquad (12.4)$$

Из (12.2), (12.3), (12.4) следует

$$\begin{aligned} &-\oint_S \mathbf{r}'\times\mathbf{n}_- \frac{p_-}{\rho} ds = \int_B \mathbf{r}'\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} db + \oint_S (\mathbf{n}_-\mathbf{V}_-)\mathbf{r}'\times\mathbf{V}_- ds - \\ &-\int_B q_b \mathbf{r}'\times\mathbf{V} db - \int_B \mathbf{r}'\times\left((\mathbf{u}_b - \mathbf{V})\times\mathbf{\Omega} + \mathbf{u}_{virt}\times\mathbf{\Omega}_{virt}\right) db. \end{aligned} \qquad (12.5)$$

Первый интеграл в правой части (12.5) выразим из формулы дифференцирования интеграла по переменной области

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V} db = \int_B \mathbf{r}'\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} db - \\ &-\mathbf{u}_c \times \int_B \mathbf{V} db + \oint_S (\mathbf{n}_-\mathbf{u}_b)\mathbf{r}'\times\mathbf{V}_- ds, \end{aligned} \qquad (12.6)$$

$\mathbf{u}_c$ – скорость движения точки $\mathbf{r}_c$, относительно которой вычисляется момент сил.

Подставляя (12.5) и (8.13) в (12.1), с учетом (12.6) получим

$$\frac{\mathbf{M}_p}{\rho} = \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{r}'\times \mathbf{V}db + \mathbf{u}_c \times \int_B \mathbf{V}db + \oint_S \mathbf{r}'\times \left(\mathbf{n}_-\left(\mathbf{V}_- - \mathbf{u}_b\right)\right)\mathbf{V}_- ds -$$
$$-\int_B q_b \mathbf{r}'\times \mathbf{V}db - \int_B \mathbf{r}'\times\left(\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\times\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)db -$$
$$-\oint_S \mathbf{r}'\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt} + \left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)_t\times\boldsymbol{\gamma} - q_s\left(\mathbf{V}-\mathbf{u}_b\right)_n\right)ds.$$

Обозначим интеграл от момента силы Жуковского, действующей на все объемные и поверхностные присоединенные вихри данного тела, как $\mathbf{M}_{Zh}$, а на все виртуальные вихри $\mathbf{M}_{Zh}^{virt}$.

$$\mathbf{M}_{Zh} = -\int_B \mathbf{r}'\times\left(\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\times\boldsymbol{\Omega}\right)db - \oint_S \mathbf{r}'\times\left(\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}\right)\times\boldsymbol{\gamma}\right)ds, \quad (12.7)$$
$$\mathbf{M}_{Zh}^{virt} = -\int_B \mathbf{r}'\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)db - \oint_S \mathbf{r}'\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}\right)ds\,.$$

По аналогии с выражением $\mathbf{F}_p$ получим

$$\frac{\mathbf{M}_p}{\rho} = \mathbf{M}_{Zh} + \mathbf{M}_{Zh}^{virt} + \frac{d}{dt}\int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V}db + \mathbf{u}_c\times\int_B \mathbf{V}db -$$
$$-\int_B q_b\mathbf{r}'\times\mathbf{V}db + \oint_S \mathbf{r}'\times\left(\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)\frac{q_+}{2} - q_-\mathbf{V}\right)ds. \quad (12.8)$$

Помимо силы давления, на тело действует момент сил $\mathbf{M}_q$, связанный с изменением момента импульса среды за счет поглощенной или вышедшей из тела жидкости $\mathbf{M}_q = -\rho\oint_S \mathbf{r}'\times q_+\mathbf{V}_+ ds$. Сумма $\mathbf{M}_p$ и $\mathbf{M}_q$ равна

$$\frac{\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_q}{\rho} = \mathbf{M}_{Zh} + \mathbf{M}_{Zh}^{virt} + \frac{d}{dt}\mathbf{K} + \mathbf{u}_c\times\int_B \mathbf{V}db - \int \mathbf{r}'\times\mathbf{V}dQ, \quad (12.9)$$

где $\mathbf{K} = \int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V}db$, $\int \mathbf{r}\times\mathbf{V}dQ = \int_B q_b\mathbf{r}'\times\mathbf{V}db + \oint_S q_s\mathbf{r}'\times\mathbf{V}ds$.

По аналогии с выражением силы, можно придать формуле $\mathbf{M}_{Zh}^{virt}$ вид, не требующий вычисления виртуальных потоков. Применим формулу (2.17) к (12.7)

$$\frac{\mathbf{M}_{Zh}^{virt}}{\rho}=\frac{1}{2}\int_B r'^2\left(\nabla\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)\right)db-\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\mathbf{n}\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)\right)ds+$$
$$+\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\nabla\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}\right)\right)ds-\frac{1}{2}\oint_C r'^2\left(\mathbf{n}_C\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\gamma}_{virt}\right)\right)dl. \quad (12.10)$$

Используя обозначения для добавочной циркуляции (11.16) – (11.18), введенные в предыдущем разделе, получим из (12.10)

$$\mathbf{M}_{Zh}^{virt}=\frac{1}{2}\left(\int r'^2\,d\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_b+\int r'^2\,d\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_s+\int r'^2\,d\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_C+\int r'^2\,d\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_f\right).$$

Таким образом, сила $\mathbf{M}_{Zh}^{virt}$ связана с рождением добавочной циркуляции формулой, которую мы в обобщенном виде запишем так

$$\mathbf{M}_{Zh}^{virt}=\frac{1}{2}\int r'^2\,d\dot{\boldsymbol{\Gamma}}.$$

Интеграл $\int\limits_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V}db$ не выражается через скорость движения центра масс объема тела, но его можно привести к виду, более удобному для практического применения. Используем (2.17)

$$\int_B \mathbf{r}'\times\mathbf{V}db=-\frac{1}{2}\int_B r'^2\left(\nabla\times\mathbf{V}\right)db+\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\mathbf{n}_-\times\mathbf{V}_-\right)ds=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_B r'^2\,\boldsymbol{\Omega}db+\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\mathbf{n}_-\times\left(\mathbf{V}_--\mathbf{u}_b\right)\right)ds+\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\mathbf{n}_-\times\mathbf{u}_b\right)ds=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_B r'^2\,\boldsymbol{\Omega}db-\frac{1}{2}\oint_S r'^2\,\boldsymbol{\gamma}_-ds+\frac{1}{2}\oint_S r'^2\left(\mathbf{n}_-\times\mathbf{u}_b\right)ds. \quad (12.11)$$

Сумма первых двух интегралов в правой части равна вращательному импульсу внутренней области тела

$$\mathbf{A}_{V-} = -\frac{1}{2}\int_B r'^2\,\boldsymbol{\Omega}db - \frac{1}{2}\oint_S r'^2\,\boldsymbol{\gamma}_- ds.$$

Интеграл по поверхности равен

$$\frac{1}{2}\oint_s r'^2\left(\mathbf{n}_- \times \mathbf{u}_b\right)ds = \frac{1}{2}\int_B\left(\nabla \times \mathbf{u}_b\right)r'^2 db = -\mathbf{A}_b + \mathbf{K}_b,$$

где $\mathbf{A}_b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_B \boldsymbol{\Omega}_b r'^2\,db$, $\boldsymbol{\Omega}_b = \nabla \times \mathbf{u}_b$, $\mathbf{K}_b = \displaystyle\int_B\left(\mathbf{r}'\times \mathbf{u}_b\right)db$.

Здесь $\mathbf{A}_b$ и $\mathbf{K}_b$ - вращательный импульс и кинетический момент, соответствующие движению жидкости внутри контура со скоростью $\mathbf{u}_b$.

Таким образом $\mathbf{K} = \mathbf{A}_V - \mathbf{A}_b + \mathbf{K}_b$. В случае твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, относительно оси, проходящей через центр тяжести объема, скорость движения его точек $\mathbf{u}_b$ выражается формулой

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_m + \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\right). \qquad (12.12)$$

Соответственно, выражения величин $\mathbf{A}_b$ и $\mathbf{K}_b$ имеют вид

$$\mathbf{A}_b = -\boldsymbol{\omega}\int_B\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m+\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_c\right)^2 db = -\boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_c\right)^2 b - \boldsymbol{\omega}\int_B\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\right)^2 db,$$

$$\mathbf{K}_b = \int_B\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)\times\left(\mathbf{u}_m+\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\right)\right)db = \qquad (12.13)$$

$$= \left(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_c\right)\times\mathbf{u}_m b + \int_B\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\right)\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m\right)\right)db.$$

Чтобы получить формулу для момента силы трения, проинтегрируем (10.5) по поверхности тела, умножив его векторно на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{M}_w = -2\nu\rho\oint_S \mathbf{r}\times\left(\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V}\right)ds + \nu\rho\oint_S \mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}\right)ds\,. \qquad (12.14)$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле в правой части можно записать в виде, в котором, согласно принятому в первом разделе правилу, оператор $\nabla$ действует на все сомножители, стоящие справа от него.

$$\mathbf{r}\times\left(\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V}\right) = -\left(\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V}\right)\times\mathbf{r} - \left(\mathbf{V}\times\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\right)\times\mathbf{r}\,. \qquad (12.15)$$

Так как в вязкой жидкости распределение $\mathbf{V}$ вокруг тела непрерывно, интеграл по замкнутой поверхности $\oint_S \left(\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\times\mathbf{V}\right)\times\mathbf{r}ds$ равен нулю. Двойное векторное произведение под интегралом равно

$$\left(\mathbf{V}\times\left(\mathbf{n}\times\nabla\right)\right)\times\mathbf{r} = \mathbf{n}\times\left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{r} - \left(\mathbf{V}\mathbf{n}\right)\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{n}\times\mathbf{V}\,.$$

Подставляя это выражение в (12.15), получим

$$\oint_S \mathbf{r}\times\left(\left(\mathbf{n}_+\times\nabla\right)\times\mathbf{V}_+\right)ds = -\oint_S \mathbf{n}_+\times\mathbf{V}_+ds =$$

$$= -\oint_S \mathbf{n}_+\times\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-\right)ds - \oint_S \mathbf{n}_+\times\mathbf{V}_-ds = \oint_S \boldsymbol{\gamma}ds + \int_B \Omega db.$$

Отсюда после подстановки в (12.14) следует

$$\mathbf{M}_w = -2\nu\rho\left(\oint_S \boldsymbol{\gamma}\,ds + \int_B \mathbf{\Omega}\,db\right) + \nu\rho\oint_B \mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}\right)ds\,. \qquad (12.16)$$

При бесциркуляционном обтекании тела первое слагаемое в правой части равно нулю. При обтекании твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, и при выполнении условия прилипания на поверхности, момент сил трения равен:

$$\mathbf{M}_w = -4\nu\boldsymbol{\omega}b\rho + \nu\rho\oint_S \mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}\times\mathbf{\Omega}\right)ds\,. \qquad (12.17)$$

## 13. Связь сил и моментов, действующих на тела, с гидродинамическим и вращательным импульсами среды

Известно, что гидродинамический импульс **I**, определяемый формулой $\mathbf{I} = \frac{1}{\kappa - 1}\int \mathbf{r} \times \mathbf{\Omega} d\tau$ (интегрирование по всему пространству, включая области, занятые телами, к – размерность пространства), играет важную роль в гидродинамике, так как связан простыми соотношениями с силами, действующими на жидкость. При финитном распределении завихренности в пространстве (завихренность отлична от нуля в ограниченной области или экспоненциально убывает на бесконечности) в отсутствие неконсервативных сил гидродинамический импульс сохраняется. При движении жидкости в безграничном пространстве в отсутствие обтекаемых тел справедливо соотношение [8] $\int \mathbf{F} d\tau = \dot{\mathbf{I}}$, где **F** – результирующая неконсервативных сил, действующих на единицу объема жидкости. Предполагается, что распределение силы в пространстве также финитно.

Покажем, что из формулы для гидродинамической силы (11.12), действующей на тело в вязкой жидкости при его произвольном движении и наличии проницаемых поверхностей, в системе координат, неподвижной относительно бесконечно удаленных точек, следует соотношение, справедливое при обтекании нескольких таких тел

$$\sum_n \mathbf{F}_n = -\dot{\mathbf{I}} + \sum_n \frac{d}{dt}\int_{B_n} \mathbf{V} db \qquad (13.1)$$

$\mathbf{F}_n$– гидродинамическая сила, действующая на $n$-е тело ($\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{p,n} + \mathbf{F}_{q,n} + \mathbf{F}_{w,n}$). Интегрирование ведется по объемам тел. Скорость **V** в этих областях определяется как индуцированная всеми вихрями и источниками. Для непроницаемых тел интеграл $\int_{B_n} \mathbf{V} db$ равен скорости центра тяжести объема тела, умноженной на массу вытесненной жидкости (безразмерная плотность жидкости равна единице).

Для простоты будем считать, что сингулярное распределение завихренности и источников, а, следовательно, и разрывы поля скорости существуют только на поверхностях тел.

Гидродинамический импульс **P** представляет собой сумму интегралов по областям тел $B_n$, их поверхностям $S_n$ и пространству течения τ. Запишем производную

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{1}{\kappa - 1}\frac{d}{dt}\left( \sum_n \int_{B_n} \mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}d\tau + \sum_n \oint_{S_n} \mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}ds + \int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}d\tau \right) \qquad (13.2)$$

Продифференцируем последний интеграл в скобках.

$$\frac{1}{\kappa - 1}\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}d\tau = \frac{1}{\kappa - 1}\left( \int_\tau \mathbf{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Omega}d\tau + \sum_n \oint_{S_n} (\mathbf{u}_b\mathbf{n}_+)\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}_+ ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1}\left( \int_\tau \mathbf{r}\times\left(\nabla\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} - \nu\nabla\times\mathbf{\Omega}\right)\right)d\tau + \sum_n \oint_{S_n} (\mathbf{u}_b\mathbf{n}_+)\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}_+ ds \right)$$

Используя формулу (2.15) и определение (8.5) потока завихренности в обобщенном виде $\mathbf{J}_+ = \mathbf{n}_+ \times\left(\left(\mathbf{V}_+ - \mathbf{u}_b\right)\times\mathbf{\Omega}_+ - \nu\nabla\times\mathbf{\Omega}_+\right)$, получим

$$\frac{1}{\kappa - 1}\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}d\tau = \int_\tau \left( \mathbf{V}\times\mathbf{\Omega} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\times\mathbf{\Omega} \right)d\tau +$$
$$+\frac{1}{\kappa - 1}\sum_n \oint_{S_n} \left(\mathbf{r}\times\mathbf{J}_+ + (\mathbf{\Omega}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b\right)ds \qquad 13.3)$$

Первый интеграл в правой части преобразуем в поверхностный, используя теорему Стокса.

$$\int_\tau (\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}-\nu\nabla\times\mathbf{\Omega})d\tau=\int_\tau\left(\nabla\frac{V^2}{2}-(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right)d\tau-\nu\sum_n\oint_{S_n}\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+ds=$$
$$=\sum_n\oint_{S_n}\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2}-(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{V}_+-\nu\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+\right)ds+\oint_{S_\infty}\left(\mathbf{n}\frac{V^2}{2}-(\mathbf{V}\mathbf{n})\mathbf{V}\right)ds \qquad (13.4)$$

Здесь $S_\infty$ – бесконечно удаленная поверхность. Интеграл по этой поверхности при финитном распределении завихренности и источников стремится к нулю независимо от выбора инерциальной системы координат, если сумма всех источников, моделирующих тело, равна нулю, и равен нулю интеграл от завихренности во всем пространстве. В этом случае скорость на бесконечности равна константе плюс слагаемое, убывающее как $1/R^2$ в двумерном пространстве и как $1/R^3$ в трехмерном пространстве. Вклад константы равен нулю, так как по любой замкнутой поверхности $\oint\mathbf{n}ds=0$. Вклад остальных членов при $R\to\infty$ стремится к нулю. Если сумма интенсивностей источников и (или) интеграл от завихренности не равны нулю, то интеграл по $S_\infty$ будет стремится к нулю только в системе координат, неподвижной относительно бесконечности благодаря квадратичной зависимости подынтегрального выражения от скорости. Будем считать, что выбрана именно такая система координат.

Подставляя (13.4) в (13.3), запишем

$$\frac{1}{\kappa-1}\frac{d}{dt}\int_\tau\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}d\tau=$$
$$=\sum_n\oint_{S_n}\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2}-(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{V}_+-\nu\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+\right)ds+ \qquad (13.5)$$
$$+\frac{1}{\kappa-1}\sum_n\oint_{S_n}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{J}_++(\mathbf{\Omega}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b\right)ds$$

Аналогичным образом преобразуем производную от интеграла по области тела

$$\frac{1}{\kappa-1}\frac{d}{dt}\int_{B_n}\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}db=\frac{1}{\kappa-1}\left(\int_{B_n}\mathbf{r}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Omega}db+\oint_{S_n}\left(\mathbf{u}_b\mathbf{n}_-\right)\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}_-ds\right)=$$
$$=\frac{1}{\kappa-1}\left(\int_{B_n}\mathbf{r}\times\left(\nabla\times\left(\mathbf{u}_b\times\mathbf{\Omega}+\mathbf{u}_{virt}\times\mathbf{\Omega}_{virt}\right)\right)db+\oint_{S_n}\left(\mathbf{u}_b\mathbf{n}_-\right)\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}_-ds\right)=$$
$$=\int_{B_n}\left(\mathbf{u}_b\times\mathbf{\Omega}+\mathbf{u}_{virt}\times\mathbf{\Omega}_{virt}\right)db+\frac{1}{\kappa-1}\oint_{S_n}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{J}_-+\mathbf{u}_b\left(\mathbf{n}_-\mathbf{\Omega}_-\right)\right)ds \tag{13.6}$$

Производная от интеграла по поверхности с учетом (8.5) и (1.15) преобразуется следующим образом

$$\frac{1}{\kappa-1}\frac{d}{dt}\oint_{S}\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}ds=\frac{1}{\kappa-1}\left(\oint_{S}\mathbf{r}\times\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\gamma}\left(\nabla\mathbf{u}_b\right)\right)ds+\oint_{S}\mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}ds\right)=$$
$$=\frac{1}{\kappa-1}\left(\oint_{S}\mathbf{r}\times\left(\nabla_s\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt}\right)\right)ds+\oint_{S}\mathbf{r}\times\left(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s\right)\mathbf{u}_b ds-\right. \tag{13.7}$$
$$\left.-\oint_{S}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{J}_-+\mathbf{J}_+\right)ds+\oint_{S}\mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}ds\right)$$

При сделанном выше предположении о непрерывном распределении скорости в пространстве отсутствуют линии разрыва функции $\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt}$, следовательно, согласно (1.15)

$$\oint_{S}\mathbf{r}\times\left(\nabla_s\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt}\right)\right)ds=(\kappa-1)\oint_{S}\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt}\right)ds \tag{13.8}$$

Второй интеграл в правой части (13.7) в случае двумерного евклидова пространства равен нулю, так как вектор $\boldsymbol{\gamma}$ ортогонален оператору $\nabla_s$. В случае трехмерного пространства преобразуем этот интеграл с использованием теоремы Стокса

$$\oint_S \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s)\mathbf{u}_b ds = \oint_S (\nabla_s\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)ds -$$

$$-\oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)(\nabla_s\boldsymbol{\gamma})ds + \oint_S \mathbf{u}_b\times(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s)\mathbf{r}ds =$$

$$= -\oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)(\nabla_s\boldsymbol{\gamma})ds + \oint_S \mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}ds$$

Здесь использовано, что вследствие непрерывности функций $\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b$ и $\boldsymbol{\gamma}$ интеграл по замкнутой поверхности $\oint_S (\nabla_s\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)ds$ равен нулю.

Выражение $(\nabla_s\boldsymbol{\gamma})$ равно $\nabla_s\left((\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-)\times\mathbf{n}_+\right)$. Оператор $\nabla_s$ можно заменить на $\nabla$, так как добавленный оператор в смешанном произведении даст нулевой вклад. Произведя далее циклическую перестановку, получим

$$(\nabla_s\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_-)\mathbf{n}_+$$

В результате получаем в трехмерном пространстве

$$\oint_S \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s)\mathbf{u}_b ds = -\oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)\left((\boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_-)\mathbf{n}_+\right)ds + \oint_S \mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}ds$$

Можно объединить двумерный и трехмерный случаи формулой

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s)\mathbf{u}_b ds = -\oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{u}_b)\left((\boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_-)\mathbf{n}_+\right)ds +\\ +(\kappa-2)\oint_S \mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}ds\end{aligned} \qquad (13.9)$$

Первое слагаемое в правой части мы оставили без изменения, так как оно в двумерном пространстве обращается в ноль. Подставив (13.8) и (13.9) в (13.7), получим

$$\frac{1}{\kappa-1}\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma}ds =$$
$$= -\frac{1}{\kappa-1}\left(\oint_S \mathbf{r}\times\left(\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_+\right)ds + \oint_S \mathbf{r}\times\mathbf{u}_b\left(\left(\boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_-\right)\mathbf{n}_+\right)ds\right) +$$
$$+\oint_S\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt} + \mathbf{u}_b\times\boldsymbol{\gamma}\right)ds$$

После подстановки (13.5), (13.6) и (13.7) в (13.2) получаем

$$\dot{\mathbf{I}} = -\sum_n\left(\mathbf{F}_{w,n} + \mathbf{F}_{Zh,n}^{virt} + \mathbf{F}_{Zh,n}\right) + \sum_n\oint_{S_n}\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^{\,2}}{2} - \left(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+\right)\mathbf{V}_+\right)ds +$$
$$+\sum_n\int_{B_n}\left(\mathbf{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right)db + \sum_n\oint_{S_n}\left(\mathbf{V}\times\boldsymbol{\gamma}\right)ds$$

Интеграл $\int_{B_n}\left(\mathbf{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right)db$ равен

$$\int_{B_n}\left(\mathbf{V}\times\boldsymbol{\Omega}\right)db = \int_{B_n}\left(\nabla\frac{V^2}{2} - \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V}\right)db =$$
$$= \oint_{S_n}\left(\mathbf{n}_-\frac{V_-^2}{2} - \left(\mathbf{V}_-\mathbf{n}_-\right)\mathbf{V}_-\right) + \int_{B_n}\mathbf{V}q_b db$$

Складывая подынтегральные выражения в поверхностных интегралах, получим

$$\left(\mathbf{n}_-\frac{V_-^2}{2} - \left(\mathbf{V}_-\mathbf{n}_-\right)\mathbf{V}_-\right) + \left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2} - \left(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+\right)\mathbf{V}_+\right) + \mathbf{V}\times\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V}q_S$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{I}} = -\sum_n\left(\mathbf{F}_{w,n} + \mathbf{F}_{Zh,n}^{virt} + \mathbf{F}_{Zh,n}\right) + \sum_n\oint_{S_n}\mathbf{V}q_S ds + \sum_n\int_{B_n}\mathbf{V}q_b db$$

Сравнивая с (11.8), получаем

$$\dot{\mathbf{I}} = -\sum_n \left(\mathbf{F}_{w,n} + \mathbf{F}_{p,n} + \mathbf{F}_{q,n}\right) + \frac{d}{dt}\sum_n \int_{B_n} \mathbf{V} db = -\sum_n \mathbf{F}_n + \frac{d}{dt}\sum_n \int_{B_n} \mathbf{V} db$$

Равенство (13.1) доказано.

Докажем аналогичное соотношение для момента силы относительно начала координат при условии, что скорость жидкости в бесконечно удаленных точках стремится к нулю и интегралы от завихренности и от источников по всему пространству равны нулю.

$$\sum_n \mathbf{M}_n = -\dot{\mathbf{A}} + \sum_n \frac{d}{dt}\int_{B_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} db \qquad (13.10)$$

$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\int r^2 \mathbf{\Omega} d\tau$ – вращательный импульс (интегрирование по всему пространству), $\mathbf{M}_n$ – момент гидродинамической силы, действующей на $n$-е тело.

Для простоты также будем считать, что сингулярное распределение завихренности и источников, а, следовательно, и разрывы поля скорости существуют только на поверхностях тел.

Производная вращательного импульса $\mathbf{A}$ равна

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_n \int_{B_n} r^2 \mathbf{\Omega} db + \sum_n \oint_{S_n} r^2 \boldsymbol{\gamma} ds + \int_\tau r^2 \mathbf{\Omega} d\tau\right) \qquad (13.11)$$

Продифференцируем интеграл по области $\tau$.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\tau r^2 \mathbf{\Omega} d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau r^2 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Omega} d\tau + \frac{1}{2}\sum_n \oint_{S_n} (\mathbf{u}_s \mathbf{n}_+) r^2 \mathbf{\Omega}_+ ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\tau r^2 \left(\nabla \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} - \nu \nabla \times \mathbf{\Omega}\right)\right) d\tau + \frac{1}{2}\sum_n \oint_{S_n} (\mathbf{u}_s \mathbf{n}_+) r^2 \mathbf{\Omega}_+ ds =$$

$$= -\int_\tau \mathbf{r} \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} - \nu \nabla \times \mathbf{\Omega}\right) d\tau + \frac{1}{2}\sum_n \oint_{S_n} \left(r^2 \mathbf{J}_+ + (\mathbf{\Omega}_+ \mathbf{n}_+) r^2 \mathbf{u}_s\right) ds$$

(13.12)

Первый интеграл в правой части преобразуем в поверхностный, используя теорему Стокса.

$$\int_\tau \mathbf{r}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}-\nu\nabla\times\mathbf{\Omega})d\tau=\int_\tau \mathbf{r}\times\left(\nabla\frac{V^2}{2}-(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right)d\tau-$$
$$-\nu\sum_n\oint_{S_n}\mathbf{r}\times(\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+)ds-2\nu\int_\tau\mathbf{\Omega}d\tau=$$
$$=\sum_n\oint_{S_n}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2}-(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{V}_+-\nu\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+\right)ds+ \tag{13.13}$$
$$+\oint_{S_\infty}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2}-(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{V}_+\right)ds-2\nu\int_\tau\mathbf{\Omega}d\tau$$

Здесь $S_\infty$ -бесконечно удаленная поверхность. В системе координат, неподвижной относительно бесконечности при финитном распределении вихрей и источников и равенстве нулю их суммарных интенсивностей этот интеграл стремится к нулю. Будем считать, что выбрана именно такая система координат.

Подставляя (13.13) в (13.12), запишем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\tau r^2\mathbf{\Omega}d\tau=$$
$$=-\sum_n\oint_{S_n}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{n}_+\frac{V_+^2}{2}-(\mathbf{V}_+\mathbf{n}_+)\mathbf{V}_+-\nu\mathbf{n}_+\times\mathbf{\Omega}_+\right)ds+ \qquad 13.14)$$
$$+2\nu\int_\tau\mathbf{\Omega}d\tau+\frac{1}{2}\sum_n\oint_{S_n}\left(r^2\mathbf{J}_++(\mathbf{\Omega}_+\mathbf{n}_+)r^2\mathbf{u}_s\right)ds$$

Производная от интеграла по области тела равна

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{B_n} r^2\boldsymbol{\Omega}db = \frac{1}{2}\int\limits_{B_n} r^2\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Omega}db + \frac{1}{2}\oint\limits_{S_n}\left(\mathbf{u}_s\mathbf{n}_-\right)r^2\boldsymbol{\Omega}_- ds =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{B_n} r^2\left(\nabla\times\left(\mathbf{u}_s\times\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)\right)db +$$
$$+\frac{1}{2}\oint\limits_{S_n}\left(\mathbf{u}_s\mathbf{n}_-\right)r^2\boldsymbol{\Omega}_- ds = -\int\limits_{B_n}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{u}_s\times\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt}\right)db + \tag{13.15}$$
$$+\frac{1}{2}\oint\limits_{S_n} r^2\left(\mathbf{J}_- + \mathbf{u}_s\left(\mathbf{n}_-\boldsymbol{\Omega}_-\right)\right)ds$$

И, наконец, от интеграла по поверхности

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\oint\limits_{S_n} r^2\boldsymbol{\gamma}ds = \frac{1}{2}\oint\limits_{S_n} r^2\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\gamma}\left(\nabla\mathbf{u}_s\right)\right)ds + \oint\limits_{S_n}(\mathbf{u}_s(\mathbf{r}\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{r}\times(\mathbf{u}_s\times\boldsymbol{\gamma}))ds =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\oint\limits_{S_n} r^2\left(\nabla_s\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt}\right)-\mathbf{J}_- - \mathbf{J}_+\right)ds + \oint\limits_{S_n} r^2\left(\boldsymbol{\gamma}\nabla_s\right)\mathbf{u}_s ds\right) +$$
$$+\oint\limits_{S_n}(\mathbf{u}_s(\mathbf{r}\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{r}\times(\mathbf{u}_s\times\boldsymbol{\gamma}))ds = \tag{13.16}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\oint\limits_{S_n} r^2\left(\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_+\right)ds + \oint\limits_{S_n} r^2\mathbf{u}_s\left(\left(\boldsymbol{\Omega}_+ - \boldsymbol{\Omega}_-\right)\mathbf{n}_+\right)ds\right) -$$
$$-\oint\limits_{S_n}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{u}_{virt}\times\gamma_{virt} + \mathbf{u}_s\times\boldsymbol{\gamma}\right)ds$$

Из (13.14), (13.15) (13.16)и (13.12) получаем

$$\dot{\mathbf{A}} = -\sum_n \left( \mathbf{M}_{w,n} + \mathbf{M}_{Zh,n}^{virt} + \mathbf{M}_{Zh,n} \right) +$$
$$+\sum_n \oint_{S_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{n}_+ \frac{V_+^2}{2} - \left( \mathbf{V}_+ \mathbf{n}_+ \right) \mathbf{V}_+ \right) ds + \tag{13.17}$$
$$+\sum_n \int_{B_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} \right) db + \sum_n \oint_{S_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{V} \times \boldsymbol{\gamma} \right) ds$$

Интеграл $\int_{b_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} \right) db$ равен

$$\int_{B_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} \right) db = \int_{B_n} \mathbf{r} \times \left( \nabla \frac{V^2}{2} - \left( \mathbf{V} \nabla \right) \mathbf{V} \right) db =$$
$$= \oint_{S_n} \mathbf{r} \times \left( \mathbf{n}_- \frac{V_-^2}{2} - \left( \mathbf{V}_- \mathbf{n}_- \right) \mathbf{V}_- \right) + \int_{B_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} q_b db$$

Складывая подынтегральные выражения в поверхностных интегралах, получим

$$\left( \mathbf{n}_- \frac{V_-^2}{2} - \left( \mathbf{V}_- \mathbf{n}_- \right) \mathbf{V}_- \right) + \left( \mathbf{n}_+ \frac{V_+^2}{2} - \left( \mathbf{V}_+ \mathbf{n}_+ \right) \mathbf{V}_+ \right) + \mathbf{V} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V} q_S$$

Таким образом

$$\dot{\mathbf{A}} = -\sum_n \left( \mathbf{M}_{w,n} + \mathbf{M}_{Zh,n}^{virt} + \mathbf{M}_{Zh,n} \right) + \sum_n \oint_{S_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} q_S ds + \sum_n \int_{B_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} q_b db$$

Сравнивая с (12.9), получаем

$$\dot{\mathbf{A}} = -\sum_n \left( \mathbf{M}_{w,n} + \mathbf{M}_{p,n} + \mathbf{M}_{q,n} \right) + \frac{d}{dt} \sum_n \int_{B_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} d\tau =$$
$$= -\sum_n \mathbf{M}_n + \frac{d}{dt} \sum_n \int_{B_n} \mathbf{r} \times \mathbf{V} d\tau$$

Равенство (13.10) доказано.

## ГЛАВА 3
## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В этой главе все параметры следует понимать как безразмерные величины, отнесенные к некоторым характерным масштабам длины $L$, скорости $U$, давления $\rho U^2$ , времени $L/U$, вязкости $UL/\mathrm{Re}$, силы на единицу длины $\rho U^2 L$ и т.д.

### 14. Непроницаемая поверхность в идеальной жидкости

Этот класс задач широко представлен в литературе. Здесь он рассматривается для систематизации изложения. Кроме того, в этом разделе приводится способ постановки сопряженной задачи для описания движения поверхности под действием аэродинамических и заданных внешних сил и моментов.

Контур поверхности разбивается на $K$ отрезков. Если предполагается отрывное течение на одной или обеих кромках поверхности, то вблизи такой кромки помещается неизвестный вихрь, циркуляция которого должна определяться из условия непротекания вместе с циркуляциями вихрей, распределенных по контуру поверхности. При этом получается $K+1$ неизвестных циркуляций $g_k$ ($k = 1, \dots, K + 1$), сосредоточенных в точках разбиения контура или распределенных вблизи них по заданному закону, часть из них являются присоединенными вихрями $g_k = \Gamma_k$, а другие свободными (например, на концах линии) $g_k = \Gamma_k^{(g)}$. Условие непротекания записывается либо в контрольных точках, либо в виде интегралов по отрезкам. При этом получается $K$ уравнений.

$$\sum_{k=1}^{K+1} g_k \mathbf{v}_{lk}\mathbf{n}_l = -\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \mathbf{v}_{li}\mathbf{n}_l + \left(\hat{\mathbf{u}}_l - \mathbf{V}_\infty\right)\ \mathbf{n}_l, \qquad (l = 1,\dots,K) \qquad (14.1)$$

Здесь $\mathbf{v}_{lk}$ - скорость, индуцированная $k$-ым вихрем в контрольной точке с номером $l$ (или средняя скорость по соответствующему отрезку), $\mathbf{v}_{li}$ – скорость, индуцированная там же $i$-ым свободным вихрем с циркуляцией $\Gamma_i$, $N$ – число свободных вихрей, $\hat{\mathbf{u}}_l$-скорость движения отрезка, $\mathbf{n}_l$- вектор его нормали, $\mathbf{V}_\infty$- скорость на бесконечности.

Для замыкания системы уравнений используется условие сохранения циркуляции в пространстве течения

$$\sum_{k=1}^{K+1} g_k = -\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \tag{14.2}$$

После того, как найдены все неизвестные циркуляции, скорость движения свободных вихрей и их новое положение через интервал времени $\Delta t$ могут быть вычислены с использованием формулы Био-Савара. При этом возможны ситуации, когда отдельные свободные вихри пересекают поверхность из-за того, что условие непротекания выполнено только в контрольных точках или интегрально по отрезку, а не тождественно во всех точках, а также из-за погрешностей схемы интегрирования по времени. Обычно такие вихри либо удаляются, либо перемещаются по принципу отражения от поверхности или каким-либо иным способом. Такое «насильственное» перемещение вихрей приводит к изменению суммарного импульса и момента в области течения, и хотя оно практически не меняет картину распределения вихрей, может повлиять на результат вычисления силы. При очередном решении системы уравнений, обеспечивающей условие непротекания, новые значения циркуляций будут компенсировать проведенные удаления или перемещения. Например, вместо удаленного вихря возникнет новый на поверхности, тогда как в «идеальной» схеме старый вихрь останется вблизи поверхности и компенсирующего прибавления циркуляции не будет. Аналогично при зеркальном отражении – «насильственное» перемещение вихря приведет к компенсаторным изменениям присоединенной завихренности. Поэтому, для уменьшения погрешности при вычислении давления и сил следует учитывать удаленные или перемещенные вихри, «запоминая» на каждом шаге циркуляции $\Gamma_j^{(d)}$ и координаты удаленных вихрей (или суммируя их вклады в давление, силы и моменты по мере удаления). «Насильственно» перемещаемые вихри следует рассматривать как удаленные в точках, где они были бы при движении с индуцированной скоростью, и возникшие в точках, куда были перемещены. После этого вычисляются значения $\delta_k$ по формуле (7.8).

Перепад давления на $k$-ом отрезке согласно формуле (9.1) равен:

$$\Delta p_k = p_+ - p_- = \left(\boldsymbol{\gamma}_k \times \left(\hat{\mathbf{u}}_k - \hat{\mathbf{V}}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_+ - \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} \qquad (14.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}_k$ – плотность циркуляции на $k$-ом отрезке, $\boldsymbol{\gamma}_k = \left(\Gamma_k + \Gamma_{k+1}\right)/2d_k$; $\hat{\mathbf{u}}_k$ - скорость движения отрезка; $\hat{\mathbf{V}}_k$ - скорость в контрольной точке или средняя по отрезку, индуцированная всеми вихрями (включая бесконечно удаленный, если в выбранной системе координат скорость на бесконечности не равна нулю). Область, помеченная индексом «+», расположена справа от контура при его обходе, начиная с крайней точки $i = 1$; $\mathbf{n}_+$ – внешняя по отношению к этой области нормаль к контуру.

В случае разветвления контура при вычислении $\Delta p_k$ суммирование должно проводиться по всем узлам, лежащим между первым и $k$-ым отрезком, и на всех ветках, исходящих из этих узлов. Например, для отрезка, лежащего между узлами 5 и 6 на рис. 6 суммирование следует проводить от $k = 1$ до $k = 5$, а для отрезка, лежащего между узлами 7 и 8 от $k = 1$ до $k = 7$, а также $k = 10$.

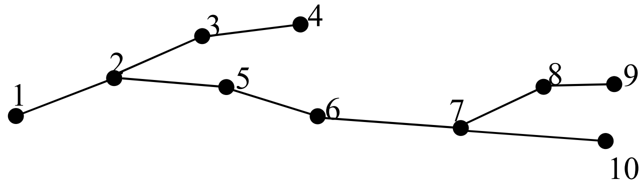



**Рис. 6**

Давление в произвольной точке **R** течения выражается формулой (7.6) с учетом (7.3):

$$\frac{p-p_\infty}{\rho}=-\Pi+\Pi_\infty+\frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2}-\frac{V^2}{2}+\sum_i \mathbf{V}_i\mathbf{v}_i(\mathbf{R})+\sum_k \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k(\mathbf{R})-$$
$$-\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{K}\left(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)\left(\mathbf{e}_z\times\mathbf{K}\left(\mathbf{R},\hat{\mathbf{r}}_k\right)\right)\sum_{k_1=1}^{k}\delta_{k_1} \tag{14.4}$$

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{R},\hat{\mathbf{r}}_k\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\left(\mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_k\right)}{\left(\mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_k\right)^2},\qquad \hat{\mathbf{r}}_k=\frac{\left(\mathbf{r}_{k+1}+\mathbf{r}_k\right)}{2}$$

Под первым знаком суммирования в правой части (14.4) $\mathbf{v}_i(\mathbf{R})$ – скорость, индуцированная $i$-ым свободным вихрем в точке **R**, $\mathbf{v}_i(\mathbf{R})=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{R}}{\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{R}\right)^2}\times\mathbf{\Gamma}_i$, $\mathbf{V}_i$ – скорость движения этого вихря; под вторым знаком суммирования – аналогичное выражение для присоединенных вихрей; $\mathbf{u}_k$ – скорость движения $k$-го узла контура поверхности.

Приведенная формула, так же, как и формула Био-Савара, содержит особенность, которая обычно регуляризируется введением радиуса дискретности. В [35] показано, что если при вычислении распределения давления в пространстве брать значения давления в точках нахождения вихрей, а затем усреднять по ансамблю близкорасположенных вихрей (например, вихрей, попавших в заданную прямоугольную ячейку), то получается достаточно гладкое распределение, так как сингулярные вклады близко расположенных вихрей взаимно уничтожаются. В случае, когда точка наблюдения находится вблизи какого-либо отрезка контура, а именно, если расстояние до него сравнимо или меньше его длины, то надо либо разбить отрезок на более мелкие, либо вычислить его вклад, используя формулу

(7.7), то есть следует заменить выражение $\left(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)\left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{K}\left(\mathbf{R},\hat{\mathbf{r}}_k\right)\right)$ на $-\alpha\left(\mathbf{R},\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1}\right)/2\pi$, где

$$\alpha\left(\mathbf{R},\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_{k+1}\right)=\mathrm{atan2}\left((\mathbf{r}_k-\mathbf{R})\cdot(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{R}),\mathbf{e}_z\left((\mathbf{r}_k-\mathbf{R})\times(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{R})\right)\right)$$

Аэродинамическая сила, действующая на контур в целом, может быть вычислена по формуле (11.19), которая в данном случае имеет вид:

$$\mathbf{F}=\sum_k\left(\Gamma_k\times\left(\mathbf{u}_k-\mathbf{V}_k\right)\right)+\sum_k\frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t}\times\mathbf{r}_k \tag{14.5}$$

Момент сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ определяется выражением:

$$\mathbf{M}=\sum_k\left(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_c\right)\times\left(\Gamma_k\times\left(\mathbf{u}_k-\mathbf{V}_k\right)\right)+\frac{1}{2}\sum_k\left(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_c\right)^2\frac{\delta_k}{\Delta t} \tag{14.6}$$

В обеих формулах в первой сумме учитываются присоединенные вихри. Если в крайней точке рождается свободный вихрь, то он в эту сумму не входит. Во второй сумме учитываются все вновь рожденные и удаленные вихри, а также приращения циркуляций присоединенных вихрей; $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{V}_k$ – скорость движения $k$-го узла и индуцированная скорость в этой точке. При вычислении скорости $\mathbf{V}_k$ можно не учитывать вклады присоединенных вихрей, моделирующих данное тело, так как при суммировании они взаимно уничтожаются.

Скорость движения каждой точки жесткой поверхности в двумерном пространстве выражается через скорость выделенной точки $\mathbf{u}_c$ и угловую скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ относительно оси, проходящей через эту точку:

$$\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_c+\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_c\right). \tag{14.7}$$

Если скорость движения не детерминирована, и поверхность движется под действием аэродинамических и заданных внешних сил $\mathbf{F}_e$ и момента $\mathbf{M}_e$ при наличии двух поступательных и одной вращательной степеней свободы, то в качестве выделенной точки можно взять центр масс поверхности ($\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_M$, $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_M$). В этом случае неизвестные величины $\mathbf{u}_M$ и $\boldsymbol{\omega}$ могут быть найдены при решении системы уравнений (14.1) - (14.2), дополненной уравнениями движения поверхности:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{F}_e &= m\dot{\mathbf{u}}_M \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}_e &= I_M \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \tag{14.8}$$

Здесь $m$ – масса тела, моделируемого бесконечно тонкой поверхностью, $I_M$ – его момент инерции относительно точки $\mathbf{r}_M$, $\mathbf{u}_M$ – скорость движения центра масс.

Поскольку гидродинамическая сила и момент сил, действующие на тело, связаны с изменением гидродинамического и вращательного импульсов среды, для выполнения соответствующих законов сохранения в уравнениях (14.8) целесообразно использовать выражения силы и момента, обладающие свойством консервативности, а именно, удовлетворяющие соотношениям (13.1) и (13.10). В дискретном виде они могут быть записаны следующим образом.

$$\Delta\left(m\mathbf{u}_M\right) = \mathbf{F}_e \Delta t + \sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \times \mathbf{r}_k - \sum_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{old} \times \mathbf{r}_k^{free} - \sum_j \boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)} \times \mathbf{r}_j \tag{14.9}$$

$$\Delta\left(I_M \boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{M}_e \Delta t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_M\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{old} \left(\mathbf{r}_k^{free} - \mathbf{r}_M\right)^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_j \boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_M\right)^2$$

Здесь индексом $old$ помечены значения величин, вычисленных в момент времени $t - \Delta t$, $\mathbf{r}_k^{free}$ – точка, куда переместился бы $k$-ый присоединенный вихрь, если бы был свободным, $\mathbf{r}_j$ – положение удаленного вихря после пересечения контура, $\mathbf{r}_M$ – положение центра масс тела в момент времени $t$. При эйлеровой схеме интегрирования $\mathbf{r}_k^{free} = \mathbf{r}_k^{old} + \mathbf{V}_k \Delta t$. Можно показать, что формула для аэродинамической силы при этом переходит в (14.5), где выражение

$\left(\Gamma_k \times \left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right)\right)$ вычислено на предыдущем шаге по времени, а в качестве $\mathbf{r}_c$ выбрана точка $\mathbf{r}_M$. Аналогичным образом формула для момента переходит в (14.6), но с точностью до членов порядка $\Delta t^2$.

Уравнения (14.9) вместе с (14.1) и (14.2) образуют линейную систему уравнений относительно $g_k$, $\mathbf{u}_M$, $\boldsymbol{\omega}$ , что позволяет решать сопряженную задачу аэродинамики и динамики тела. Отметим, что построенная система уравнений позволяет находить решение при исчезающе малых значениях массы и момента инерции тела, что было бы невозможным при последовательном нахождении аэродинамической силы и ускорения тела.

Если задан закон движения выделенной точки поверхности, и поверхность движется под действием аэродинамического и заданного внешнего момента $\mathbf{M}_e$ при наличии одной вращательной степени свободы, то в качестве выделенной точки следует взять точку закрепления $\mathbf{r}_c$. В этом случае неизвестная величина $\boldsymbol{\omega}$ может быть найдена при решении системы уравнений (14.1) - (14.2), дополненной уравнением движения поверхности:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_e = I_c \dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_c) \times \dot{\mathbf{u}}_c \qquad (14.10)$$

Здесь $I_c$ –момент инерции тела относительно точки $\mathbf{r}_c$, $\mathbf{u}_c$ – заданная скорость ее движения. В этом случае момент гидродинамических сил целесообразно вычислять по формуле

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\Delta t}\left( \sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 - \sum_k \mathbf{\Gamma}_k^{old} \left(\mathbf{r}_k^{free} - \mathbf{r}_c\right)^2 - \sum_j \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c\right)^2 \right).$$

## 15. Непроницаемая поверхность в вязкой жидкости

При обтекании поверхности вязкой жидкостью в качестве граничного условия ставится условие прилипания, означающее равенство скоростей жидкости и поверхности в каждой ее точке. Следовательно, в такой постановке скачок скорости на поверхности отсутствует, т.е. присоединенная завихренность всегда равна нулю, а завихренность, генерируемая поверхностью, считается свободной во всех точках. Если в некоторый момент времени граничное условие выполнено, и известно положение всех свободных вихрей, то можно вычислить скорости движения всех вихрей по формуле Био-Савара и формулам диффузионного смещения вихрей относительно жидкости, приведенным в разделе 5 главы 1. Далее вычисляется новое положение свободных вихрей через интервал времени $\Delta t$. В течение этого времени на поверхности генерируется новая завихренность. Если шаг по времени мал, эта добавочная завихренность сосредоточена в узкой области вблизи контура. Можно искать плотность добавочной циркуляции, полагая, что она сосредоточена на линии. Для этого контур поверхности разбивается на $K$ отрезков. При этом получается $K$+1 неизвестных циркуляций $g_k = \Gamma_k^{(g)}$, ($k$=1,…,$K$+1), сосредоточенных в точках разбиения контура или распределенных вблизи них по заданному закону.

Условие непротекания записывается либо в контрольных точках, либо в виде интегралов по отрезкам и совпадает с (14.1). Для замыкания системы уравнений также используется условие сохранения циркуляции в пространстве течения (14.2).

После того, как найдены все неизвестные циркуляции, необходимо во всех узлах, кроме крайних, определить, какая часть циркуляции образовалась с каждой из сторон поверхности, то есть найти векторы $\mathbf{\Gamma}_{k+}^{(g)}$ и $\mathbf{\Gamma}_{k-}^{(g)}$, которые выражаются через скорости $\mathbf{V}_{k+}$ и $\mathbf{V}_{k-}$ формулами

$$\mathbf{\Gamma}_{k+}^{(g)} = \left(\mathbf{V}_{k+} - \mathbf{u}_k\right) \times \mathbf{n}_+ \Delta l\,, \qquad \mathbf{\Gamma}_{k-}^{(g)} = \left(\mathbf{V}_{k-} - \mathbf{u}_k\right) \times \mathbf{n}_- \Delta l\,.$$

Поскольку полусумма скоростей $\mathbf{V}_{k+}$ и $\mathbf{V}_{k-}$ равна индуцированной скорости $\mathbf{V}_k$, а сумма $\boldsymbol{\Gamma}_{k+}^{(g)} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-}^{(g)} = \mathbf{g}_k$, можно выразить $\boldsymbol{\Gamma}_{k+}^{(g)}$ и $\boldsymbol{\Gamma}_{k-}^{(g)}$ через $\mathbf{V}_k$ и $\mathbf{g}_k$

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+}^{(g)} &= \frac{1}{2}\Big(g_k + \big(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\big)\big(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}\big)\Big) \\ \Gamma_{k-}^{(g)} &= \frac{1}{2}\Big(g_k - \big(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\big)\big(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}\big)\Big) \end{aligned} \qquad (15.1)$$

При выводе этих выражений использована следующая аппроксимация вектора $\mathbf{n}\Delta l$ в $k$-ой узловой точке гладкого контура: $\mathbf{n}_{+}\Delta l \approx \big(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}\big)\times \mathbf{e}_z / 2$.

Таким образом, определены вихри, образовавшиеся по обе стороны поверхности. После этого вычисляются индуцированные и диффузионные скорости всех вихрей по формулам, приведенным в разделе 5 главы I. Далее вихри перемещаются в соответствие с вычисленной скоростью. При этом отдельные свободные вихри могут пересекать поверхность. Такие вихри должны быть удалены, при этом необходимо «запомнить» циркуляции и координаты (после перемещения) удаленных вихрей, так как эта информация будет нужна при вычислении сил, действующих на поверхность.

Перепад давления на $k$-ом отрезке можно вычислить по формуле (9.1)

$$p_{k+} - p_{k-} = -\sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t}$$

Здесь величина $\delta_l$ представляет собой сумму циркуляций вихрей, рожденных и удаленных (с обратным знаком) вблизи $l$-ого узла, индекс «+» соответствует правой стороне контура при его обходе, начиная с точки $l = 1$.

Давление в произвольной точке $\mathbf{R}$ течения выражается согласно (7.6) формулой

$$\frac{p(\mathbf{R})-p_\infty}{\rho}=-\Pi+\Pi_\infty+\frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2}-\frac{V^2}{2}+\sum_i \mathbf{u}_i\mathbf{v}_i(\mathbf{R})-$$
$$-\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{K}\left(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k\right)\left(\mathbf{e}_z\times\mathbf{K}\left(\mathbf{R},\hat{\mathbf{r}}_k\right)\right)\sum_{k_1=1}^{k}\delta_{k_1} \tag{15.2}$$

Здесь $\mathbf{u}_i$– скорость движения $i$-го свободного вихря, равная сумме диффузионной и индуцированной скоростей. Все остальные обозначения такие же, как и в формуле (14.4).

Аэродинамическая сила, действующая на контур в целом, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{F}=\sum_{k=1}^{K+1}\frac{\mathbf{g}_k}{\Delta t}\times\mathbf{r}_k-\sum_j\frac{\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}}{\Delta t}\times\mathbf{r}_j+\mathbf{F}_w \tag{15.3}$$

Индекс $j$ относится к вихрям, удаленным при пересечении контура; $\mathbf{r}_j$ – положение вихря в момент удаления (после пересечения контура). Сила трения $\mathbf{F}_w$ согласно (11.20) и (5.9) может быть выражена через скорости отталкивания вихрей от поверхности $\mathbf{w}_{ik}=\mathbf{w}\left(\mathbf{r}_i,\hat{\mathbf{r}}_k\right)d_k$

$$\mathbf{F}_w=\sum_i\mathbf{\Gamma}_i\times\sum_{k=1}^{K}\mathbf{w}_{ik}\frac{I_0\left(\mathbf{r}_i\right)}{I_0\left(\mathbf{r}_k\right)} \tag{15.4}$$

Функции $\mathbf{w}_{ik}$ и $I_0$ определены формулами (5.7) и (5.6).

Формула для момента сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ имеет вид

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K+1}\left(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_c\right)^2\frac{\mathbf{g}_k}{\Delta t}-\frac{1}{2}\sum_j\left(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_c\right)^2\frac{\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}}{\Delta t}+\mathbf{M}_w \tag{15.5}$$

$\mathbf{M}_w$ – момент сил трения.

$$\mathbf{M}_w=\sum_i\mathbf{\Gamma}_i\sum_{k=1}^{K}\left(\left(\hat{\mathbf{r}}_k-\mathbf{r}_c\right)\mathbf{w}_{ik}\right)\frac{I_0\left(\mathbf{r}_i\right)}{I_0\left(\mathbf{r}_k\right)} \tag{15.6}$$

Если скорость движения не детерминирована, и твердая поверхность движется в вязкой жидкости под действием аэродинамических силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$ и заданных внешних силы $\mathbf{F}_e$ и момента $\mathbf{M}_e$ при наличии двух поступательных и одной вращательной степеней свободы, неизвестные величины угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и скорости движения центра масс тела $\mathbf{u}_M$ могут быть найдены при решении системы уравнений (14.1) – (14.2), дополненной уравнениями движения поверхности (14.8).

Выражения гидродинамических сил и моментов (15.3), (15.5) линейны относительно $\mathbf{g}_k$, $\mathbf{u}_M$ и $\boldsymbol{\omega}$, поэтому уравнения (14.1), (14.2), (14.8) также являются линейными относительно неизвестных величин.

Если задан закон движения выделенной точки поверхности и поверхность движется под действием аэродинамического момента $\mathbf{M}$ и заданного внешнего момента $\mathbf{M}_e$ при наличии одной вращательной степени свободы, то так же, как и в случае идеальной жидкости, в качестве выделенной точки следует взять точку закрепления $\mathbf{r}_c$. Неизвестная величина $\boldsymbol{\omega}$ может быть найдена при решении системы уравнений (14.1), (14.2), дополненной уравнением движения поверхности (14.10).

## 16. Проницаемая поверхность

Рассмотрим вначале общую схему расчета. Пусть в некоторый момент времени нам известно распределение всех свободных и присоединенных вихрей. Тогда можно вычислить скорости всех свободных вихрей и найти их положение через время $\Delta t$. Поскольку на наветренной стороне поверхности скачок тангенциальной скорости может существовать даже в вязкой жидкости, так как заторможенные поверхностью слои просачиваются сквозь нее, а на их место приходит незаторможенная жидкость, будем моделировать проницаемую поверхность присоединенной завихренностью с плотностью $\boldsymbol{\gamma}$, которую предстоит определить в ходе расчетов. На подветренной стороне образуется узкий (при достаточно малом $\Delta t$) слой жидкости, прошедшей сквозь поверхность. Плотность циркуляции в этой области также не известна. Однако вместе с неизвестной циркуляцией $\gamma$ она должна обеспечивать условие просачивания, а именно связь между перепадом давления на поверхности и скоростью просачивания. Будем считать, что слой достаточно узок и что вся неизвестная циркуляция $\mathbf{g}$ сосредоточена на поверхности. Разность давления на двух сторонах проницаемой поверхности выражается формулой (9.1). В дискретном виде для рассматриваемого случая на $l$-ом отрезке контура она имеет вид

$$p_{l+} - p_{l-} = -\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{l}(g_k - \Gamma_k^{old}) + \frac{\mathbf{d}_l}{2d_l^2}\Big(\Gamma_l^{old}(\mathbf{u}_l^{old} - \mathbf{V}_l^{old}) + \Gamma_{l+1}^{old}(\mathbf{u}_{l+1}^{old} - \mathbf{V}_{l+1}^{old})\Big), \tag{16.1}$$

где $\mathbf{d}_l = \mathbf{r}_{l+1} - \mathbf{r}_l$, индекс «+» соответствует правой стороне контура при его обходе, начиная с точки $l = 1$, индекс $old$ показывает, что соответствующие величины берутся с предыдущего шага. Использование таких значений в выражениях $\Gamma_l(\mathbf{u}_l - \mathbf{V}_l)$ делает уравнение линейным относительно неизвестных величин и, как было показано в разделе 14, приводит к более точному выполнению закона сохранения импульса среды и тела. При этом получается среднее за последний временной шаг значение перепада давления.

Скорость просачивания жидкости сквозь поверхность на $l$-ом отрезке контура $(\mathbf{V}_l - \mathbf{u}_l)\,\mathbf{n}_l$ является функцией от перепада давления $(\mathbf{V}_l - \mathbf{u}_l)\mathbf{n}_l = f(\Delta p_l)$. В простейшем случае это – линейная зависимость

$$(\mathbf{V}_l - \mathbf{u}_l)\,\mathbf{n}_l = \beta\,\Delta p_l, \tag{16.2}$$

$\mathbf{n}_l$ – внешняя нормаль к области, помеченной индексом «+».

С другой стороны, нормальная составляющая скорости $\mathbf{V}_l\,\mathbf{n}_l$ выражается через распределение завихренности

$$\mathbf{V}_l\mathbf{n}_l = \sum_{k=1}^{K+1} g_k \mathbf{v}_{lk}\mathbf{n}_l + \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \mathbf{v}_{li}\mathbf{n}_l + \mathbf{V}_\infty \mathbf{n}_l \tag{16.3}$$

Здесь $\mathbf{v}_{lk}$ - скорость, индуцированная $k$-ым вихрем в контрольной точке с номером $l$ (или средняя скорость по соответствующему отрезку), $\mathbf{v}_{li}$ – скорость, индуцированная там же $i$-ым свободным вихрем с циркуляцией $\Gamma_i$, $N$ – число свободных вихрей.

Поскольку выражение (16.1) соответствует среднему за временной шаг значению перепада давления, при подстановке (16.2) в (16.1) следует взять среднее значение скорости просачивания.

$$\frac{1}{2\beta}\Big(\big(\mathbf{V}_l - \mathbf{u}_l\big)\mathbf{n}_l + \big(\mathbf{V}_l^{old} - \mathbf{u}_l^{old}\big)\mathbf{n}_l^{old}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{l}(g_k - \Gamma_k^{old}) + \frac{\mathbf{d}_l}{2d_l^2}\Big(\Gamma_l^{old}(\mathbf{u}_l^{old} - \mathbf{V}_l^{old}) + \Gamma_{l+1}^{old}(\mathbf{u}_{l+1}^{old} - \mathbf{V}_{l+1}^{old})\Big).$$

Подставляя в полученное выражение (16.3), получим $K$ уравнений для неизвестных циркуляций $g_k$. Система замыкается условием сохранения суммарной циркуляции $\sum_{k=1}^{K+1} g_k + \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i = 0$.

После того, как функция **g** найдена, можно определить тангенциальные скорости по обе стороны поверхности разрыва по формулам, аналогичным (15.1).

$$\mathbf{V}_{k+}(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}) = g_k + \mathbf{V}_k(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}),$$

$$\mathbf{V}_{k-}(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_{k-1}) = -g_k + \mathbf{V}_k(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_{k-1}),$$

$\mathbf{V}_k$ – скорость, индуцированная в $k$-ой точке всеми вихрями.

Для того, чтобы определить циркуляции свободных вихревых элементов, образовавшихся за время $\Delta t$, требуются дополнительные условия. В идеальной жидкости таким условием может быть коэффициент сохранения тангенциального импульса $T$, который определяется свойствами пор поверхности. Если длина пор много больше ширины, на выходе из них тангенциальная составляющая скорости просочившейся жидкости оказывается равной тангенциальной скорости поверхности ($T = 0$). В противном случае ($0 < T \le 1$) может иметь место частичная потеря импульса. В идеальной жидкости на наветренной стороне свободная завихренность отсутствует, и если задан коэффициент $T$, можно вычислить циркуляцию свободных вихревых элементов $\Gamma_{k\pm}^{(g)}$ на подветренной стороне и присоединенную циркуляцию $\Gamma_k$ по следующим формулам:

в случае, когда сторона « – » – наветренная

$$\Gamma_k = -\left(V_{-t} - V_{+t}\right)\Delta l = -(1-T)\mathbf{V}_-\left(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_{k-1}\right)/2,$$

$$\Gamma_{k+}^{(g)} = g_k - \Gamma_k,$$

в случае, когда сторона «+» – наветренная:

$$\Gamma_k = \left(V_{+t} - V_{-t}\right)\Delta l = (1-T)\mathbf{V}_+\left(\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_{k-1}\right)/2,$$

$$\Gamma_{k-}^{(g)} = g_k - \Gamma_k.$$

В общем случае течения вязкой жидкости сквозь пористую поверхность одного дополнительного условия недостаточно, так как при малой (по сравнению с диффузионной) скорости просачивания завихренность на наветренной стороне может распространяться от поверхности навстречу течению. Задача упрощается, если коэффициент сохранения импульса равен нулю. Тогда можно полагать, что тангенциальная скорость жидкости на входе и выходе из пор равна скорости поверхности. При этом $\Gamma_k = 0$, а циркуляции свободных вихревых элементов на обеих сторонах выражаются формулами

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+}^{(g)} &= \frac{1}{2}\Big(g_k + \big(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\big)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1})\Big), \\ \Gamma_{k-}^{(g)} &= \frac{1}{2}\Big(g_k - \big(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\big)(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1})\Big), \end{aligned} \qquad (16.6)$$

$\mathbf{u}_k$ – скорость движения *k*-ого узла поверхности.

Если скорость просачивания больше диффузионной, можно считать, что на наветренной стороне имеется только присоединенная завихренность и для вычисления циркуляций свободных вихревых элементов пользоваться формулами (16.4), (16.5).

При малой (по сравнению с диффузионной) скорости просачивания значение коэффициента *T* не имеет существенного значения, так как с обеих сторон относительная тангенциальная скорость будет близка к нулю, поэтому можно пользоваться формулами (16.6). Таким образом, неопределенным оказывается только диапазон, когда скорость просачивания близка к диффузионной и $T \neq 0$.

Суммарные вихри на острых кромках целиком считаются свободными, т.е. $\Gamma_1 = \Gamma_{K+1} = 0$, а $\Gamma_1^{(g)} = g_1$ и $\Gamma_{K+1}^{(g)} = g_{K+1}$.

После разделения свободные вихревые элементы смещаются с учетом как конвективной, так и диффузионной скоростей. Затем происходит переход к следующему шагу по времени.

Гидродинамическая сила и момент сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ вычисляются по формулам, аналогичным (15.3), (15.5)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \times \mathbf{r}_k - \frac{1}{\Delta t}\sum_k \mathbf{\Gamma}_k^{old} \times \mathbf{r}_k^{free} - \frac{1}{\Delta t}\sum_j \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \times \mathbf{r}_j + \mathbf{F}_w$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \big(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\big)^2 - \sum_k \mathbf{\Gamma}_k^{old}\big(\mathbf{r}_k^{free} - \mathbf{r}_c\big)^2 - \sum \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}\big(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c\big)^2\right) + \mathbf{M}_w$$

$\mathbf{F}_w$ и $\mathbf{M}_w$ – сила и момент сил трения, определяемые формулами (15.4) и (15.6).

## 17. Поступательное движение твердых тел

При моделировании обтекания объемных тел область, занимаемая телом, моделируется как некое гипотетическое течение, характеристики которого входят в выражения сил, момента и разности давлений на двух сторонах поверхности.

При поступательном движении твердого тела скорость течения во внутренней области при отсутствии в ней вихрей и источников равна скорости движения тела $\mathbf{u}_b$. При движении с постоянной скоростью давление во внутренней области постоянно, но может быть определено с точностью до константы. При ускоренном движении $p = -\dot{\mathbf{u}}_b \mathbf{r} + const$.

При вращательном или деформационном движении тел структура внутреннего течения оказывается более сложной, поэтому эти виды движения тел будут рассмотрены отдельно.

При поступательном движении тел в идеальной и вязкой жидкости со скоростью $\mathbf{u}_b$ так же, как и в случае аналогичных течений вокруг бесконечно тонких поверхностей, на каждом шаге по времени определяются значения циркуляций вихрей, образовавшихся на поверхности тела. Отличие состоит лишь в том, что система уравнений, выражающих условие непротекания, оказывается близкой к вырожденной (при условии непротекания в контрольных точках) или строго вырожденной (если условие непротекания задано в интегральном виде по каждому элементу контура). В первом случае проблема обычно решается введением дополнительного неизвестного источника внутри тела, который в результате расчета оказывается пренебрежимо малым. Во втором случае одно из уравнений просто отбрасывается.

***Идеальная жидкость***

При расчете отрывного обтекания тела идеальной жидкостью точки отрыва на контуре поверхности должны быть заданы. Обычно такими точками являются острые кромки. В точках отрыва

$g_k = \Gamma_k^{(g)}$, а в остальных $g_k = \Gamma_k$ (все обозначения такие же, как и в разделе 14).

Давление в произвольной точке **R** может быть вычислено по формуле (14.4). Также может быть использована формула (7.10), которая в дискретном представлении имеет вид

$$p - p_\infty = -\Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{u}_b \sum_{k=1}^{K} \mathbf{v}_k - \\ -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k\right) \frac{\Delta\Gamma_k + \Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_j\right) \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t}, \tag{17.1}$$

$\alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k\right)$ – угол, под которым отрезок $\left(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k\right)$ виден из точки **R**, для вычисления его можно использовать формулу (7.9); $\mathbf{R}_0$ – произвольная точка внутри области тела, такая, что отрезки, соединяющие ее с узлами контура и точками удаления вихрей, лежат внутри контура или на контуре; $r_j$ – координаты удаленных вихрей (взятые после пересечения контура). Если вихри не удалялись, а перемещались по принципу отражения или иному закону, в выражение должна быть добавлена сумма $-\dfrac{1}{2\pi} \sum_{j} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_j^{new}\right) \dfrac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t}$.

Перепад давления на $k$-ом отрезке $\Delta p_k = p_{k+} - p_{k-}$ контура выражается формулой

$$\Delta p_k = \left(\boldsymbol{\gamma}_k \times \left(\mathbf{u}_b - \hat{\mathbf{V}}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_+ - \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} + const, \tag{17.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \left(\Gamma_k + \Gamma_{k+1}\right) / 2d_k .$$

Наличие константы в правой части связано с тем, что давление во внутренней области может быть определено неоднозначно (с точностью до константы). Также выбор начальной точки нумерации узлов может быть произвольным, что влияет только на величину этой константы. Поскольку при поступательном движении тела давление во внутренней области равно $p_{k-} = -\left(\dot{\mathbf{u}}_b \hat{\mathbf{r}}_k\right) + const$, давление в жидкости на поверхности тела выражается формулой

$$p_{k+} = \left(\boldsymbol{\gamma}_k \times \left(\mathbf{u}_b - \hat{\mathbf{V}}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_+ - \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} - \left(\dot{\mathbf{u}}_b \hat{\mathbf{r}}_k\right) + const. \qquad (17.3)$$

Гидродинамическая сила, действующая на контур в целом, в соответствии с формулами (11.7), (11.8) равна

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{K} \left(\boldsymbol{\Gamma}_k \times \left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}_k\right)\right) - \sum_{k=1}^{K} \mathbf{r}_k \times \frac{\delta_k}{\Delta t} + \dot{\mathbf{u}}_b S, \qquad (17.4)$$

$S$ – площадь области тела.

Формула для момента сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ согласно (12.8) имеет вид

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right) \times \left(\Gamma_k \times \left(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}_k\right)\right) + \frac{1}{2} \sum_{k}^{K} \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \frac{\Delta \boldsymbol{\Gamma}_k + \Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{j} \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c\right)^2 \frac{\boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)}}{\Delta t} + \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right) \times \dot{\mathbf{u}}_b S$$

(17.5)

Если скорость движения не детерминирована, и тело поступательно движется под действием гидродинамической силы $\mathbf{F}$ и заданных внешних сил $\mathbf{F}_e$, то уравнения, выражающие условие непротекания, дополняются уравнением движения (14.8), которое в дискретном виде, обладающем свойством консервативности, может быть записано по аналогии с (14.9)

$$\mathbf{F}_e \Delta t + \sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{g}_k \times \mathbf{r}_k - \sum_{k} \boldsymbol{\Gamma}_k^{old} \times \mathbf{r}_k^{free} - \sum_{j} \boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)} \times \mathbf{r}_j = \left(\bar{m} - 1\right)\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^{old}\right) S$$

Здесь $\bar{m}$ – масса тела, отнесенная к массе вытесненной жидкости.

Полученная линейная система уравнений может быть использована при решении сопряженной задачи аэродинамики и динамики тела. Данный подход позволяет находить решение при исчезающе малом значении массы тела, что было бы невозможным при последовательном нахождении гидродинамической силы и ускорения тела. Если $\overline{m} = 1$, величина $\mathbf{u}_b$ выпадает из уравнения движения, но остается в уравнениях, выражающих условие непротекания, поэтому сопряженная задача так же может быть решена.

***Вязкая жидкость***

Общая схема расчета аналогична случаю обтекания бесконечно тонкой поверхности вязкой жидкостью. При расчете вязких течений в качестве граничного условия на поверхности обычно ставится условие прилипания, т.е. равенства скорости жидкости и скорости поверхности. При поступательном движении тела это означает, что присоединенная завихренность отсутствует, т.е. $g_k = \Gamma_k^{(g)}$.

Условие непротекания записывается либо в контрольных точках, либо в виде интегралов по отрезкам так же, как и при обтекании идеальной жидкостью. И так же, как при моделировании обтекания тела идеальной жидкостью, вводится дополнительный неизвестный источник для регуляризации системы уравнений (при записи условия непротекания в контрольных точках), либо одно из уравнений отбрасывается (при интегральной формулировке).

После того, как циркуляции новых вихрей найдены, вычисляются индуцированные и диффузионные скорости всех вихрей по формулам, приведенным в разделе 5 главы 1. Далее вихри перемещаются в соответствие с вычисленной скоростью. Отдельные свободные вихри могут пересекать поверхность. Такие вихри должны быть удалены, при этом необходимо «запомнить» циркуляции и координаты (после перемещения) удаленных вихрей, так как эта информация будет нужна при вычислении сил, действующих на тело.

Давление в произвольной точке **R** может быть вычислено по формуле (15.2). А также может быть использована формула (7.10), которая в данном случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
p - p_\infty = -\Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i - \\
-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k\right)\frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} + \frac{1}{2\pi}\sum_j \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_j\right)\frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t}
\end{aligned}
\qquad (17.6)
$$

Здесь $\mathbf{u}_i$ – скорость движения $i$-го свободного вихря, равная сумме диффузионной и индуцированной скоростей. Все остальные обозначения те же, что и в (17.1). Если вихри не удалялись, а перемещались по принципу отражения или иному закону, в выражение должна быть добавлена сумма

$$
-\frac{1}{2\pi}\sum_j \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_j^{new}\right)\frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t}.
$$

Перепад давления на $k$-ом отрезке согласно теореме Жуковского «в малом», доказанной теперь и для вязких течений, равен

$$
p_{k+} - p_{k-} = -\sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} + const \qquad (17.7)
$$

Величина $\delta_l$ представляет собой сумму циркуляций рожденных и удаленных (с обратным знаком) вблизи $l$-ого узла вихрей.

Наличие константы в правой части связано с тем, что давление во внутренней области может быть определено неоднозначно (с точностью до константы). Также выбор начальной точки нумерации узлов может быть произвольным, что влияет только на величину этой константы. Поскольку при поступательном движении тела давление с внутренней стороны $k$-ого отрезка равно $p_{k-} = -\left(\dot{\mathbf{u}}_b \hat{\mathbf{r}}_k\right) + const$, давление в жидкости на поверхности тела выражается формулой

$$
p_{k+} = -\sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} - \left(\dot{\mathbf{u}}_b \hat{\mathbf{r}}_k\right) + const \qquad (17.8)
$$

Гидродинамическая сила, действующая на твердое тело, при его поступательном движении со скоростью $\mathbf{u}_b$ может быть вычислена по формулам (11.7) и (11.18):

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{\Gamma}_k^{(g)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k - \sum_j \frac{\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_j + \mathbf{F}_w + \dot{\mathbf{u}}_b S \tag{17.9}$$

В отличие от случая бесконечно тонкой поверхности здесь присутствует член, связанный с ускорением тела. Индексы $j$ относятся к вихрям, удаленным при пересечении контура, $\mathbf{r}_j$ – положение вихря в момент удаления (после пересечения контура). Сила трения $\mathbf{F}_w$ определяется выражением (15.4).

Формула для момента сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ для твердого тела, совершающего поступательное движение со скоростью $\mathbf{u}_b$, согласно (12.8) и (12.17), имеет вид:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \frac{\mathbf{\Gamma}_k^{(g)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \sum_j \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c\right)^2 \frac{\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}}{\Delta t} +$$
$$+\mathbf{M}_w + \left(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_c\right) \times \dot{\mathbf{u}}_b S$$

Здесь $\mathbf{M}_w$ – момент сил трения, определяемый выражением (15.6). Постановка сопряженной задачи аналогична случаю обтекания поступательно движущегося тела в идеальной жидкости. Дискретные уравнения, обладающие свойством консервативности, имеют вид

$$\mathbf{F}_e \Delta t + \sum_{k=1}^{K+1} \mathbf{\Gamma}_k^{(g)} \times \mathbf{r}_k - \sum_j \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \times \mathbf{r}_j + \mathbf{F}_w \Delta t = \left(\overline{m} - 1\right)\left(\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^{old}\right) S, \tag{17.10}$$

$\overline{m}$ – масса тела, отнесенная к массе вытесненной жидкости.

Уравнения, выражающие условия непротекания, вместе с уравнением сохранения циркуляции (14.2) и (17.10) образуют систему, которая является линейной относительно неизвестных величин $\Gamma_k^{(g)}$ и $\mathbf{u}_b$.

## 18. Произвольное движение тела

При моделировании вращательного или деформационного движения тела гипотетическая жидкость в области, занятой телом, не может быть покоящейся или движущейся с постоянной во всей области скоростью. Так как внешнее течение не зависит от внутреннего, последнее может моделироваться разнообразными способами. Рассмотрим некоторые из них.

***Задана скорость $u_b$ движения точек тела, включая поверхность (скачок скорости с внутренней стороны поверхности отсутствует)***

Примером может быть случай вращающегося твердого тела, когда во внутренней области скорость задана формулой $\mathbf{u}_b(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$. Поле $\boldsymbol{\Omega}_b = \nabla \times \mathbf{u}_b$ считается присоединенной завихренностью внутри тела. Если при этом $\nabla \mathbf{u}_b \neq 0$, то поле $q_b = \nabla \mathbf{u}_b$ считается плотностью источников внутри тела. Присоединенная завихренность на поверхности тела (или свободная завихренность, образовавшаяся вблизи контура за время очередного шага по времени) определяется из условия непротекания. Очевидно, что скорость **V**, индуцированная всей совокупностью вихрей и источников при выполнении условия непротекания совпадает внутри области тела с $\mathbf{u}_b$. Это следует из единственности функции с заданным распределением ротора и дивергенции при заданной нормальной составляющей на поверхности.

При вычислении скорости движения вихрей должна учитываться скорость, индуцированная всей совокупностью вихрей и источников, включая находящиеся внутри тела. В общем случае это требует интегрирования по области тела. Однако в случае поступательно-вращательного движения тела неизменной формы интегралы по площади в области тела могут быть преобразованы в контурные, что существенно упрощает вычисления.

Так, скорость $\mathbf{V}_\omega$, индуцированная вихрями, распределенными в области $B$ с плотностью $\boldsymbol{\Omega}_b = 2\boldsymbol{\omega}$, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{V}_\omega(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi}\int_B \frac{\boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{(\mathbf{R}-\mathbf{r})^2}db = -\frac{2\boldsymbol{\omega}}{2\pi}\times\int_B \nabla_r \ln|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\,db =$$
$$= -\frac{\boldsymbol{\omega}}{\pi}\times\oint_C \mathbf{n}_- \ln|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\,dl \approx -\frac{\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{d}_k \ln|\mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_k|. \qquad (18.1)$$

Если расстояние от точки $\mathbf{R}$ до одного из отрезков много меньше или по порядку величины близко к его длине, то данный отрезок следует разбить на более мелкие и просуммировать вклады всех частей. Если точка $\mathbf{R}$ лежит на отрезке, то вклад этого отрезка вычисляется аналитически и равен

$$-\frac{\omega}{\pi}\mathbf{d}_k\left(|\mathbf{R}-\mathbf{r}_k|\ln|\mathbf{R}-\mathbf{r}_k| + |\mathbf{R}-\mathbf{r}_{k+1}|\ln|\mathbf{R}-\mathbf{r}_{k+1}| - |\mathbf{r}_{k+1}-\mathbf{r}_k|\right).$$

Отметим, что вклад в нормальную к этому отрезку составляющую скорости равен нулю.

Расчет давления в произвольной точке пространства проводится по обобщенной формуле Коши-Лагранжа также с учетом внутренних вихрей и источников. В случае обтекания тела неизменной формы интегрирование по площади внутри контура также можно заменить интегрированием по контуру.

Скорость $\mathbf{V} = \mathbf{u}_b$ удовлетворяет уравнению движения жидкости внутри тела (8.1) при $\mathbf{F}_b = \mathbf{u}_{virt}\times\boldsymbol{\Omega}_{virt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c)$ и $p = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_c)^2\omega^2 - (\dot{\mathbf{u}}_c\mathbf{r})$. Поток завихренности с внутренней стороны поверхности соответственно равен

$$J_- = -\Omega_{virt}(\mathbf{n}_-\mathbf{u}_{virt}) = \dot{\omega}(\mathbf{n}_-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c)).$$

Вклад в давление присоединенных вихрей внутри тела, движущихся вместе с ним, равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_S\left(\mathbf{u}_c+\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}+\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\right)\frac{2\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)}{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)^2}dS=$$

$$=\left(\mathbf{u}_c+\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\right)\mathbf{V}_\omega-\frac{\omega^2}{\pi}S.$$

Вклад в давление виртуальных потоков внутри тела равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_S\mathbf{u}_{virt}\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}_{virt}\times\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)}{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)^2}ds=\frac{1}{2\pi}\int_S\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\right)\right)\cdot\frac{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)}{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)^2}ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\times\int_S\frac{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)}{\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\right)^2}ds=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\times\int_S\nabla\ln\left|\mathbf{R}-\mathbf{r}\right|ds=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\times\oint_C\mathbf{n}_-\ln\left|\mathbf{R}-\mathbf{r}\right|dl\approx$$

$$\approx-\frac{1}{2\pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\times\sum_{k=1}^{K}\left(\mathbf{d}_k\times\mathbf{e}_z\right)\ln\left|\mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_k\right|=$$

$$=\frac{\dot{\omega}}{2\pi}\sum_{k=1}^{K}\left(\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\mathbf{d}_k\right)\ln\left|\mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_k\right|=\frac{-\dot{\omega}}{2\omega}\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}_c\right)\mathbf{V}_\omega\left(R\right).$$

В результате получаем выражение давления в произвольной точке идеальной жидкости

$$p = p_\infty - \Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{V}_i + \sum_k \mathbf{v}_k \left(\mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_k, \mathbf{R}_0\right) \frac{\Delta\Gamma_k + \Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} - \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j, \mathbf{R}_0\right) \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} +$$
$$+ \frac{\dot{\omega}}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{r}}_k, \mathbf{R}_0\right)\left(\mathbf{n}_- \left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right)\right) - \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_c\right) \mathbf{V}_\omega\left(\mathbf{R}\right) +$$
$$+ \left(\mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_c\right)\right) \mathbf{V}_\omega\left(\mathbf{R}\right) - \frac{\omega^2}{\pi} S. \tag{18.2}$$

Обозначения те же, что и в (17.1).

Разность давления на двух сторонах поверхности в данном случае равна

$$p_{k+} - p_{k-} = \left(\frac{\Gamma_k + \Gamma_{k+1}}{2d_k} \times \left(\hat{\mathbf{u}}_k - \hat{\mathbf{V}}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_+ -$$
$$- \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_{l=1}^{k} \left(\hat{\mathbf{r}}_l - \mathbf{r}_c\right) \times \mathbf{d}_l. \tag{18.3}$$

При этом

$$p_{k-} = \left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \omega^2 - \dot{\mathbf{u}}_c \left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right) + const.$$

Применение теоремы Жуковского «в малом» при деформационном движении тела нецелесообразно, так как для нахождения давления на поверхности с ее помощью требуется вычисление давления во внутренней области.

Сила, действующая на тело при произвольном движении в идеальной жидкости в отсутствие вдува и отсоса на его поверхности, может быть вычислена по формуле (11.13), которая в этом случае имеет вид

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \times (\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k) + \sum_k \frac{\delta_k}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k - \int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}} +$$
$$+2\int (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b) dQ + \int (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}) d\dot{Q} \qquad (18.4)$$

где $d\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Omega}_b ds$, $dQ = q_b ds$, а $d\dot{\mathbf{\Gamma}}$, $d\dot{Q}$ – скорости изменения этих величин при постоянных лагранжевых координатах.

Момент сил относительно точки $\mathbf{r}_c$ согласно (12.9) выражается формулой

$$\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \left( (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c)(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k) \right) + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c)^2 + \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)^2 d\dot{\mathbf{\Gamma}} +$$
$$+\frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{u}_b ds + \mathbf{u}_c \times \int_B \mathbf{u}_b db - \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{u}_b dQ \qquad (18.5)$$

В случае вязких течений аналогичные формулы имеют следующий вид.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k - \sum_n \frac{\Gamma_n^{(d)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k - \int \mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{\Gamma}} +$$
$$+2\int (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_b) dQ + \int (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}) d\dot{Q} + \mathbf{F}_w \qquad (18.6)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c)^2 - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)^2 +$$
$$+\frac{1}{2} \int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)^2 d\dot{\mathbf{\Gamma}} + \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{u}_b ds - \qquad (18.7)$$
$$-\int (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{u}_b dQ + \mathbf{u}_c \times \int_B \mathbf{u}_b db + \mathbf{M}_w.$$

Выражение силы трения совпадает с (15.4), а формула момента сил трения отличается от (15.6) дополнительным слагаемым, связанным с интегральной циркуляцией внутреннего течения (12.16).

$$\mathbf{M}_w \approx \sum_i \sum_{k=1}^{K} \left( \left( \hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c \right) \mathbf{w}_{ik} \right) \mathbf{\Gamma}_i \frac{I_0\left(\mathbf{r}_i\right)}{I_0\left(\hat{\mathbf{r}}_k\right)} - \frac{2}{\mathrm{Re}} \int_S \mathbf{\Omega}_b ds . \qquad (18.8)$$

Если рассматривается поступательно-вращательное движение твердого тела, то выражение силы и момента в идеальной жидкости приобретает вид

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \times \left( \mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k \right) + \sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m S$$

$$\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \left( \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right) \left( \mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t} \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right)^2 + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} I_c + \qquad (18.9)$$

$$+ \left( \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_c \right) \times \dot{\mathbf{u}}_c S$$

а в вязкой

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k - \sum_n \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} \times \mathbf{r}_j + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m S + \mathbf{F}_w$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} \left( \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c \right)^2 +$$

$$+2\dot{\boldsymbol{\omega}} I_c + \left( \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_c \right) \times \dot{\mathbf{u}}_c S + \mathbf{M}_w$$

(18.10)

При этом давление в произвольной точке течения и на поверхности тела определяются формулами

$$\begin{aligned}
p = {} & p_\infty - \Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{V}_i + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_k, \mathbf{R}_0\right) \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} - \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j, \mathbf{R}_0\right) \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} + \\
& + \frac{\dot{\omega}}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{r}}_k, \mathbf{R}_0\right)\left(\mathbf{n}_-\left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right)\right) + \frac{\dot{\omega}}{2\pi}\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_c\right) \mathbf{V}_\omega\left(\mathbf{R}\right) - \\
& - \left(\mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_c\right)\right) \mathbf{V}_\omega\left(\mathbf{R}\right) - \frac{\omega^2}{\pi} S
\end{aligned} \tag{18.11}$$

$$\begin{aligned}
p_{k+} = {} & -\sum_{l=1}^{k} \frac{\Gamma_l^{(g)} - \Gamma_l^{(d)}}{\Delta t} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \sum_{l=1}^{k} \left(\hat{\mathbf{r}}_l - \mathbf{r}_c\right) \times \mathbf{d}_l + \\
& + \left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \omega^2 - \dot{\mathbf{u}}_c\left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right) + const
\end{aligned} \tag{18.12}$$

***Задана только скорость движения поверхности тела***

Моделирующие тело вихри и источники расположены только на контуре. Их интенсивности определяются из условия непротекания. В этом случае индуцированная всеми вихрями и источниками скорость жидкости с внутренней стороны контура может не совпадать со скоростью контура. Для вычисления момента сил необходимо вычислить, какая часть завихренности соответствует внутреннему скачку. Это необходимо также при моделировании вязких течений, так как при условии прилипания реальной жидкости на внешней стороне контура скачок скорости на поверхности отсутствует и соответствующая часть завихренности после решения системы уравнений, обеспечивающей условие непротекания, считается свободной. Разделение на внутреннюю и внешнюю циркуляцию проводится по формулам, аналогичным (15.1)

$$g_{k+} = \frac{1}{2}\left(g_k + \left(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\right)\left(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}\right)\right)$$

$$\Gamma_{k-} = \frac{1}{2}\left(g_k - \left(\mathbf{V}_k - \mathbf{u}_k\right)\left(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_{k-1}\right)\right)$$

Внешняя циркуляция обозначена $g_{k+}$, так как она может быть как свободной, так и присоединенной, внутренняя считается присоединенной.

Выражения силы и момента сил, действующих на тело в идеальной жидкости при отсутствии вдува и отсоса на поверхности, в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \boldsymbol{\Gamma}_k \times \left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right) + \sum_k \frac{\delta_k}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k + \\ + \sum_k \left(2\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right) Q_k + \sum_k \left(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_k\right) \dot{Q}_k\end{aligned} \tag{18.13}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \sum_k \boldsymbol{\Gamma}_k \left(\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)\left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 + \\ + \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\sum_k \Gamma_{k-}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 + \frac{1}{2}\oint_C \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c\right)^2 \left(\mathbf{n}_- \times \mathbf{u}_b\right) dl\right) - \\ - \sum_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right) \times \mathbf{V}_k Q_k + \sum_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m\right) \times \mathbf{u}_c Q_k + \mathbf{u}_c \times \mathbf{u}_m S\end{aligned} \tag{18.14}$$

Два последних слагаемых получены при преобразовании выражения $\mathbf{u}_c \times \int_B \mathbf{u}_b db$ с использованием (11.10).

Давление в произвольной точке пространства описывается формулой, аналогичной (17.1)

$$p = p_\infty - \Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{V}_i + \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_k, \mathbf{R}_0\right) \frac{\Delta\Gamma_k + \Gamma_k^{(g)}}{\Delta t} - \frac{1}{2\pi}\sum_j \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{r}_j, \mathbf{R}_0\right)\frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} +$$
$$+\sum_l \left( \mathbf{v}_{ql}\mathbf{u}_{ql} - \frac{1}{2\pi}\dot{Q}_l \ln\left|\mathbf{R} - \mathbf{r}_l\right| \right) \tag{18.15}$$

Здесь $\mathbf{v}_{ql}$ - скорость, индуцируемая $l$-ым источником в точке наблюдения, $\mathbf{u}_{ql}$ – скорость движения источника.

В случае, когда описанным выше способом моделируется вращающееся твердое тело, выражения силы и момента приобретают следующий вид

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \times \left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right) + \sum_k \frac{\delta_k}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k$$
$$\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{\Gamma}_k \left(\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)\left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 + \tag{18.16}$$
$$+\frac{d}{dt}\left( -\frac{1}{2}\sum_k \Gamma_{k-}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \right) + \left(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_c\right) \times \dot{\mathbf{u}}_c S + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} I_c$$

При моделировании обтекания вращающегося твердого тела задачу облегчает то обстоятельство, что внутренний скачок всегда пропорционален скорости вращения, поэтому его достаточно найти один раз для единичной угловой скорости, а затем просто умножать на текущее значение угловой скорости. Соответственно выражение $\left( -\frac{1}{2}\sum_k \Gamma_{k-}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 \right)$ будет равно $\omega C_0$ , где $C_0$ – его значение при единичной угловой скорости, а производная по времени будет равна $\dot{\omega} C_0$.

Аналогичные формулы для случая обтекания твердого тела вязкой жидкостью имеют вид

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{u}}_m S + \sum_k \mathbf{\Gamma}_{k-} \times \left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right) + \sum_k \frac{\delta_k}{\Delta t} \times \mathbf{r}_k + \mathbf{F}_w$$

$$\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{\Gamma}_{k-} \left(\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)\left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k\right)\right) + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t} \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c\right)^2 + \qquad (18.17)$$

$$+\dot{\boldsymbol{\omega}} C_0 + \left(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_c\right) \times \dot{\mathbf{u}}_c S + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} I_c + \mathbf{M}_w$$

Выражение силы трения совпадает с (17.10).

Момент силы трения равен

$$\mathbf{M}_w \approx \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \sum_i \sum_{k=1}^{K} \left(\left(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c\right) \mathbf{w}_{ik}\right) \mathbf{\Gamma}_i I_0\left(\mathbf{r}_i\right) - \frac{4\omega S}{\mathrm{Re}}$$

При описанном способе моделирования вращающихся тел в вязкой жидкости только поверхностными вихрями можно после того, как циркуляция с внутренней стороны отделена от внешней, использовать также для вычисления силы и момента формулы (18.10), а для вычисления давления на поверхности формулу (18.11).

***Еще один способ моделирования произвольного движения тел поверхностными особенностями***

Чтобы избежать интегрирования по внутренней области тела в случае его произвольного движения, можно воспользоваться формулой (4.8), в которую входят только значения скорости жидкости с внешней стороны поверхности и свободная завихренность. Запишем (4.8) в дискретном виде, заменив интегралы суммами и введя обозначения $\mathbf{G}_k = \mathbf{V}_{k+} \times \mathbf{n}_{k+} \Delta l$, $Q_k = -\mathbf{V}_{+k} \mathbf{n}_{+k} \Delta l$. В случае непроницаемой поверхности нормальные составляющие скоростей жидкости и поверхности совпадают, поэтому $Q_k = -\mathbf{u}_k \mathbf{n}_{+k} \Delta l$, ($\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_b(\mathbf{r}_k)$).

$$\mathbf{V}\left(\mathbf{R}\right) = \sum_i \mathbf{\Gamma}_i \times \mathbf{K} + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{G}_k \times \mathbf{K} + \sum_{k=1}^{K} Q_k \mathbf{K} \qquad (18.18)$$

Из (18.18) видно, что $\mathbf{G}_k$ и $Q_k$ выступают в роли вихревых элементов и источников. Можно представить, что внутри области тела жидкость покоится, а при смещении контура добавляются или поглощаются частицы жидкости с нулевой скоростью на его границе. Условие непротекания сформулируем, взяв в качестве неизвестных величин $\mathbf{G}_k$. Необходимо учесть, что непрерывно распределенные на отрезке источники создают разрыв нормальной скорости, равный плотности источников $q$ (в данном случае $q = -\mathbf{u}_b\mathbf{n}_+$), тогда как дискретные источники, помещенные на концах отрезка, не дают вклада в нормальную к отрезку скорость. Поэтому для ее вычисления вблизи отрезка на стороне, помеченной индексом «+», в выражение (18.18) должна быть добавлена величина $-\mathbf{n}_+ q/2 = \mathbf{n}_+\left(\mathbf{u}_b\mathbf{n}_+\right)/2$. В результате, условие непротекания имеет вид

$$\sum_{k=1}^{K} G_k \mathbf{v}_{lk}\mathbf{n}_l = -\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \mathbf{v}_{li}\mathbf{n}_l - \sum_{k=1}^{K} Q_k \mathbf{v}_{lk}\mathbf{n}_l + \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}_l}{2} - \mathbf{V}_\infty\right)\ \mathbf{n}_l$$

Условие на суммарную циркуляцию имеет такой же вид, как и в обычной постановке, т.е.

$$\sum_{k=1}^{K} G_k = -\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i$$

После того, как неизвестные величины $G_k$ найдены, можно вычислять конвективные скорости вихревых элементов, учитывая, что если расстояние от точки наблюдения до одного из отрезков много меньше или по порядку величины близко к его длине, то следует либо разбить данный отрезок на более мелкие и просуммировать вклады всех частей, либо добавить в выражение (18.18) слагаемое $\mathbf{n}_+\left(\mathbf{u}_b\,\mathbf{n}_+\right)/2$.

В случае идеальной жидкости вихревые элементы $G_k$ считаются присоединенными всюду, кроме точек схода циркуляции, $G_k = \Gamma_k$. В случае моделирования вязкого течения циркуляции свободных вихревых элементов $\mathbf{\Gamma}_k^{(g)}$, образовавшихся на очередном шаге, вычисляются по формуле $\mathbf{\Gamma}_k^{(g)} = \mathbf{G}_k - \mathbf{u}_k \times \mathbf{n}_{k+} \Delta l_k$, при этом имеется присоединенная циркуляция с внутренней стороны контура $\mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{u}_k \times \mathbf{n}_{k+} \Delta l_k$

Так как жидкость внутри контура теперь считается неподвижной, давление внутри него постоянно. По обобщенной теореме Жуковского (9.2) можно вычислить перепад давления на контуре.

$$\Delta p_k = p_+ - p_- = \left(\boldsymbol{\gamma}_k \times \left(\hat{\mathbf{u}}_k - \hat{\mathbf{V}}_k\right)\right) \cdot \mathbf{n}_+ - \sum_{l=1}^{k} \frac{\delta_l}{\Delta t} + \left(\hat{\mathbf{u}}_k \mathbf{n}_+\right)\left(\hat{\mathbf{u}}_k - \hat{\mathbf{V}}_k\right) \cdot \mathbf{n}_+ .$$

$\boldsymbol{\gamma}_k$ – плотность присоединенной циркуляции на $k$-ом отрезке, $\boldsymbol{\gamma}_k = \left(\Gamma_k + \Gamma_{k+1}\right) / 2d_k$; $\hat{\mathbf{u}}_k$ – скорость движения отрезка, $\hat{\mathbf{V}}_k$ - скорость (в контрольной точке или средняя по отрезку), индуцированная всеми вихрями (включая бесконечно удаленный, если в выбранной системе координат скорость на бесконечности не равна нулю), $\delta_l = \Delta\Gamma_l + \Gamma_l^{(g)} - \Gamma_l^{(d)}$, $\Delta\Gamma_l$ – приращение присоединенного вихревого элемента за $\Delta t$, $\Gamma_l^{(g)}$, $\Gamma_l^{(d)}$ – циркуляции свободных вихревых элементов соответственно образовавшегося и удаленного (если такие имеются) вблизи $l$-го узла.

Расчет давления в произвольной точке пространства проводится по формуле, аналогичной (18.15), в которую согласно (6.6) должна быть добавлена скорость изменения потенциала источников $\partial\varphi_Q / \partial t = \dot{Q} \ln\left|\mathbf{R} - \mathbf{r}\right|$

$$p - p_\infty = -\Pi + \Pi_\infty + \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} - \frac{V^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \mathbf{V}_i + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \alpha\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, \mathbf{r}_k\right) \frac{\delta_k}{\Delta t} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{\Delta Q_k}{\Delta t} \ln\left|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k\right|$$

Сила, дествующая на тело, выражается формулой (11.8) с учетом (11.18) и равенства нулю интеграла $\int\limits_B \mathbf{V} db$

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{K} \left( \mathbf{\Gamma}_k \times \left( \mathbf{u}_b - \mathbf{V}_k \right) \right) - \sum_{k=1}^{K} \mathbf{r}_k \times \frac{\delta_k}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{K} \mathbf{V}_k Q_k \tag{18.19}$$

Момент сил согласно (12.9) может быть вычислен по формуле

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{K} \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right) \times \left( \Gamma_k \times \left( \mathbf{u}_k - \mathbf{V}_k \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k}^{K} \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right)^2 \frac{\Delta \boldsymbol{\delta}_k}{\Delta t} - \\ - \sum_{k=1}^{K} \left( \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c \right) \times \mathbf{V}_k Q_k\end{gathered} \tag{18.20}$$

## 19. Наличие вдува и отсоса жидкости на поверхности

При наличии вдува или отсоса на поверхности должны быть заданы источники с соответствующей интенсивностью. Условие, заменяющее условие непротекания в этом случае имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{K} g_k \mathbf{v}_{lk}\,\mathbf{n}_l = -\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \mathbf{v}_{li}\,\mathbf{n}_l - \sum_j Q_j \mathbf{v}_{lj}\,\mathbf{n}_l + \left(\mathbf{u}_k - \mathbf{V}_\infty\right)\ \mathbf{n}_l - q_l$$

Величина $q_l$ отлична от нуля только на тех отрезках контура, на которых осуществляется вдув или отсос, и равна осредненной по отрезку скорости жидкости за счет вдува или отсоса. При вдуве $q_l$ положительна, так как мы условились, что нормаль направлена внутрь тела. Интенсивности источников связаны с величинами $q_l$ соотношением

$$q_l = \left(Q_l + Q_{l+1}\right)\big/(2d_l)\ .$$

Здесь $d_l$ – длина отрезка с номером *l*. Источники размещены в узлах контура, $\mathbf{v}_{lj}$ - скорость, индуцированная источником с номером *j* на отрезке с номером *l*. Скорость, индуцированная источниками, должна быть также учтена при вычислении скоростей движения вихрей и скоростей **V** в формулах для разделения внешней и внутренней циркуляции.

При вычислении силы в выражения, соответствующие обтеканию твердых тел без вдува и отсоса, должно быть добавлено слагаемое $-\sum_{k=1}^{K} Q_k \mathbf{V}_k$, а в выражение момента слагаемое $-\sum_j Q_j\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c\right)\times\mathbf{V}_j$.

# ГЛАВА 4

## ПРИЛОЖЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ДОМЕНОВ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

В приведенных ниже разнообразных примерах применения метода вязких вихревых доменов (ВВД) преследовалась цель получить качественные результаты, характеризующие возможности метода как в простых (исследованных другими методами) задачах, так и в более сложных случаях при решении сопряженных задач динамики и аэрогидромеханики. Собственно, последнее и есть главная область применения метода ВВД. При этом авторы не стремились увеличить точность расчетов за счет высокого уровня дискретизации, в большинстве случаев бралось 100-200 интервалов разбиения на поверхности тел.

В разделах 20-24 движение тел (пластин, цилиндров, призм, крыловых профилей) детерминировано, демонстрируется способность метода ВВД моделировать структуру пограничного слоя, воспроизводить нестационарный отрыв на гладкой поверхности, определять напряжения трения.

В разделах 25-26 тела (вертушки в виде цилиндров с выступающими плоскими ребрами) имеют одну или более степеней свободы, приводятся примеры решения сопряженных задач динамики и аэрогидромеханики.

В разделе 27 воспроизведены численно наблюдаемые в экспериментах режимы неустойчивости «уловленного вихря» в вихревых ячейках на стенке плоско-параллельного канала и на поверхности кругового цилиндра.

В 28 исследовано влияние степени проницаемости на вязкое обтекание проницаемого экрана (дужки, вогнутой навстречу потоку наподобие купола парашюта), получен режим, при котором происходит подавление рециркуляционной области в ближнем следе позади экрана.

В 29 представлены результаты расчета осесимметричного вязкого взаимодействия кольцевого вихря с плоской поверхностью (воспроизведен эффект влияния вторичных отрывов на плоской стенке на структуру течения взаимодействия).

В заключительном разделе 30 дан пример решения сопряженной задачи обтекания тела со сложными кинематическими связями, рассчитаны режимы запуска квазипериодических автоколебаний ветроприемной поверхности "волнового" ветродвигателя Стрекалова [48].

## 20. Продольное обтекание пластины

Рассматривается обтекание вязкой несжимаемой жидкостью тонкой пластины, расположенной вдоль потока (рис.5). Передняя и задняя кромки пластины имеют вид полуокружности, толщина составляет 2% от длины *L* ее прямолинейной части.

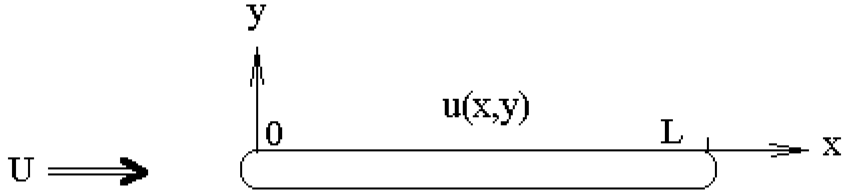



Рис. 5.

Задача решается в нестационарной постановке. В начальный момент жидкость покоится. На интервале $0 < t < 0.02\,L/U$ скорость пластины увеличивается от нуля до $U$ по линейному закону и затем остается постоянной. Число Рейнольдса $Re = U\,L/\nu = 10^3$. С течением времени на нижней и верхней сторонах пластины формируется пограничный слой. На рис.6 изображено мгновенное распределение вихревых доменов положительной и отрицательной циркуляции (соответственно светлые и темные точки) в момент времени $t = 2L/U$. По нему были рассчитаны распределение трения $\tau_w(x)$ и профили продольной скорости $u(x,y)$ в пограничном слое на прямолинейной поверхности пластины. Расчетное распределение трения сравнивается с классическим распределением Блазиуса [7] $\tau_w = 0.332\,\rho U^2 \sqrt{L/(x\,\mathrm{Re})}$ (на рис.6 вверху – гладкая кривая).

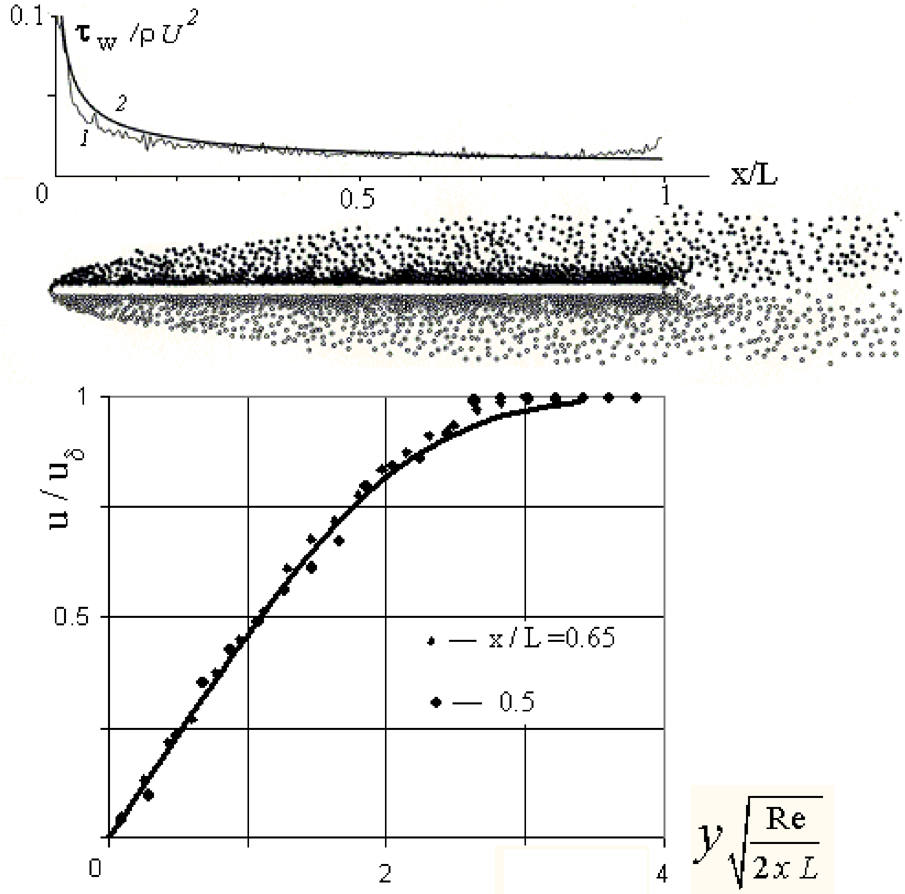



Рис. 6.

Из-за вытесняющего действия пластины скорость потока *u(y)* в сечениях *x = const (0 < x < L)* изменяется от *u=0* на стенке до *u=U* в бесконечности немонотонно: $\max\limits_{0<y<\infty} u = u_\delta(x) > U$.

На рис.6 (внизу) дается сравнение расчетных профилей *u(y)* при *x = 0.65 L* и *x = 0.5 L* на верхней стороне пластины с автомодельным профилем ламинарного пограничного слоя Блазиуса [7] для бесконечно тонкой пластинки.

## 21. Поперечное обтекание круглого цилиндра

Воспроизведены стационарный и нестационарный режимы вязкого обтекания цилиндра кругового сечения в диапазоне $10 \le \mathrm{Re} \le 10^4$ ($\mathrm{Re} = U\,D/\nu$, D – диаметр цилиндра).

*Стационарное обтекание.* Расчетная вихревая картина течения, полученная методом ВВД при Re=26, сравнивается на рис. 7 с соответствующей экспериментальной картиной дымовой визуализации [36] (прямоугольная врезка на рис.7).

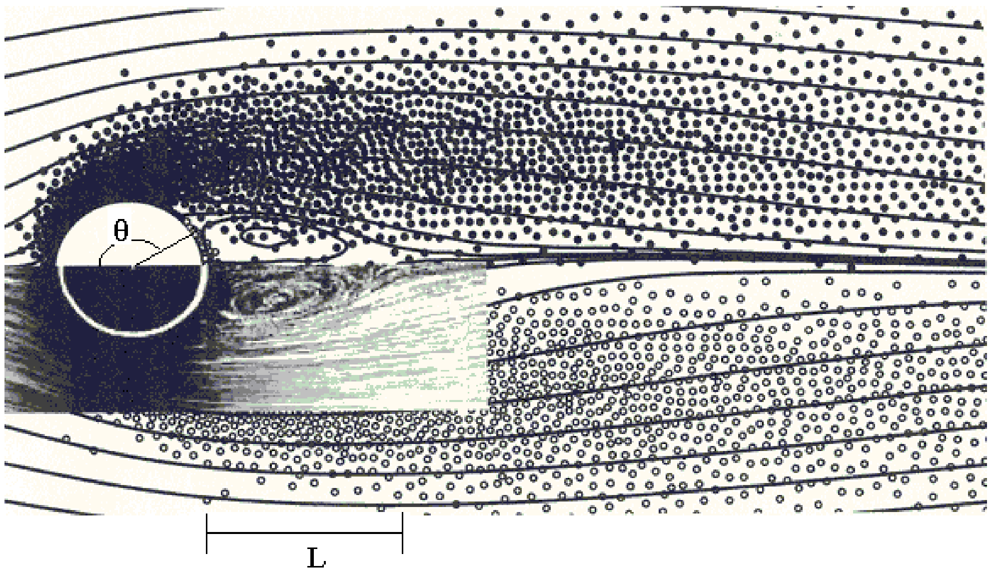



Рис. 7. Re = 26

Результаты расчетов методом ВВД коэффициента сопротивления цилиндра и параметров отрывной зоны ($\theta$- угловая координата начала отрывной области, $L$- протяженность области отрыва вдоль оси симметрии, рис.7), сравниваются на рис.8 с известными данными при различных числах Рейнольдса Re. Получено удовлетворительное согласование результатов.

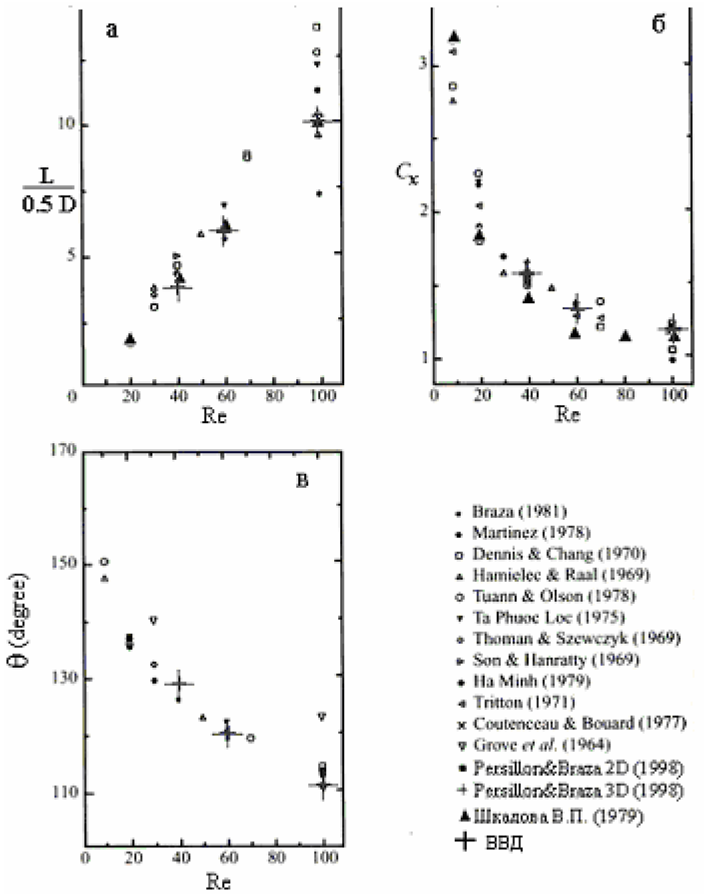



Рис. 8. Длина отрывной области (а), коэффициент сопротивления (б), угловое положение точки отрыва на цилиндре (в)

*Нестационарное обтекание*

На рис. 9 показана расчетная картина течения при $Re=10^3$ (темные точки – вихревые домены с отрицательной циркуляцией, светлые – с положительной, сплошные кривые –мгновенные линии тока). В таблице 1 дано сравнение по числам Струхаля $Sh = D/(T\ U)$ ($T$ – период колебаний) с известными результатами [21].

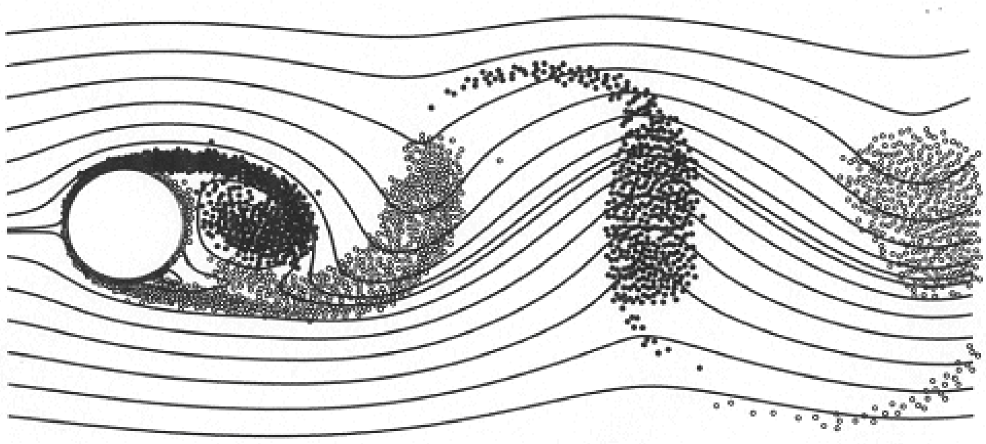


Рис. 9. $Re=10^3$

Таблица 1. Sh = f(Re)

| Re | $10^2$ | $10^4$ |
|---|---|---|
| [21] | 0.16 | 0.24 |
| ВВД | 0.15 | 0.22 |

## 22. Обтекание квадратной призмы

Рассматривается обтекание вязкой несжимаемой жидкостью неподвижной призмы квадратного поперечного сечения $a \times a$, стоящей ребром к потоку, рис.10. Так же как и в предыдущем разделе в начальный момент среда покоится, а тело набирает заданную скорость $U$ за конечный отрезок времени. В зависимости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU/\nu$ возможны различные режимы обтекания. Результаты расчетов методом ВВД сравниваются известными численными и экспериментальными данными (аэродинамические коэффициенты $c_x$, $c_y$ отнесены к *a)*.

В [37] представлены результаты численных расчетов в диапазоне $20 < Re < 60$ (использовался специальный сеточный метод). При $Re < 50$ обтекание квазистационарное. Минимальное давление на периметре ABCD достигается в окрестности точек B,D максимального сечения тела, на рис.10 слева *Re*=28, $C_p = (p - p_\infty)/(0.5\rho U^2)$.

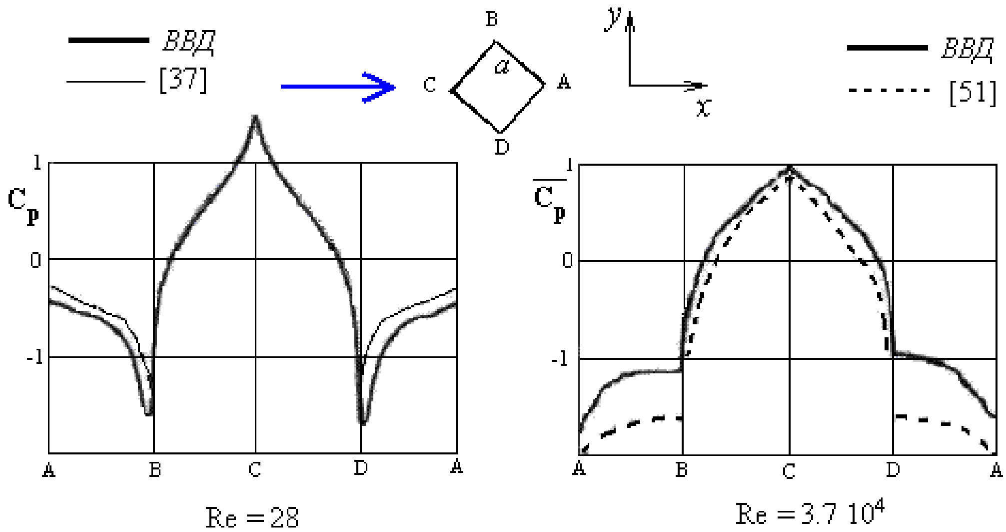



Рис.10

При *Re* > 50 развивается периодический режим. Процесс изменения аэродинамических коэффициентов за время от начала движения призмы до установления квазипериодического режима обтекания при *Re* = 57 показан на рис. 11.

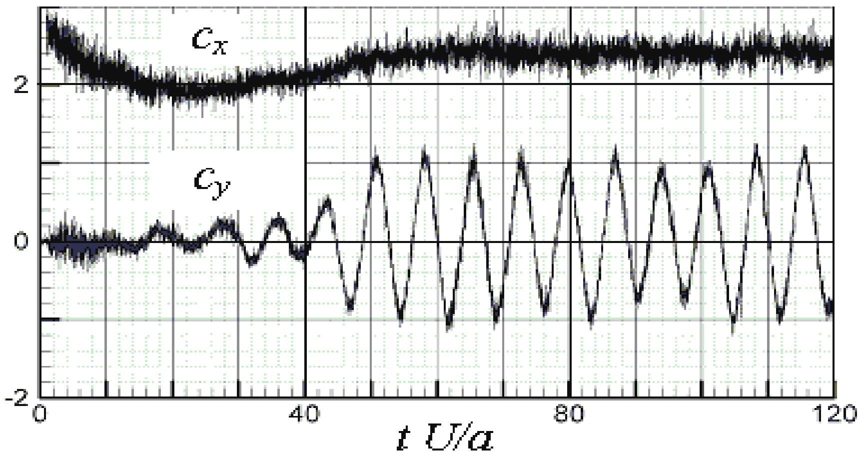


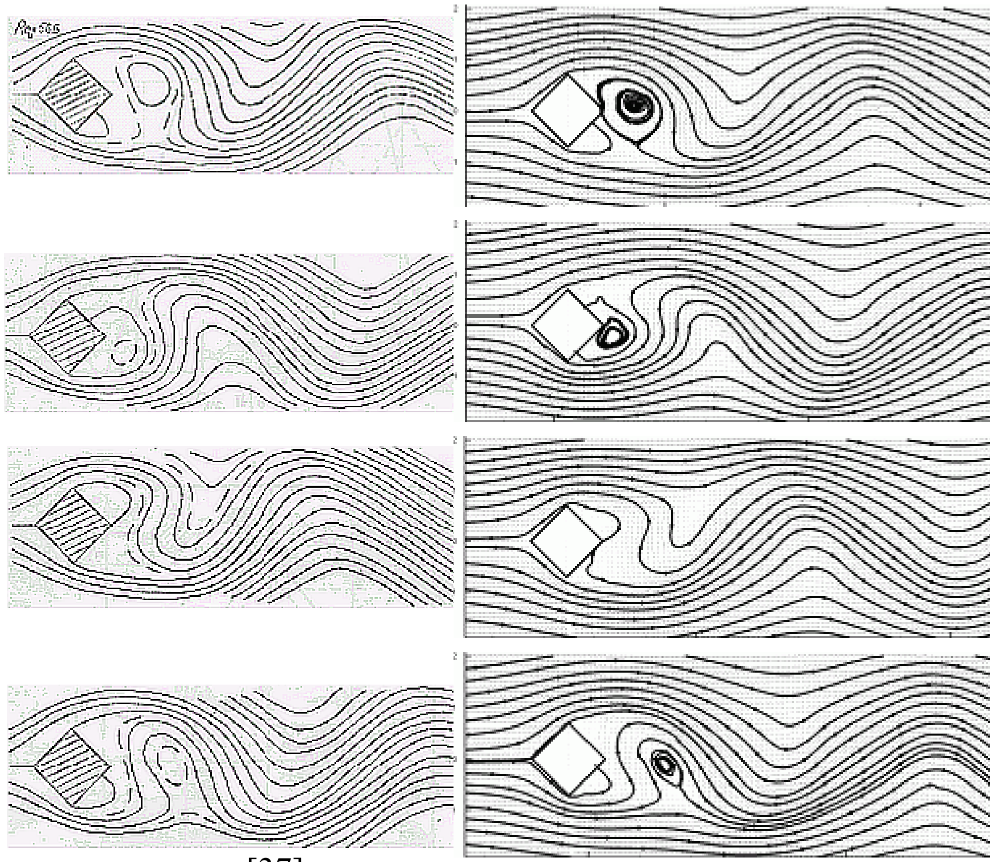

Рис.11. Re=57 (метод ВВД)

В таблице 2 дано количественное сравнение соответствующих осредненных характеристик нестационарного режима с аналогичными данными [37] ($Sh = a/(T\ U)$ – число Струхаля, $T$, $\overline{c_x}$ и $\overline{\Delta c_y}$ – осредненные период колебаний, коэффициент сопротивления и амплитуда колебаний коэффициента подъемной силы).

Таблица 2. Re = 57

| *параметры* / *метод* | *Sh* | $\overline{c_x}$ | $\overline{\Delta c_y}$ |
|---|---|---|---|
| [37] | 0.19 | 2.58 | 2.2 |
| ВВД | 0.20 | 2.41 | 2.0 |

Картины мгновенных линий тока, полученные двумя методами в последовательные моменты времени на периоде колебаний при нестационарном режиме, достаточно хорошо согласуются между собой по параметрам ближнего следа и периодической дорожки Кармана (рис. 12).



метод [37] метод ВВД

Рис. 12. Re=57

На рис. 13 дано сравнение зависимостей $\overline{c_x}$ от числа Рейнольдса при расчете сеточным методом [37] и методом ВВД. Имеется качественное и количественное согласование результатов, в частности, немонотонное изменение $\overline{c_x}(Re)$ при переходе от стационарного режима обтекания ($Re$ < 50) к нестационарному.

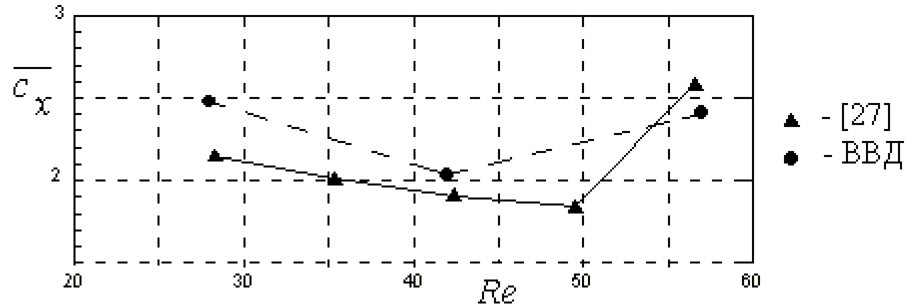



Рис.13.

Воспроизведено наблюдаемое в эксперименте качественное изменение характера распределения осредненного коэффициента давления $\overline{C_p} = (\overline{p - p_\infty})/(0.5\rho U^2)$ по поверхности квадратного цилиндра при увеличении числа *Re.* Минимум $\overline{C_p}$ при больших *Re* достигается не на боковых ребрах B,C (как было при *Re*=28) , а на задней кромке A (рис. 10).

## 23. Обтекание вращающегося цилиндра

Рассмотрено обтекание равномерно вращающегося кругового цилиндра, центр которого движется прямолинейно против оси *x* с постоянной скоростью *U* (рис. 14, цилиндр выходит на заданный режим движения из состояния покоя за первые 100 шагов по времени). Параметры задачи: $Re = 2\, RU/\nu$ – число Рейнольдса, $\varepsilon = \omega R/U$ – относительная скорость вращения, $t\, U/R$ – безразмерное время, отсчитываемое от начала движения.

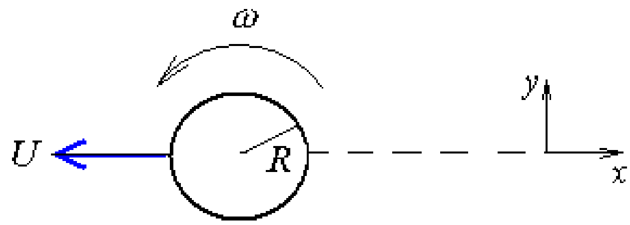



Рис.14.

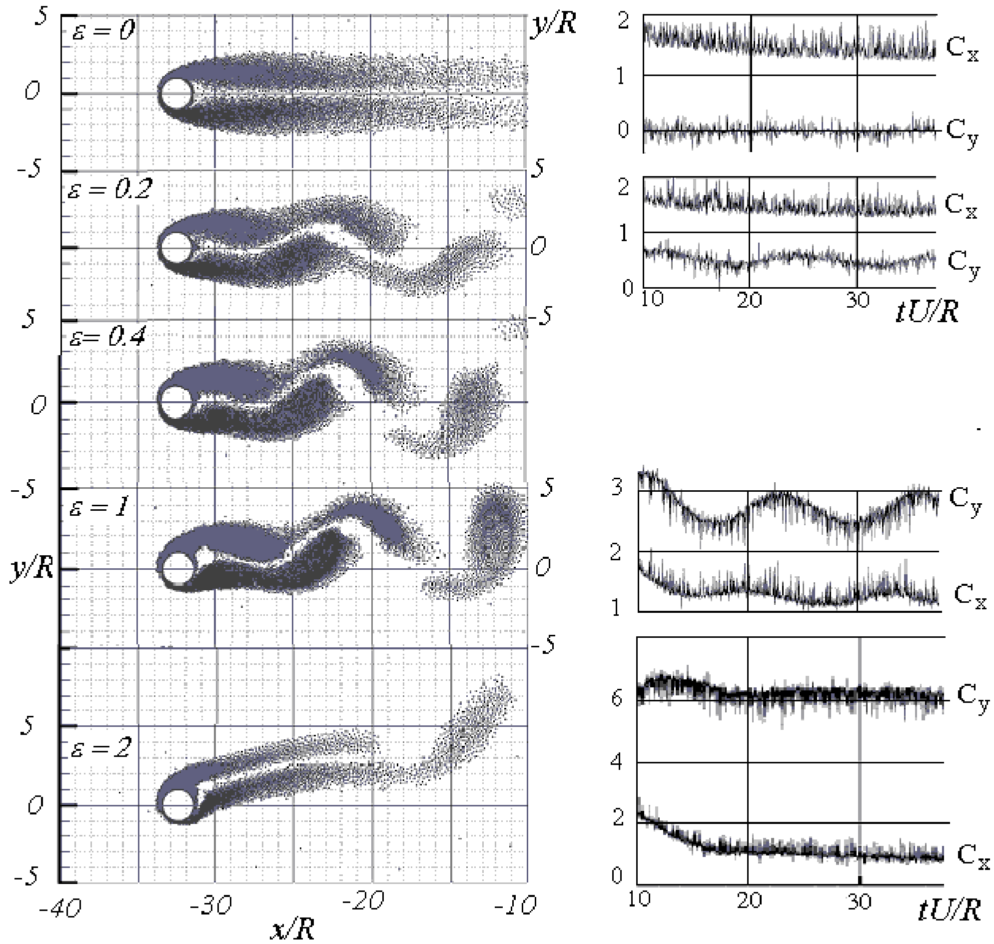



Рис.15. Обтекание цилиндра при и различных ε (Re = 40; τ = 35)

При $Re = 40$ и $\varepsilon = 0$ обтекание цилиндра стационарное, небольшое вращение ($\varepsilon = 0.2$) приводит к дестабилизации течения, колебательный характер обтекания и синусоидальные колебания подъемной силы сохраняются вплоть до $\varepsilon = 1$ (рис.15). Однако дальнейшее усиление вращения вновь стабилизирует обтекание и аэродинамические нагрузки (см. рис. 15 при $\varepsilon = 2$). В таблице 3 представлены средние значения коэффициентов сопротивления и подъемной силы (осреднение по интервалу времени от 20 до 50). Увеличение $\varepsilon$ приводит к уменьшению сопротивления и резкому увеличению подъемной силы (рис. 15- рис. 16). Результаты вычислений с помощью метода ВВД хорошо согласуются с данными, полученными другими методами [38, 39].

Таблица 3. $Re = 40$

| $\varepsilon$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_x$ | 1.45 | 1.42 | 1.37 | 1.28 | 1.01 |
| $c_y$ | 0 | 0.505 | 1.05 | 2.70 | 6.19 |

Стабилизация течения и аэродинамических характеристик цилиндра при больших параметрах вращения объясняется переходом к безотрывному режиму обтекания. При $\varepsilon \geq 2$ цилиндр полностью окутан слоем жидкости, вовлеченной во вращательное движение. Точка торможения находится не на теле, а локализуется в пространстве около вращающегося пристеночного слоя ("висячая" точка торможения, рис.17). При этом коэффициент подъемной силы принимает аномально большие значения (рис.16).

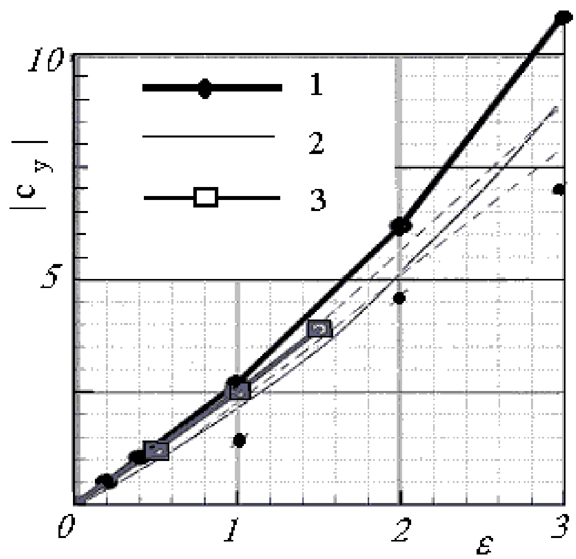



Рис.16. Зависимость коэффициента подъемной силы от параметра вращения ε; 1– метод ВВД (Re = 40), 2– сеточный метод [38] (Re = 40), 3– метод [39] (Re = 100)

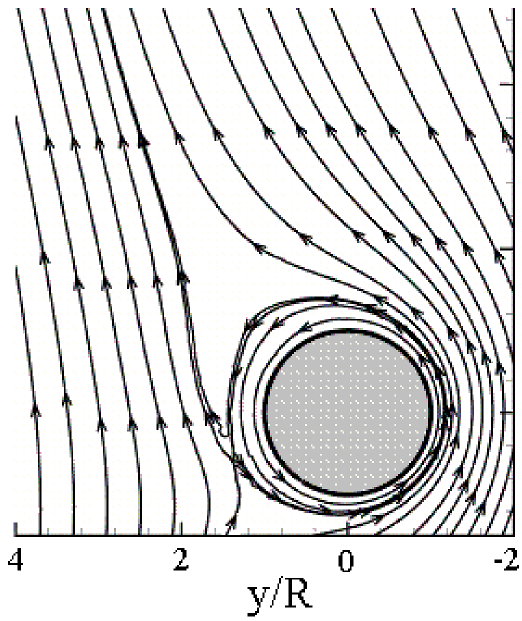



Рис.17. Линии тока около быстро вращающегося цилиндра, метод ВВД, ε = 3, Re = 40, tU/R = 50

## 24. Аэродинамические нагрузки на колеблющийся крыловой профиль

Явление резкого увеличения подъёмной силы при нестационарном движении колеблющегося профиля представляет собой актуальную практическую и фундаментальную проблему. Для правильного понимания вихревых механизмов данного процесса необходимо адекватное численное моделирование.

Рассматривается плоское нестационарное движение крылового профиля NACA-0012 в неограниченном пространстве, заполненном первоначально покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Крыло совершает угловые гармонические колебания относительно оси, расположенной в плоскости симметрии профиля (рис. 18).

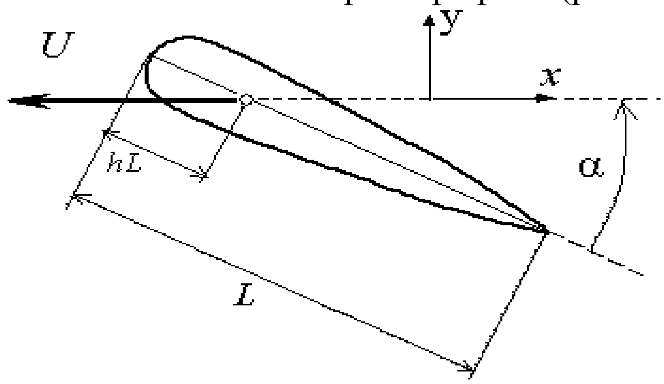



Рис.18

Закон движения профиля относительно абсолютной декартовой системы координат *x, y* задан соотношениями

$$\frac{dx_0}{dt} = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ -U, & t > 0; \end{cases} ; \quad \frac{dy_0}{dt} = 0;$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1, & t \le 0 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \cos(2\pi f\, t), & t > 0 \end{cases}$$

Здесь $x_0$ , $y_0$ – декартовы координаты оси, вокруг которой профиль совершает угловые колебания; $t$ – время, α – текущий угол между хордой и осью $x$, $U$ – величина поступательной составляющей скорости крыла, $\alpha_0$ – средний угол атаки, $\alpha_1$ – амплитуда угловых колебаний около среднего значения, $f$ – круговая частота колебаний, $h$ – относительное расстояние от передней кромки до оси качания. В задаче имеется пять безразмерных параметров: $\alpha_0, \alpha_1, h,\ k = \pi Lf / U,\ \mathrm{Re} = LU / \nu$ .

На рис.19 результаты расчетов (при $\alpha_0=15°$, $\alpha_1=10°$, $h=0.25$, $k = 0.16$, $Re = 4.4\cdot10^4$) сравниваются с известными экспериментальными данными.

В экспериментальной работе [40] ($\alpha_0=15°$, $\alpha_1=10°$, $h=0.25$, $k=0.16$, $Re = 4.4\cdot10^4$, число Маха $\mathrm{M} = 0.019$) нестационарная подъемная сила вычислялась по приближенным формулам на основе измерений распределения скорости в перпендикулярном к набегающему потоку сечении позади профиля. По этим измерениям оценивался поток завихренности с профиля, а по нему – изменение подъемной силы в соответствии с формулой Жуковского. Очевидно, и это отмечалось авторами [40], что полученный результат имеет невысокую точность.

Результаты экспериментов [41] ($\alpha_0=15°$, $\alpha_1=10°$, $h=0.25$, $k = 0.153$, $Re = 4.8\cdot10^4$, $\mathrm{M} = 0.036$) должны быть более точны, поскольку в них непосредственно измерялось давление в ряде точек на профиле, после чего интегрированием вычислялись коэффициенты сопротивления и подъемной силы.

Результаты расчетов методом ВВД коэффициента подъемной силы (рис. 19,а) удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [41]. Данные [40] имеют аналогичный характер, но отличаются количественно. Во всех трех случаях имеет место гистерезис. Вблизи точки максимального значения угла атаки происходит сначала резкое уменьшение подъемной силы, что связано со сходом вихря отрицательной циркуляции, затем быстрый подъем, связанный со сходом положительного вихря. Далее и расчет, и эксперимент [40] показывают колебательный характер изменения подъемной силы вокруг значения более низкого, чем при увеличении угла атаки. Периоды и амплитуды колебаний в обоих случаях согласуются между собой.

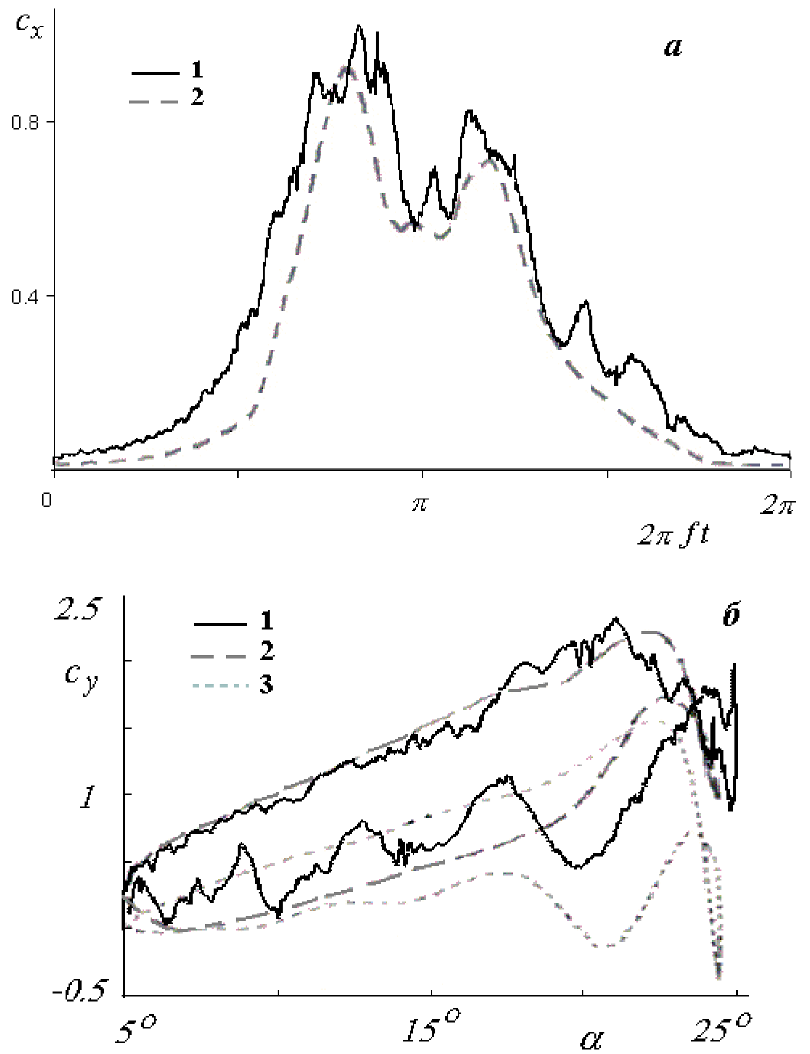



Рис.19. Аэродинамические коэффициенты, 1– расчет методом ВВД, 2– эксперимент [41], 3– эксперимент [40]

На фиг.19,б расчетная зависимость от времени коэффициента сопротивления, полученная с использованием формулы (16.17), сравнивается с экспериментом [41]. Имеется хорошее качественное и удовлетворительное количественное согласие результатов (следует иметь в виду, что экспериментальные данные [41] усреднены по многим периодам, а расчетная зависимость получена для одного из квазипериодов).

## 25. Авторотация вертушек

Наблюдения за обтеканием флюгеров, маятников, вертушек показывают, что в зависимости от начальных условий могут возникать режимы автоколебаний, авторотации, а также различные переходные режимы [49,50]. Неоднозначность поведения в потоке среды симметричных тел, имеющих вращательную степень свободы, – одно из проявлений фундаментальных вихревых механизмов нестационарного взаимодействия. Трудности моделирования обусловлены сильной взаимозависимостью между гидродинамикой среды и динамикой погруженного в неё тела, что требует совместного решения задач динамики и аэрогидромеханики в сопряжённой постановке.

***Экспериментальные факты.*** На рис. 20 представлен пример визуализации в эксперименте обтекания трехлопастной вертушки (в виде металлического цилиндра диаметром 0,04 м с радиально выступающими плоскими ребрами) в аэродинамической трубе А-8 НИИ механики МГУ[11]. Сравниваются мгновенные вихревые картины при двух режимах обтекания: рис. 20,а – устойчивое квазиравновесие, рис. 20,б – авторотация. Наблюдается качественное различие двух вихревых систем. В случае равновесия отрыв происходит по схеме Кирхгофа (рис. 20,а). На режиме самовращения схема иная. Около одной лопасти, которая движется по потоку, образуется присоединенный вихревой сгусток (рис. 20,б внизу) – своеобразный

[11] Визуализацию методом «цветной шлирен» выполнили С.Н.Баранников и А.Ф.Зубков.

"вихревой спутник", движущийся вместе с лопастью. Аналогичная ситуация имеет место для двух- и четырехлопастных вертушек.

***Сопряженная задача***

Рассматривается симметричная вертушка в виде цилиндра радиуса $a$ с двумя диаметрально выступающими прямолинейными пластинами длиной $l$, толщиной $h = 0.2\,l$. Кромки пластин скруглены по окружности радиуса $0.5\,h$. Ось вращения совпадает с осью симметрии вертушки и движется прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0 = -U\,\mathbf{e}_x$. Расстояние от кромок лопасти до оси вращения $L = l + a$. В качестве основных размерных масштабов принимаются $L, U, \rho$. Время $t$ нормировано на $L/U$, погонный момент инерции вертушки $I_b$ – на $\rho L^4$, момент аэродинамической силы $M_z$ – на $\rho U^2 L^2$ и т.д.

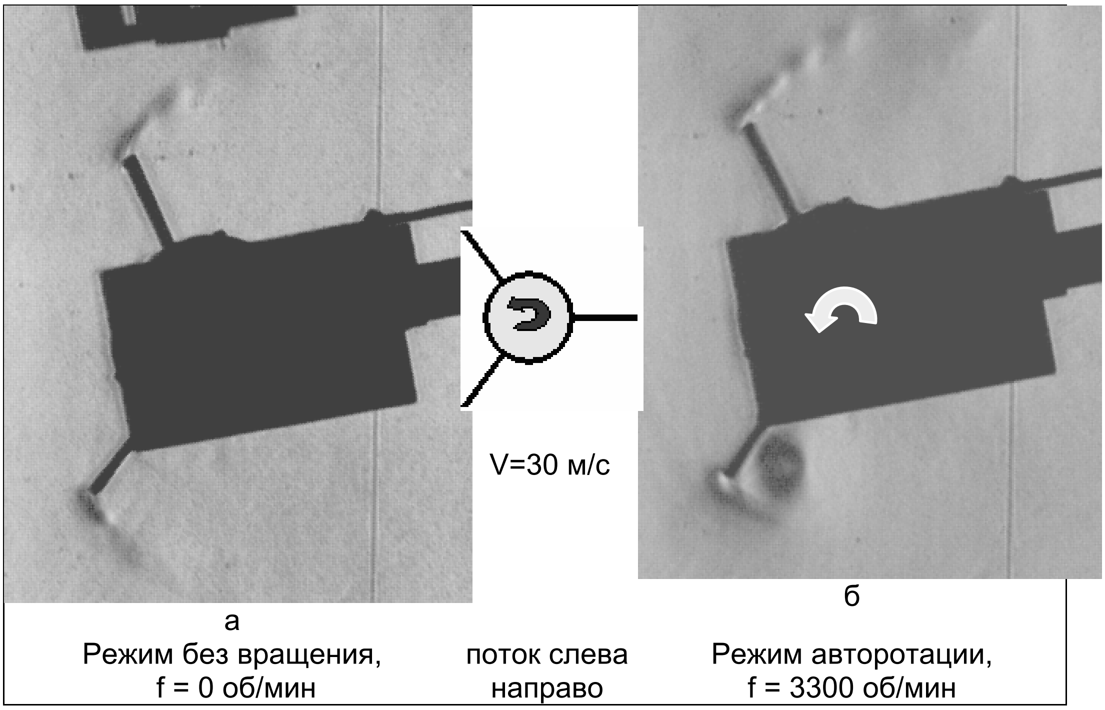



Рис.20. Трехлопастная вертушка (эксперимент [42]), два режима взаимодействия при скорости потока 30 м/с

Движение тела в жидкости рассчитывается относительно сопутствующей системы координат $x,y$ с началом отсчета в центре вращения вертушки (ось x направлена по потоку). Угол атаки $\alpha$ определяется как острый угол между выступающей вперед пластиной и осью $x$ $(-90^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$. В начальный момент вертушка покоится и занимает положение $\alpha = \alpha_0$.

Характерные числа Рейнольдса и Струхаля

$$Re = \frac{LU}{\nu}, \qquad Sh = \frac{2L}{TU} \tag{25.1}$$

где $T$ – период колебания или полного оборота вертушки. На режиме авторотации средняя угловая скорость $\omega_0 = 2\pi / T$.

Сопряженная задача состоит в отыскании двух скалярных функций $\omega(t)$, $\Omega(t,x,y)$ ($\omega$ – угловая скорость вращения вертушки, $\Omega$ – ненулевая составляющая вектора завихренности среды в окружающем пространстве), удовлетворяющих системе[12]

$$I_b\,\dot{\omega} = M_z\,(\omega, \dot{\omega}, \Omega), \quad \frac{D\Omega}{Dt} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Omega \tag{25.2}$$

для которой граничные условия прилипания на поверхности тела также имеют вид связи между $\omega, \Omega$, поскольку поле скоростей в жидкости выражается через поле завихренности по формуле Био-Савара.

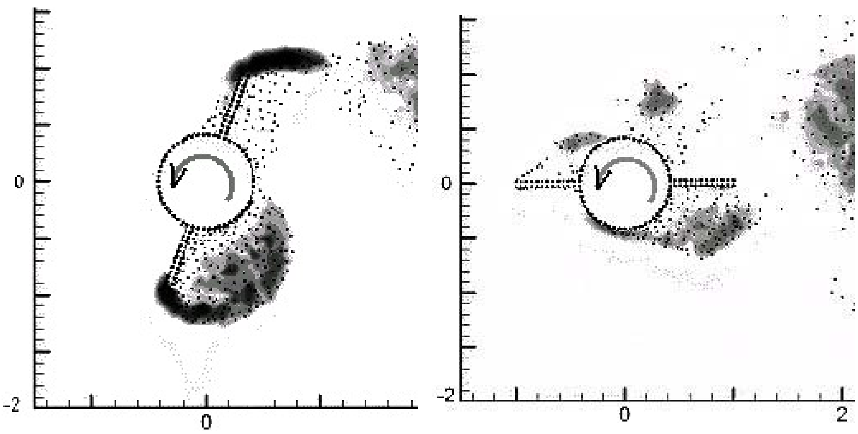
В зависимости от значения $\alpha_0$ воспроизводится один из двух основных сценариев взаимодействия. При достаточно больших $|\alpha_0|$ вертушка разворачивается поперек потока и не вращается, а лишь «покачивается» около симметричного равновесного положения $\alpha = 90^\circ$. Однако, если $|\alpha_0|$ меньше некоторого критического значения $\alpha_*$, то начинается вращение, постепенно выходящее на квази-

[12] Данная сопряженная постановка задачи допускает вырожденный случай нулевого момента инерции тела (I = 0) без понижения порядка динамического уравнения в (25.2).

периодический режим авторотации. При этом направление вращения определяется знаком начального отклонения $\alpha_0$. Критический угол $\alpha_*$ зависит от числа Рейнольдса.

На рис. 21 приведены расчетные и экспериментальные картины обтекания авторотирующей вертушки (при $l/a = 1.4$, $I_b = 20$, $Re = 1.3*10^5$ ) в моменты ориентации ее лопастей поперек и вдоль потока.

При авторотации вертушка испытывает преимущественно положительную силу $F_x$ в направлении потока, отрицательную подъемную силу $F_y$ поперек потока и знакопеременный, в среднем за оборот – нулевой, вращательный момент$M_z$, рис.22 (интересно отметить, что существуют кратковременные фазы движения вертушки при отрицательной силе сопротивления $F_x$). На рис. 23 показано расчетное развитие процесса авторотации во времени.




а г

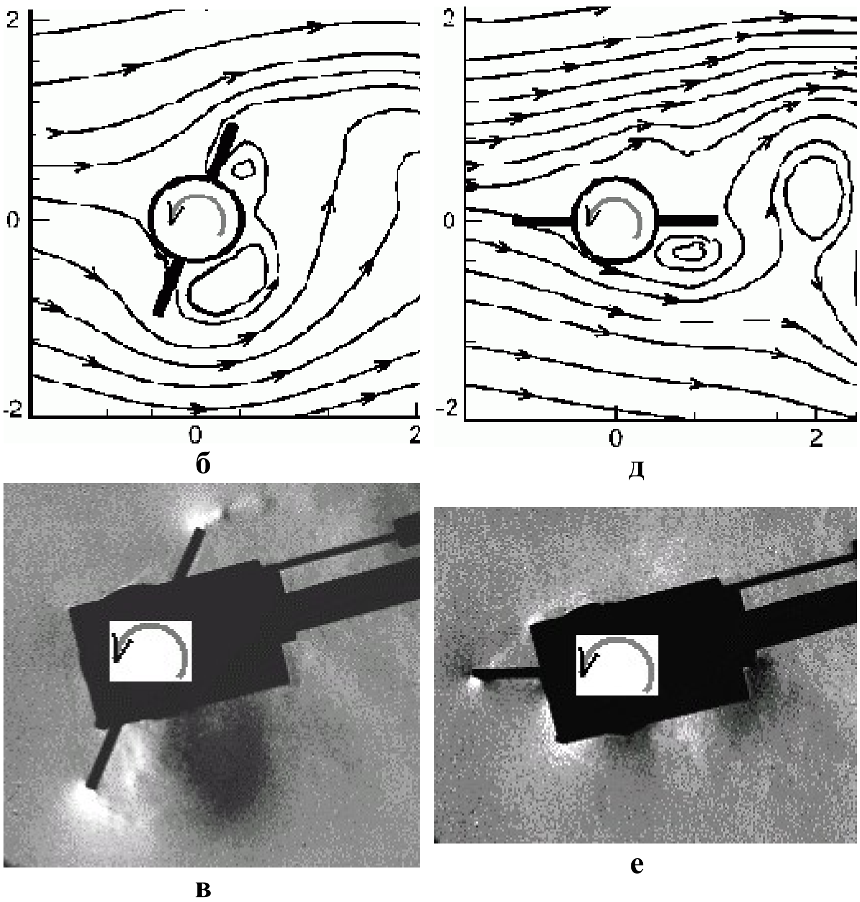



Рис. 21. Авторотация двухлопастной вертушки (а,г – расчетное распределение завихренности для двух последовательных моментов времени; б,д – соответствующие мгновенные линии тока; в,е – шлирен-визуализация картин обтекания в эксперименте [43]).

Расчетный режим квазипериодических колебаний характеризуется числом Струхаля Sh = 0.089. В эксперименте [43] это значение составляет Sh = 0.064. Отличия объясняются, в частности, наличием трения в оси закрепления в эксперименте. С учетом приближенной оценки коэффициента трения в оси дополнительный расчет дал значение Sh = 0.07. Оставшиеся отличия, возможно, связаны с трехмерными эффектами, которые не учитывались в расчете.

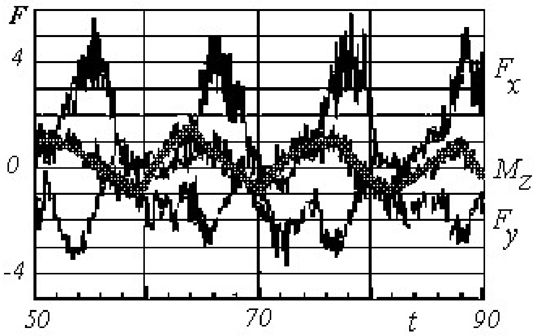



Рис. 22. Изменение силы аэродинамического сопротивления, подъемной силы и вращательного момента вертушки на режиме авторотации

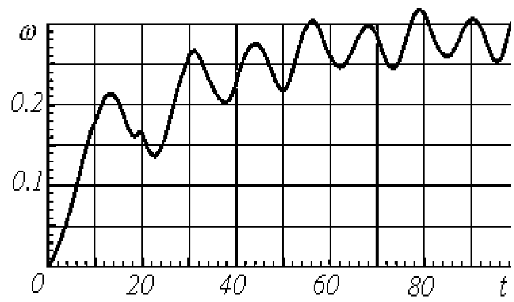



Рис. 23. Переходный процесс выхода вертушки на режим авторотации

## 26. Падение тела в вязкой жидкости

В предыдущем разделе тело имело только одну (вращательную) степень свободы, при этом ось вращения двигалась по заданному закону. Здесь рассмотрим случай движения той же самой двухлопастной вертушки (оперенного цилиндра) в условиях свободного движения с тремя степенями свободы в вязкой жидкости. Аналогичная задача о падении плоской пластинки рассматривалась в [44] в невязкой постановке с инженерным способом учета трения в пограничном слое.

Ось $y$ неподвижной декартовой системы координат направим вертикально вверх, рис.24. В начальный момент времени жидкость и вертушка неподвижны, лопасти отклонены от вертикали на угол 45°, координаты оси симметрии $(x,y) = (0,0)$. Плотность материала вертушки в $7.8$ раза больше плотности жидкости. За характерную скорость берется скорость $U$ установившегося падения под действием силы тяжести при условном значении коэффициента сопротивления тела $C_x = 1$, соответствующее число Рейнольдса по формуле (25.1) равно 485.

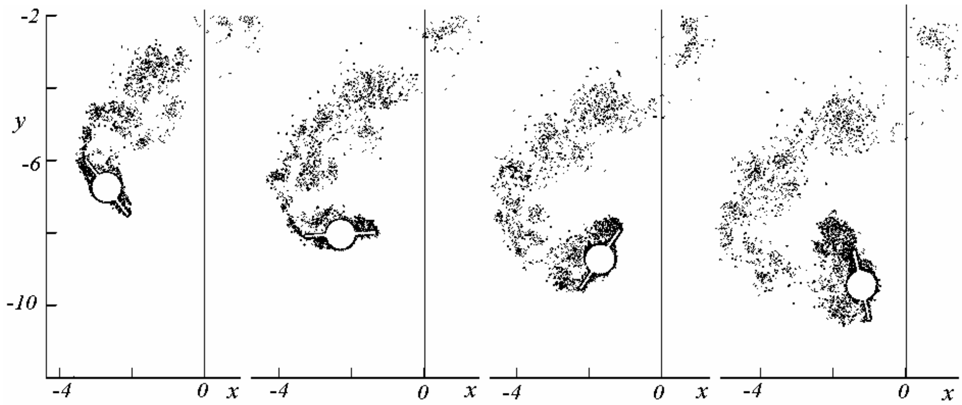



Рис. 24. Расчетные положения оперенного цилиндра, падающего под действием силы тяжести в вязкой жидкости

Свободное движение тела в жидкости происходит по сложной траектории, при этом оно получает вращение вокруг собственной оси симметрии. Рис. 24 иллюстрирует изменение положения падающей вертушки и образовавшегося за нею вихревого следа. На представленном отрезке времени вертушка вращается против часовой стрелки и отклоняется вправо. Наряду со сходом вихревой пелены с кромок лопастей, наблюдаются также отрывы потока с гладкой поверхности вертушки.

## 27. Неустойчивость «уловленного вихря»

"Улавливание вихря" – это технология предотвращения нестационарного схода крупных вихрей с диффузорных участков границы тела (крылового профиля или расширяющегося канала). Диффузорным участком поверхности тела называют часть его контура, вдоль которой происходит торможение потока под действием положительного градиента давления. При безотрывном обтекании любого замкнутого контура неизбежно существование на нем диффузорных участков. Диффузорными являются также стенки любого расширяющегося канала, ограничивающего дозвуковой поток среды.

Вихрь может быть уловлен в вихревую ячейку, представляющую собой каверну на гладкой стенке обтекаемого тела. Идея применения вихревых ячеек для предотвращения отрыва на толстом крыле была впервые выдвинута и практически опробована Л.Н. Щукиным (патент № 2015941 от 14.10.1991) и затем подхвачена многими исследователями в России и за рубежом.

Известно немалое количество работ, в которых течение с уловленным вихрем моделируется в рамках осредненных по Рейнольдсу моделей турбулентного движения, обзор результатов можно найти в [22, 45]. Расчетные параметры уловленного вихря достаточно хорошо согласуются с результатами измерения осредненных характеристик в эксперименте. Однако на границе уловленного вихря, возможно развитие неустойчивости типа Кельвина-Гельмгольца, приводящей к образованию и сходу в основной поток крупных вихревых образований [46]. Этот механизм неустойчивости уловленного вихря не воспроизводится в рамках осредненных уравнений турбулентного движения [22]. Вихревые методы моделирования более приспособлены для описания явлений, связанных с потерей устойчивости вихревых слоев и возникновением нестационарных разномасштабных вихревых структур, [27, 28].

В экспериментальных исследованиях [46] рассматривалось обтекание цилиндра с вихревой ячейкой, обнаружен режим потери устойчивости и разрушения уловленного вихря, рис.25, видны нестационарные вихревые сгустки, которые периодически отходят вниз по течению от вихревой ячейки (число Рейнольдса вычислено по диаметру цилиндра).

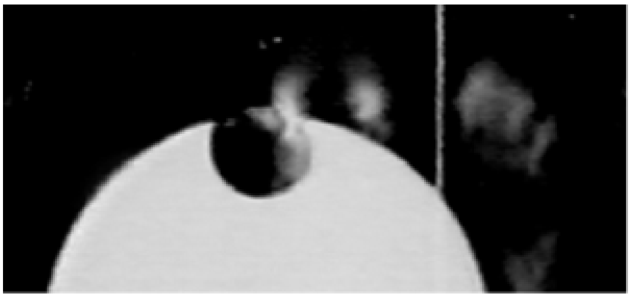


Рис. 25. Шлирен-визуализация обтекания цилиндра с вихревой ячейкой [46], $Re = 10^6$, $M=0.5$

На рис. 26 показана расчетная вихревая картина при вязком обтекании цилиндра с вихревой ячейкой, на рис. 27 – соответствующее мгновенное распределение поля продольной компоненты градиента давления.

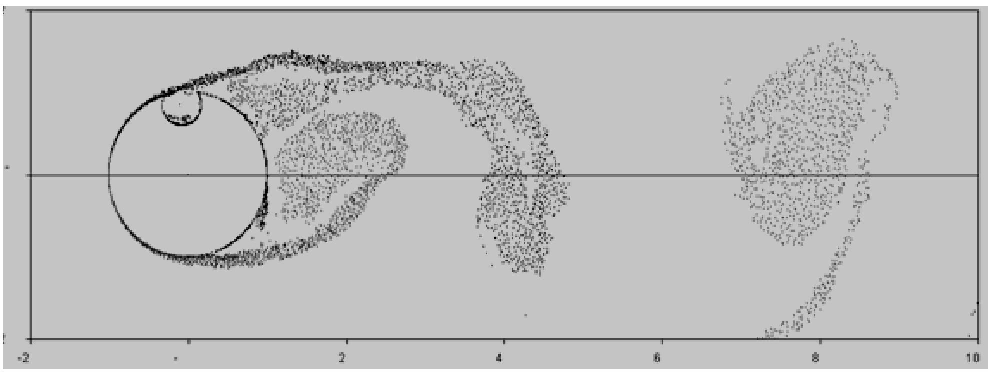



Рис. 26. Вязкое обтекание цилиндра с вихревой ячейкой, расчет методом ВВД (показано мгновенное расположение вихревых доменов).

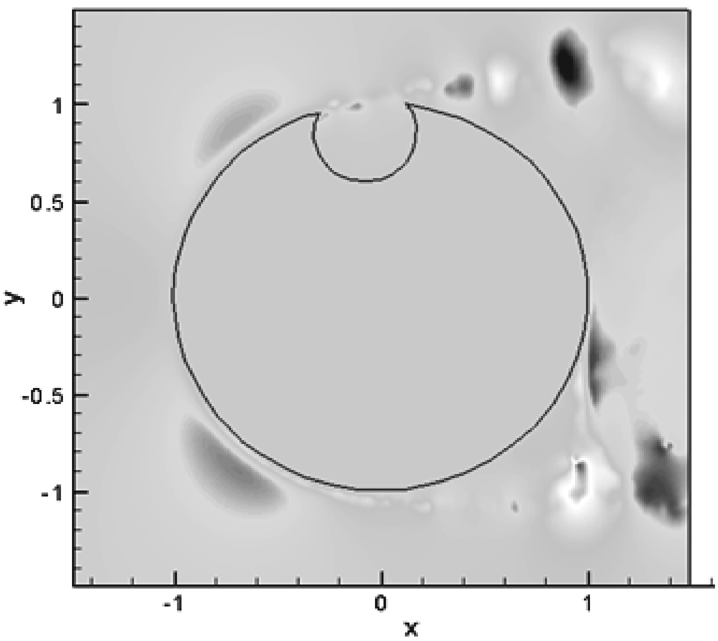



Рис. 27. Мгновенное поле продольной компоненты градиента давления, соответствующего расчетному вихревому полю на рис. 26

Сопоставление экспериментальной и расчетной картин обтекания, а также анализ деталей течения около вихревой ячейки в расчете, подтверждают, что наблюдавшиеся в [46] вихревые сгустки, рис.25, образуются в результате потери устойчивости слоя смешения на границе между уловленным вихрем и основным потоком.

Более подробно это явление исследовалось на примере течения в плоско-параллельном канале с вихревой ячейкой в форме кругового сегмента [45].

На рис. 28 показаны результаты дымовой визуализации (а,б) для двух моментов развития неустойчивости при обтекании вихревой ячейки в эксперименте, проведенном в Институте механики МГУ при числе Рейнольдса (по длине входного сечения вихревой ячейки) Re = 5600.

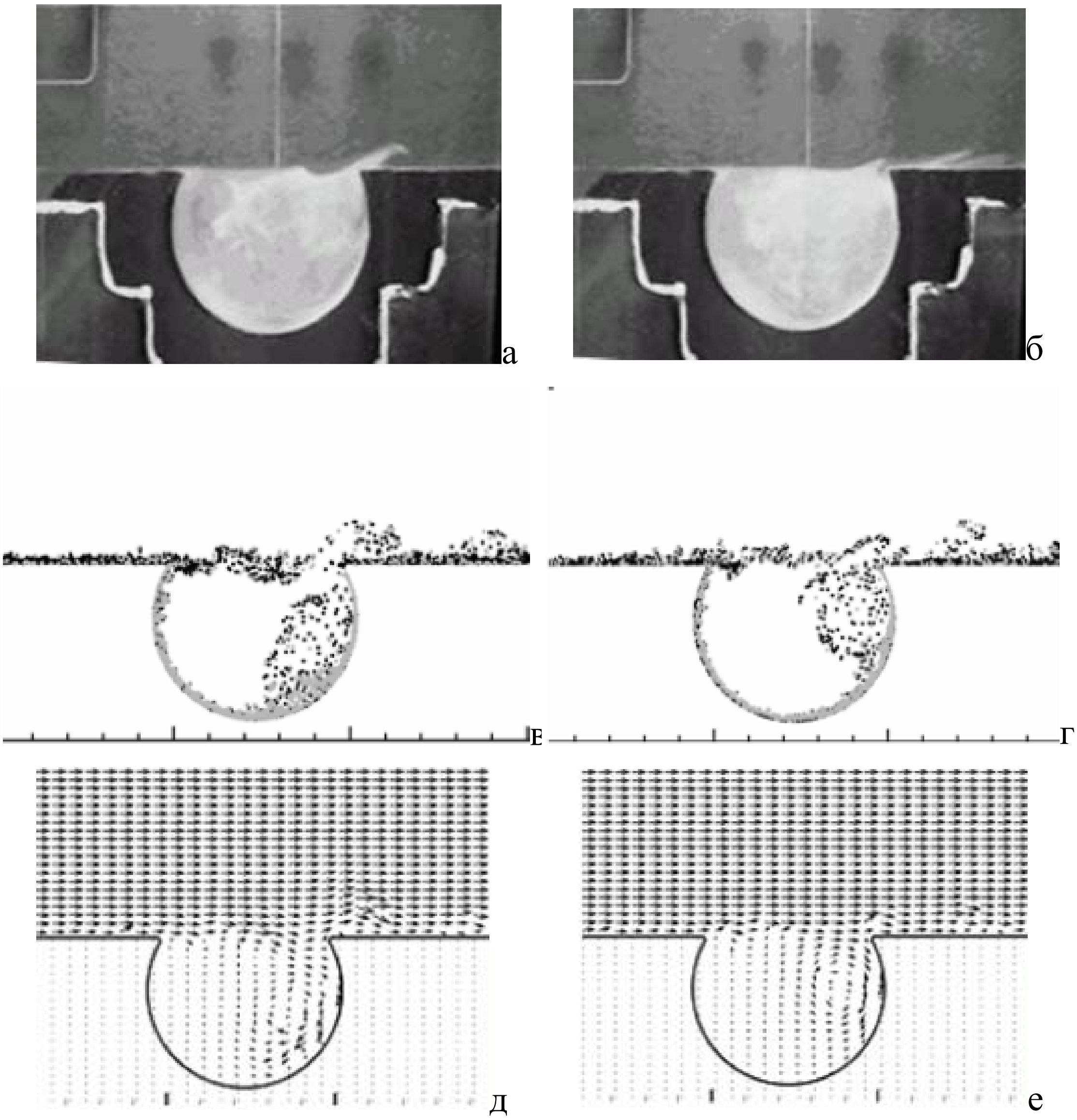



Рис. 28. Сравнение экспериментальной (а,б), и расчетной (в,г,д,е) мгновенных картин обтекания вихревой ячейки при Re = 5600

На рис. 28,в,г,де показаны мгновенные картины расположения вихревых доменов (в,г) и мгновенные поля скоростей (д,е) для двух последовательных моментов безразмерного времени, полученные методом ВВД при Re = 5600. Видно, что стационарность вихревого слоя над ячейкой нарушается в результате развития волнообразных возмущений, напоминающие неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Имеется качественное соответствие экспериментальных и расчетных картин обтекания.

## 28. Обтекание проницаемой дужки

Рассмотрена нестационарная задача о плоско-параллельном обтекании вязкой несжимаемой средой проницаемой полуокружности, обращенной вогнутостью против потока («жесткий парашют» [43] ).

На проницаемой поверхности задана система граничных условий [17] (закон просачивания, связывающий линейно нормальную компоненту скорости $V_n$ с перепадом давления $\Delta p = p_1 - p_2$ : $\Delta p = a^{-1} V_n$ ($0 < a < +\infty$ – коэффициент проницаемости), и связь между касательными составляющими скорости $V_{t1}$ , $V_{t2}$ до и после просачивания: $V_{t2} = T\, V_{t1}$.

В расчетах принято $Re = 100$ и T=0, что означает полное гашение касательного импульса просочившейся жидкости. Изучается влияние степени проницаемости на картину течения и гидродинамические силы (рис. 29-31). Через $F_{xp}$. обозначена составляющая силы сопротивления обтекаемой дужки за счет перепада давления, через $F_{xf}$ – составляющая сопротивления за счет трения, через $F_y$ – боковая сила. Все величины берутся в безразмерном виде, в качестве характерных масштабов длины и скорости приняты радиус и скорость движения дужки R, U; давление нормировано на $\rho U^2$ , погонная аэродинамическая сила отнесена к $\rho R U^2$.

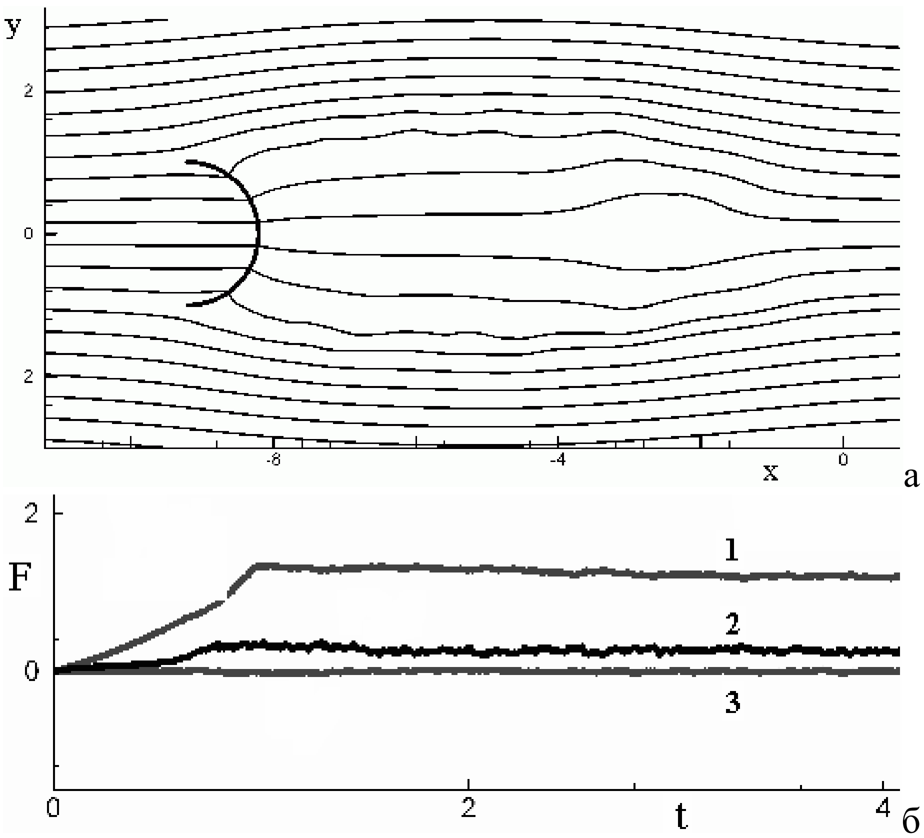



Рис. 29. Линии тока в момент $t$=9.75 (а) и зависимость гидродинамических сил от времени (б) при проницаемости $\boldsymbol{a}$ **= 10** (1– $F_{xp}$, 2– $F_{xf}$ , 3– $F_y$)

При большой проницаемости (рис. 29) с подветренной стороны дужки образуется сплошная струя просочившейся жидкости без крупных рециркуляционных зон, при этом что пиковое значение безразмерной силы сопротивления (на разгонном участке начала движения) не превышает 1.5.

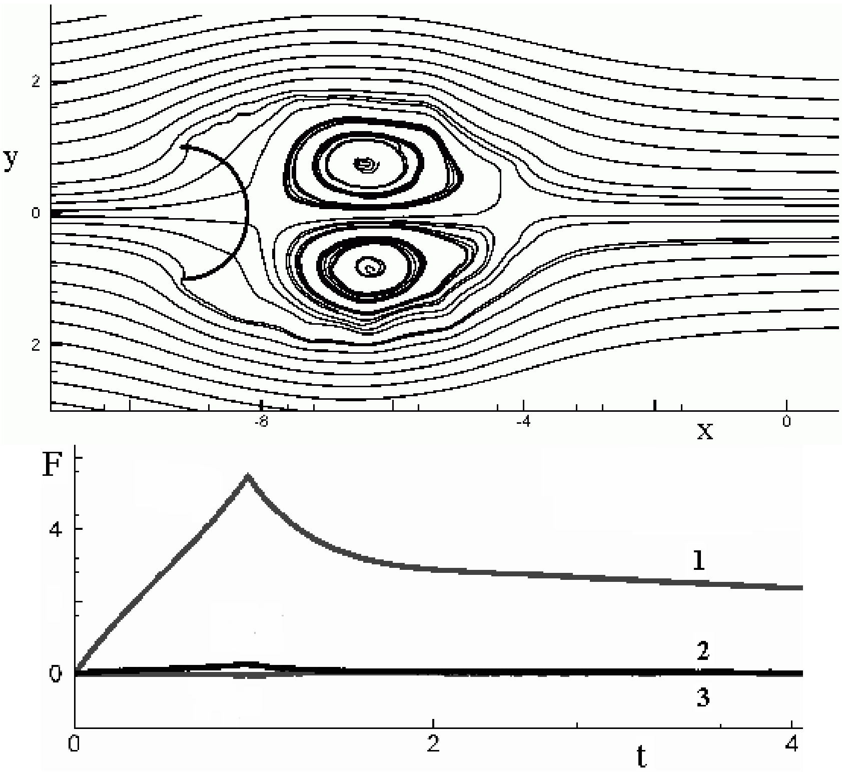



Рис. 30. Линии тока в момент $t$=9.75 (а) и зависимость гидродинамических сил от времени (б) при проницаемости $\boldsymbol{a}$ **= 1** (1– $F_{xp}$, 2– $F_{xf}$ , 3– $F_y$).

С уменьшением проницаемости появляются заметные рециркуляционные зоны (рис. 30,а), а пиковое значение силы сопротивления возрастает до 5.5.

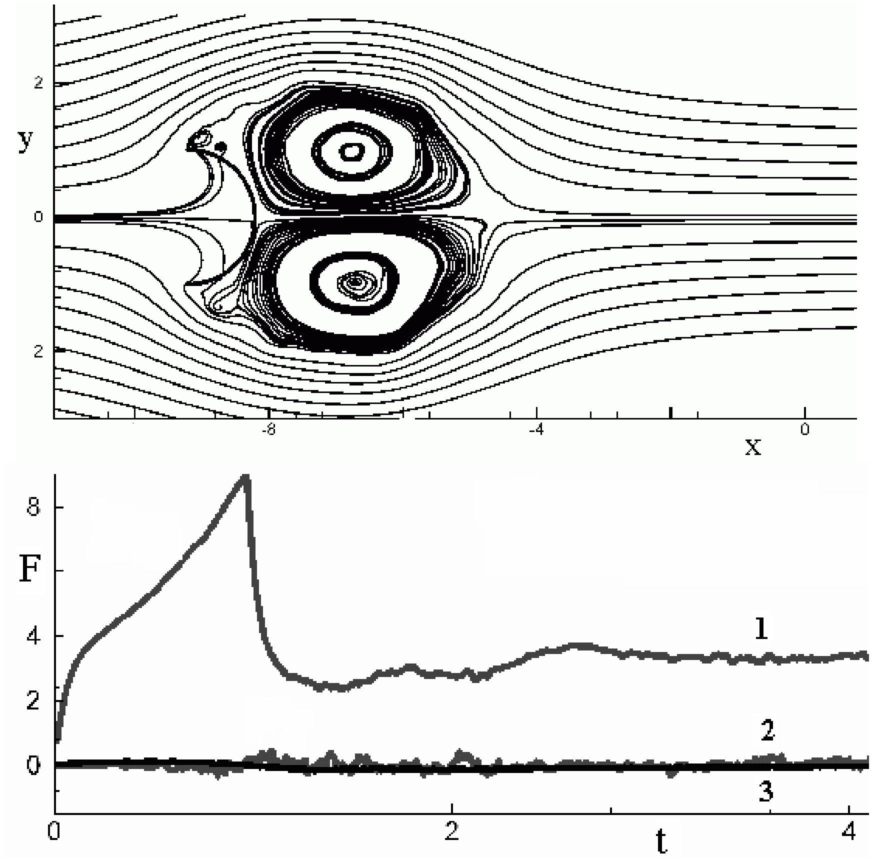



Рис. 31. Линии тока в момент $t$=9.75 (а) и зависимость гидродинамических сил от времени (б) при проницаемости ***a* = *0.*1**
(1– $F_{xp}$, 2– $F_{xf}$, 3– $F_y$).

При малой проницаемости рециркуляционные зоны располагаются непосредственно около подветренной стороны дужки и становятся более интенсивными (рис. 31), а пиковое значение силы сопротивления возрастает до 9. Кроме того, в последнем случае наблюдаются заметные флуктуации как силы сопротивления, так и боковой силы, что объясняется частичной потерей устойчивости симметричного течения.

## 29. Взаимодействие вихревого кольца с плоским экраном

При нормальном натекании кольцевого вихревого жгута на плоский экран, рис.32, возможны различные схемы взаимодействия в зависимости от свойств среды и индуцированных пограничных слоев на отражающей поверхности. В идеальной жидкости пограничные слои не образуются и вихревой жгут просто растекается по твердой границе, при этом его ядро превращается из круглого в эллиптическое с большой осью, параллельной плоскости стенки [1, 18].

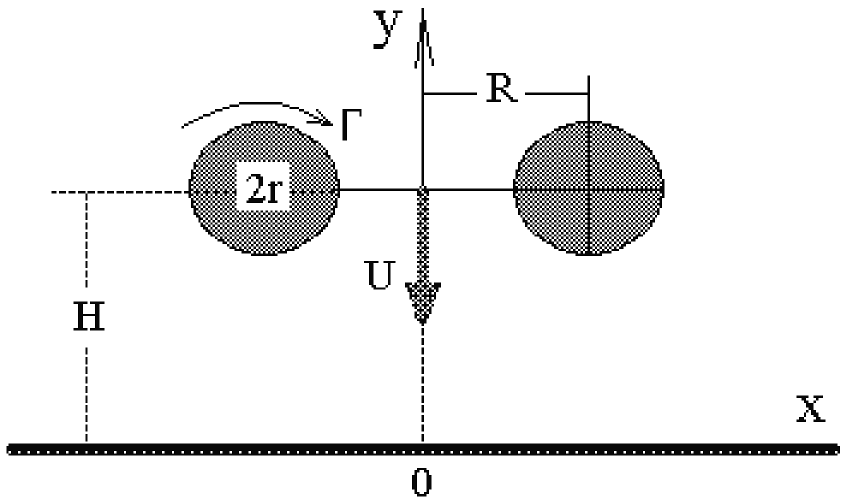


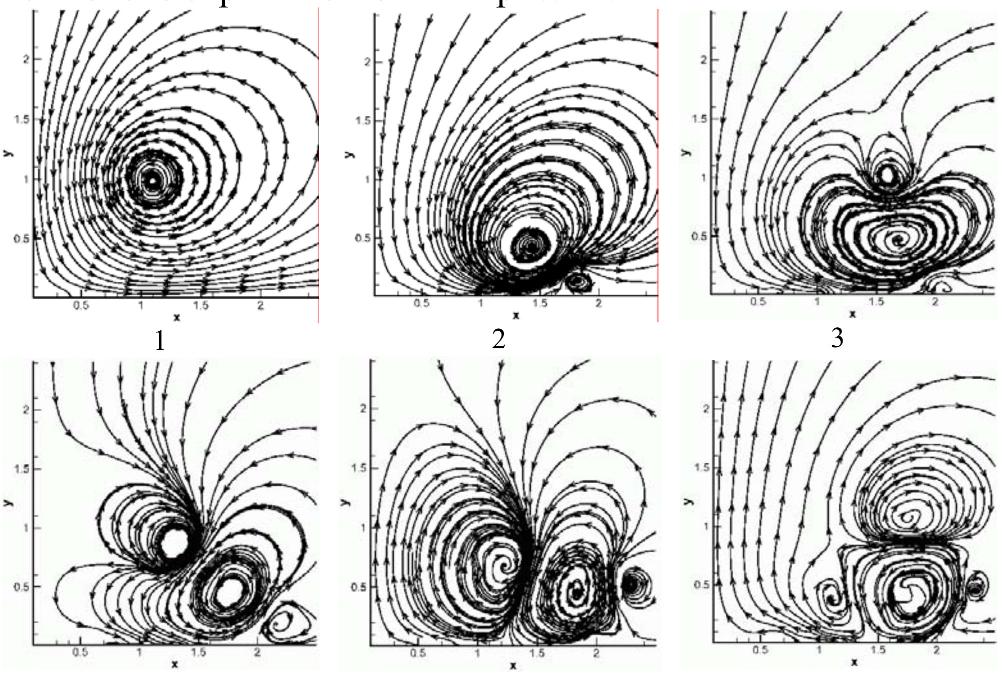

Рис. 32. Схема начального расположения вихревого жгута (у,х – цилиндрическая система координат, у – ось симметрии)

Известны результаты исследования этой задачи с учетом вязкости среды на основе на основе конечно-разностных схем, а также данные эксперимента (соответствующие ссылки можно найти в [25]).

В работе [25] нестационарная задача о натекании кольцевого вихревого жгута на плоский твердый непроницаемый экран решалась гибридным методом: всюду вне пристеночной области течения вязкость не учитывается и применяется метод дискретных вихрей в осесимметричной постановке в предположении об идеальности основного течения; а в пристеночной области решается одномерная задача о развитии радиального пограничного слоя с турбулентным профилем скорости . Это дает возможность определения точек вязкого отрыва с гладкой поверхности экрана (под действием внешнего градиента давления) и определения параметров вторичных кольцевых вихрей, которые далее опять подчиняются законам идеальной жидкости.

Осесимметричный вариант развитого в книге метода вязких вихревых доменов позволяет исследовать данное явление в полной вязкой постанове задачи.

Далее приводится пример расчетов при следующих значениях безразмерных параметров задачи (рис. 32): суммарная циркуляция жгута $\Gamma = 1$, начальный радиус R = 1, толщина r = 0.2, начальное расстояние до экрана H = 2, кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0.001$. Для дискретизации жгута использовалось 215 кольцевых доменов. Полученная в расчете эволюция картин мгновенных линий тока около экрана показана на рис. 33.



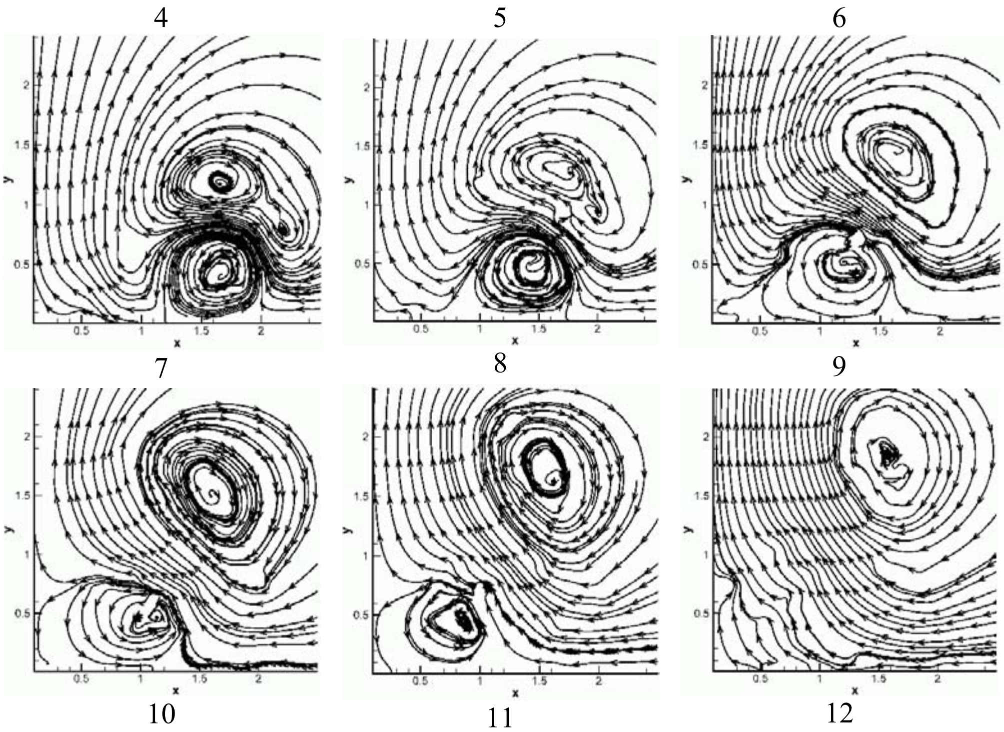



Рис. 33. Расчет осесимметричным вариантом метода ВВД. Эволюция картины мгновенных линий тока при взаимодействии кольцевого вихревого жгута с плоским экраном (*y* – ось симметрии, *x*– плоскость отражающего экрана

Также как и в работе [25] подтверждено, что учет вторичных отрывов ограничивает расширение вихревого жгута при приближении к экрану. Развивается восходящий поток в окрестности оси симметрии, связанный с возникновением мощного вторичного вихря обратного знака. К моменту, показанному на рис. 33(12), первичный вихрь практически исчезает вследствие вязкой диссипации. Аналогичные результаты получены в эксперименте [47].

## 30. Моделирование волнового ветродвигателя

Рассматривается одна из схем технического устройства, называемого «волновой ветродвигатель» [48]. Основным элементом этого устройства является ветроприемная поверхность (в данном случае –недеформируемая плоская пластина) с наложенными на нее кинематическими связями. Связи образованы системой стержней и шарнирных соединений, показанных на рис.34. Отрезки OC, OD, ED, EF и CF – жесткие стержни, кружками обозначены шарнирные соединения, жирным отрезком – изображена ветроприемная поверхность; ***U*** – скорость потока среды, ***S*** и ***T*** – реакции связей в стержнях, O – центр вращения ротора. Ветроприемная поверхность жестко прикреплена к стержню CF под углом 30 градусов.

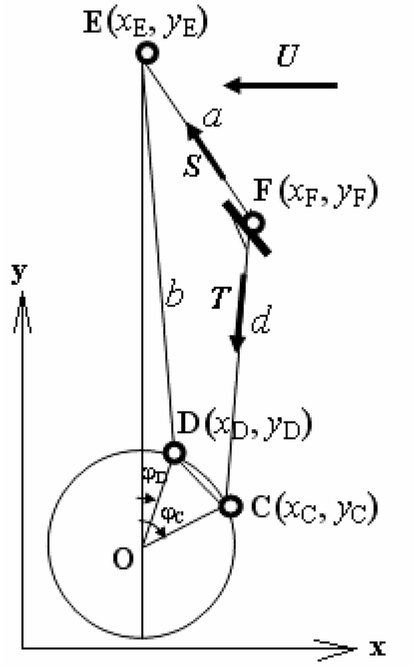



Рис. 34. Кинематическая схема волнового ветродвигателя

Под действием горизонтального ветрового потока и наложенных связей пластина совершает возвратно-поступательные и угловые колебания около среднего положения, показанного на рисунке. В результате массивный ротор О начинает непрерывно вращаться.

Кинематика системы описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
x_D &= \sin\varphi_D \\
y_D &= \cos\varphi_D \\
x_C &= \sin\varphi_C \\
y_C &= \cos\varphi_C \\
x_E &= 0 \\
y_E &= y_D + \sqrt{ED^2 - x_D{}^2} \\
x_F^2 + \left(y_F - y_E\right)^2 &= EF^2 \\
\left(x_F - x_C\right)^2 + \left(y_F - y_C\right)^2 &= CF^2
\end{aligned}
\qquad (30.1)
$$

Направление отсчета указанных на схеме углов – по часовой стрелке от вертикальной оси.

Из (30.1) имеем

$$x_C\left(2x_F - x_C\right) + \left(-y_E + y_C\right)\left(2y_F - y_E - y_C\right)^2 = CF^2 - EF^2$$

$$y_F = kx_F + h, \quad k = \frac{x_C}{\left(y_E - y_C\right)}, \quad h = \frac{y_E^2 - 1 + CF^2 - EF^2}{2\left(y_E - y_C\right)};$$

$$Ax_F^2 + 2Bx_F + C = 0,$$

$$A = k^2 + 1, \qquad B = k(h - y_E), \qquad C = (h - y_E)^2 - EF^2, \qquad (30.2)$$

Решение квадратного уравнения (30.2)

$$x_F = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

$$y_F = \frac{-Bk + hA + k\sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{y_E k^2 + h + k\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

определяет угол отклонения ветроприемной пластины от вертикальной оси

$$\alpha = \arctan\frac{y_F - y_C}{x_F - x_C} + \frac{\pi}{6}$$

Таким образом, система имеет одну степень свободы, определяемую углом поворота ротора.

Далее ограничимся частным случаем устройства, когда шарнир E неподвижен, точка D жестко закреплена на линии OE, а точка C может свободно скользить по окружности, рис.34.

Запишем уравнения динамической системы для случая, когда можно пренебречь массой стержней и моментом инерции пластины.

Уравнение момента для ротора

$$I_r\ddot{\varphi}_C\mathbf{e}_z = \mathbf{R}_C \times \frac{\mathbf{CF}}{|\mathbf{CF}|}T + \frac{1 - x_C x_F - y_C y_F}{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2}\mathbf{M}_a$$

Уравнения импульса для пластины

$$m\ddot{x}_F(\ddot{\varphi}_C) = F_{ax} + \frac{x_C - x_F}{\sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2}}T +$$

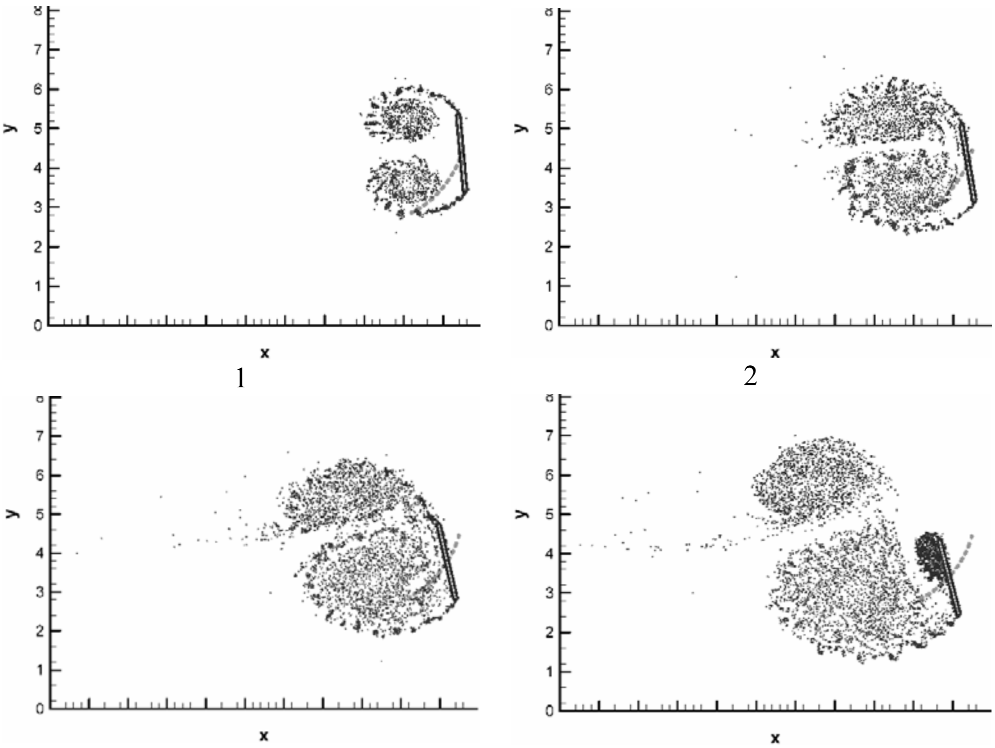
$$+\frac{x_E - x_F}{\sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}}S$$

$$m\ddot{y}_F(\ddot{\varphi}_C) = F_{ay} + \frac{y_C - y_F}{\sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2}}T +$$

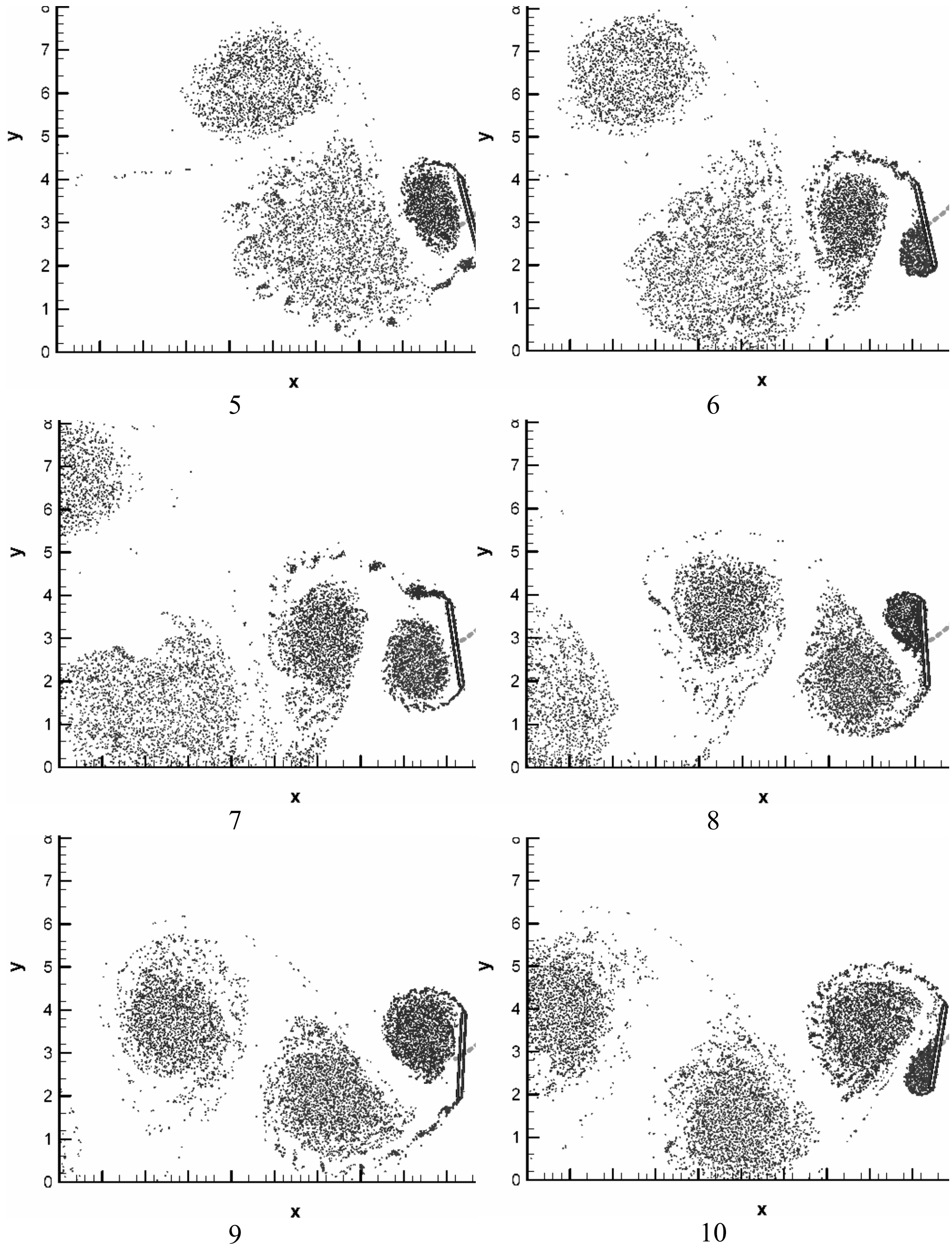
$$+\frac{y_E - y_F}{\sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}}S$$

Дифференцируя уравнения кинематических связей (30.1)-(30.2), можно линейно выразить $\ddot{x}_F$ и $\ddot{y}_F$ через $\ddot{\varphi}_C$. Полученную динамическую систему дополняем уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости и решаем в сопряженной «вихревой» постановке. Сопротивление вращению ротора полагаем равным нулю, т.е. рассматриваем режим холостого хода. Численное решение строится методом ВВД. Результаты представляются в безразмерном виде (нормировка выбрана таким образом, что скорость потока $U = 1$, полуширина пластины $L = 1$, плотность среды $\rho = 1$).

На рис. 35 показана эволюция вихревой картины обтекания ветроприемной поверхности при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^4$. Изображены вихревые картины для 14 последовательных моментов времени.




1 2 3 4


y
x
5
6
7
8
9
10

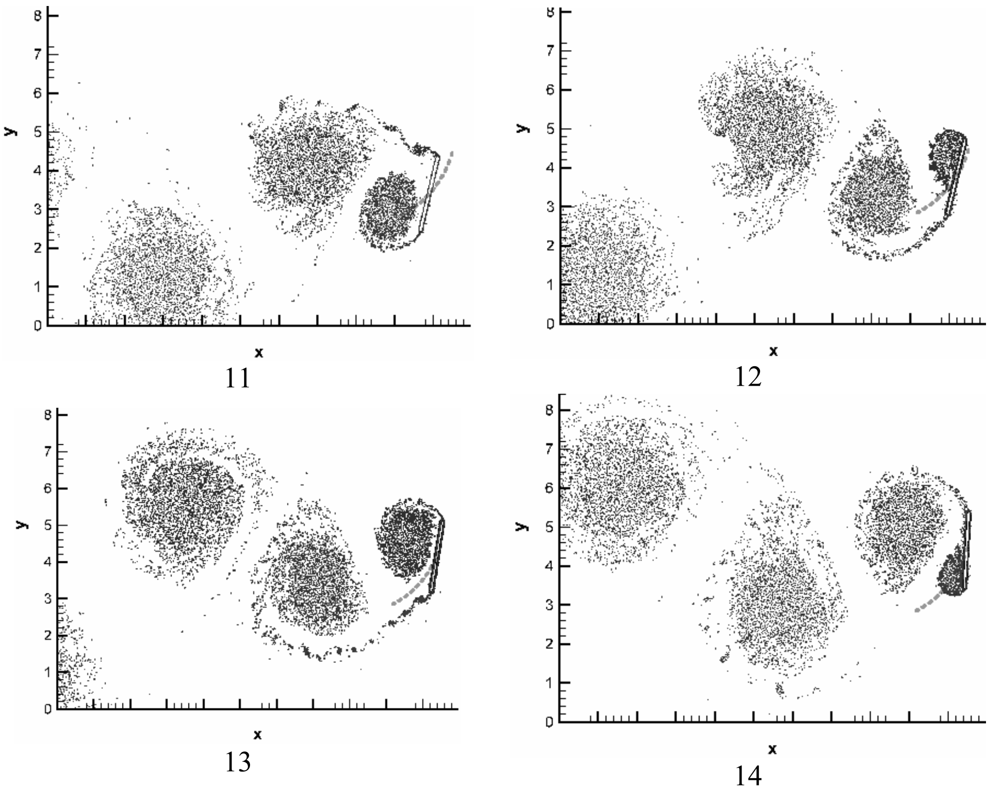



Рис. 35. Эволюция вихревой картины обтекания ветроприемной поверхности, поток – справа налево, штрихи – траектория средней точки пластины, точки – центры вихревых доменов

За период одного оборота ротора наблюдается три квазипериода колебания подъемной силы $F_y$, рис. 36, что, по-видимому, объясняется попеременным сходом крупных вихрей то с одной, то с другой кромки пластины. При этом на протяжении первого полупериода, когда пластина движется вниз, преобладает отрицательная подъемная сила, способствующая движению вниз, а на протяжении второго полупериода, когда пластина движется вверх, преобладает положительная подъемная сила, способствующая движению вверх. Также наблюдаются колебания момента $M_z$ с той же частотой, что и у подъемной силы, с небольшим преобладанием отрицательного момента на протяжении первого полупериода и положительного момента на протяжении второго полупериода. Причины этого эффекта можно понять, анализируя данные на рис.35 и рис.37.

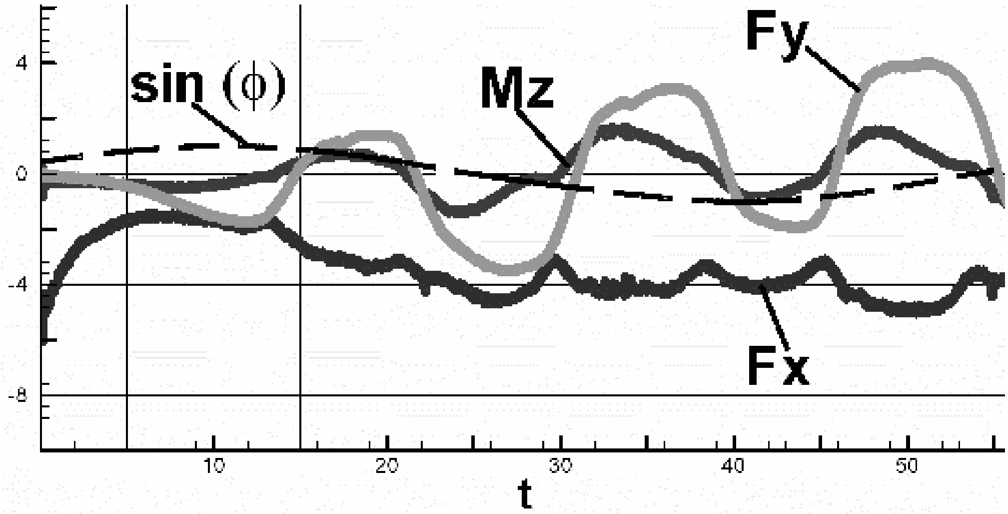



Рис. 36. Расчетная зависимость от времени безразмерных аэродинамических сил и момента, действующих на ветроприемную поверхность; штрихами показан синус угла поворота ротора

В силу заданных связей, на протяжении первого полупериода пластина наклонена нижней кромкой навстречу потоку (угол наклона больше, чем $\pi/2$), а на протяжении большей части второго полупериода пластина наклонена верхней кромкой навстречу потоку (угол наклона меньше, чем $\pi/2$), рис.37. А когда кромка наклонена навстречу потоку, за ней формируются более мощные вихри и, следовательно, образуется более интенсивное разрежение (рис. 35).

Этим объясняется изменение знаков подъемной силы и момента, поддерживающих вращение.

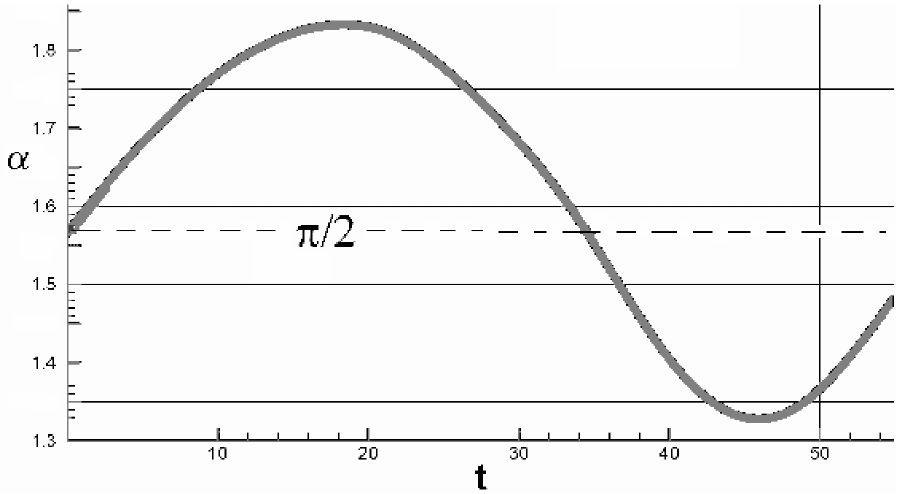



Рис. 37. Изменение угла наклона пластины с течением времени.

*Замечание.* Проведение расчетов в рамках данной полной постановки сопряженной задачи весьма трудоемкое дело, поэтому для массовых параметрических исследований устройства целесообразно применять упрощенные способы анализа, основанные на феноменологических моделях (например, [12]) аэродинамического взаимодействия ветроприемной поверхности с потоком среды. При этом основная роль численных решений, получаемых в полной сопряженной постановке задачи, состоит в получении опорных данных для отбора и верификации подходящей феноменологической модели аэродинамического взаимодействия. На основе выбранной и обоснованной модели можно эффективно проводить массовые параметрические исследования по оптимизации конструкции устройства. После чего для оптимизированных вариантов устройства можно опять провести детальные исследования в полной сопряженной постановке задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000.

2. Степанов Г.Ю. Об основных модельных представлениях механики жидкости и газа в теории крыла.// Некоторые вопросы механики сплошной среды. Сб. тематич. статей Ин-та механики МГУ под ред. С.С. Григоряна. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.

3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М.: Наука, 1965.

4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.

5. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, Ленингр. отд., 1947.

6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: ГИТТЛ, 1955.

7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

8. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. т.VI. М.: Наука, 1986.

10. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т2. М.: Наука, 1976.

11. Гоман М.Г. Моделирование динамического и статического гистерезиса. В кн.: Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука, Физматлит, 1998.

12. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О возможности учета инерционных свойств потока среды, воздействующей на тело. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, 2000.

13. Сарпкайя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение, серия А, 1989. №10.

14.Дынникова Г.Я. Аналог интеграла Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. М.: Изд-во ЦАГИ, 1998. Препринт № 117.

15.Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1.

16.Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. №5.

17.Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой // В сб. Парашюты и проницаемые тела. М.: Изд-во МГУ, 1987.

18. Гоман О.Г., Карплюк В.И., Ништ М.И., Судаков А.Г. Численное моделирование осесимметричных отрывных течений несжимаемой жидкости/ Под ред. М.И. Ништа. – М.: Машиностроение, 1993.

19.Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model// Computers and Fluids, 1991. V. 19. № ¾.

20.Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 1.

21.Белов И.А., Исаев С.А. Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение. 1989.

22.Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева// М.: МГУ, 2003.

23.Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.

24.Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физ-мат. лит., 1995.

25.Гиневский А.С., Погребная Т.В., Шипилов С.Д. Моделирование натекания кольцевого вихревого жгута на плоский твердый экран. Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 1. С.55-57.

26.Barba L.A., Leonard A., Allen C.B. Advances in viscous vortex methods – meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 47. №5.

27.Исванд Х. Моделирование вихревого слоя конечной толщины методом дискретных вихрей // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 1.

28.Андронов П.Р., Герценштейн С.Я., Дынникова Г.Я., Исванд Х. О влиянии толщины трехмерного вихревого слоя на его устойчивость // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. “Мат. моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”. 2003. № 590. Вып. 1.

29.Гувернюк С.В. Новые возможности вычислительных вихревых методов при моделировании нестационарных двумерных течений вязкой жидкости // Материалы межд. конф. Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность. Изд-во Моск. ун-та. 2004.

30.Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt 4.

31.Shankar S., van Dommelen L. A new diffusion procedure for vortex methods // J. Comput. Phys. 1996. V. 127. № 1.

32.Takeda K., Tutty O.R., Fitt, A.D. A comparison of four viscous models for the discrette vortex method // American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1997.

33.Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В.. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989.

34.Дынникова Г.Я. Силы, действующие на тело, при нестационарном вихревом отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2.

35.Дынникова Г.Я. Использование притяжения и отталкивания вихрей для моделирования вязкости в течениях несжимаемой жидкости. //Труды XI международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Харьков-Херсон, 2003.

36.Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.

37.Кулаго А.Е., Шкадова В.П., Шкадов В.Я., Зеленов И.В. Неустойчивость и автоколебания потока при обтекании цилиндров квадратного сечения // Труды ИЭИ. 2004. Вып.4.

38.Шкадова В.П. Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости //М.: МГУ, Институт механики, 1979. Отчет №2299.

39.Мазо А.Б. Новые граничные условия для задачи переноса завихренности // Материалы Четвертой Международной школы-семинара «Модели и методы аэродинамики». М.: МЦНМО, 2004.

40.Panda J., Zaman K.B.M.Q. Experimental investigation of the flow field of an oscillating airfoil and estimation of lift from wake surveys // J. Fluid Mech. 1994. V. 265.

41.McAlister K.W., Pucci S.L., Mc Croskey W.L., Carr L.W. An experimental study of dynamic stall in advanced airfoil sections. V.2. Pressure and force data // NASA TM 84245. 1982.

42.Баранников С.Н. Экспериментальная идентификация нестационарных вихревых структур при обтекании авторотирующего оперенного цилиндра // В сб.: Труды конф.-конк. мол. уч. / Под ред. Г.Г. Черного, В.А. Самсонова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.

43.Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я., Андронов П.Р., Баранников С.Н., Гирча А.И., Григоренко Д.А., Зубков А.Ф. Моделирование нестационарных нагрузок при движении тел в вязкой жидкости. / М.: МГУ, Институт механики, 2005. Отчет № 4775.

44.Апаринов В.А., Ништ М.И., Стрелков Г.Н. Математическое моделирование падения в жидкости пластины бесконечного размаха // Изв. АН СССР. МТТ, 1989. № 3.

45.Баранов П.А., Гувернюк С.В., Зубин М.А., Исаев С.А. Численное и физическое моделирование циркуляционного течения в вихревой ячейке на стенке плоскопараллельного канала // МЖГ. 2000. №5.

46.Березенцев М.Ю., Гувернюк С.В., Зубин М.А., Зубков А.Ф., Мосин А.Ф. Визуализация дозвукового обтекания цилиндрических тел с вихревыми ячейками // АМГД, 2001. № 1.

47.Naguib A.M., Koochessfahani M.M. // Phys. Fluids. 2004. V. 16. № 7.

48.Стрекалов С.Д. Авторское свидетельство № 1240949 от 30.06.86. Ветродвигатель. Бюл. изобр. №24.

49.Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях. Полн. собр. соч. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит., 1949. Т. 4.

50.Жуковский Н.Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси (статья первая и статья вторая). Полн. собр. соч., М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит. 1949. Т. 4.

51.Igarashi T. Characteristics of the flow around a square prism // Bull. JSME. 84-27-231.

Научное издание

Андронов Петр Роальдович,
Гувернюк Сергей Владимирович,
Дынникова Галина Яковлевна

# ВИХРЕВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Технический редактор И.В. Топорнина

Подписано в печать 23.05.2006 Печать офсетная. Бумага офсетная №1.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 11,5 п.л. Тираж 150 экз.

Ордена «Знак Почета»
Издательство Московского университета
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова